

О НЕЯВНЫХ АБСОЛЮТНО УСТОЙЧИВЫХ СХЕМАХ РУНГЕ—КУТТЫ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА*

В. И. Пинчуков

Институт вычислительных технологий СО РАН, Новосибирск, Россия

e-mail: pinchvi@ict.nsc.ru

Implicit fourth order schemes of Runge—Kutta type for ordinary difference equations and for multidimensional transfer equation are considered. The absolute stability of schemes is proved under the assumption about frozen coefficients. The results of test calculations are presented.

В настоящее время методы повышенной точности доказали свою эффективность в вычислительной аэродинамике. Помимо классических явных схем третьего порядка типа Рунге—Кутты—Русанова [1], Бернштейна—Мирина [2], Кутлера—Ломекса [3] сконструированы современные адаптивные ЕНО-схемы третьего и более высоких порядков (см. [4, 5] и обзор [6]). В [7] предложены компактные неявные условно устойчивые схемы третьего порядка, а также схемы более высоких порядков. Абсолютно устойчивые схемы Рунге—Кутты третьего порядка развиты в [6, 8–11]. Здесь предлагаются неявные абсолютно устойчивые схемы четвертого порядка.

1. Схемы для обыкновенных дифференциальных уравнений

Рассмотрение начнем со случая обыкновенных уравнений. Пусть решается задача Коши для уравнения

$$\frac{dv}{dt} = \varphi(v, t), \quad v(0) = v_0.$$

Предлагаемые схемы могут быть получены модификацией известных явных схем четвертого порядка. В качестве базовой рассмотрим следующую схему:

$$\frac{v^{(1)} - v^n}{\tau} = \frac{\varphi(v^n, t)}{2},$$
$$\frac{v^{(2)} - v^n}{\tau} = \frac{\varphi(v^{(1)}, t + \tau/2)}{2},$$

*Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант №02-01-00922, и Civilian Research & Development Foundation, проект №10086.

©В. И. Пинчуков, 2002.

$$\frac{v^{(3)} - v^n}{\tau} = \varphi(v^{(2)}, t + \tau/2),$$

$$\frac{v^{n+1} - v^n}{\tau} = \frac{\varphi(v^n, t)}{6} + \frac{\varphi(v^{(1)}, t + \tau/2)}{3} + \frac{\varphi(v^{(2)}, t + \tau/2)}{3} + \frac{\varphi(v^{(3)}, t + \tau)}{6}.$$

Второе уравнение заменим на его разность с первым уравнением. Для получения неявной схемы будем использовать на втором и четвертом шагах схемы стабилизирующие операторы

$$\frac{v^{(1)} - v^n}{\tau} = \frac{\varphi(v^n, t)}{2}, \quad (1)$$

$$[1 + \lambda(\tau\varphi_v^n)^2] \frac{v^{(2)} - v^{(1)}}{\tau} = \frac{\varphi(v^{(1)}, t + \tau/2) - \varphi(v^n, t)}{2}, \quad (2)$$

$$\frac{v^{(3)} - v^n}{\tau} = \varphi(v^{(2)}, t + \tau/2), \quad (3)$$

$$[1 + \xi(\tau\varphi_v^n)^4] \frac{v^{n+1} - v^n}{\tau} = \frac{\varphi(v^n, t)}{6} + \frac{\varphi(v^{(1)}, t + \tau/2)}{3} + \frac{\varphi(v^{(2)}, t + \tau/2)}{3} + \frac{\varphi(v^{(3)}, t + \tau)}{6}, \quad (4)$$

где $\xi > 0$, $\lambda > 0$ – числовые параметры, которые следует определить в анализе. Для исследования устойчивости и точности этой схемы рассмотрим случай $\varphi(v, t) = -Av$, $A = \text{const} > 0$. Исключая промежуточные временные слои, получаем

$$v^{n+1} = v^n \rho(\tau A),$$

где

$$\rho(x) = 1 - \left[1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{12} + \frac{(2-x)x^2}{24(1+\lambda x^2)} \right] \frac{x}{(1+\xi x^4)}. \quad (5)$$

Чтобы иметь четвертый порядок, необходимо выполнение условия $\rho(x) - \exp(-x) = O(x^5)$, $x \rightarrow 0$, что эквивалентно соотношению $\rho(x) - (1 - x + x^2/2 - x^3/6 + x^4/24) = O(x^5)$. Подставляя $\rho(x)$, нетрудно получить

$$\rho(x) - 1 + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{24} = \left[\frac{(2-x)\lambda}{24(1+\lambda x^2)} + \left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} - \frac{x^3}{24} \right) \xi \right] \frac{x^5}{(1+\xi x^4)} = O(x^5).$$

Таким образом, четвертый порядок имеет место при любых значениях параметров ξ , λ . Абсолютная устойчивость схемы заключается в выполнении условий $-1 \leq \rho(x) \leq 1$ при $x > 0$. Условие $\rho(x) \leq 1$ будет выполнено, если выражение в квадратных скобках в соотношении (5) неотрицательно, что эквивалентно неравенству

$$(1 + \lambda x^2) \left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{12} \right) + \frac{(2-x)x^2}{24} \geq 0.$$

В результате тождественных преобразований оно может быть приведено к виду

$$1 - \frac{x}{2} + x^2 \left[\frac{1}{6} + \lambda - \left(3 + \frac{1}{4\lambda} \right)^2 \frac{\lambda}{12} \right] + \left(x - 3 - \frac{1}{4\lambda} \right)^2 \frac{\lambda x^2}{12} \geq 0.$$

Если положить $\lambda = 1/5$, то дискриминант квадратного трехчлена, образованного первыми тремя слагаемыми в данном неравенстве, отрицателен, а значит, этот трехчлен положителен, и неравенство выполнено. Естественно, значение $\lambda = 1/5$ носит характер достаточного и может быть завышенным. Как показали расчеты на ЭВМ левой части неравенства (4), минимальное значение параметра λ , гарантирующее ее неотрицательность, равно 0.19122.

Для получения абсолютно устойчивой схемы необходимо также обеспечить выполнение условия $-1 \leq \rho(x)$ при $x > 0$, которое эквивалентно неравенству

$$\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{12}\right)(1 + \lambda x^2) + \frac{(2-x)x^3}{24} \leq 2(1 + \xi x^4)(1 + \lambda x^2).$$

Подбор на ЭВМ минимального значения параметра ξ , гарантирующего выполнение этого неравенства, дает $\xi = 1.4130 \cdot 10^{-3}$ для $\lambda = 1/5$ и $\xi = 1.3932 \cdot 10^{-3}$ для $\lambda = 0.19122$.

Данная схема имеет четвертый порядок аппроксимации при любых значениях параметров ξ , λ . Поэтому можно использовать округленные значения параметров, например $\xi = 1.5 \cdot 10^{-3}$ и $\lambda = 0.2$, которые, как и точные значения, гарантируют абсолютную устойчивость схемы.

2. Схемы для уравнения переноса

В данном разделе строятся схемы, которые могут рассматриваться как обобщение схемы (1)–(4) для решения обыкновенных уравнений. При численном исследовании разрывных решений необходимо введение диффузии в какой-либо форме. Однако предварительный анализ показал, что центрирование по времени диффузионных членов, идентичное центрированию конвективных членов, не порождает абсолютно устойчивую схему. Построение схемы для уравнения с диффузией оказалось существенно более сложной задачей. Поэтому пока мы ограничимся рассмотрением m -мерного уравнения переноса без диффузии

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{l=1}^m a_l \frac{\partial u}{\partial x_l} = 0, \quad a_l = \text{const}, \quad l = 1, \dots, m, \quad 1 \leq m \leq 3. \quad (6)$$

Введем разностный оператор конвекции

$$R_1 u = \sum_{l=1}^m a_l \Delta_l^0 \left(1 - \frac{\delta_l^+ \delta_l^-}{6}\right) u = \sum_{l=1}^m a_l \frac{\partial u}{\partial x_l} + O(h^4), \quad (7)$$

$h = \max_{l=1}^m (\Delta x_l)$, и вспомогательные операторы, используемые при построении схемы:

$$R_2 = \sum_{l=1}^m a_l^2 \Delta_l^+ \Delta_l^-, \quad R_4 = \sum_{l=1}^m a_l^4 (\Delta_l^+ \Delta_l^-)^2.$$

Здесь и далее приняты обозначения $\delta_l^\pm u = \pm [u(x_1, \dots, x_l \pm \Delta x_l, \dots, x_m) - u(x_1, \dots, x_m)]$, $\Delta_l^\pm u = \delta_l^\pm u / \Delta x_l$. Рассмотрим четырехшаговую схему

$$\frac{u^{(1)} - u^n}{\tau/2} + R_1 u^n = 0, \quad (8)$$

$$(1 - \lambda\tau^2 R_2) \frac{u^{(2)} - u^{(1)}}{\tau/2} + R_1(u^{(1)} - u^n) = 0, \quad (9)$$

$$\frac{u^{(3)} - u^n}{\tau} + R_1 u^{(2)} = 0, \quad (10)$$

$$(1 + \xi\tau^4 R_4) \frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} + R_1 \left(\frac{u^n}{6} + \frac{u^{(1)}}{3} + \frac{u^{(2)}}{3} + \frac{u^{(3)}}{6} \right) = 0. \quad (11)$$

В этих уравнениях ξ, λ — параметры, которые определим далее. Исключим промежуточные функции $u^{(k)}$. В результате можно получить

$$(1 + \tau^4 R_4 \xi)(1 - \lambda\tau^2 R_2) \frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} + (1 - \lambda\tau^2 R_2) \left(R_1 - \frac{\tau}{2} R_1^2 + \frac{\tau^2}{12} R_1^3 \right) u^n + \left(\frac{\tau^2}{12} R_1^3 - \frac{\tau^3}{24} R_1^4 \right) u^n = 0. \quad (12)$$

Для исследования порядка по времени умножим это уравнение на оператор $(1 - \lambda\tau^2 R_2)^{-1}$ и перегруппируем слагаемые:

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} + \left(R_1 - \frac{\tau}{2} R_1^2 + \frac{\tau^2}{6} R_1^3 - \frac{\tau^3}{24} R_1^4 \right) u^n + [(1 - \lambda\tau^2 R_2)^{-1} - 1] \left(R_1^3 \frac{\tau^2}{12} - R_1^4 \frac{\tau^3}{24} \right) u^n + \tau^4 R_4 \xi \frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = 0.$$

Первые два слагаемые этого уравнения соответствуют схеме четвертого порядка по времени, так как второе слагаемое содержит разложение по времени в ряд Тэйлора с нужным количеством членов. Третье и четвертое слагаемые этого уравнения могут быть оценены как $O(\tau^4)$, поэтому сконструированная схема имеет четвертый порядок по времени.

Для исследования устойчивости применим метод Фурье. Представив решение в виде $u^n = \rho^n \exp\left(\sum_{l=1}^m \alpha_l i_l j\right)$, $0 \leq \alpha_l \leq 2\pi$, $i_l = 1, \dots, I_l$, $j = \sqrt{-1}$, получаем множитель перехода для схемы (12) $\rho = 1 - jP_1 B/A - C/A$, где

$$C = Z \frac{P_1^2}{2} - \frac{P_1^4}{24}; \quad A = Z(1 + \xi P_4); \quad B = Z \left(1 - \frac{P_1^2}{12} \right) - \frac{P_1^2}{12}; \quad Z = 1 + \lambda P_2;$$

$$P_1 = \sum_{l=1}^m a_l \sin \alpha_l \left(1 + \frac{q_l}{6} \right) \frac{\tau}{\Delta x_l}; \quad P_2 = \sum_{l=1}^m \left(\frac{a_l \tau}{\Delta x_l} \right)^2 q_l; \quad P_4 = \sum_{l=1}^m \left(\frac{a_l \tau}{\Delta x_l} \right)^4 q_l^2, \quad (13)$$

т. е. P_1 и P_4 являются спектральными образами операторов τR_1 и $\tau^4 R_4$, P_2 есть спектральный образ оператора $-\tau^2 R_2$, $q_l = 2 - 2 \cos \alpha_l$. Условие устойчивости $|\rho| \leq 1$ для этой схемы записывается в виде $(1 - C/A)^2 + (P_1 B/A)^2 \leq 1$ или $P_1^2 B^2 \leq C(2A - C)$, т. е.

$$P_1^2 \left[Z \left(1 - \frac{P_1^2}{12} \right) - \frac{P_1^2}{12} \right]^2 \leq \left(Z \frac{P_1^2}{2} - \frac{P_1^4}{24} \right) \left[2(1 + \xi P_4)Z - Z \frac{P_1^2}{2} + \frac{P_1^4}{24} \right]. \quad (14)$$

Отметим соотношения между величинами P_1 , P_2 , P_4 , которые потребуются при исследовании устойчивости [9, 10]:

$$P_1^2 \leq \beta P_2, \quad \beta = m(1 + 7/243), \quad P_2^2 \leq \beta P_4. \quad (15)$$

Теорема. *Схема (8)–(11) устойчива при любом шаге по времени τ , если*

$$\lambda = \beta/6, \quad \xi = \beta^3/72.$$

Действительно, подставив эти выражения в неравенство (14), заменив P_4 на его минимальное ввиду второго из неравенств (15) значение P_2^2/β и перегруппировав слагаемые, можно получить

$$0 \leq P_1^2 \left[\frac{\beta}{72} P_2 (\beta P_2 - P_1^2) \left(1 + \frac{\beta}{6} P_2 - \frac{P_1^2}{12} \right) + \frac{P_1^4}{144} \left(2 + \frac{\beta}{4} P_2 - \frac{P_1^2}{4} \right) + \right. \\ \left. + \frac{\beta}{432} P_2 \left(\beta^2 P_2^2 - \frac{P_1^4}{4} \right) + \frac{\beta^2}{2592} P_2^2 \left(\beta^2 P_2^2 - \frac{\beta}{2} P_2 P_1^2 - \frac{P_1^4}{2} \right) \right].$$

Выражения в каждой из круглых скобок являются невозрастающими функциями аргумента $P_1^2 \geq 0$. Следовательно, эти выражения принимают минимальное значение при максимально возможном значении аргумента P_1^2 , равном в силу первого из неравенств (15) βP_2 . Прямой подстановкой можно убедиться, что минимальные значения каждого из этих выражений неотрицательны, и нетрудно видеть, что правая часть данного неравенства поэтому неотрицательна, т. е. оно верно. Теорема доказана. ■

Таким образом, соотношения $\lambda = \beta/6$, $\xi = \beta^3/72$ обеспечивают устойчивость схемы (8)–(11). В одномерном случае эти схемные параметры принимают значения $\lambda = c/6$, $\xi = c^3/72$, в двумерном случае — $\lambda = c/3$, $\mu = c^3/9$, в трехмерном — $\lambda = c/2$, $\xi = c^3/8$, $c = 250/243$. Следует отметить, эти значения обеспечивают достаточные, но не необходимые условия устойчивости. Возможно, существуют и другие наборы параметров исходной схемы, удовлетворяющие условию устойчивости в приближении метода Фурье.

Сделаем некоторые замечания по данной схеме.

1. Числовой коэффициент $250/243$ определяется использованием формул (7) четвертого порядка аппроксимации для конвективных слагаемых уравнения (6). Возможны другие варианты аппроксимации оператора конвективного переноса (естественно, лишь антисимметричные, имеющие чисто мнимый спектральный образ). В этом случае приведенное выше доказательство устойчивости остается справедливым, лишь изменится данный коэффициент.

2. В многомерном случае реализация схемы достаточно проста лишь при использовании факторизации стабилизирующих операторов. Однако для факторизованной схемы приведенное выше доказательство устойчивости теряет справедливость.

3. Факторизация стабилизирующих операторов не портит аппроксимационных свойств схемы как по времени, так и по пространству.

4. Схема имеет свойство полной аппроксимации, т. е. стационарное решение не зависит от временного шага, что позволяет использовать схему в рамках метода установления и выбирать оптимальный шаг по времени в соответствии с критерием наиболее высокой скорости сходимости.

3. Схемы для уравнения переноса с диффузией

Необходимым условием конкурентоспособности схем повышенной точности для интегрирования гиперболических уравнений первого порядка является способность качественного моделирования разрывных решений. Для подавления появляющихся при этом осцилляций необходимо вводить искусственные диффузионные слагаемые. Однако оказалось, что естественные наиболее устойчивые, казалось бы, способы центрирования их по времени не приводят к успеху. Анализ устойчивости различных вариантов аппроксимации диффузионных членов позволил построить нижеприведенную схему. Итак, рассмотрим m -мерное уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{l=1}^m a_l \frac{\partial u}{\partial x_l} = \sum_{l=1}^m d_l \frac{\partial^2 u}{\partial x_l^2}, \quad a_l = \text{const}, \quad d_l = \text{const}, \quad l = 1, \dots, m.$$

Введем разностный диффузионный оператор

$$Vu = \sum_{l=1}^m d_l \Delta_l^- \Delta_l^+ u = \sum_{l=1}^m d_l \frac{\partial^2 u}{\partial x_l^2} + O(h^2).$$

Рассмотрим четырехшаговую схему

$$\frac{u^{(1)} - u^n}{\tau/2} + R_1 u^n = Vu^n, \quad (16)$$

$$(1 - \lambda \tau^2 R_2) \frac{u^{(2)} - u^{(1)}}{\tau/2} - \left(\frac{\tau}{2} V - \tau^3 \mu V R_2 \right) \frac{u^{(2)} - u^n}{\tau/2} + R_1 (u^{(1)} - u^n) = 0, \quad (17)$$

$$\frac{u^{(3)} - u^n}{\tau} + R_1 u^{(2)} = Vu^n, \quad (18)$$

$$(1 + \xi \tau^4 R_4 - \eta \tau V + \tau^3 \gamma V P_2) \frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} + 2\eta V (u^{(1)} - u^n) + R_1 \left(\frac{u^n}{6} + \frac{u^{(1)}}{3} + \frac{u^{(2)}}{3} + \frac{u^{(3)}}{6} \right) = Vu^{(2)}. \quad (19)$$

Здесь ξ , λ — параметры, заданные в предыдущем разделе, μ , γ и η определим ниже. Отметим, что при любых значениях этих трех параметров диффузионные члены аппроксимируются со вторым порядком. Для исследования устойчивости применим метод Фурье. Представив решение в виде $u^n = \rho^n \exp\left(\sum_{l=1}^m \alpha_l i_l j\right)$, $0 \leq \alpha_l \leq 2\pi$, $i_l = 1, \dots, I_l$, $j = \sqrt{-1}$, получаем множитель перехода для схемы (16)–(19) $\rho = 1 - j P_1 B/A - C/A$, где

$$B = X \left(1 - \frac{W}{3}\right) - P_1^2 \left(\frac{Z}{12} - \frac{W}{24}\right) - \left(\frac{1}{12} - \frac{W}{24}\right) (2WZ + P_1^2), \quad X = Z + W/2 + \mu W P_2;$$

$$C = X \left(W + \frac{P_1^2}{3}\right) - P_1^2 \left(\frac{WZ}{12} + \frac{P_1^4}{24}\right) + P_1^2 \left(\frac{1}{12} - \frac{W}{24}\right) (2Z - W);$$

$$A = X(1 + \xi P_4 + \eta W + \gamma W P_2), \quad W = \sum_{l=1}^m d_l \tau q_l / \Delta x_l^2, \quad q_l = 2 - 2 \cos(\alpha_l),$$

величины P_1, P_2, P_4, Z определены формулами (13).

Условие устойчивости $|\rho| \leq 1$ для этой схемы записывается в виде $(1 - C/A)^2 + (P_1 B/A)^2 \leq 1$, или $P_1^2 B^2 \leq C(2A - C)$, т. е.

$$\begin{aligned} & P_1^2 \left[X \left(1 - \frac{W}{3} \right) - P_1^2 \frac{Z - W + 1}{12} + \left(\frac{W}{2} - 1 \right) \frac{ZW}{6} \right]^2 \leq \\ & \leq \left[2X(1 + \xi P_4 + \eta W + \gamma W P_2) - X \left(W + \frac{P_1^2}{3} \right) + P_1^2 \left(\frac{ZW}{12} + \frac{P_1^2}{24} \right) - P_1^2 \left(1 - \frac{W}{2} \right) \left(\frac{Z}{6} - \frac{W}{12} \right) \right] \times \\ & \quad \times \left[X \left(W + \frac{P_1^2}{3} \right) - P_1^2 \left(\frac{ZW}{12} + \frac{P_1^2}{24} \right) + P_1^2 \left(1 - \frac{W}{2} \right) \left(\frac{Z}{6} - \frac{W}{12} \right) \right]. \end{aligned} \quad (20)$$

При $W = 0$ это неравенство превращается в уже доказанное неравенство (14). Можно несколько упростить анализ устойчивости, заменив P_4 на меньшее ввиду второго из неравенств (15) выражение P_2^2/β . Рассмотрев асимптотический случай большой диффузии $W \rightarrow \infty$, можно показать, что существуют по меньшей мере следующие два набора свободных параметров, гарантирующие выполнение неравенства (20) в этом случае, а именно $\mu = \beta/24, \gamma = \beta/36, \eta = 1/3$ и $\mu = \beta/72, \gamma = \beta/18, \eta = 1/2$. Однако проверка на ЭВМ этого неравенства во всей области изменения переменных $P_1^2 \geq 0, P_2 \geq P_1^2/\beta, Z \geq 0$ показала, что для каждого из приведенных выше наборов параметров существуют значения переменных P_1^2, P_2, Z , при которых неравенство не выполняется, т. е. устойчивость схемы не обеспечивается. Далее с помощью ЭВМ был проведен поиск значений параметров μ и γ , гарантирующих выполнение неравенства (20). В результате перебора нескольких десятков вариантов вместо указанных выше двух наборов получены следующие два, обеспечивающие абсолютную устойчивость схемы: $\mu = \beta/12, \gamma = \beta/22, \eta = 1/3$ и $\mu = \beta/15, \gamma = \beta/18, \eta = 1/2$. По-видимому, представляет интерес задача минимизации значений параметров стабилизирующих операторов с определением единственного оптимального их набора. Ее решение здесь не производилось.

4. Численное решение многомерного уравнения переноса

Итак, абсолютно устойчивые схемы для линейных уравнений построены. Однако при численном решении как линейных, так и нелинейных задач возникают дополнительные проблемы. Основной из них является необходимость подавления осцилляций вблизи разрывов решения. В принципе для этой цели разработаны эффективные алгоритмы [6], но они основаны лишь для явных схем или неявных схем с простейшими стабилизирующими операторами. Здесь для подавления осцилляций будет использоваться схемная диффузия в виде параметрических комбинаций слагаемых низкого и высокого порядков [11, 12]. Параметр, переключающий режимы диффузии, будет вычисляться локально по соотношению градиентов решения.

Рассмотрим двумерное линейное уравнение переноса

$$\partial f / \partial t + \partial(a^x f) / \partial x + \partial(a^y f) / \partial y = 0, \quad a^x = a^x(x, y), \quad a^y = a^y(x, y).$$

Для его решения используется аналог схемы (16) – (20). Однако реализация схемы более удобна при максимальной однородности шагов схемы. Этой однородности у схемы (16) – (20) нет, так как второй шаг соответствует разности двух уравнений. Поэтому в нижеприведенной схеме произведена обратная операция, т. е. второе уравнение соответствует сумме уравнений (16) и (17).

Используя нелинейную диффузию в консервативной форме, запишем

$$\begin{aligned} \frac{u^{(1)} - u^n}{\tau/2} + R_1 u^n &= V^n u^{(2)}, \\ (1 - \lambda \tau^2 R_{2x} - \frac{\tau}{2} V_x^n + 2\tau^3 \mu V_x^n R_{2x}^n) (1 - \lambda \tau^2 R_{2y} - \frac{\tau}{2} V_y^n + 2\tau^3 \mu V_y^n R_{2y}^n) \frac{u^{(2)} - u^n}{\tau/2} + \\ &+ 2\lambda \tau R_2^n (u^{(1)} - u^n) + R_1 u^{(1)} = V^n u^n, \\ \frac{u^{(3)} - u^n}{\tau} + R_1 u^{(2)} &= V^n u^n, \\ (1 + \xi \tau^4 R_{4x}^{(2)} - \frac{\tau}{2} V_x^{(2)} + \tau^3 2\gamma V_x^{(2)} R_{2x}^{(2)}) (1 + \xi \tau^4 R_{4y}^{(2)} - \frac{\tau}{2} V_y^{(2)} + \tau^3 2\gamma V_y^{(2)} R_{2y}^{(2)}) \frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} + \\ &+ V^{(2)} (u^{(1)} - u^n) + R_1 \left(\frac{f^n}{6} + \frac{f^{(1)}}{3} + \frac{f^{(2)}}{3} + \frac{f^{(3)}}{6} \right) = V^{(2)} u^{(2)}. \end{aligned}$$

Здесь $\xi = \beta^3/72$, $\lambda = \beta/6$, $\mu = \beta/15$, $\gamma = \beta/18$ – параметры, заданные в предыдущих разделах; η положен равным $1/2$; R_1 – разностный оператор конвекции, отличающийся от оператора (7) лишь внесением переменных коэффициентов с целью сохранения консервативности под оператор разностного дифференцирования

$$R_1 u_{il} = \Delta_x^0 (1 - \delta_x^- \delta_x^+ / 6) a_{il}^x u_{il} + \Delta_y^0 (1 - \delta_y^- \delta_y^+ / 6) a_{il}^y u_{il};$$

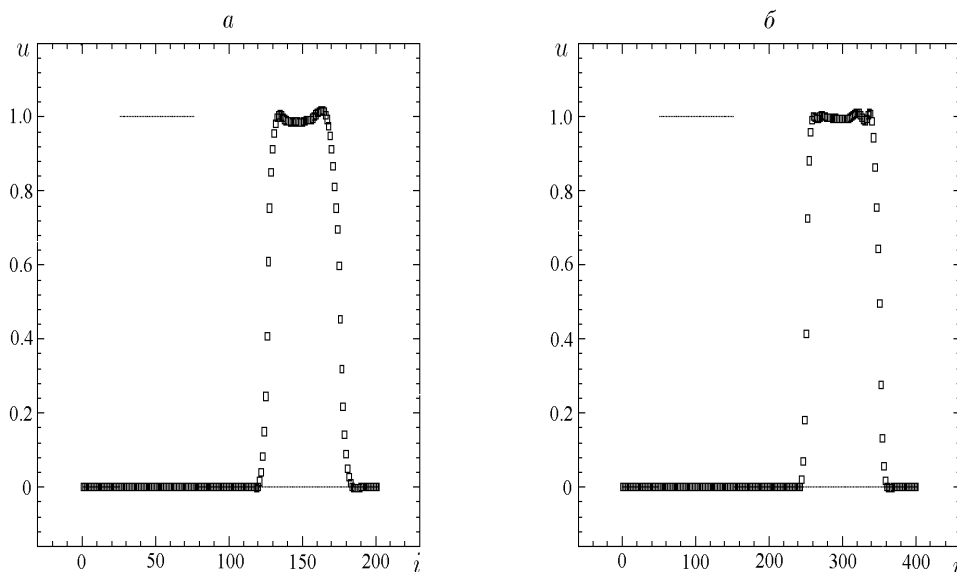
V^k – квазилинейный оператор, связанный с диффузионной правой частью уравнений соотношением $V^{(k)} u^{(k)} = \Delta_x^- d_{i+1/2}^{(kx)} + \Delta_y^- d_{l+1/2}^{(ky)}$; $d^{(k)}$ – искусственные адаптивные диффузионные потоки, удовлетворяющие трем условиям [11]. Во-первых, они имеют высокий порядок (пятый в данном случае) на “гладких” решениях и первый возле разрывов; во-вторых, они порождают неотрицательные стоки разностной “энергии”; в-третьих, они могут быть тождественно преобразованы к двухточечному выражению с неотрицательными коэффициентами. В [11] получены формулы

$$d_{i+1/2}^x = \frac{1}{2} (2 - g_{i,l}^x - g_{i+1,l}^x) \delta_x^+ u_{il} + \frac{1}{32} \delta_x^+ \delta_x^- g_{il}^x g_{i+1,l}^x \delta_x^+ \delta_x^- \delta_x^+ u_{il},$$

где $0 \leq g_{il} \leq 1$ – индикаторы локальной гладкости – вычисляются следующим образом:

$$\begin{aligned} g_{il} &= \max[0, \min(as_i^+, s_i^-, 1) - c] / (1 - c), \\ s_i^+ &= [(\delta^- u_{il})(\delta^+ u_{il}) + e_p^2] / [(\delta^+ u_{il})^2 + 10^{-9}], \\ s_{il}^- &= [(\delta^+ u_{il})(\delta^- u_{il}) + e_u^2] / [(\delta^- u_{il})^2 + 10^{-9}]; \end{aligned}$$

константы a и c позволяют регулировать свойства диффузии; параметр e_p предназначен для предотвращения понижения порядка диффузии на гладких экстремумах или участках почти постоянного решения. По результатам пробных расчетов были выбраны следующие значения эмпирических величин: $c = 0.4$, $a = 1.3$, $e_u = 2(u^{\max} - u^{\min})$.



Сечение $x = 0$: сетка 201×201 (а), сетка 401×401 (б).

С помощью описанной схемы численно решалось уравнение переноса с коэффициентами $a^x = -y$, $a^y = x$, которые соответствуют вращению произвольного начального распределения вокруг точки $x = 0$, $y = 0$ с единичной угловой скоростью. Расчетная область является квадратом $-1/2 \leq x \leq 1/2$, $-1/2 \leq y \leq 1/2$ и содержит 201×201 и 401×401 узлов. Начальные данные представляют цилиндр единичной высоты радиуса $1/8$ с центром в точке $x = 0$, $y = 1/4$ на нулевом фоне. На рисунке приведены расчетные результаты для сечения $x = 0$. Точками изображено начальное распределение, прямоугольниками — результаты расчета на момент времени $t = \pi$, когда исходная картина должна развернуться на 180° относительно центра расчетной области. На рис. а приводятся результаты для сетки 201×201 , сделано 100 шагов по времени, на рис. б — для сетки 401×401 , сделано 200 временных шагов, рисуется каждый второй узел. В обоих случаях максимальное локальное число Куранта равно 3.16.

Итак, представленная в работе схема четвертого порядка действительно позволяет решать уравнение переноса при числах Куранта, больших единицы, она сохраняет устойчивость и аппроксимационные свойства при факторизации и поэтому может быть эффективной при решении многомерных задач, гиперболических и параболических.

Список литературы

- [1] РУСАНОВ В. В. Разностные схемы третьего порядка точности для сквозного расчета разрывных решений // Докл. АН СССР. 1968. Т. 180, №6. С. 1303–1305.
- [2] BURSTEIN S. Z., MIRIN A. A. Third order difference methods for hyperbolic equations // J. Comp. Phys. 1970. Vol. 5, No. 3. P. 547–571.
- [3] KUTLER P., LOMAX H., WARMING R. Computation of space shuttle flow fields using noncentered finite-difference schemes // AIAA paper. 1972. No. 72–193. 25 p.

- [4] SHU C.-W. Total-variation-diminishing time discretizations // SIAM J. Sci. Stat. Comp. 1988. Vol. 9, No. 6. P. 1073–1084.
- [5] OSHER S., SHU C.-W. Efficient implementation of essentially nonoscillatory shock-capturing schemes // J. Comp. Phys. 1988. Vol. 77, No. 2. P. 439–471.
- [6] Пинчуков В. И., Ч.-В. Шу. Численные методы высоких порядков для задач аэрогидродинамики. Новосибирск: Изд-во Сиб. отд-ния РАН, 2000. 232 с.
- [7] Толстых А. И. Компактные разностные схемы и их приложения к проблемам аэрогидродинамики. М.: Наука, 1990. 230 с.
- [8] Пинчуков В. И. Компактная схема шестого порядка для решения уравнений Эйлера в криволинейных координатах // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1998. Т. 38, №10. С. 1717–1720.
- [9] Пинчуков В. И. О неявных схемах типа Рунге — Кутты третьего порядка по времени // Вычисл. технологии. 1999. Т. 4, №2. С. 59–73.
- [10] Пинчуков В. И. Абсолютно устойчивые схемы Рунге — Кутты третьего порядка // ЖВМ и МФ. 1999. Т. 38, №11. С. 1855–1868.
- [11] Пинчуков В. И. О численном исследовании трансзвуковых турбулентных течений возле крыла неявными схемами высоких порядков // Вычисл. технологии. 2001. Т. 6, №2. С. 110–121.
- [12] Пинчуков В. И. Нелинейные сеточные фильтры и их использование в схемах высоких порядков для задач аэродинамики // Мат. моделирование. 1999. Т. 10, №11. С. 111–115.

Поступила в редакцию 11 июля 2001 г.