**Вычислительные технологии** **Том 5, № 6, 2000**

# МЕТОД ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ КОНВЕКТИВНЫХ ТЕЧЕНИЙ

И. Б. Палымский
*Новосибирский военный институт, Россия*
e-mail: nina@nsc.ru

A spectrum method for the calculation of stochastic, convective currents of incompressible fluid in a rectangular domain that appear when heated from below under supercritical condition equal to 1000 is suggested. The spectral characteristics of the differential problem and numerical method are compared.

В настоящей работе описан новый вариант спектрального метода расчета конвективных течений вязкой несжимаемой жидкости в прямоугольной области при подогреве снизу. Горизонтальные границы области предполагаются изотермическими и свободными от касательных напряжений, а на вертикальных границах задан линейный профиль температуры и “мягкие” граничные условия для завихренности $\omega$ и функции тока $\varphi$.

Записанная в отклонениях от равновесного решения исходная система уравнений после обезразмеривания имеет вид [1]

$$\omega_t + \frac{1}{\mathrm{Pr}}(\varphi_y\omega_x - \varphi_x\omega_y) = \triangle\omega + \mathrm{Ra}Q_x,$$

$$\triangle\varphi = -\omega,$$

$$Q_t + \frac{1}{\mathrm{Pr}}(\varphi_y Q_x - \varphi_x Q_y) = \frac{1}{\mathrm{Pr}}\triangle Q - \frac{1}{\mathrm{Pr}}\varphi_x, \qquad (1)$$

где $\varphi$ — функция тока; $\omega$ — вихрь; $Q$ — отклонение температуры от равновесного профиля (полная температура равна $1-y+Q$); $\triangle f = f_{xx}+f_{yy}$ — оператор Лапласа; $\mathrm{Ra} = \dfrac{g\beta H^3 dQ}{\chi\nu}$ — число Рэлея; $\mathrm{Pr} = \nu/\chi$ — число Прандтля; $g$ — ускорение силы тяжести; $\beta, \nu, \chi$ — коэффициенты теплового расширения, кинематической вязкости и температуропроводности соответственно; $H$ — толщина слоя и $dQ$ — разность температур на горизонтальных границах.

Система (1) решается в области $\Pi = \{(x,y)|0 \le x \le l, 0 \le y \le 1\}$ с условиями $\varphi = \omega = Q = 0$ при $y = 0, 1$, $0 \le x \le l$ на горизонтальных границах и $\varphi_x = \omega_x = Q = 0$ при $x = 0, l$, $0 \le y \le 1$ на вертикальных границах.

Подобные задачи рассматривались многими авторами [1–5]. Как правило, система (1) решалась с периодическими граничными условиями с помощью спектрального метода. Хорошо исследованы режимы конвективных течений при надкритичностях до $r = \mathrm{Ra}/\mathrm{Ra}_{\mathrm{cr}} \le$

300, $\mathrm{Ra_{cr}} = 657.5$ [1]. Вплоть до $r = 1000$ исследовались симметричные решения [2]. Установлено, что при увеличении надкритичности ($r > 1$) нулевое решение становится неустойчивым и возникают вторичное стационарное решение, затем периодическое и двухчастотное. Однако по поводу существования хаотических (сложных) режимов конвективных течений имеются самые противоречивые точки зрения. С одной стороны, в итоговой работе [1] утверждается, что в двумерной задаче о конвекции нет решений, отличных от стационарных, периодических и двухчастотных. С другой стороны, хаотические режимы течений обнаружены в близкой задаче о неустойчивости плоского вращающегося слоя жидкости при подогреве снизу и малом числе Прандтля ($\mathrm{Pr} = 0.025$) [3]. И, наконец, в работе [5] сообщается, что при надкритичности $r \geq 157$ и $\mathrm{Pr} = 20$ найдена область хаотических режимов.

Вопрос о существовании хаотических режимов конвективных течений представляется крайне важным ввиду его прямой связи с моделированием турбулентных течений путем прямого численного решения уравнений гидродинамики без использования полуэмпирических соотношений. Для поиска ответа на него, на наш взгляд, наиболее предпочтительно исследовать область умеренных и высоких чисел Рэлея ($\mathrm{Ra} \geq 1000\mathrm{Ra_{cr}}$) и небольших чисел Прандтля ($\mathrm{Pr} \sim 1$).

Целью данной работы является создание метода численного расчета конвективных течений, работоспособного при $\mathrm{Ra} \geq 1000\mathrm{Ra_{cr}}$ и произвольных числах Прандтля.

Искомые величины $\omega, \varphi$ и $Q$ запишем в виде

$$\omega(t,x,y) = \sum_{k=0}^{N}\sum_{m=1}^{M-1} \omega_{km}(t)\rho_k \cos(\alpha k x)\sin(\pi m y),$$

$$\varphi(t,x,y) = \sum_{k=0}^{N}\sum_{m=1}^{M-1} \frac{\omega_{km}(t)}{\alpha^2k^2+\pi^2m^2}\rho_k \cos(\alpha k x)\sin(\pi m y),$$

$$Q(t,x,y) = \sum_{k=1}^{N-1}\sum_{m=1}^{M-1} Q_{km}(t)\sin(\alpha k x)\sin(\pi m y),$$

где $\alpha = \pi/l$ — волновое число; $\rho_k = \begin{cases} 0.5 \text{ при } k = 0, N, \\ 1 \text{ при } 1 \leq k \leq N-1 \end{cases}$. Следуя общей идеологии метода расщепления, переход от слоя $n$ к слою $n+1$ по времени производится в два этапа.

Сначала учтем линейное развитие возмущений без взаимодействия гармоник.

Этап 1.

$$\omega_t = \frac{1}{2}\triangle\omega + \mathrm{Ra}Q_x, \quad \triangle\varphi = -\omega, \quad Q_t = \frac{1}{2\mathrm{Pr}}\triangle Q - \frac{1}{\mathrm{Pr}}\varphi_x. \tag{2}$$

Для эффективного решения уравнений нелинейного конвективного переноса для завихренности $\omega$ и температуры $Q$ половина вязких членов учтена на втором этапе расчета.

После подстановки разложений искомых величин вместо (2) получим систему из двух обыкновенных дифференциальных уравнений для двух неизвестных амплитуд $\omega_{km}$ и $Q_{km}$ при $k = 0, 1, \ldots, N$ и $m = 1, 2, \ldots, M-1$:

$$\dot{\omega}_{km} = -\frac{S}{2}\omega_{km} + \mathrm{Ra}\alpha k Q_{km}, \quad \dot{Q}_{km} = -\frac{S}{2\mathrm{Pr}}Q_{km} + \frac{\omega_{km}\alpha k}{\mathrm{Pr}S}, \quad S = \alpha^2k^2 + \pi^2m^2. \tag{3}$$

Система обыкновенных дифференциальных уравнений (3) решается аналитически, без применения каких-либо аппроксимаций по времени. Приведенные ниже формулы выведены программой аналитических вычислений Maple V Release 4:

$$\omega'_{km} = \frac{-F3\mathrm{RaPr}SQ^n_{km} + (F1+F2)\omega^n_{km}}{2S1}, \quad Q'_{km} = \frac{-F3\omega^n_{km} + (F1-F2)Q^n_{km}}{2S1},$$

где $S1 = \sqrt{S^4(1-\mathrm{Pr})^2 + 16S\mathrm{PrRa}\alpha^2k^2}$;

$$F1 = (S2+S3)S1; \quad F2 = S^2(\mathrm{Pr}-1)(S2-S3); \quad F3 = 4\alpha k(S2-S3);$$

$$S2 = \exp\frac{-\tau(S^2(1+\mathrm{Pr})+S1)}{4\mathrm{Pr}S}; \quad S3 = \exp\frac{-\tau(S^2(1+\mathrm{Pr})-S1)}{4\mathrm{Pr}S}.$$

Здесь и далее $\tau$ — шаг по времени; штрих указывает на значения искомой величины после 1-го этапа расщепления.

На втором этапе учитывается нелинейный конвективный перенос, т. е. взаимодействие гармоник. В этом случае применена конечно-разностная схема переменных направлений, раннее успешно использованная для расчета турбулентных конвективных течений в прямоугольной области при подогреве сбоку [6].

Уравнения переноса для $\omega$ и $Q$ решаются в два дробных шага, на каждом из них применяется схема А. А. Самарского для аппроксимации одномерных операторов на верхнем слое по времени и центральными разностями на нижнем.

Этап 2.

$$\omega_t + \frac{1}{\mathrm{Pr}}(\varphi_y\omega_x - \varphi_x\omega_y) = \frac{1}{2}\triangle\omega, \quad Q_t + \frac{1}{\mathrm{Pr}}(\varphi_y Q_x - \varphi_x Q_y) = \frac{1}{2\mathrm{Pr}}\triangle Q\ . \tag{4}$$

Для первого уравнения системы (4) запишем первый дробный шаг

$$\frac{\overline{\omega}_{ij} - \omega'_{ij}}{\tau/2} + A = \frac{1}{2\left(1+\dfrac{|\varphi_y|H1}{\mathrm{Pr}}\right)}\overline{\omega}_{ijx\overline{x}} + \frac{1}{2}\omega'_{ijy\overline{y}},$$

$$A = \frac{1}{\mathrm{Pr}}\left(\frac{\varphi_y+|\varphi_y|}{2}\overline{\omega}_{ij\overline{x}} + \frac{\varphi_y-|\varphi_y|}{2}\overline{\omega}_{ijx}\right) - \frac{1}{\mathrm{Pr}}\varphi_x\omega'_{ijy^*}, \tag{5}$$

где

$$f_{ij\overline{x}} = \frac{f_{ij}-f_{i-1,j}}{H1}, \quad f_{ijx} = \frac{f_{i+1,j}-fi,j}{H1},$$

$$f_{ijx^*} = \frac{f_{i+1,j}-f_{i-1,j}}{2H1}, \quad f_{ijx\overline{x}} = \frac{f_{i+1,j}-2f_{ij}+f_{i-1,j}}{H1^2},$$

и второй дробный шаг

$$\frac{\omega^{n+1}_{ij} - \overline{\omega}_{ij}}{\tau/2} + A = \frac{1}{2}\overline{\omega}_{ijx\overline{x}} + \frac{1}{2\left(1+\dfrac{|\varphi_x|H2}{\mathrm{Pr}}\right)}\omega^{n+1}_{ijy\overline{y}},$$

$$A = \frac{1}{\mathrm{Pr}}\varphi_y\overline{\omega}_{ijx^*} - \frac{1}{\mathrm{Pr}}\left(\frac{\varphi_x+|\varphi_x|}{2}\omega^{n+1}_{ij\overline{y}} + \frac{\varphi_x-|\varphi_x|}{2}\omega^{n+1}_{ijy}\right). \tag{6}$$

Здесь $H1 = 1/N$ и $H2 = 1/M$ — шаги разностной сетки по $x$ и $y$. Если $H1$ и $H2$ достаточно малы $\left(\dfrac{|\varphi_x|H2}{\mathrm{Pr}} \ll 1,\ \dfrac{|\varphi_y|H1}{\mathrm{Pr}} \ll 1\right)$, то схемы (5) и (6) имеют второй порядок аппроксимации по пространству.

Коэффициенты $\varphi_x$ и $\varphi_y$ в разностных уравнениях (5), (6) определялись двумя способами:

$$\varphi_x = \varphi_x', \quad \varphi_y = \varphi_y'$$

или

$$\varphi_x = \frac{\varphi_x^{n+1} + \varphi_x^n}{2}, \quad \varphi_y = \frac{\varphi_y^{n+1} + \varphi_y^n}{2}.$$

Реализация второго способа потребовала введения итерационного процесса. Конечно-разностные уравнения (5) замыкаются соотношениями

$$-\overline{\omega}_{2j} + 4\overline{\omega}_{1j} - 3\overline{\omega}_{0j} = 0 \ \text{ при } \ i = 0, \quad -\overline{\omega}_{N-2,j} + 4\overline{\omega}_{N-1,j} - 3\overline{\omega}_{Nj} = 0 \quad \text{при} \ \ i = N. \qquad (7)$$

Разностные уравнения (5), (6) решаются методом прогонки, а для реализации граничных условий (7) организуется внутренний итерационный процесс:

$$\omega_{1j}^{s+1} - \omega_{0j}^{s+1} + \frac{\omega_{0j}^s - \omega_{2j}^s}{4} = 0 \quad \text{при} \ \ i = 0,$$

$$\omega_{Nj}^{s+1} - \omega_{N-1,j}^{s+1} + \frac{\omega_{N-2,j}^s - \omega_{N,j}^s}{4} = 0 \quad \text{при} \ \ i = N.$$

Конечно-разностные уравнения для расчета $Q^{n+1}$ полностью аналогичны уравнениям (5), (6), только на обоих дробных шагах граничные условия для $\overline{Q}$ и $Q^{n+1}$ однородные.

Пересчет искомых полей из спектрального пространства в физическое и обратно производится с помощью стандартных программ быстрого преобразования Фурье по косинусам и синусам.

Предложенный алгоритм является абсолютно устойчивым. В практических расчетах все ограничения на шаги $\tau$, $H1$ и $H2$ связаны с требуемой точностью вычислений. Численный метод имеет первый порядок аппроксимации по времени и второй — по пространственным переменным.

Чтобы показать, что предлагаемым численным методом можно рассчитывать турбулентные течения, воспользуемся методикой, разработанной для анализа численного метода, которым рассчитывались турбулентные течения в плоском канале и трубе кольцевого сечения [7]. Аналогичный подход использовался также в работе [8]. По этой методике, описанной в данных работах, сравнивались инкрименты линейного развития возмущений в дифференциальной задаче и численном методе. По близости полученных спектральных характеристик можно судить о точности численного метода.

Итак, рассматривается линейный аналог системы (1), в котором нелинейные члены отбрасываются, и решение ищется в виде

$$\omega(t, x, y) = a \exp\left(-\lambda t + i\alpha k x\right) \sin\left(\pi m y\right),$$

$$\varphi(t, x, y) = \frac{a}{S} \exp\left(-\lambda t + i\alpha k x\right) \sin\left(\pi m y\right),$$

$$Q(t, x, y) = b \exp\left(-\lambda t + i\alpha k x\right) \sin\left(\pi m y\right),$$

где, как и раньше, $S = \alpha^2 k^2 + \pi^2 m^2$, $a$ и $b$ — постоянные амплитуды; инкримент $\lambda$ находится из задачи на собственные значения.

Подобные рассмотрения проводятся и для численного метода.

Аналитические выражения для спектральных характеристик можно получить при $\mathrm{Pr}=1$:
для дифференциальной задачи

$$\lambda_d = S - k\alpha\sqrt{\frac{\mathrm{Ra}}{S}},$$

для численного метода

$$\lambda_{\mathrm{sp}} = \frac{S}{2} - k\alpha\sqrt{\frac{\mathrm{Ra}}{S}} - \frac{1}{\tau}\ln\frac{1-(\tau/4)a+(\tau^2/16)a1a2}{1+(\tau/4)a+(\tau^2/16)a1a2},$$

где

$$a1 = \frac{4}{H1^2}\sin^2\frac{\alpha k H1}{2}; \quad a2 = \frac{4}{H2^2}\sin^2\frac{\pi m H2}{2}; \quad a = a1 + a2.$$

Можно показать, что

$$\lambda_{\mathrm{sp}} = S - k\alpha\sqrt{\frac{\mathrm{Ra}}{S}} + \frac{\tau^2}{96}(\alpha^6k^6+\pi^6m^6) - \frac{H1^2}{24}\alpha^4k^4 - \frac{H2^2}{24}\pi^4m^4\ ,$$

$$\lambda_{\mathrm{sp}} = \lambda_d + \frac{\tau^2}{96}(\alpha^6k^6+\pi^6m^6) - \frac{H1^2}{24}\alpha^4k^4 - \frac{H2^2}{24}\pi^4m^4\ .$$

Видно, что $\lambda_{\mathrm{sp}} - \lambda_d = O(\tau^2) + O(H^2)$ и коэффициенты при $\tau^2$, $H1^2$ и $H2^2$ зависят только от $\alpha$, $\pi$, $k$ и $m$ и не зависят от чисел Рэлея и Прандтля.

Для дифференциальной задачи при $\mathrm{Pr}\neq 1$:

$$\lambda_d = \frac{\mathrm{Pr}+1}{2\mathrm{Pr}}S - \sqrt{\left(\frac{\mathrm{Pr}-1}{2\mathrm{Pr}}\right)^2 S^2 + \frac{\mathrm{Ra}\alpha^2k^2}{\mathrm{Pr}S}},$$

для численного метода

$$\lambda_{\mathrm{sp}} = -\frac{1}{\tau}\ln x,$$

где $x$ — наибольшее собственное значение матрицы

$$\begin{pmatrix} C1\dfrac{F1+F2}{2S1} & -C1\dfrac{F3\mathrm{Ra}\mathrm{Pr}S}{2S1} \\[2ex] -C2\dfrac{F3}{2S1} & C2\dfrac{F1-F2}{2S1} \end{pmatrix}.$$

Здесь $C1 = \dfrac{1-(\tau/4)a+(\tau^2/16)a1a2}{1+(\tau/4)a+(\tau^2/16)a1a2}$; $C2 = \dfrac{1-(\tau/4\mathrm{Pr})a+(\tau^2/16\mathrm{Pr}^2)a1a2}{1+(\tau/4\mathrm{Pr})a+(\tau^2/16\mathrm{Pr}^2)a1a2}$, а величины $S$, $S1$ и $F1$, $F2$, $F3$ определены выше.

Используя эти аналитические формулы для $\lambda_{\mathrm{sp}}$ при $\mathrm{Pr}\neq 1$ с помощью программы Maple V Release 4 и удерживая в степенных разложениях первые шесть членов, получим

$$\lambda_{\mathrm{sp}} = \lambda_d + O(\tau^2) + O(H^2).$$

Рассмотрим также спектральные характеристики конечно-разностного численного метода. Для простоты ограничимся изучением аппроксимации по пространству, все производные по $x$ и $y$ заменим соответствующими конечно-разностными выражениями, оставляя производные по времени дифференциальными. Тогда конечно-разностный метод, использованный в [6] для расчета турбулентного течения в квадратной области при подогреве сбоку, заменяется на систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\omega_t = \triangle_h \omega + \mathrm{Ra} Q_{x^*}, \quad \triangle_h \varphi = -\omega, \quad Q_t = \frac{1}{\mathrm{Pr}} \triangle_h Q - \frac{1}{\mathrm{Pr}} \varphi_{x^*},$$

где $\triangle_h f = f_{x\overline{x}} + f y\overline{y}$ — разностный оператор Лапласа; $f_{x^*} = \dfrac{f_{i+1,j} - f_{i-1,j}}{2H1}$. Отсюда

$$\lambda_r = \frac{\mathrm{Pr}+1}{2\mathrm{Pr}} a - \sqrt{\left(\frac{\mathrm{Pr}-1}{2\mathrm{Pr}}\right)^2 a^2 + \frac{\mathrm{Ra} b^2}{\mathrm{Pr} a}},$$

где $b = \dfrac{\sin(\alpha k H1)}{H1}$; $a = a1 + a2$.

На рис. 1 представлены спектральные кривые, соответствующие первой моде $m = 1$ как функции от $k\alpha$ при $\mathrm{Ra} = 1000\mathrm{Ra}_{\mathrm{cr}}$, $\mathrm{Pr} = 2$, $\alpha = 1$, $N = 64$, $M = 16$, $\tau = 4 \cdot 10^{-5}$ (сплошная линия — дифференциальная задача, штриховая — спектральный метод, значки — конечно-разностный метод). Видно, что спектральный метод более точен в области волновых чисел, отвечающих нарастающим гармоникам ($\lambda < 0$).

На рис. 2 изображены среднеквадратичные нормированные значения величин $\lambda_d - \lambda_{\mathrm{sp}}$ (сплошная линия) и $\lambda_d - \lambda_r$ (штриховая), вычисленные по нарастающим гармоникам. Эти величины представлены как функции числа Прандтля при $10^{-2} \leq 10^2$ (*а*) и как функции надкритичности $r = \mathrm{Ra}/\mathrm{Ra}_{\mathrm{cr}}$ (*б*).

Видно, что спектральные характеристики, полученные предлагаемым численным методом, более близки к характеристикам дифференциальной задачи и что спектральный метод сохраняет свою работоспособность при бóльших значениях надкритичности.

Исследуем вопрос о правильности отражения на волновой плоскости границы области неустойчивости. Покажем, что для дифференциальной задачи эта кривая в полярных координатах задается уравнением $\overline{\rho} = \cos^{0.5}\gamma$, где $0 \leq \gamma \leq \pi/2$; $\overline{\rho} = \rho/\mathrm{Ra}^{0.25}$.

Кривая, ограничивающая область неустойчивости для дифференциальной задачи, и рассчитанные численно аналогичные ей кривые для спектрального и конечно-разностного численных методов ($N = 64$, $M = 16$, $\tau = 4 \cdot 10^{-5}$, $\mathrm{Ra} = 1000\mathrm{Ra}_{\mathrm{cr}}$, $\mathrm{Pr} = 1$), приведены на рис. 3, где сплошная линия соответствует дифференциальной задаче, штриховая — конечно-разностному численному методу, значки — спектральному численному методу. Видно, что спектральный метод точнее передает положение границы области неустойчивости на волновой плоскости.

Для проверки правильности составления программы произведено сравнение результатов расчета с результатами расчета, полученными другим, "чисто" спектральным методом при $N = 64, M = 16$, $\alpha = 1, \mathrm{Pr} = 2, \mathrm{Ra} = 2\mathrm{Ra}_{\mathrm{cr}}$. Среднеквадратичные отклонения полей завихренности, температуры, рассчитываемых средних величин на полученном стационарном решении не превысили 1 %. Максимальный инкримент нарастания возмущений, вычисленный из соотношения

$$\int \omega^2 dx dy = a \exp(2\lambda_{\mathrm{sp}} t),$$

отличался от теоретического значения на 1.4 %.

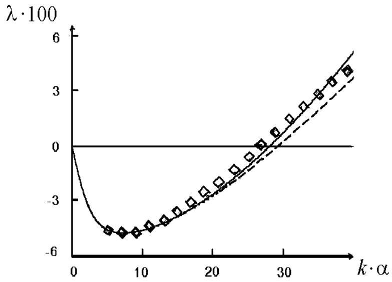


Рис. 1.

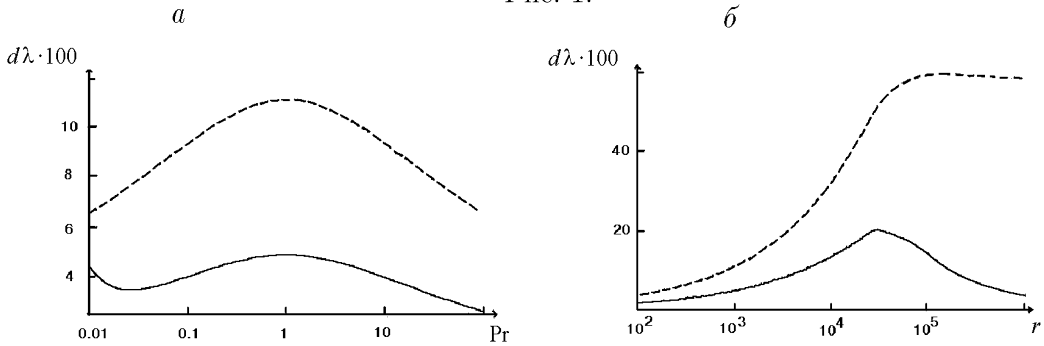


Рис. 2.

Для проверки порядка аппроксимации при $\mathrm{Ra} = 1, \alpha = \pi$ и $\mathrm{Pr} = 2$ рассчитывалось стационарное решение

$$\omega(x,y) = \cos(\pi x)\sin(\pi y), \quad Q(x,y) = \sin(\pi x)\sin(\pi y), \quad \varphi(x,y) = \omega(x,y)/2\pi^2,$$

при этом в правую часть уравнений для $\omega$ и $Q$ системы (1) вводились соответствующие массовые силы. При различных $N, M$ и $\tau$ вычислялись среднеквадратичные нормированные отклонения полей $\omega$ и $Q$. Эти тестовые расчеты подтвердили, что предлагаемый численный метод имеет первый порядок аппроксимации по времени и второй — по пространственным переменным.

Несколько слов о выборе числа гармоник $N$ и $M$. Для создания точной картины течения необходимо (при заданном $\alpha$) учесть все нарастающие длинноволновые гармоники и достаточное число затихающих коротковолновых гармоник. Как показывает простой анализ спектральных кривых $\lambda_d$, все гармоники затихают, если $k > 29$ или $m > 6$, поэтому выбрано $N = 64$ $(0 \leq k \leq 64)$ и $M = 16$ $(0 < m < 16)$.

Описанным выше методом рассчитано стохастическое конвективное течение при $\mathrm{Ra} = 1000\mathrm{Ra}_{\mathrm{cr}}$, $\mathrm{Pr} = 2$, $\alpha = 1$. Вычислены следующие средние величины: основная интегральная

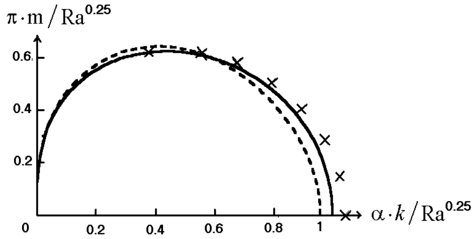


Рис. 3.

характеристика конвективного теплообмена — число Нуссельта

$$\mathrm{Nu} = \frac{\alpha}{\pi}\int_0^{\pi/\alpha} Q_y(t,x,0)dx - 1, \quad \mathrm{Nu} \approx \sum_{k=1}^{N-1}\sum_{m=1}^{M-1}(1-(-1)^k)Q_{km}\frac{m}{k} - 1;$$

интеграл по области от квадрата завихренности

$$E = \int_0^l \int_0^1 \omega^2 dxdy \approx \frac{l}{4}\sum_{k=0}^{N}\sum_{m=1}^{M-1}\rho_k\omega_{km}^2,$$

где $\rho_k = \begin{cases} 0.5 & \text{при} \quad i = 0, \\ 1 & \text{при} \quad i > 0 \end{cases}$, а также $Q_{\mathrm{sr}}$ — среднеквадратичное отклонение температуры от ее равновесного распределения; $F_{\mathrm{sr}}$ — среднеквадратичное значение функции тока; $Q_{12}$ — среднее значение амплитуды во времени.

По результатам расчетов создан видеофильм о развитии во времени функции тока $\varphi$ и температуры $Q$. Сопоставление видеофильма и графика изменения Nu во времени (рис. 4) показало, что его локальные максимумы на графике связаны с рождением и разрушением вихревых структур. Знаком $\square$ показано рождение вихревой структуры, состоящей из четырех вихрей, а знаком $\times$ — ее разрушение. Начальные перестройки течения, связанные с выделением и преимущественным развитием наиболее быстрорастущей в линейном приближении гармоники ($t \approx 0.06$) и последующим ее разрушением нелинейностью ($t \approx 0.1$), показаны знаком $\bullet$.

Изменение во времени амплитуды $Q_{12}$ представлено на рис. 5, эта гармоника вносит существенный вклад в распределение температуры.

Из тестовых расчетов видно, что все средние характеристики течения практически не изменяются при варьировании начальных данных, изменении шага по времени $\tau$, увеличении числа гармоник по $x$, а увеличение числа гармоник по $y$ приводит к изменению среднего профиля температуры в приграничных точках.

Таким образом, можно сделать следующие выводы:

1. Разработан новый вариант спектрального метода, основанный на расщеплении по виду развития возмущений.

2. Предлагаемый численный метод абсолютно устойчив и имеет первый порядок аппроксимации по времени и второй — по пространству.

3. Показано, что спектральные характеристики численного метода близки к спектральным характеристикам дифференциальной задачи. Спектральные характеристики конечно-разностного метода [6] значительно хуже аппроксимируют спектральные характеристики дифференциальной задачи.

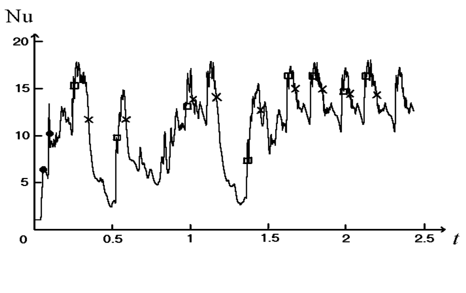


Рис. 4.

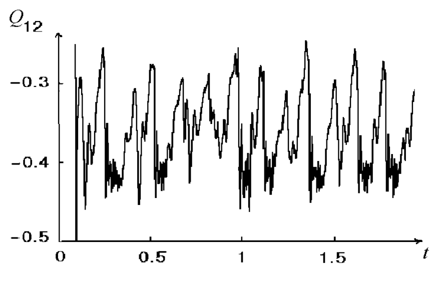


Рис. 5.

4. При $\mathrm{Ra} = 1000\mathrm{Ra}_{\mathrm{cr}}$, $\mathrm{Pr} = 2$ и $\alpha = 1$ рассчитано стохастическое конвективное течение. Средние характеристики течения и средний профиль температуры слабо зависят от начальных условий, числа гармоник по пространственным переменным и величины шага по времени.

## Список литературы


[1] Бабенко К. И., Рахманов А. И. Численное исследование двумерной конвекции. М., 1988 (Препр. / АН СССР. ИПМ; №118).

[2] Curry J. H., Herring J. R., Loncaric J., Orszag S. A. Order and disorder in two- and three-dimensional Benard convection // J. Fluid Mech. 1984. V. 147. P. 1–38.

[3] Герценштейн С. Я., Родичев Е. Б. О моделях перехода к турбулентности при конвективной неустойчивости // Моделирование в механике. 1989. Т. 3(20), №4. С. 59–65.

[4] Петровская Н. В. О применении метода Галеркина к исследованию переходов в задаче рэлеевской конвекции // Изв. АН СССР. Серия МЖГ. 1984. №2. С. 22–27.

[5] Родичев Е. Б., Родичева О. В. О двумерной турбулентности в задаче Рэлея—Бенара // Докл. АН СССР. 1998. Т. 359, №4. С. 486–489.

[6] Пасконов В. М., Полежаев В. И., Чудов Л. А. Численное моделирование процессов тепло- и массообмена. М.: Наука, 1984. 288 с.

[7] Рождественский Б. Л., Стойнов М. И. Алгоритмы интегрирования уравнений Навье—Стокса, имеющие аналоги законам сохранения массы, импульса и энергии. М., 1987 (Препр. / АН СССР. ИПМ; №119).

[8] Никитин Н. В. Спектрально-конечно-разностный метод расчета турбулентных течений несжимаемых жидкостей в трубах и каналах // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1994. Т. 34, №6. С. 909–925.


*Поступила в редакцию 8 февраля 2000 г.*