

# О ДВУХ ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДАХ РЕШЕНИЯ МНОГОТОЧЕЧНЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ\*

С. К. ГОЛУШКО, В. В. ГОРШКОВ, А. В. ЮРЧЕНКО

*Институт вычислительных технологий СО РАН, Новосибирск, Россия*

e-mail: golushko@ict.nsc.ru

The application of spline-collocation and discrete orthogonalization methods for solving multipoint boundary value problems, appearing at modeling thin-walled composite structure's behavior, is investigated. Linear and nonlinear problems on calculation of stressed-deformed state are solved for composite plates, cylindrical panels and combined shell structures in the framework of classical and non-classical models of plates and shells. The comparison of numerical results, obtained by concerned methods, between themselves and with analytical solutions for layered plates and cylindrical panels.

## Введение

В большинстве случаев краевые задачи, возникающие при расчете напряженно-деформированного состояния композитных пластин и оболочек, обладают рядом особенностей, не позволяющих находить решения в аналитическом виде. Применение численных методов также вызывает ряд затруднений.

Задачи расчета напряженно-деформированного состояния тонкостенных конструкций, в конечном итоге, обычно сводятся к решению краевых задач для линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$\frac{d\mathbf{y}(x)}{dx} = A(x)\mathbf{y}(x) + \mathbf{b}(x), \quad x \in (x_l, x_r) \quad (1)$$

или нелинейных вида

$$\frac{d\mathbf{y}(x)}{dx} = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}(x)), \quad x \in (x_l, x_r) \quad (2)$$

с граничными условиями

$$G_l \mathbf{y}(x_l) = \mathbf{g}_l, \quad G_r \mathbf{y}(x_r) = \mathbf{g}_r. \quad (3)$$

Здесь  $\mathbf{y}(x)$ ,  $\mathbf{f}(x, \mathbf{y}(x))$ ,  $\mathbf{b}(x)$  — вектор-функции размера  $S$ ;  $A(x)$  — матрица размера  $S \times S$ ;  $G_l$ ,  $G_r$  — матрицы размера  $S_l \times S$ ,  $S_r \times S$  ( $S_l + S_r = S$ );  $\mathbf{g}_l$ ,  $\mathbf{g}_r$  — векторы размера  $S_l$ ,  $S_r$ . Порядок системы  $S$  зависит от постановки исходной задачи и используемой модели композитной конструкции.

---

\*Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант №00-15-96172, и Федеральной целевой программы "Интеграция", грант №274.

© С. К. Голушко, В. В. Горшков, А. В. Юрченко, 2002.

Высокий порядок системы, переменные коэффициенты, наличие малых параметров приводят к появлению краевых эффектов. Математически это проявляется в наличии в фундаментальной системе решений как быстро, так и медленно возрастающих и убывающих функций. Это приводит к сильной обусловленности матрицы системы, определяющей произвольные постоянные в общем решении исходной системы дифференциальных уравнений. Такие системы принято называть жесткими, а соответствующие задачи — задачами с погранслоем. При численном решении задач с погранслоем возникают трудности, связанные с неустойчивостью счета. Если для задач Коши проблема преодоления численной неустойчивости разработана достаточно подробно [1, 2], то для многоточечных краевых задач это значительно более сложная проблема.

Ниже рассматриваются численные аспекты применения методов дискретной ортогонализации и сплайн-коллокации к решению краевых задач для жестких линейных и нелинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений, возникающих при решении задач теории пластин и оболочек.

## 1. Описание методов дискретной ортогонализации и сплайн-коллокации

**Метод дискретной ортогонализации** [3] разработан как метод решения двухточечных краевых задач для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. В нем для преодоления проблемы сингулярности матрицы системы алгебраических уравнений, возникающей при поиске произвольных постоянных, вводится механизм ортогонализации компонент решения в дискретном наборе точек интервала решения. Такой механизм не имеет физического обоснования, и поэтому метод не поддается теоретическому анализу. Его практическая ценность неоднократно подвергалась критике [4, 5], но, несмотря на это, он считается одним из перспективных методов решения задач теории тонкостенных конструкций.

Коротко алгоритм метода дискретной ортогонализации решения краевых задач можно описать так. Задача для нелинейной системы дифференциальных уравнений (2) сводится к задаче для линейной системы (1) с помощью итерационного метода Ньютона — Канторовича. Решение исходной задачи ищется в виде  $\mathbf{y}(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{y}^{(k)}(x)$ , а решение для итерации с номером  $k$  находится как решение краевой задачи вида (1), (3) для системы

$$\frac{d\mathbf{y}^{(k)}(x)}{dx} = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}^{(k-1)}(x)) + \frac{d\mathbf{f}}{d\mathbf{y}}(x, \mathbf{y}^{(k-1)}(x))(\mathbf{y}^{(k)}(x) - \mathbf{y}^{(k-1)}(x)).$$

Для решения задачи (1), (3) на области определения  $[x_l, x_r]$  строится сетка с  $J + 1$  узлами  $\xi_j$  ( $j = 0, \dots, J$ ,  $\xi_0 = x_l$ ,  $\xi_J = x_r$ ). На каждом интервале  $[\xi_{j-1}, \xi_j]$  ( $j = 1, \dots, J$ ) решаются  $S_r$  задач Коши для систем уравнений вида  $d\mathbf{y}_{ji}(x)/dx = A(x)\mathbf{y}_{ji}(x)$  ( $i = 1, \dots, S_r$ ) и одна задача для системы вида  $d\mathbf{y}_{j0}(x)/dx = A(x)\mathbf{y}_{j0}(x) + b(x)$ . Для этого используется метод Рунге — Кутты — Мерсона 4-го порядка. Начальные условия  $\mathbf{y}_{ji}(\xi_{j-1})$ ,  $\mathbf{y}_{j0}(\xi_{j-1})$  получаются из решения задач в предыдущем узле путем ортогонализации набора векторов  $\mathbf{y}_{(j-1)i}(\xi_{j-1})$ ,  $\mathbf{y}_{(j-1)0}(\xi_{j-1})$  и нормирования их всех, за исключением  $\mathbf{y}_{(j-1)0}(\xi_{j-1})$ . Ортогонализация производится методом Грама — Шмидта и в суперпозиции с нормированием соответствует применению линейного оператора с верхнетреугольной матрицей  $W_j$  размера  $(S_r + 1) \times (S_r + 1)$ . Векторы  $\mathbf{y}_{0i}(\xi_0)$ ,  $\mathbf{y}_{00}(\xi_0)$  строятся таким образом, чтобы для любого

$\mathbf{c}_0 = \|1, c_{01}, c_{02}, c_{03}\|^\top$  выполнялось условие  $G_l \| \mathbf{y}_{00}(\xi_0), \mathbf{y}_{01}(\xi_0), \mathbf{y}_{02}(\xi_0), \mathbf{y}_{03}(\xi_0) \| \mathbf{c}_0 = \mathbf{g}_l$ . После последовательного решения задач Коши на всех интервалах  $[\xi_{j-1}, \xi_j]$  ( $j = 1, \dots, J$ ) ищется вектор  $\mathbf{c}_J = \|1, c_{J1}, c_{J2}, c_{J3}\|^\top$  путем решения системы алгебраических уравнений  $G_r \| \mathbf{y}_{J0}(\xi_J), \mathbf{y}_{J1}(\xi_J), \mathbf{y}_{J2}(\xi_J), \mathbf{y}_{J3}(\xi_J) \| \mathbf{c}_J = \mathbf{g}_r$ . Остальные векторы  $\mathbf{c}_j = \|1, c_{j1}, c_{j2}, c_{j3}\|^\top$  находятся из соотношений  $\mathbf{c}_j = W_{j+1}^{-1} \mathbf{c}_{j+1}$ . В результате решение задачи на каждом интервале  $[\xi_{j-1}, \xi_j]$  ( $j = 1, \dots, J$ ) задается формулой  $\mathbf{y}(x) = \| \mathbf{y}_{j0}(x), \mathbf{y}_{j1}(x), \mathbf{y}_{j2}(x), \mathbf{y}_{j3}(x) \| \mathbf{c}_j$ .

Метод дискретной ортогонализации реализован авторами в виде пакета прикладных программ GMDO.

**Метод сплайн-коллокации** предназначен для решения многоточечных краевых задач для систем дифференциальных уравнений (2) с граничными условиями вида

$$G_p \mathbf{y}(x_p) = \mathbf{g}_p, \quad p = 0, \dots, P, \quad (4)$$

где  $G_p$  — матрицы размера  $S_p \times S$   $\left( \sum_{p=0}^P S_p = S \right)$ ;  $\mathbf{g}_p$  — векторы размера  $S_p$ . Отметим, что граничные условия (3) являются частным случаем условий (4).

Для решения задачи (2), (4) область определения разбивается на  $J$  подынтервалов точками  $\xi_j$  ( $j = 0, \dots, J$ ) так, чтобы  $\{x_p\} \in \{\xi_j\}$ . На каждом подынтервале  $[\xi_{j-1}, \xi_j]$  выбираются  $Q + 1$  точек коллокации  $\xi_{jq}$  ( $j = 1, \dots, J, \xi_{j0} = \xi_{j-1}, \xi_{jq} = \xi_j$ ). Решение  $\mathbf{u}(x)$  представляется непрерывной кусочно-многочленной функцией  $\mathbf{u}(x)$  порядка  $Q + 1$ , точно удовлетворяющей системе (2) в точках коллокации и граничным условиям (4), что соответствует системе

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{u}}{dx}(\xi_{jq}) &= \mathbf{f}(\xi_{jq}, \mathbf{u}(\xi_{jq})), \\ G_p \mathbf{u}(x_p) &= \mathbf{g}_p. \end{aligned} \quad (5)$$

Система (5) в общем случае нелинейна. Для ее решения используется метод Ньютона — Рафсона. Решение ищется в виде  $\mathbf{u}(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{u}^{(k)}(x)$ , где  $\mathbf{u}^{(k)}(x)$  — кусочно-многочленная функция, являющаяся решением линейной задачи

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{u}^{(k)}}{dx}(\xi_{jq}) - \sum_{i=1}^S \mathbf{v}_i(\xi_{jq}) u_i^{(k)}(\xi_{jq}) &= 0, \\ G_p \mathbf{u}^{(k)}(x_p) &= \mathbf{g}_p. \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь  $\mathbf{v}_i(x) = \partial \mathbf{f} / \partial u_i(x, \mathbf{u}^{(k-1)}(x))$ ,  $u_i(x)$  —  $i$ -я компонента вектор-функции  $\mathbf{u}(x)$ .

В пространстве кусочно-многочленных функций решение системы (6) можно представить в виде линейной комбинации базисных функций, в качестве которых выбираются  $B$ -сплайны:

$$\mathbf{u}^{(k)}(x) = \sum_{i=1}^V \alpha_i B s_i(x). \quad (7)$$

Здесь  $V = (Q + 1)J + 1$  — размерность пространства;  $\alpha_i$  — вектор коэффициентов размерности  $S$ ;  $B s_i$  —  $i$ -й  $B$ -сплайн. После подстановки (7) в (6) получается линейная система алгебраических уравнений для определения коэффициентов  $\alpha_i$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^V L B s_i(\xi_{jq}) \alpha_i &= 0, \\ \sum_{i=1}^V G_p \alpha_i B s_i(x_p) &= \mathbf{g}_p, \end{aligned} \quad (8)$$

где

$$L\mathbf{u}(x) = \frac{d\mathbf{u}(x)}{dx} - \sum_{i=1}^S \mathbf{v}_i(x)u_i(x).$$

Матрица системы уравнений (8) почти блочно-диагональная. Для ее решения применяется метод исключения Гаусса с частичным выбором главного элемента.

Метод сплайн-коллокации реализован в виде пакета прикладных программ COLSYS [6, 7].

## 2. Расчет напряженно-деформированного состояния прямоугольных пластин

Большинство известных аналитических решений теории пластин и оболочек получены для случаев, когда материал конструкции является изотропным и однородным, а сама конструкция имеет каноническую форму. Краевые эффекты при этом либо вообще отсутствуют, либо проявлены очень слабо. В связи с этим большой интерес представляют результаты, полученные на основе неклассической модели многослойных пластин и оболочек [4]. Даже для простейших конструкций, таких как балки, арки, длинные прямоугольные пластины и цилиндрические панели, использование неклассической модели приводит к решению краевых задач для жестких систем уравнений со спектральными радиусами порядка  $10^2$ . Аналитические решения, полученные для изгиба балки и длинной прямоугольной пластины, а также для изгиба арки и цилиндрической панели, содержат наряду с полиномиальными и тригонометрическими экспоненциальные компоненты вида  $\exp(\lambda(x-1))$  (кривая 1 на рис. 1, а),  $\exp(-\lambda x)$  (кривая 2), где  $\lambda$  — спектральный радиус матрицы системы (в случае, приведенном на рис. 1, а,  $\lambda = 155.66$ ).

Рассмотрим задачу изгиба длинной прямоугольной трехслойной пластины длины  $l$  и толщины  $h$ , нагруженной равномерно распределенным внешним давлением. Внешние слои имеют одинаковую толщину  $h_1$  и выполнены из одинакового материала с модулем Юнга  $E_1$  и коэффициентом Пуассона  $\nu_1$ . Внутренний слой толщины  $h_2$  выполнен из материала с модулем Юнга  $E_2$  и коэффициентом Пуассона  $\nu_2$ . Обезразмеренная разрешающая система обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающая поведение длинной пластины [4], имеет 8-й порядок и матрицу с постоянными коэффициентами. Шесть собственных

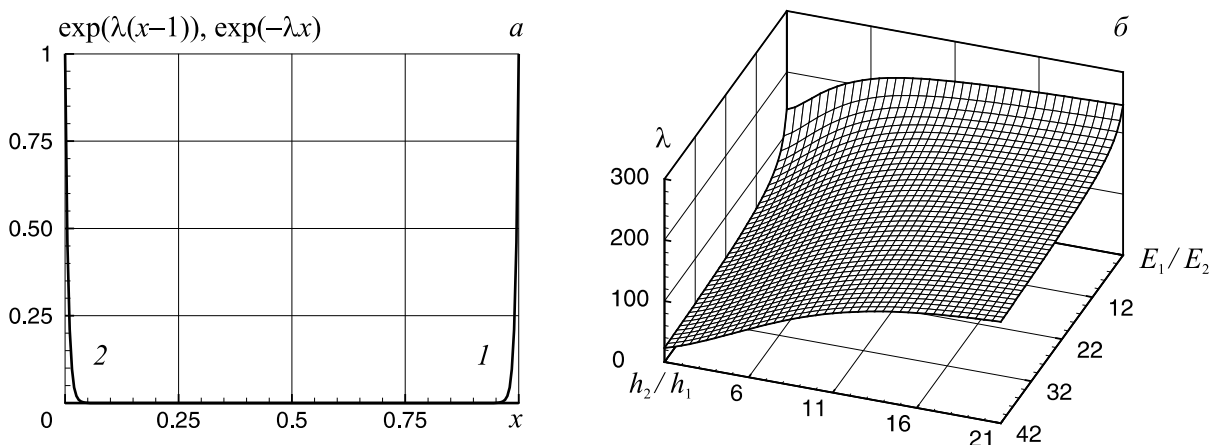


Рис. 1.

значений этой матрицы  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = \lambda_6 = 0$ , в то время как оставшиеся два  $\lambda_7 = -\lambda_8 = \lambda \in \mathbb{R}$ . При этом величина  $\lambda$  пропорциональна отношению  $l/h$  и нелинейно зависит от  $E_1/E_2$  и  $h_2/h_1$  (рис. 1, б).

На рис. 2 приведен вид решения задачи изгиба жестко защемленной на обоих краях пластины в разрешающих функциях, нормированных в равномерной метрике (геометрические и механические параметры пластины:  $l/h = 15$ ,  $h_2/h_1 = 8$ ,  $E_1/E_2 = 10$ ,  $\nu_1 = \nu_2 = 0.3$ ). Сплошные линии на рис. 2 соответствуют  $W_*(x)$ ,  $U_*(x)$ ; штриховые —  $W'_*(x)$ ,  $U'_*(x)$ ; пунктирные —  $W''_*(x)$ ,  $\Pi_*(x)$ ; штрихпунктирные —  $W'''_*$ ,  $\Pi'_*$ , где  $U$ ,  $W$ ,  $\Pi$  — безразмерные обобщенные перемещения. Видно, что получаемые решения имеют ярко выраженные краевые эффекты. Подобные задачи удобно использовать в качестве тестовых при анализе эффективности численных методов.

Представленные в табл. 1 результаты сравнения численных решений с аналитическими показывают, что и метод дискретной ортогонализации, и метод сплайн-коллокации успешно справляются с решением задачи изгиба длинной прямоугольной пластины. Здесь  $\delta$  — относительная погрешность в равномерной метрике,  $J^*$  — общее количество элементов в сетке интегрирующей процедуры для метода дискретной ортогонализации,  $TOL$  — задаваемая пакету COLSYS точность. Сравнение времени, затраченного на вычисления, и достигаемых при этом точностей показывает, что на таких задачах пакет GMDO эффективнее пакета COLSYS.

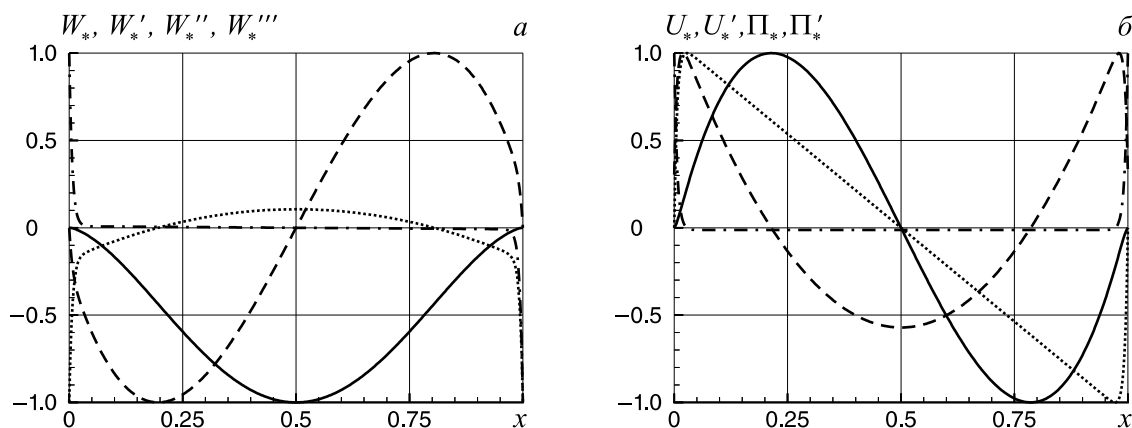


Рис. 2.

Т а б л и ц а 1

Параметр	Относительные погрешности $\delta$ по компонентам			Время, с
	$U$	$W$	$\Pi$	
$J^*$	Пакет GMDO			$t_{gmdo}$
300	$1.77 \cdot 10^{-6}$	$1.61 \cdot 10^{-7}$	$3.69 \cdot 10^{-5}$	0.04
900	$2.33 \cdot 10^{-8}$	$2.12 \cdot 10^{-9}$	$4.86 \cdot 10^{-7}$	0.10
2700	$2.90 \cdot 10^{-10}$	$2.64 \cdot 10^{-11}$	$6.05 \cdot 10^{-9}$	0.32
$TOL$	Пакет COLSYS			$t_{colsys}$
$10^{-2}$	$1.85 \cdot 10^{-6}$	$1.69 \cdot 10^{-7}$	$3.87 \cdot 10^{-5}$	0.19
$10^{-4}$	$7.50 \cdot 10^{-8}$	$6.81 \cdot 10^{-9}$	$1.56 \cdot 10^{-6}$	0.24
$10^{-6}$	$5.46 \cdot 10^{-10}$	$4.96 \cdot 10^{-11}$	$1.14 \cdot 10^{-8}$	0.47

Вид погрешностей для функции  $\Pi$ , получаемых при вычислении пакетом GMDO при  $J^* = 300$ , представлен на рис. 3, *а* и пакетом COLSYS при  $TOL = 10^{-2}$  — на рис. 3, *б*. Для обоих методов наблюдается накопление погрешностей вблизи границ, но для пакета COLSYS этот эффект проявляется в меньшей степени, что связано с наличием в нем процедур анализа погрешностей и построения адаптивных сеток [8]. Подобные процедуры для пакета GMDO пока не реализованы. Опираясь на известное аналитическое решение, был проведен эксперимент по оценке эффективности использования нерегулярных сеток в методе дискретной ортогонализации.

На рис. 4, *а* приведена зависимость шага  $\Delta(x)$  нерегулярной сетки (вариант, содержащий 300 элементов), построенной на основе экспоненциальных функций вида  $(1 + \exp(40(0.12 - x)))^{-1}$ ,  $(1 + \exp(40(0.88 - x)))^{-1}$ . На рис. 4, *б* представлен вид получаемой при использовании этой сетки погрешности для функции  $\Pi$ , в табл. 2 приведены относительные погрешности, полученные на аналогичных сетках, содержащих 300, 900 и 2700 элементов. Применение нерегулярной сетки со сгущением узлов к краям позволило уменьшить получаемые погрешности более чем в 20 тыс. раз по сравнению с регулярными сетками того же размера. Это говорит о высокой эффективности использования нерегулярных сеток при решении задач с сильными краевыми эффектами и необходимости разработки алгоритмов построения наиболее эффективных сеток.

В качестве дополнительного эксперимента были проведены расчеты со значением параметра  $l/h = 1000$ . Спектральный радиус матрицы системы при этом равнялся  $\lambda = 10\,377$ .

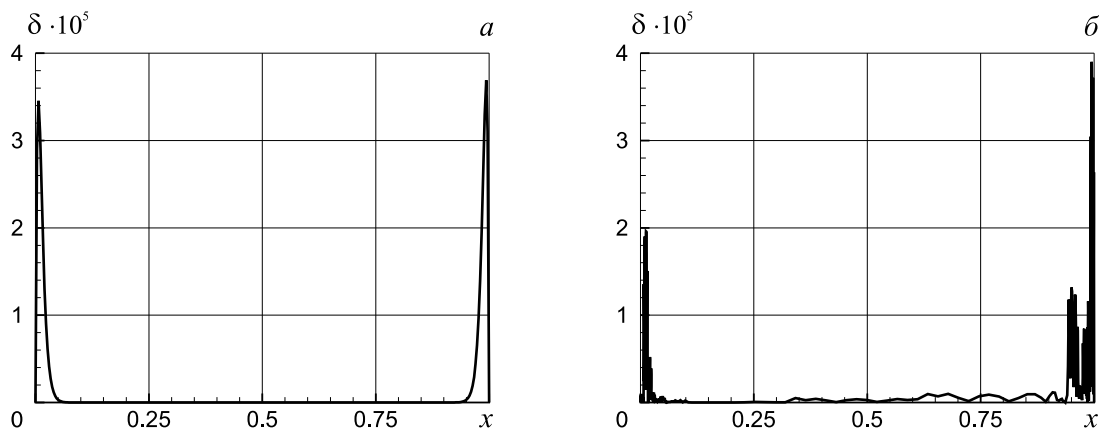


Рис. 3.

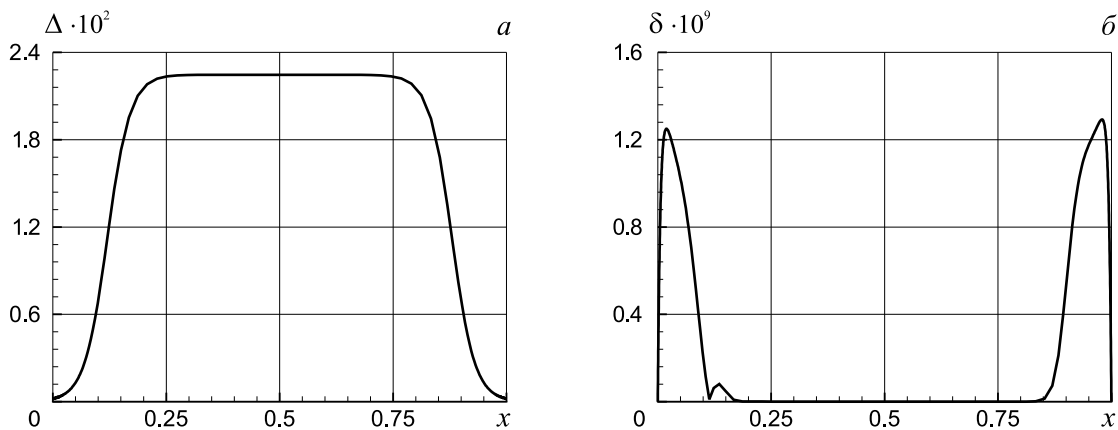


Рис. 4.

Т а б л и ц а 2

Параметр	Относительные погрешности $\delta$ по компонентам			Время, с
	$U$	$W$	$\Pi$	
$J^*$				$t_{\text{gmdo}}$
300	$6.19 \cdot 10^{-11}$	$5.63 \cdot 10^{-12}$	$1.29 \cdot 10^{-9}$	0.05
900	$7.53 \cdot 10^{-13}$	$6.85 \cdot 10^{-14}$	$1.57 \cdot 10^{-11}$	0.12
2700	$9.33 \cdot 10^{-15}$	$8.48 \cdot 10^{-16}$	$1.95 \cdot 10^{-13}$	0.33

Оба метода успешно справились с решением задачи при параметрах счета  $J = 3000$ ,  $J^* = 12000$  для пакета GMDO и  $TOL = 10^{-4}$  для пакета COLSYS за время  $t_{\text{gmdo}} = 1.73$  с,  $t_{\text{colsys}} = 1.74$  с. Максимальные относительные погрешности при этом равнялись  $\delta_{\text{max}} = 2.37 \cdot 10^{-4}$ ,  $\delta_{\text{max}} = 1.03 \cdot 10^{-6}$  для пакетов GMDO и COLSYS соответственно.

### 3. Расчет напряженно-деформированного состояния круговых цилиндрических панелей

Рассмотрим задачу изгиба длинной слоистой круговой цилиндрической панели, нагруженной равномерно распределенным внешним давлением.

Обезразмеренная разрешающая система обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающая поведение цилиндрической панели [4], имеет 8-й порядок и постоянную матрицу коэффициентов. Собственные значения матрицы имеют вид  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ ,  $\lambda_3 = \lambda_4 = i$ ,  $\lambda_5 = \lambda_6 = -i$ ,  $\lambda_7 = -\lambda_8 = \lambda \in \mathbb{R}$ .

В табл. 3 приведены значения  $\lambda$  для трехслойной круговой панели в зависимости от значений  $R/h$  и  $E_1/E_2$  при  $\eta = \pi/4$ , где  $-\eta$ ,  $\eta$  — значения углов на левом и правом краях арки,  $R$  — радиус панели. Остальные параметры имеют тот же смысл, что и в задаче изгиба длинной прямоугольной пластины.

Т а б л и ц а 3

$E_1/E_2$	5	15	25	35
$R/h$	Спектральный радиус матрицы $\lambda$			
20	235.2	182.8	158.0	141.6
100	1158.6	899.8	777.3	696.2
1000	11536.9	8959.8	7740.0	6932.3

В табл. 4 приведены относительные погрешности, определенные сравнением численных решений, полученных методом сплайн-коллокации с аналитическими решениями для значений  $R/h = 20$ ,  $E_1/E_2 = 35$ ; здесь  $T_2$ ,  $S_2$  — безразмерные обобщенные усилия.

Т а б л и ц а 4

$TOL$	Относительные погрешности $\delta$ по компонентам				
	$W$	$U$	$\Pi$	$T_2$	$S_2$
$10^{-4}$	$1.18 \cdot 10^{-4}$	$7.57 \cdot 10^{-5}$	$1.03 \cdot 10^{-4}$	$3.46 \cdot 10^{-10}$	$1.08 \cdot 10^{-6}$
$10^{-6}$	$4.74 \cdot 10^{-8}$	$3.69 \cdot 10^{-9}$	$8.39 \cdot 10^{-7}$	$4.18 \cdot 10^{-12}$	$1.12 \cdot 10^{-8}$
$10^{-8}$	$1.13 \cdot 10^{-8}$	$7.93 \cdot 10^{-10}$	$2.06 \cdot 10^{-8}$	$3.24 \cdot 10^{-12}$	$3.01 \cdot 10^{-10}$

#### 4. Расчет напряженно-деформированного состояния параболических рефлекторов

Расчет напряженно-деформированного состояния армированных оболочек вращения ненулевой гауссовой кривизны приводит к решению жестких задач даже при использовании классической теории оболочек. Особенно ярко это проявляется при расчете конструкций в неосесимметричной постановке. Системы обыкновенных дифференциальных уравнений, возникающие после применения метода разделения переменных, имеют 8-й порядок и переменные коэффициенты, содержащие малые параметры, такие как  $h/R_i$  ( $h$  — толщина оболочки,  $R_i$  — главные радиусы кривизны,  $i = 1, 2$ ) и  $E_0/E_n$  ( $E_0$  — модуль Юнга материала связующего,  $E_n$  — модуль Юнга армирующих волокон  $n$ -го семейства,  $n = 1, \dots, N$ ) [9]. Поэтому числа обусловленности  $\Lambda(x)$  матриц  $A(x)$  системы (1) достигают значений порядка  $10^3$ . Кроме того, на величину  $\Lambda(x)$  существенно влияют как механические характеристики элементов композита, так и номер рассчитываемой гармоники. На рис. 5, а приведены зависимости  $\Lambda(x)$  для разных гармоник и различных вариантов исполнения зеркала параболической антенны [9]. Сплошным линиям соответствует зеркало антенны, изготовленное на основе алюминиевой матрицы, штриховым — на основе титановой матрицы, пунктирным — на основе термопластиковой матрицы. Во всех случаях зеркало армировано тремя семействами углеродных волокон. Цифрами обозначены зависимости: 1 — для осесимметричных компонент (на рисунке совпадают), 2 — антисимметричных, 3 — циклически симметричных. Представленная на рис. 5, б зависимость от структурных параметров композита величины  $\Lambda^* = \max_x \Lambda(x)$ , полученная для задач расчета антисимметричных компонент напряженно-деформированного состояния титано-углеродного зеркала, свидетельствует о существенном влиянии структуры армирования на жесткость решаемых задач. Здесь  $\omega_2$  — удельная интенсивность волокон окружного семейства,  $\psi$  — угол укладки волокон спиральных семейств.

В табл. 5 приведены максимальные значения относительных разностей между компонентами численных решений в равномерной метрике  $\delta_{\max}^*$  отдельно по гармоникам. Для представленных в таблице результатов относительная разность не превышает 0.05 %, что позволяет сделать вывод о достаточной точности обоих методов. Сближение результатов при уменьшении шага сетки для метода дискретной ортогонализации и значения  $TOL$  свидетельствует о сходимости методов.

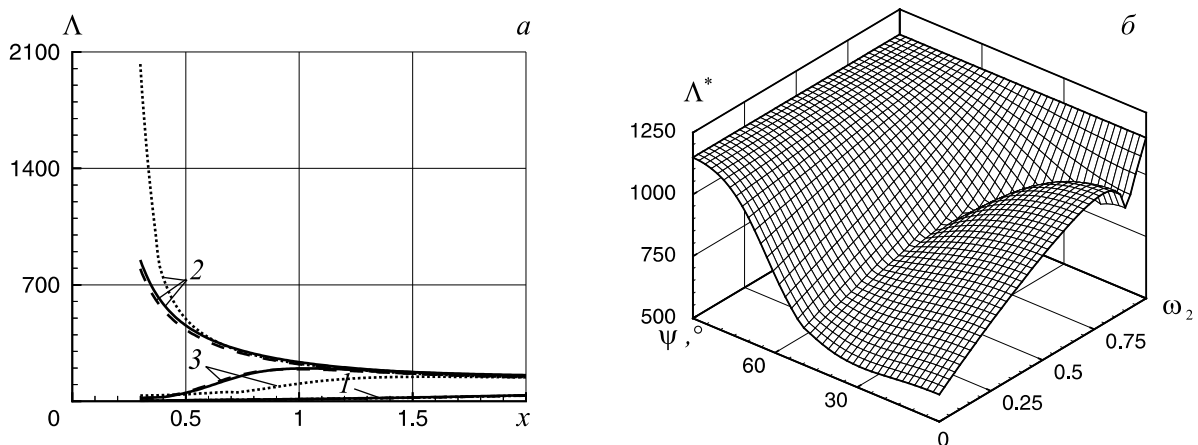


Рис. 5.



Т а б л и ц а 5

Параметры счета		Относительные разности $\delta_{\max}^*$ по гармоникам		
$J^*$	$TOL$	$m = -1$	$m = 0$	$m = 1$
100	$10^{-4}$	$4.46 \cdot 10^{-4}$	$2.81 \cdot 10^{-5}$	$4.17 \cdot 10^{-4}$
200	$10^{-6}$	$1.85 \cdot 10^{-6}$	$1.73 \cdot 10^{-6}$	$1.82 \cdot 10^{-6}$
400	$10^{-8}$	$1.06 \cdot 10^{-7}$	$1.11 \cdot 10^{-7}$	$1.04 \cdot 10^{-7}$

Серия дополнительных расчетов позволила построить таблицу сравнительной эффективности пакетов GMDO и COLSYS (табл. 6). Во всех случаях пакет GMDO в 3–6 раз быстрее COLSYS, хотя при увеличении требований к точности разница во времени счета уменьшается.

Т а б л и ц а 6

$m = -1$			$m = 0$			$m = 1$		
$\delta_{\max}^*$	$t_{\text{colsys}}$	$t_{\text{gmdo}}$	$\delta_{\max}^*$	$t_{\text{colsys}}$	$t_{\text{gmdo}}$	$\delta_{\max}^*$	$t_{\text{colsys}}$	$t_{\text{gmdo}}$
$5.5 \cdot 10^{-4}$	0.10	0.015	$1.4 \cdot 10^{-5}$	0.15	0.03	$5.9 \cdot 10^{-4}$	0.10	0.01
$1.2 \cdot 10^{-6}$	0.28	0.07	$6 \cdot 10^{-7}$	0.27	0.08	$1.2 \cdot 10^{-6}$	0.27	0.07
$4.5 \cdot 10^{-8}$	0.52	0.17	$2.7 \cdot 10^{-8}$	0.59	0.19	$4.4 \cdot 10^{-8}$	0.53	0.17

## 5. Расчет напряженно-деформированного состояния комбинированных конструкций

Рассматривается комбинированная конструкция, состоящая из  $P$  оболочек, сопряженных через кольцевые шпангоуты квадратного сечения. Для отдельной оболочки справедлива либо гипотеза прямой нормали (классическая линейная модель), либо гипотеза прямой линии (нелинейная модель Тимошенко) [10, 11]. В осесимметричной постановке порядок разрешающей системы уравнений  $S = 6$ . Условия сопряжения через шпангоут выписываются из условий равновесия кольца и сопрягаемых с ним оболочек в виде [12, 13]

$$\mathbf{y}^p(x_p) = D_p \mathbf{y}^{p-1}(x_p) + \mathbf{d}_p, \quad p = 1, \dots, P - 1, \quad (9)$$

где коэффициенты матрицы  $D_p$  и вектора  $\mathbf{d}_p$  зависят от способа закрепления сопрягаемых оболочек, геометрических и механических характеристик шпангоута;  $\mathbf{y}^p(x)$ ,  $\mathbf{y}^{p-1}(x)$  — вектор-функции, характеризующие напряженно-деформированное состояние  $p$ -й и  $(p - 1)$ -й оболочек соответственно.

Для расчета сопряженной конструкции, состоящей из  $P$  оболочек, методом сплайн-коллокации, реализованном в пакете COLSYS, необходимо решать многоточечную краевую задачу, включающую  $P$  систем дифференциальных уравнений вида (2) с переменными коэффициентами, связанных  $(P - 1)$  условиями сопряжения через шпангоуты (9) и удовлетворяющих граничным условиям (3). Для конструкций, состоящих из трех оболочек, суммарный порядок системы дифференциальных уравнений равен восемнадцати. В данной ситуации существенным преимуществом метода дискретной ортогонализации является сведение решения многоточечной краевой задачи к последовательному решению ряда двухточечных краевых задач. Таким образом, изменение количества сопрягаемых оболочек не влияет на порядок решаемой пакетом GMDO системы.

Относительные разности  $\delta^*$  между величинами, характеризующими напряженно-деформированное состояние, полученными разными методами, для алюминиевого сосуда, армированного стальной проволокой и образованного сопряжением через стальные шпангоуты двух симметричных параболических и одной цилиндрической оболочек в линейной и нелинейной постановках, представлены в табл. 7. Здесь  $T_1$  — растягивающие усилия,  $M_1$  — изгибающие моменты,  $\vartheta_1$  — углы поворота нормального элемента,  $w$  — прогибы отсчетной поверхности.

Т а б л и ц а 7

Параметры		Относительные разности $\delta^*$ по компонентам			
$J^*$	$TOL$	$T_1$	$M_1$	$w$	$\vartheta_1$
Линейная теория					
200	$10^{-2}$	$2.08 \cdot 10^{-3}$	$2.26 \cdot 10^{-3}$	$1.08 \cdot 10^{-4}$	$1.52 \cdot 10^{-3}$
400	$10^{-4}$	$2.05 \cdot 10^{-5}$	$3.06 \cdot 10^{-5}$	$2.55 \cdot 10^{-6}$	$3.21 \cdot 10^{-5}$
800	$10^{-6}$	$1.37 \cdot 10^{-6}$	$2.12 \cdot 10^{-6}$	$1.51 \cdot 10^{-7}$	$1.98 \cdot 10^{-6}$
Нелинейная теория					
200	$10^{-2}$	$2.38 \cdot 10^{-3}$	$9.47 \cdot 10^{-4}$	$6.57 \cdot 10^{-4}$	$1.09 \cdot 10^{-3}$
400	$10^{-4}$	$7.98 \cdot 10^{-4}$	$4.91 \cdot 10^{-4}$	$2.97 \cdot 10^{-4}$	$6.04 \cdot 10^{-4}$
800	$10^{-6}$	$2.02 \cdot 10^{-4}$	$7.71 \cdot 10^{-5}$	$9.52 \cdot 10^{-5}$	$1.52 \cdot 10^{-4}$

Результаты, полученные различными численными методами для алюминиевого резервуара, армированного углеродными волокнами и образованного последовательным сопряжением эллиптической, цилиндрической и конической оболочек в линейной и нелинейной постановках, представлены в табл. 8.

Т а б л и ц а 8

Параметры		Относительные разности $\delta^*$ по компонентам			
$J^*$	$TOL$	$T_1$	$M_1$	$W$	$\vartheta_1$
Линейная теория					
200	$10^{-2}$	$1.45 \cdot 10^{-3}$	$5.48 \cdot 10^{-3}$	$2.57 \cdot 10^{-3}$	$9.66 \cdot 10^{-3}$
400	$10^{-4}$	$7.43 \cdot 10^{-4}$	$2.70 \cdot 10^{-3}$	$1.28 \cdot 10^{-3}$	$4.98 \cdot 10^{-3}$
800	$10^{-6}$	$3.86 \cdot 10^{-4}$	$1.37 \cdot 10^{-3}$	$6.56 \cdot 10^{-4}$	$2.47 \cdot 10^{-3}$
Нелинейная теория					
200	$10^{-2}$	$1.84 \cdot 10^{-3}$	$4.74 \cdot 10^{-3}$	$5.63 \cdot 10^{-3}$	$9.36 \cdot 10^{-3}$
400	$10^{-4}$	$8.99 \cdot 10^{-4}$	$1.87 \cdot 10^{-3}$	$2.10 \cdot 10^{-3}$	$4.44 \cdot 10^{-3}$
800	$10^{-6}$	$4.60 \cdot 10^{-4}$	$9.61 \cdot 10^{-4}$	$1.06 \cdot 10^{-3}$	$2.21 \cdot 10^{-3}$

## Заключение

Проведено сравнение результатов расчетов напряженно-деформированного состояния слоистых прямоугольных пластин и цилиндрических панелей с известными аналитическими решениями. Для армированных оболочек вращения и сопряженных оболочечных конструкций сравнивались результаты, полученные методами сплайн-коллокации и дискретной

ортогонализации. Установлено, что на задачах средней и малой жесткости пакет GMDO эффективнее пакета COLSYS. Применение нерегулярных сеток для метода дискретной ортогонализации позволяет на несколько порядков уменьшить погрешности счета при тех же вычислительных затратах.

Исследование показало высокую эффективность методов дискретной ортогонализации и сплайн-коллокации при решении многоточечных краевых задач для жестких систем дифференциальных уравнений.

## Список литературы

- [1] ДЕККЕР К., ВЕРВЕР Я. Устойчивость методов Рунге — Кутты для жестких нелинейных дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1988.
- [2] НОВИКОВ Е. А. Явные методы для жестких систем. Новосибирск: Наука, Сиб. предприятие РАН, 1997.
- [3] ГОДУНОВ С. К. О численном решении краевых задач для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений // Успехи мат. наук. 1961. Т. 16, №3. С. 171–174.
- [4] АНДРЕЕВ А. Н., НЕМИРОВСКИЙ Ю. В. Многослойные анизотропные оболочки и пластины. Новосибирск: Наука, 2001.
- [5] ВИНОГРАДОВ Ю. И., МЕНЬКОВ Г. Б. Метод функционального нормирования для краевых задач теории оболочек. М.: Эдиториал УРСС, 2001.
- [6] ASCHER U., CHRISTIANSEN J., RUSSEL R. D. Collocation software for boundary value ODEs // ACM. Trans. on Math. Software. 1981. Vol. 7, No. 2. P. 209–222.
- [7] СЛЕПЦОВ А. Г., ШЕПЕЛЕНКО В. Н. Пакет программ решения многоточечных краевых задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Новосибирск, 1988. (Препр. / СО АН СССР. ИТПМ; №8–88).
- [8] RUSSEL R. D., CHRISTIANSEN J. Adaptive mech selection strategies for solving boundary value problems // SIAM J. Numer. Anal. 1978. Vol. 15, No. 1. P. 59–80.
- [9] ГОЛУШКО С. К., ЮРЧЕНКО А. В. Моделирование поведения главного зеркала композитной параболической антенны // Вычисл. технологии. 2001. Т. 6. Спец. выпуск. Ч. II. С. 750–759.
- [10] ГРИГОРЕНКО Я. М., ВАСИЛЕНКО А. Т. Задачи статики анизотропных неоднородных оболочек. М.: Наука, 1992.
- [11] ГРИГОЛЮК Э. И., МАМАЙ В. И. Нелинейное деформирование тонкостенных конструкций. М.: Наука, Физматлит, 1997.
- [12] МЯЧЕНКОВ В. И., ГРИГОРЬЕВ И. В. Расчет составных оболочечных конструкций на ЭВМ. М.: Машиностроение, 1981.
- [13] ГОЛУШКО С. К., ГОРШКОВ В. В., ЮРЧЕНКО А. В. Анализ поведения армированного сосуда в геометрически нелинейной постановке // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. / РАН. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. 1999. Выпуск 114. С. 155–160.