

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЭФФЕКТИВНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК НЕОДНОРОДНЫХ ВЯЗКОУПРУГИХ ТЕЛ

А. А. СВЕТАШКОВ

*Институт прикладной математики и механики
при Томском государственном университете, Россия.
e-mail: astrodep@niipmm.tsu.tomsk.ru*

An approximate approach is presented to obtaining the effective mechanical characteristics of elastic bodies as well as time-effective modules of viscoelastic bodies. The suggested method is based on the formulation of some extremal problems for the functionals of potential energies associated with the physical relations of the studied media. Integral inequalities have been constructed providing bilateral estimates of the functionals of the specific strain energies calculated on the exact and approximate solutions of the viscous elasticity problems. A test example is given.

1. Вывод выражений эффективных модулей неоднородных упругих тел

Существует ряд подходов к определению эффективных модулей неоднородных упругих сред, базирующихся на анализе геометрии включений: метод самосогласования [1, 2], метод вириального разложения [3]. Теория смесей [4, 5] предполагает, что в каждой точке среды одновременно определяются все компоненты неоднородного тела. Известны методы, основанные на теории случайных функций [3, 6, 7], использовании некоторых физических гипотез при анализе конкретных конструкций [8, 9]. В асимптотическом методе осреднения [10] решение краевой задачи для упругого неоднородного тела ищется в виде рядов по степеням малого параметра с коэффициентами, зависящими как от “медленных” переменных, соответствующих глобальной структуре неоднородной среды, так и от “быстрых”, отвечающих локальной структуре.

В настоящей работе эффективные модули выводятся с помощью развития энергетического метода [1, 2, 5], в котором предполагается равенство энергий деформирования, запасаемых в гетерогенной и эквивалентной ей средах. Отличие такого подхода от традиционного состоит в том, что здесь допускается эквивалентность энергий для сред с одинаковыми деформациями и различными напряжениями (энергия гомогенной среды сравнения задается через неосредненные по объему напряжения и деформации). Это позволяет сформулировать экстремальную задачу для определения эффективных характеристик.

Пусть имеем неоднородную упругую среду, физические уравнения которой задаются в виде

$$\sigma_{ij} = \lambda(\mathbf{x})\theta\delta_{ij} + 2g(\mathbf{x})\varepsilon_{ij}, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (1)$$

где $\lambda(\mathbf{x})$, $g(\mathbf{x})$ — упругие модули, зависящие от координат $\mathbf{x} = \mathbf{x}(x, y, z)$; σ_{ij} , ε_{ij} — тензоры напряжений и деформаций соответственно; $\theta = \varepsilon_{ij}\delta_{ij}$ — объемная деформация; δ_{ij} — символ Кронекера. Введем кусочно-однородную среду сравнения с физическими уравнениями вида

$$\sigma_{ij}^0 = \lambda_0\theta\delta_{ij} + 2g_0\varepsilon_{ij}, \quad \lambda_0, g_0 = \{\lambda_\alpha^0, g_\alpha^0 = \text{const}, \mathbf{x} \in V_\alpha\}, \quad \alpha = 1, 2, \dots, N, \quad (2)$$

где V_α — объем, занимаемый α -компонентой неоднородного тела. Рассмотрим функционалы потенциальных энергий деформаций, связанные с физическими уравнениями (1), (2):

$$W = \int_V \sigma_{ij}\varepsilon_{ij}dV, \quad W_0 = \int_V \sigma_{ij}^0\varepsilon_{ij}dV, \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (3)$$

В силу положительной определенности W , W_0 выполняются неравенства

$$mW_0 \leq W \leq MW_0, \quad (4)$$

где $m > 0$, $M > 0$. Константы m , M можно найти из задач на условный экстремум:

$$\begin{aligned} m &= \min W(\varepsilon_{ij}), \quad M = \max W(\varepsilon_{ij}), \\ W_0(\varepsilon_{ij}) &= 1, \quad W_0(\varepsilon_{ij}) = 1. \end{aligned} \quad (5)$$

Перейдем от условных задач (5) к безусловным, для чего составим функционал

$$W_1(\varepsilon_{ij}) = W(\varepsilon_{ij}) - \mu W_0(\varepsilon_{ij}) \quad (6)$$

и потребуем равенства нулю вариаций W_1 по каждой компоненте ε_{ij} :

$$\delta W_1 = \frac{\partial W_1}{\partial \varepsilon_{ij}} \delta \varepsilon_{ij} = 0 \quad \langle i, j = 1, 2, 3 \rangle \quad (7)$$

(по индексам, заключенным в угловые скобки, суммирование не производится). Можно показать, что из шести функций $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$ — координат точек стационарности W по направлению $W_0 = 1$ — независимыми будут $\varepsilon_{ii} = \varepsilon$, $i = 1, 2, 3$ и $\varepsilon_{ij} = e$ ($i \neq j$). В результате в силу произвола ε_{ij} из (7) получим

$$\begin{aligned} (k(\mathbf{x}) - \mu k_0)\theta &= 0, \\ (g(\mathbf{x}) - \mu g_0)e &= 0, \end{aligned} \quad (8)$$

$$k(\mathbf{x}) = \lambda(\mathbf{x}) + \frac{2}{3}g(\mathbf{x}), \quad k_0 = \lambda_0 + \frac{2}{3}g_0. \quad (9)$$

Из (8), (9) следует, что $\theta = \theta(\mathbf{x})$, $e = e(\mathbf{x})$, т. е. искомые экстремали будут зависеть от координат. Кроме (8), (9) необходимо еще учесть условие

$$\int \sigma_{ij}^0 \varepsilon_{ij} dV = 1,$$

которое при $\varepsilon_{ii} = \varepsilon$, $\varepsilon_{ij} = e$ преобразуется к виду

$$\int_V (k_0 \theta^2 + 12g_0 e^2) dV = 1. \quad (10)$$

Кроме того, можно использовать соотношение в точке стационарности

$$\mu = \int_V [k(\mathbf{x}) \theta^2 + 12g(\mathbf{x}) e^2] dV. \quad (11)$$

Система уравнений (8), (9) совместно с (10) или (11) становится замкнутой относительно θ , e , μ . Аналитическое решение этой системы и определение m , M возможны только в некоторых частных случаях с привлечением гипотез о характере зависимостей деформаций от координат в каждой из компонент неоднородного тела. Предполагая, что деформации кусочно-постоянны в пределах каждой компоненты [5]:

$$\theta, e = \{\theta_\alpha = \text{const}, e_\alpha = \text{const}, \mathbf{x} \in V_\alpha, \alpha = 1, 2, \dots, N\}, \quad (12)$$

найдем m , M . Уравнения (8), (9) не могут выполняться одновременно. Возможны два варианта решения:

а) $e = 0$, справедливо (8) и

$$\int_V k(\mathbf{x}) \theta^2 dV = \mu_1 \int_V k_0 \theta^2 dV; \quad (13)$$

б) $\theta = 0$, справедливо (9) и

$$\int_V g(\mathbf{x}) e^2 dV = \mu_2 \int_V g_0 e^2 dV. \quad (14)$$

Уравнения (13), (14) получены путем интегрирования по объему соотношений (8), (9).

Рассмотрим случай а). С учетом (12) уравнение (10) преобразуется к виду

$$k_\alpha V_\alpha \theta_\alpha^2 = 1, \quad \alpha = 1, 2, \dots, N. \quad (15)$$

Подставляя (12) в (11), находим

$$\mu_1 = \theta_\alpha^2 \int_{V_\alpha} k(\mathbf{x}) dV, \quad \alpha = 1, 2, \dots, N. \quad (16)$$

Положим $\mu_1 = 1$ (условие равенства потенциальных энергий W , W_0), тогда с учетом (15) получим

$$\theta_\alpha^2 (k_\alpha V_\alpha - \int_{V_\alpha} k(\mathbf{x}) dV) = 0, \quad \alpha = 1, 2, \dots, N. \quad (17)$$

Последнее уравнение выполняется в случае

$$k_\alpha V_\alpha = \int_{V_\alpha} k(\mathbf{x}) dV \quad < \alpha = 1, 2, \dots, N > .$$

Или, суммируя по α от 1 до N , получим

$$k_1 V_1 + \dots + k_N V_N = \int_V k(\mathbf{x}) dV. \quad (18)$$

Аналогичным образом для случая б) при $\theta = 0$, $\mu_2 = 1$ получим

$$g_1 V_1 + \dots + g_N V_N = \int_V g(\mathbf{x}) dV. \quad (19)$$

Соотношения (18), (19) можно преобразовать к виду

$$k_1 v_1 + \dots + k_N v_N = \frac{1}{V} \int_V k(\mathbf{x}) dV = \langle k \rangle,$$

$$g_1 v_1 + \dots + g_N v_N = \frac{1}{V} \int_V g(\mathbf{x}) dV = \langle g \rangle,$$

$$v_\alpha = V_\alpha / V.$$

Последние соотношения содержат в левых частях попарные суммы произведений модулей упругости α -й компоненты на его объемное содержание; в правых частях имеем выражения осредненных по объему модулей сдвига и объемного поведения. Таким образом, известные выражения модулей Фойгта получены на основе решения экстремальных задач (5) при условии постоянства деформаций в пределах каждой из компонент неоднородного упругого тела (12).

Заметим, что приведенная методика допускает другие типы решений. В частности, при определении эффективных модулей вместо гипотезы о кусочно-постоянных деформациях среды сравнения (12) можно использовать и иные предположения, вытекающие из анализа поведения неоднородного тела при конкретных нагрузках.

Легко видеть, что выражения для пары эффективных модулей Рейсса могут быть получены из решения задачи в напряжениях для функционалов (3), в которых деформации найдены через напряжения из (1), (2), а вместо (12) использованы гипотезы о постоянстве напряжений в пределах V_α , $\alpha = 1, 2, \dots, N$.

2. Решение задачи об определении эффективных по времени характеристик линейно-вязкоупругих тел

Используем приведенную методику определения эффективных характеристик для вязкоупругих тел. Вместо процедуры осреднения свойств по объему V , занимаемому телом, найдем эффективные характеристики для интервала времени $t \in [0, T]$, на котором ищется решение.

Пусть имеем линейно-вязкоупругую среду, в которой тензоры напряжений σ_{ij} связаны с тензором деформаций ε_{ij} по закону

$$\sigma_{ij}(t) = \Lambda^* \dot{\theta} \delta_{ij} + 2G^* \dot{\varepsilon}_{ij}, \quad \dot{\theta} = \dot{\varepsilon}_{ij} \delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2, 3,$$

$$\Lambda^* \dot{\theta} \equiv \int_0^t R_1(t-\tau) d\theta(\tau), \quad G^* \dot{\varepsilon}_{ij} \equiv \int_0^t R(t-\tau) d\varepsilon_{ij}(\tau), \quad R_1(0) = \Lambda_0, \quad R(0) = 2G_0, \quad (20)$$

где $\Lambda_0, 2G_0$ — упругомгновенные модули; $R(t), R_1(t)$ — функции сдвиговой и объемной релаксации, определяемые из эксперимента.

Физические соотношения для среды сравнения зададим в виде

$$\sigma_{ij}^0(t) = \lambda(t)\theta\delta_{ij} + 2g(t)\varepsilon_{ij}, \quad (21)$$

где $\lambda(t), g(t)$ — некоторые искомые функции времени. Рассмотрим функционалы удельных потенциальных энергий деформаций вида

$$W = \int_0^T \sigma_{ij}(t)\dot{\varepsilon}_{ij}(t)dt, \quad W_0 = \int_0^T \sigma_{ij}^0(t)\dot{\varepsilon}_{ij}(t)dt, \quad i, j = 1, 2, 3.$$

Функционал W представим в положительно-определенной форме [11] с помощью симметричного продолжения функций релаксации в область отрицательных t : $R(t) = R(-t)$, $R_1(t) = R_1(-t)$, тогда

$$W = \frac{1}{2} \int_0^T \int_0^T [R(s-\tau)d\varepsilon_{ij}(\tau)d\varepsilon_{ij}(s) + R_1(s-\tau)d\theta(\tau)d\theta(s)], \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (22)$$

Функционал W_0 также можно привести к положительно-определенному виду, введя

$$G(\tau, s) = g(\tau)h(\tau-s) + g(s)h(s-\tau),$$

$$\Lambda(\tau, s) = \lambda(\tau)h(\tau-s) + \lambda(s)h(s-\tau),$$

где $h(t)$ — единичная функция Хевисайда. В этом случае

$$W_0 = \frac{1}{2} \int_0^T \int_0^T [2G(s, \tau)d\varepsilon_{ij}(\tau)d\varepsilon_{ij}(s) + \Lambda(s, \tau)d\theta(\tau)d\theta(s)], \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (23)$$

Используя положительную определенность W, W_0 , запишем неравенства, аналогичные (4):

$$mW_0 \leq W \leq MW_0. \quad (24)$$

Будем искать

$$m = \min W(\dot{\varepsilon}_{ij}), \quad W_0(\dot{\varepsilon}_{ij}) = 1, \quad M = \max W(\dot{\varepsilon}_{ij}), \quad W_0(\dot{\varepsilon}_{ij}) = 1$$

и использовать произвол выбора $g(t), \lambda(t)$, чтобы получить $m = M$. Для этого сформируем функционал $W_1 = W - \mu W_0$ и потребуем

$$\delta W_1 = \frac{\partial W_1}{\partial \dot{\varepsilon}_{ij}} \delta \dot{\varepsilon}_{ij} = 0 \quad < i, j = 1, 2, 3 >. \quad (25)$$

Дальнейший ход рассуждений аналогичен использованному для функционала (6). Соотношения (25) дают два независимых уравнения относительно искомых экстремалей $\dot{\varepsilon}_{ii} = \dot{\varepsilon}$, $i = 1, 2, 3$ и $\dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{\varepsilon}$, $i \neq j$:

$$\Lambda^* \dot{\theta} + 2G^* \dot{\varepsilon} - \mu[\lambda(t)\theta + 2g(t)\varepsilon] = 0, \quad (26)$$

$$(G^* - \mu g(t))e = 0.$$

Условие $W_0(\dot{\varepsilon}_{ij}) = 1$ запишем в виде

$$\int_0^T \int_0^T [K(s, \tau) d\theta(\tau) d\theta(s) + 12G(s, \tau) de(\tau) de(s)] = 1 = h(T), \quad (27)$$

$$K(s, \tau) = \Lambda(s, \tau) + \frac{2}{3}G(s, \tau).$$

Условие в точке стационарности W_1 принимает вид

$$\mu = \int_0^T \int_0^T [K(s - \tau) d\theta(\tau) d\theta(s) + 12R(s - \tau) de(\tau) de(s)], \quad K(t) = R_1(t) + \frac{2}{3}R(t). \quad (28)$$

Так как уравнения (26) не могут выполняться одновременно, имеем два варианта: $\dot{\varepsilon} = 0$, $\mu = \mu_1$ и $\dot{\theta} = 0$, $\mu = \mu_2$, где μ_α ($\alpha = 1, 2$) входят в уравнения, полученные из (26) путем умножения на $\dot{\varepsilon}$, $\dot{\varepsilon}$ и интегрирования по t :

$$\int_0^T \int_0^T K(s - \tau) d\theta(\tau) d\theta(s) = \mu_1 \int_0^T \int_0^T K(s, \tau) d\theta(\tau) d\theta(s), \quad (29)$$

$$\int_0^T \int_0^T R(s - \tau) de(\tau) de(s) = \mu_2 \int_0^T \int_0^T G(s, \tau) de(\tau) de(s). \quad (30)$$

Тогда для первого случая из (27), полагая, что последнее выполняется для всех $t \in [0, T]$, следует $\theta(t) = \theta_0 h(t)$, где $\theta_0 = \text{const}$. Вычитая (28) из (29) и требуя $\mu_1 = 1$, искомое соотношение запишем

$$k(t) = K^* h, \quad (31)$$

где $K^* = \Lambda^* + \frac{2}{3}G^*$.

Аналогично для второго случая из (27), (28) и (30) находится

$$g(t) = G^* h.$$

Заметим, что справедливость (27) предполагается для всех $t \in [0, T]$.

Модули $k(t)$, $g(t)$ можно назвать эффективными модулями лагранжевого типа, поскольку выражение соответствующего им удельного потенциала W_0 входит в формулировку вариационного уравнения типа Лагранжа. Найденные функции $k(t)$, $g(t)$ могут служить в качестве эффективных по времени характеристик линейно-вязкоупругого тела. Способ построения приближенных решений краевых задач с помощью функций типа $k(t)$, $g(t)$ описан в литературе. Достаточно назвать работы В. И. Малого и Н. А. Труфанова [12, 13] (метод квазиконстантных операторов) и А. Н. Филатова, Г. С. Ларионова [14] (метод “замораживания”) и др. Здесь данные функции получены исходя из совершенно других рассуждений.

Помимо непосредственного применения найденных эффективных модулей в расчетах, нас интересуют еще два вопроса:

- определение оценок сходимости итерационного процесса, с помощью которого ищется обобщенное решение задачи линейной вязкоупругости;
- вывод интегральных неравенств для функционалов потенциальных энергий напряжений и деформаций, рассчитанных на точном и приближенных решениях.

3. Определение оценок сходимости итерационного процесса

Вариационное уравнение лагранжевого типа для линейной задачи вязкоупругого тела имеет вид [5]:

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij}(\mathbf{u}) \dot{\varepsilon}_{ij}(\mathbf{v}) d\Omega = \int_{\Omega} \rho F_i \dot{v}_i d\Omega + \int_{\Gamma_{\sigma}} p_i \dot{v}_i d\gamma \equiv A(\mathbf{v}), \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (32)$$

Здесь F_i, p_i — компоненты векторов объемных и поверхностных сил; $\mathbf{u}(u, v, w)$ — вектор искомого решения, удовлетворяющий граничным условиям в перемещениях на $u_i|_{\Sigma_u} = u_i^0$; \dot{v}_i — компоненты кинематически допустимого вектора скоростей перемещений, удовлетворяющего однородным граничным условиям на Σ_u ; $\Omega = V \times [0, T]$, $\Gamma_{\sigma} = \Sigma_1 \times [0, T]$; $\Gamma_u = \Sigma_u \times [0, T]$ (Σ_1 — граничная поверхность тела объема V , на которой заданы напряжения).

Запишем выражение для итерационного процесса отыскания обобщенного решения (32) на основе упругих приближений, рассчитанных с помощью эффективных модулей. Для этого введем

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij}^0(\mathbf{u}^{n+1}) \dot{\varepsilon}_{ij}(\mathbf{v}) d\Omega = \int_{\Omega} [\sigma_{ij}^0(\mathbf{u}^n) - \beta \sigma_{ij}(\mathbf{u}^n)] \dot{\varepsilon}_{ij}(\mathbf{v}) d\Omega + \beta A(\mathbf{v}), \quad (33)$$

$$i, j = 1, 2, 3, \quad n = 0, 1, \dots, \quad \beta = \text{const} > 0.$$

Обращение оператора левой части уравнения (33) менее трудоемко по сравнению с подобной процедурой в уравнении (32), которая содержит ввиду (20) наследственные интегралы от истории изменения деформаций во времени. Условия сходимости итерационного процесса (33) к обобщенному решению (32), как известно [15], имеют вид

$$m_0 \|\mathbf{u}\|_0^2 \leq \|\mathbf{u}\|^2 \leq M_0 \|\mathbf{u}\|_0^2, \quad (34)$$

где $m_0 > 0$, $M_0 > 0$, а нормы, входящие в (34), порождены следующими скалярными произведениями в гильбертовом пространстве H :

$$\begin{aligned} (\mathbf{u}, \mathbf{v})_0 &= \int_{\Omega} \sigma_{ij}^0(\mathbf{u}) \dot{\varepsilon}_{ij}(\mathbf{v}) d\Omega \equiv \int_0^T \int_V \sigma_{ij}^0(\mathbf{u}) \dot{\varepsilon}_{ij}(\mathbf{v}) dV dt, \\ (\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \int_{\Omega} \sigma_{ij}(\mathbf{u}) \dot{\varepsilon}_{ij}(\mathbf{v}) d\Omega \equiv \int_0^T \int_V \sigma_{ij}(\mathbf{u}) \dot{\varepsilon}_{ij}(\mathbf{v}) dV dt, \\ \|\mathbf{u}\|^2 &= (\mathbf{u}, \mathbf{u}), \quad \|\mathbf{u}\|_0^2 = (\mathbf{u}, \mathbf{u})_0. \end{aligned} \quad (35)$$

Сопоставим теперь условия сходимости итерационного процесса (34), (35) с результатами уже решенной задачи по определению констант m , M , входящих в оценки (24) для положительно-определенных функционалов удельных потенциальных энергий W , W_0 .

Неравенства (24) не нарушаются при интегрировании по объему V , поэтому заключаем, что $m = m_0$, $M = M_0$ и найденные оценки не будут зависеть от координат.

Заметим, что: 1) численные расчеты показывают достаточно быструю скорость сходимости итерационного процесса (33) к точному решению при выборе оператора левой части с найденными эффективными модулями $K(t)$, $g(t)$ (норма оператора сжатия достигает значения порядка $10^{-6} - 10^{-7}$ за 5–6 итераций); 2) функционал W_0 не является единственно возможным вариантом определения левой части (33) — на практике достаточно задать некоторые постоянные \mathbf{k} , \mathbf{g} , близкие каким-либо образом к монотонным функциям $k(t)$, $g(t)$ на интервале $t \in [0, T]$, где T — заданный промежуток времени, на котором отыскивается решение.

4. Интегральные неравенства для функционалов точных и приближенных решений

Помимо возможности фактического определения оценок сходимости итерационного процесса типа (33) найденные эффективные модули могут служить для формулировки двухсторонних интегральных оценок функционалов удельных потенциальных энергий точного решения краевой задачи линейной вязкоупругости. Прежде отметим, что пара эффективных модулей типа (31) не является единственно возможной. Решая задачу в напряжениях для функционалов удельных потенциальных энергий напряжений

$$\psi = \int_0^T \varepsilon_{ij}(t) \dot{\sigma}_{ij}(t) dt, \quad \psi_0 = \int_0^T \varepsilon_{ij}^0(t) \dot{\sigma}_{ij}(t) dt,$$

$$\varepsilon_{ij}^0 = \lambda_1(t) \sigma \delta_{ij} + 2g_1(t) \sigma_{ij}, \quad \sigma = \sigma_{ij} \delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (36)$$

и определяя $k_1(t)$, $g_1(t)$ из условий $m_1 = M_1$, где $m_1 \psi_0 \leq \psi \leq M_1 \psi_0$, найдем выражения эффективных по времени модулей кастильянового типа:

$$k_1(t) = (K^{*-1}h)^{-1}, \quad g_1(t) = (G^{*-1}h)^{-1}, \quad (37)$$

где $K^{*-1}K^* = G^{*-1}G^* = I^*$ (I^* — тождественный оператор). Функции $k_1(t)$, $g_1(t)$ так же, как и $k(t)$, $g(t)$, являются монотонными на интервале $t \in [0, \infty]$, причем известно, что $k(t)$, $g(t)$ монотонно убывающие, а $1/k(t)$, $1/g(t)$ — монотонно возрастающие функции. Для функционалов (36) справедливы представления в положительно-определенном виде, аналогичные (22), (23):

$$\psi = \frac{1}{2} \int_0^T \int_0^T [\Pi(s - \tau) d\sigma_{ij}(\tau) d\sigma_{ij}(s) + \Pi_1(s - \tau) d\sigma(\tau) d\sigma(s)],$$

$$\psi_0 = \frac{1}{2} \int_0^T \int_0^T [2J(s, \tau) d\sigma_{ij}(\tau) d\sigma_{ij}(s) + J_1(s, \tau) d\sigma(\tau) d\sigma(s)]. \quad (38)$$

Здесь $\Pi(t)$, $\Pi_1(t)$ — функции ползучести при сдвиге и объемном поведении, $\Pi(t) = \Pi(-t)$, $\Pi_1(t) = \Pi_1(-t)$;

$$J(s, \tau) = \frac{1}{g_1(\tau)} h(\tau - s) + \frac{1}{g_1(s)} h(s - \tau),$$

$$J_1(s, \tau) = \frac{1}{\lambda_1(\tau)} h(\tau - s) + \frac{1}{\lambda_1(s)} h(s - \tau). \quad (39)$$

Как нетрудно видеть из (37), выполняется

$$\frac{1}{g_1(1)} = \Pi(t), \quad \frac{1}{k_1(t)} = K(t) = \Pi_1(t) + \frac{2}{3}\Pi(t), \quad k_1(t) = \lambda_1(t) + \frac{2}{3}g_1(t). \quad (40)$$

С учетом (22), (23), (31) можно показать, что разность функционалов ψ, ψ_0 удовлетворяет неравенству

$$\psi - \psi_0 = \int_0^T \int_0^T \{[\Pi(s - \tau) - J(s, \tau)]d\sigma_{ij}(\tau)d\sigma_{ij}(s) + [\Pi_1(s - \tau) - J_1(s, \tau)]d\sigma(\tau)d\sigma(s)\} \leq 0, \quad (41)$$

а разность функционалов W, W_0 с учетом (37)–(40) — неравенству

$$W - W_0 = \int_0^T \int_0^T \{[R(s - \tau) - G(s, \tau)]d\varepsilon_{ij}(\tau)d\varepsilon_{ij}(s) + [R_1(s - \tau) - \Lambda(s, \tau)]d\theta(\tau)d\theta(s)\} \geq 0, \quad (42)$$

$$i, j = 1, 2, 3.$$

Эти неравенства справедливы для каждого из слагаемых, стоящих в квадратных скобках (41), (42), вследствие монотонных убывания $R(t), R_1(t)$ и возрастания $\Pi(t), \Pi_1(t)$ на интервале $t \in [0, T]$ [16].

Перепишем (41), (42) в операторном виде (раздельно для каждого из выражений в квадратных скобках):

$$\begin{aligned} (R^* - r^*)\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij} &\geq 0, & (\Pi^* - P^*)\sigma_{ij}\sigma_{ij} &\leq 0, \\ (R_1^* - r_1^*)\theta^2 &\geq 0, & (\Pi_1^* - P_1^*)\sigma^2 &\leq 0, \quad i, j = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (43)$$

Здесь смысл введенных обозначений ясен из сопоставления (43) с (41), (42). Предположим далее, что $\varepsilon_{ij}, \sigma_{ij}$, входящие в (43), соответствуют точному решению задачи для линейно-вязкоупругого тела. Тогда и для приближенного решения, полученного, например, с помощью эффективных по времени модулей лагранжевого типа $k(t), g(t)$, справедливы неравенства

$$\begin{aligned} (R^* - r^*)\varepsilon_{ij}^L\varepsilon_{ij}^L &\geq 0, & (\Pi^* - P^*)\sigma_{ij}^L\sigma_{ij}^L &\leq 0, \\ (R_1^* - r_1^*)\theta_L^2 &\geq 0, & (\Pi_1^* - P_1^*)\sigma_L^2 &\leq 0. \end{aligned} \quad (44)$$

Пользуясь положительной определенностью правых и левых частей неравенств (43), (44), легко получим

$$\begin{aligned} \frac{R^*\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij}}{r^*\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij}} &\geq \frac{r^*\varepsilon_{ij}^L\varepsilon_{ij}^L}{R^*\varepsilon_{ij}^L\varepsilon_{ij}^L}, & \frac{R_1^*\theta^2}{r_1^*\theta^2} &\geq \frac{r_1^*\theta_L^2}{R_1^*\theta_L^2}, \\ \frac{\Pi^*\sigma_{ij}\sigma_{ij}}{P^*\sigma_{ij}\sigma_{ij}} &\leq \frac{P^*\sigma_{ij}^L\sigma_{ij}^L}{\Pi^*\sigma_{ij}^L\sigma_{ij}^L}, & \frac{\Pi_1^*\sigma^2}{P_1^*\sigma^2} &\leq \frac{P_1^*\sigma_L^2}{\Pi_1^*\sigma_L^2}, \quad i, j = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (45)$$

В левых частях всех четырех неравенств (45) стоят отношения функционалов точного решения линейной задачи вязкоупругости, в правых частях — соответствующие отношения для функционалов приближенного решения, полученного на основе решения упругой

задачи с модулями $k(t)$, $g(t)$. Таким образом, неравенства (45) дают двухсторонние оценки функционалов точного решения задачи вязкоупругости.

Заметим, что неравенства (43) так же, как и (45), содержат двухсторонние оценки для функционалов потенциальных энергий вязкоупругого и упругого тел. Данный факт вытекает, например, из следующего представления для модуля $g(t)$:

$$2g(t) = \sigma_{\alpha\beta}^L(t)\varepsilon_{\alpha\beta}^L(t)/\varepsilon_{\alpha\beta}^L(t)\varepsilon_{\alpha\beta}^L(t), \quad \alpha, \beta = 1, 2, 3,$$

$$\sigma_{\alpha\beta} = \sigma_{\alpha\beta} - \sigma\delta_{\alpha\beta}/3, \quad \varepsilon_{\alpha\beta} = \varepsilon_{\alpha\beta} - \theta\delta_{\alpha\beta}/3.$$

5. Тестовый пример

Рассмотрим пример расчета с найденными эффективными модулями. Пусть требуется определить напряженно-деформированное состояние в полупространстве от нагрузки $P(t)$, распределенной по кругу $r = a$. Материал — эпоксидная композиция ЭХД-ТЭАТ. В работе [17] определены аналитическое выражение и параметры ядра ползучести при сдвиге

$$\Pi(t) = \lambda_\alpha e^{-\beta_\alpha t}, \quad \alpha = 1, 2,$$

где $\lambda_1 = 0.4 \text{ мин}^{-1}$, $\lambda_2 = 0.0142 \text{ мин}^{-1}$, $\beta_1 = 0.0385 \text{ мин}^{-1}$, $\beta_2 = 0.0202 \text{ мин}^{-1}$, $G_0 = 1200 \text{ кг/см}^2$.

Предполагается, что объемная ползучесть отсутствует, $\nu = 0.45 = \text{const}$. Усилия S и перемещения U на границе упругого тела задаются соотношениями [18]

$$S = -\frac{3P}{2\pi a^2}(1 - g_{1/2}^0), \quad U = S/2G_0, \quad g_{1/2}^0 = (1 + \omega_0/2)^{-1}, \quad \omega_0 = 2G_0/3K_0. \quad (46)$$

Для определения вязкоупругого напряженно-деформированного состояния помимо заданного оператора ползучести, который запишем в виде

$$G^{*-1}x = \frac{1}{2G_0}(1 + \lambda_\alpha \Xi_{\beta_\alpha}^*)x, \quad \Xi_{\beta_\alpha}^* x \equiv \int_0^t e^{\beta_\alpha(t-\tau)}x(\tau)d\tau, \quad \alpha = 1, 2,$$

необходимы выражение для оператора релаксации

$$G^*x = 2G_0(1 - \kappa_\alpha \Xi_{r_\alpha}^*)x, \quad \alpha = 1, 2, \quad (47)$$

а также аналитические выражения для операторов $g_{1/2}^*$ и $G^{*-1}g_{1/2}^*$. Применяя алгебру Ξ_α^* -операторов [11], находим

$$\kappa_1 = \frac{(\beta_1 - r_1)(\beta_2 - r_1)}{r_1 - r_2}, \quad \kappa_2 = -\frac{(\beta_2 - r_2)(\beta_1 - r_2)}{r_1 - r_2},$$

$$r_{1,2} = (d \pm \sqrt{d^2 - 4\beta_1\beta_2 - 4\lambda_1\beta_2 - 4\lambda_2\beta_1})/2, \quad d = \beta_1 + \beta_2 + \lambda_1 + \lambda_2,$$

$$g_{1/2}^*x = \frac{2}{2 + \omega_0}(1 + a_\alpha \Xi_{q_\alpha}^*)x, \quad \alpha = 1, 2,$$

$$a_1 = \frac{(r_1 - q_1)(q_1 - r_2)}{q_1 - q_2}, \quad a_2 = \frac{(r_2 - q_2)(r_1 - q_2)}{q_1 - q_2}, \quad (48)$$

$$q_{1,2} = (\delta \pm \sqrt{\delta^2 - 4r_1r_2 - 4\kappa_{11}r_2 - 4\kappa_{22}r_1})/2, \quad \delta = r_1 + r_2 - \kappa_{11} - \kappa_{22},$$

$$\kappa_{\alpha\alpha} = \frac{\omega_0}{2 + \omega_0} \kappa_{\alpha} \quad < \alpha = 1, 2 > .$$

Произведение операторов $G^{*-1}g_{1/2}^*$ представимо в виде

$$G^{*-1}g_{1/2}^*x = \frac{1}{G_0(2 + \omega_0)}(1 + d_1\Xi_{q_1}^* + d_2\Xi_{q_2}^* + d_3\Xi_{\beta_1}^* + d_4\Xi_{\beta_2}^*)x,$$

$$d_{\alpha} = a_{\alpha} \left(1 - \frac{\lambda_1}{q_{\alpha} - \beta_1} - \frac{\lambda_2}{q_{\alpha} - \beta_2} \right) \quad < \alpha = 1, 2 > ,$$

$$d_3 = \lambda_1 \left(1 + \frac{a_1}{q_1 - \beta_1} + \frac{a_2}{q_2 - \beta_2} \right), \quad d_4 = \lambda_2 \left(1 + \frac{a_1}{q_1 - \beta_2} + \frac{a_2}{q_2 - \beta_2} \right). \quad (49)$$

Теперь, зная аналитические выражения для $g_{1/2}^*$ и $G^{*-1}g_{1/2}^*$ в виде (48), (49), можно найти $S(t)$ и $u(t)$ при заданном во времени законе изменения нагрузки $p(t)$. Приближенные решения определим, пользуясь найденными эффективными модулями $g(t)$, $g_1(t)$. Произведя замены в (46) $G_0 \rightarrow g(t)$, $g_1(t)$, запишем

$$\omega_1(t) = 2g(t)/3K_0 = \omega_0(1 - \kappa_{\alpha}\Xi_{r_{\alpha}}^*)h,$$

$$\omega_2(t) = 2g_1(t)/3K_0 = \omega_0(1 + \lambda_{\alpha}\Xi_{\beta_{\alpha}}^*)h, \quad \alpha = 1, 2. \quad (50)$$

Подставляя найденные ω_{α} в (46), получим пару приближенных решений S_{α} , u_{α} .

Численный пример рассчитан для нагружения с постоянной скоростью $p = vt$, $t \in [0, T]$, $v = 1/T$, $T = 30$ мин и ступенчатой нагрузки $p = p_0h(t)$, $p_0 = -2\pi a^2/3$. На рис. 1 приведены точные $S(t)$ и приближенные $S_1(t)$, $S_2(t)$ (вычисленные с помощью модулей $g(t)$, $g_1(t)$) значения усилий (46) (кривые 1–3 соответствуют величинам S , S_1 и S_2 здесь и на рис. 2). Абсолютные значения усилий $S(t)$, рассчитанные по аналитическим формулам, превышают соответствующие приближенные значения $S_1(t)$, $S_2(t)$, при этом перемещения $u(t)$, $u_{\alpha}(t)$, ($\alpha = 1, 2$) практически совпадают. Многочисленные расчеты позволили выделить следующую закономерность: степень отклонения (по абсолютной величине) точного решения задачи вязкоупругости от приближенных, получаемых с помощью эффективных по времени модулей, пропорциональна максимуму из двух отношений G_0/G_{∞} и K_0/K_{∞} , где K_{∞} , G_{∞} — длительные значения модулей объемного сжатия и сдвига (в рассматриваемом примере $G_0/G_{\infty} \approx 12$).

На рис. 2 показано изменение во времени усилий для случая ступенчатой нагрузки. Приближенные значения усилий, рассчитанные с помощью модуля $g(t)$ лагранжевого типа, практически совпадают с аналитическим решением для усилия $S(t)$; усилия $S_2(t)$, полученные по расчету с модулем $g_1(t)$ кастильяновского типа, превышают значения $S(t)$.

На рис. 3, а показано изменение во времени отношений функционалов удельных потенциальных энергий деформаций, входящих в первое из равенств (45):

$$W_1 = R^* \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij} / r^* \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij}, \quad W_2 = r^* \varepsilon_{ij}^2 \varepsilon_{ij}^2 / R^* \varepsilon_{ij}^2 \varepsilon_{ij}^2, \quad W_3 = r^* \varepsilon_{ij}^1 \varepsilon_{ij}^1 / R^* \varepsilon_{ij}^1 \varepsilon_{ij}^1,$$

относящихся к расчету нагружения полупространства с постоянной скоростью, а на рис. 3, б — удельных потенциальных энергий напряжений (при постоянной скорости нагружения):

$$W_1 = \Pi^* \sigma_{ij} \sigma_{ij} / P^* \sigma_{ij} \sigma_{ij}, \quad W_2 = P^* \sigma_{ij}^2 \sigma_{ij}^2 / \Pi^* \sigma_{ij}^2 \sigma_{ij}^2, \quad W_3 = P^* \sigma_{ij}^1 \sigma_{ij}^1 / \Pi^* \sigma_{ij}^1 \sigma_{ij}^1.$$

На рис. 3, в, г для случая ступенчатого нагружения приведены кривые изменения во времени тех же функционалов, что и на рис. 3, а, б (кривые 1–3 соответствуют величинам $W_1 - W_3$).

Видно, что неравенства (45) выполняются для всего рассматриваемого интервала времени и двух режимов нагружения. Неравенства (43), (45) можно рассматривать в качестве аналога “вилки” Фойгта — Рейсса для вязкоупругих тел.

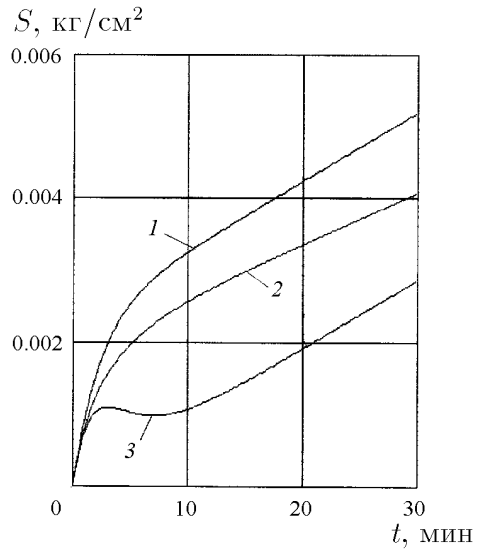


Рис. 1.

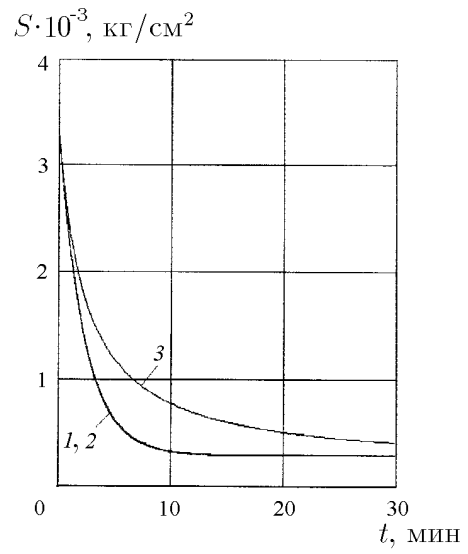


Рис. 2.

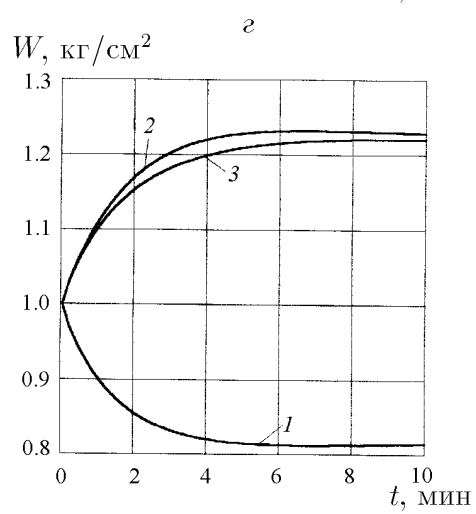
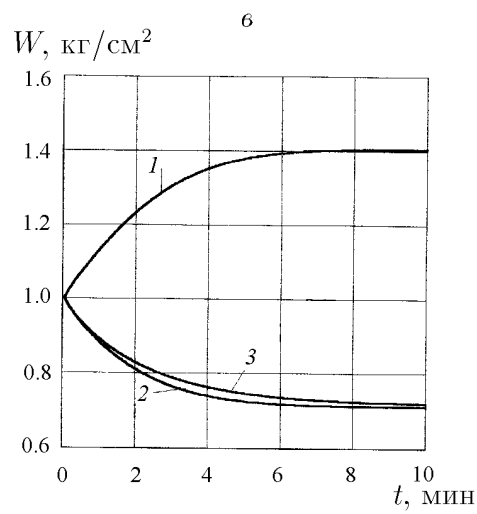
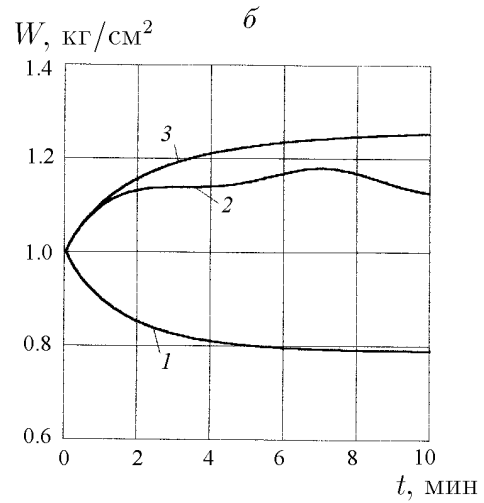
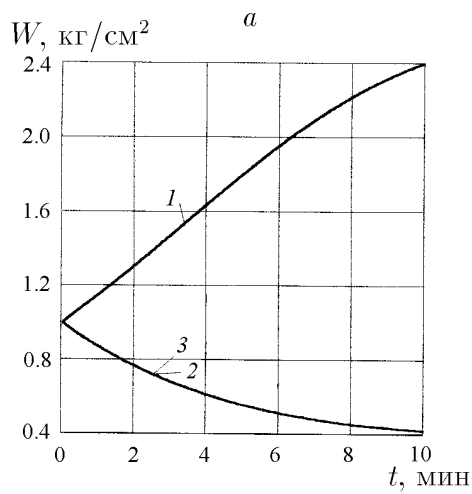


Рис. 3.

Список литературы

- [1] КРИСТИНСЕН Р. Введение в механику композитов. М.: Мир, 1982. 384 с.
- [2] СЕНДЕЦКИ ДЖ. Упругие свойства композитов. Т. 2. Механика композитных материалов. М.: Мир, 1978. 654 с.
- [3] ШЕРМЕРГОР Т. Д. Теория упругости микронеоднородных сред. М.: Наука, 1977. 400 с.
- [4] МАЛМЕСТЕР А. К., ТАМУЖ В. П., ТЕТЕРС Г. А. Сопротивление жестких полимерных материалов. Рига: Зинатне, 1972. 498 с.
- [5] ПОБЕДРЯ Б. Е. Механика композиционных материалов. М.: Изд-во МГУ, 1984. 336 с.
- [6] ЛОМАКИН В. А. Теория упругости неоднородных тел. М.: Изд-во МГУ, 1976. 368 с.
- [7] ХОРОШУН Л. П., МАСЛОВ Б. П., ЛЕЩЕНКО П. Р. Прогнозирование эффективных свойств пьезоактивных композитных материалов. Киев: Наук. думка, 1989. 208 с.
- [8] БОЛОТИН В. В., НОВИЧКОВ Ю. Н. Механика многослойных конструкций. М.: Машиностроение, 1980. 355 с.
- [9] ВАН ФО ФЫ Г. А. Теория армированных материалов. Киев.: Наук. думка, 1971. 232 с.
- [10] БАХВАЛОВ Н. С., ПАНАСЕНКО Г. П. Осреднение процессов в периодических средах. М.: Наука, 1984. 352 с.
- [11] РАБОТНОВ Ю. Н. Элементы наследственной механики твердых тел. М.: Наука, 1977. 383 с.
- [12] МАЛЫЙ В. И. Квазиконстантные операторы в теории вязкоупругости // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1980. №1. С. 77–86.
- [13] МАЛЫЙ В. И., ТРУФАНОВ Н. А. Метод квазиконстантных операторов в теории вязкоупругости анизотропных нестареющих материалов // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1987. №6. С. 148–154.
- [14] ФИЛАТОВ А. Н. Методы усреднения в дифференциальных и интегродифференциальных уравнениях. Ташкент: ФАН, 1967. 132 с.
- [15] ПОБЕДРЯ Б. Е. Численные методы в теории упругости и пластичности. М.: Изд-во МГУ. 1995. 366 с.
- [16] БУЛГАКОВ И. И. Ползучесть полимерных материалов. М.: Наука, 1973. 387 с.
- [17] ГОЛЬДМАН А. Я. Прочность конструкционных пластмасс. Л.: Машиностроение. 1979. 320 с.
- [18] ИЛЬЮШИН А. А., ПОБЕДРЯ Б. Е. Основы математической теории термовязкоупругости. М.: Наука, 1970. 280 с.

*Поступила в редакцию 25 августа 2000 г.
в переработанном виде — 15 января 2001 г.*