Вычислительные технологии **Том 7, № 4, 2002**

АНАЛОГ ЦЕНТРИРОВАННОЙ ВОЛНЫ РИМАНА В ТЕПЛОПРОВОДНОМ НЕВЯЗКОМ ГАЗЕ*

С. П. Баутин, Ю. Ю. Чернышов

Уральский государственный университет путей сообщения

Екатеринбург, Россия

e-mail: SBautin@math.usart.ru

With the help of a special nonterminating convergent series one heat-conducting and nonviscous gas flow is presented, which is an analogue of Riemann's centered wave. This flow describes a powerful compression of one dimensional gas layers.

Для описания некоторых плоскосимметричных течений газа применяется центрированная волна Римана — решение системы уравнений газовой динамики, обладающее особенностью: $\mathbf{U}=\mathbf{U}\left(\dfrac{x_1-x_*}{t-t_*}\right)$, где $\mathbf{U}$ есть вектор искомых функций, а x_*, t_* — произвольные константы. С помощью центрированной волны Римана решаются многие содержательные задачи газовой динамики [1]. В случае цилиндрически и сферически симметричных течений аналогичной особенностью обладают автомодельные решения Седова [2]: $\mathbf{U}=\mathbf{U}\left(\dfrac{r}{t-t_*}\right)$, но только в окрестности точки $r=0$. С помощью этих решений описывается, в частности, фокусировка волн сжатия на ось или в центр симметрии [3]. Для описания течения, обладающего свойствами центрированной волны Римана в окрестности точки $r=r_*>0$ или в многомерном случае, применяются специальные сходящиеся бесконечные ряды (подробную библиографию см. в [4]). С помощью таких рядов решаются, например, следующие задачи: о мгновенной остановке поршня, об истечении газа в вакуум, о безударном сильном сжатии газа. В задачах о сильном сжатии газа для более адекватного описания возникающих течений необходимо учитывать равновесное излучение и комптоновский механизм рассеивания фотонов [3, 5].

В данной работе с помощью специального бесконечного сходящегося ряда описано одно течение теплопроводного невязкого газа, аналогичное центрированной волне Римана и передающее сильное сжатие одномерных слоев газа с учетом упомянутых физических эффектов.

Чтобы описать требуемое течение, меняются ролями пространственная переменная и одна из искомых функций. Для получившейся системы задается специальное условие, автоматически обеспечивающее наличие в течении нужной особенности. Решение поставленной задачи выписывается в виде бесконечного ряда. Получены рекуррентные соотношения для коэффициентов рядов. Доказано, что в случае аналитичности входных данных

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект №02–01–01122.

рассматриваемая задача является характеристической задачей Коши стандартного вида [4], для которой справедлив аналог теоремы Ковалевской [4] и, следовательно, построенный ряд локально сходится. Детально анализируется структура коэффициентов рядов, благодаря чему установлена неограниченность области сходимости ряда по одной из переменных. Явный вид первых коэффициентов ряда показывает, что полученное решение в физическом пространстве имеет ту же особенность, что и центрированная волна Римана.

Построенное решение используется для описания безударного сильного сжатия одномерных слоев газа при учете равновесного излучения и комптоновского механизма рассеивания фотонов. Вследствие неограниченности области сходимости ряда доказано, что для любого наперед заданного конечного значения плотности существует ненулевая масса первоначально покоящегося и однородного (с единичной плотностью) газа, которую можно сжать до этого значения плотности. Найден приближенный закон изменения плотности газа на поршне, осуществляющем требуемое сжатие.

Рассматривается идеальный газ при учете равновесного излучения, т. е. в качестве уравнений состояния берутся [5] соотношения

$$p = R\rho T + \frac{\sigma}{3}T^4 \ , \quad e = c_{v0}T + \sigma\frac{T^4}{\rho} \ ; \quad R, \ \sigma, \ c_{v0} = \mathrm{const} > 0. \tag{1}$$

В уравнениях состояния (1) приняты следующие обозначения: p — давление, ρ — плотность, T — температура, e — внутренняя энергия, σ — постоянная Стефана—Больцмана.

Коэффициент теплопроводности κ принимается [5] в соответствии с комптоновским механизмом рассеивания фотонов:

$$\kappa = \frac{2}{(\gamma-1)}\sigma c_{\text{св}}\alpha\frac{T^3}{\rho}, \quad \gamma - 1 = \frac{R}{c_{v0}} > 0, \tag{2}$$

где $c_{\text{св}}$ — скорость света; α — положительная константа, зависящая от выбора системы единиц.

Для описания течений такого газа в качестве независимых термодинамических переменных могут быть взяты ρ и T. Поэтому можно воспользоваться [6] полной системой уравнений Навье—Стокса, в которой коэффициенты динамической и объемной вязкости μ и μ' положены равными нулю. В одномерных течениях ($\nu = 0, 1, 2$ соответствуют случаям плоской, цилиндрической и сферической симметрий) и при введении вместо плотности в качестве искомой функции $\vartheta = \ln\rho$ такая система имеет вид

$$\begin{cases} \vartheta_t + u\vartheta_r + u_r + \nu\frac{u}{r} = 0, \\ u_t + uu_r + \frac{T}{\gamma}\vartheta_r + a(\vartheta, T)T_r = 0, \\ T_t + uT_r + b(\vartheta, T)\left(u_r + \nu\frac{u}{r}\right) = \kappa_0 c(\vartheta, T)\left(T_{rr} + \frac{\nu}{r}T_r - \vartheta_r T_r + \frac{3}{T}T_r^2\right). \end{cases} \tag{3}$$

Здесь

$$a(\vartheta, T) = \frac{1}{\gamma}\left(1 + \kappa_0 k_1 e^{-\vartheta}T^3\right); \quad b(\vartheta, T) = (\gamma - 1)T\frac{(1 + \kappa_0 k_1 e^{-\vartheta}T^3)}{(1 + \kappa_0 k_2 e^{-\vartheta}T^3)};$$

$$c(\vartheta, T) = \frac{e^{-2\vartheta}T^3}{(1 + \kappa_0 k_2 e^{-\vartheta}T^3)}.$$

В рассматриваемой системе при помощи положительных постоянных L, ρ_{00} и T_{00} стандартным образом введены безразмерные переменные, причем за масштаб скорости взята скорость звука в нетеплопроводном газе ($u_{00} = \sqrt{R\gamma T_{00}}$) и тогда

$$\kappa_0 = 2\sigma c_{\text{св}}\alpha \frac{T_{00}^3}{R\rho_{00}^2 u_{00} L} > 0, \quad k_1 = \frac{2\rho_{00} u_{00} L}{3 c_{\text{св}} a} > 0, \quad k_2 = 3(\gamma - 1)k_1 > 0.$$

Для описания особенности, возникающей в течении газа в момент сильного сжатия, как и в случае нетеплопроводного газа [4], меняются ролями переменные ϑ и r. Переменная ϑ (вместе с t) считается независимой переменной, а r становится искомой функцией от t и ϑ, т. е. делается замена переменных $t = t'$, $r = r(t', \vartheta)$ с якобианом преобразования $J = -r_\vartheta$. При такой замене система (3) приобретает вид (штрих у t для облегчения написания опущен)

$$\begin{cases} r(u - r_t) + r u_\vartheta + \nu u r_\vartheta = 0, \\ r_\vartheta u_t + (u - r_t) u_\vartheta + \dfrac{T}{\gamma} + a(\vartheta, T) T_\vartheta = 0, \\ r_\vartheta^2 \left[r_\vartheta T_t + (u - r_t) T_\vartheta + b(\vartheta, T) \left(u_\vartheta + \nu \frac{u}{r} r_\vartheta \right) \right] = \\ = \kappa_0 c(\vartheta, T) \left(r_\vartheta T_{\vartheta\vartheta} - r_{\vartheta\vartheta} T_\vartheta + \frac{\nu}{r} r_\vartheta^2 T_\vartheta - r_\vartheta T_\vartheta + \dfrac{3}{T} r_\vartheta T_\vartheta^2 \right). \end{cases} \tag{4}$$

Решение системы (4) будет строиться в виде ряда

$$\mathbf{U}(t, \vartheta) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{U}_k(\vartheta) \frac{(t - t_*)^k}{k!}, \quad \mathbf{U}_k(\vartheta) = \left. \frac{\partial^k \mathbf{U}(t, \vartheta)}{\partial t^k} \right|_{t = t_*}, \tag{5}$$

где $\mathbf{U} = \{r, u, T\}$ есть вектор искомых функций, а t_* — заданный момент времени.

Чтобы искомое течение обладало особенностью, аналогичной особенности у центрированной волны Римана, график функции $\vartheta = \vartheta(t, r)|_{t=\text{const}}$ при $t \to t_* - 0$ должен переходить в вертикальную прямую [4]

$$r|_{t=t_*} = r_* = \text{const} > 0. \tag{6}$$

Решение системы (4) в виде ряда (5) будет строиться при условии (6), задающем коэффициент $r_0(\vartheta)$.

Чтобы получить уравнения для коэффициентов $r_1(\vartheta$, $u_0(\vartheta)$ и $T_0(\vartheta)$, надо в первых двух уравнениях системы (4) положить $t = t_*$ и учесть условие (6) (третье уравнение при этом обратится в тождество), а третье уравнение продифференцировать один раз по t и также учесть условие (6). В результате получится система из трех дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} r_*(u_0 - r_1) + r_* u_0' = 0, \\ (u_0 - r_1) u_0' + \dfrac{T_0}{\gamma} + a(\vartheta, T_0) T_0{}' = 0, \\ r_1' T_0{}'' - r_1'' T_0{}' - r_1' T_0{}' + \dfrac{3}{T} r_1' \left(T_0{}' \right)^2 = 0, \end{cases} \tag{7}$$

два из которых нелинейны. Нахождение общего решения этой системы представляется достаточно трудной задачей. Далее в качестве функции $T_0(\vartheta)$ берется константа

$$T_0(\vartheta) = T_{01} = \text{const} > 0, \tag{8}$$

обращающая последнее уравнение системы (7) в тождество. Использование именно частного решения (8) обусловлено следующими соображениями. Во-первых, в случае нетеплопроводного газа [4] аналогичная ситуация возникает для энтропии: $S|_{t=t_*} = \text{const}$. Во-вторых, именно это свойство температуры — отсутствие скачка у функции T в момент $t = t_*$ — наблюдается при численных расчетах соответствующей волны сжатия в теплопроводном газе в плоскосимметричном случае [5]. В случае частного решения (8) оставшиеся два уравнения системы (7) имеют следующее общее решение:

$$u_0(\vartheta) = \pm\sqrt{\frac{T_{01}}{\gamma}}\,\vartheta + u_{01}, \quad r_1(\vartheta) = \pm\sqrt{\frac{T_{01}}{\gamma}}\,\vartheta + u_{01} \pm \sqrt{\frac{T_{01}}{\gamma}}. \tag{9}$$

В соотношениях (8), (9) в результате интегрирования появились две произвольные постоянные — T_{01} и u_{01}, а функция $r_1(\vartheta)$ определилась однозначно.

Чтобы получить коэффициенты r_{k+1}, u_k, T_k при $k \geq 2$, необходимо первые два уравнения системы (4) продифференцировать k раз по t и $(k+1)$ раз — третье уравнение из (4), а затем положить $t = t_*$. В результате получатся три уравнения:

$$\begin{cases} r_*(u_k - r_{k+1}) + r_* u_k' = F_k, \\ k r_1' u_k + (u_0 - r_1) u_k' + u_0'(u_k - r_{k+1}) + \dfrac{T_k}{\gamma} + a(\vartheta, T_{01}) T_k{}' = G_k, \\ \kappa_0 r_* T_{01}(k+1) r_1' \left(T_k{}'' - T_k{}'\right) = H_k, \end{cases}$$

где функции F_k, G_k, H_k (ввиду громоздкости их полный вид здесь не приводится) зависят от $r_{\ell+1}$, u_ℓ, T_ℓ $(0 \leq \ell \leq k-1)$ и их производных.

Сначала из третьего уравнения (являющегося дифференциальным) определяется T_k:

$$T_k = T_{k0} + T_{k1} e^{\vartheta} - a_k \int H_k d\vartheta + a_k e^{\vartheta} \int H_k e^{-\vartheta} d\vartheta, \tag{10}$$

где T_{k0}, T_{k1} — произвольные постоянные, a_k — конкретные числа. Затем из второго уравнения, так же как из дифференциального (с предварительным исключением из него r_{k+1} с помощью первого уравнения), находится u_k:

$$u_k = u_{k0} e^{k\vartheta/2} + \frac{e^{k\vartheta/2}}{2} \int \left[\mp\sqrt{\frac{\gamma}{T_{01}}} G_k - \frac{F_k}{r_*}\right] e^{-k\vartheta/2} d\vartheta \tag{11}$$

с одной произвольной постоянной u_{k0}. И, наконец, из первого (как из алгебраического) однозначно определяется r_{k+1}:

$$r_{k+1} = u_k' + u_k - \frac{F_k}{r_*}\ . \tag{12}$$

Возникший при построении ряда (5) произвол равносилен заданию условий

$$u(t, \vartheta)|_{\vartheta=\vartheta_*} = u^0(t), \quad T(t, \vartheta)|_{\vartheta=\vartheta_*} = T^{\,0}(t), \quad T_\vartheta(t, \vartheta)|_{\vartheta=\vartheta_*} = T^{\,1}(t) \tag{13}$$

с произвольными функциями в правых частях, но при этом

$$u^0(t_*) = u_{01}, \quad T^0(t_*) = T_{01}, \quad T^1(t_*) = 0.$$

Теорема. *Если функции $u^0(t)$, $T^{\,0}(t)$, $T^{\,1}(t)$, входящие в условия (13), являются аналитическими в некоторой окрестности точки $t = t_*$, то в некоторой окрестности точки $(t = t_*,\ \vartheta = \vartheta_*)$ ряд (5) сходится.*

При доказательстве данной теоремы задача (4), (6), (13) по известной методике [4] сводится к некоторому стандартному виду, для которого справедлив аналог теоремы Ковалевской о существовании и единственности решения в классе аналитических функций [4].

Для уточнения области сходимости ряда детально анализируются функции r_{k+1}, u_k, T_k.

Лемма. *Коэффициенты r_{k+1}, u_k, T_k при $k \geq 1$ являются многочленами от ϑ и $e^{\vartheta/2}$ и максимальная суммарная степень входящих в них одночленов вида $\vartheta^n e^{m\vartheta/2}$ не превосходит $2k$, т. е. $n + m/2 \leq 2k$. При этом каждая из функций r_{k+1}, u_k, T_k обязательно содержит одночлен вида $e^{2k\vartheta}$ с отличным от нуля коэффициентом перед ним.*

Доказательство леммы производится индукцией по k с использованием формул (10)–(13) и в своих основных чертах повторяет соответствующие доказательства в случае нетеплопроводного газа [4].

С использованием леммы устанавливается, что область сходимости ряда (5), решающего задачу (4), (6), (13), задается формулой

$$Me^{2\vartheta}|t - t_*| < 1, \quad M = \text{const} > 0, \tag{14}$$

т. е. эта область является неограниченной по переменной ϑ.

С учетом формул (8), (9) ряд (5) может быть записан в виде

$$\begin{aligned}
&\vartheta = \left(\mp\sqrt{\frac{\gamma}{T_{01}}}u_{01} - 1\right) \pm \sqrt{\frac{\gamma}{T_{01}}}\frac{(r - r_*)}{(t - t_*)} + (t - t_*)f(t, \vartheta),\\
&u = \left(\pm\sqrt{\frac{T_{01}}{\gamma}}\vartheta + u_{01}\right) + (t - t_*)g(t, \vartheta),\\
&T = T_{01} + (t - t_*)h(t, \vartheta),
\end{aligned} \tag{15}$$

где функции $f(t, \vartheta)$, $g(t, \vartheta)$, $h(t, \vartheta)$ являются аналитическими в области (14). По теореме о существовании неявно заданной функции первое из соотношений (15) определяет ϑ как функцию, зависящую от переменных $(r - r_*)/(t - t_*)$ и t.

Якобиан перехода от переменных t, r к переменным t', ϑ можно записать в виде

$$J = -r_\vartheta = \mp\sqrt{\frac{T_{01}}{\gamma}}(t - t_*) + (t - t_*)^2 q(t, \vartheta),$$

где функция $q(t, \vartheta)$ также является аналитической в области (14). Поэтому при $t = t_*$ якобиан обращается в нуль и для любого конечного значения $\vartheta_0 > 0$ существует $t_0 > 0$ такое, что $J \neq 0$ при $|\vartheta| < \vartheta_0$ и $|t - t_*| < t_0$, $t \neq t_*$.

Следовательно, построенный ряд (5) задает такое течение теплопроводного газа, у которого в физическом пространстве в момент времени $t = t_*$ в точке $r = r_*$ скорость и плотность газа имеют математическую особенность, аналогичную особенности у скорости и плотности газа в центрированной волне Римана. При $t \to t_*$ главная часть этого течения задается первыми слагаемыми из формул (15). В частности, эта главная часть не зависит от значения константы ν, т. е. при всех видах симметрии она одинаковая.

Известным способом [4] можно определить асимптотическое поведение при $t \to t_* - 0$ параметров газа на поршне, который создает волну сжатия, описываемую с помощью ряда (5). Пусть функция $\vartheta = \Theta(t)$ задает значение ϑ на непроницаемом поршне. Тогда имеет место дифференциальное уравнение [4]

$$r_\Theta(t, \Theta)\frac{d\Theta}{dt} + r_t(t, \Theta) = u(t, \Theta). \tag{16}$$

Если в рядах, входящих в уравнение (16), оставить главные слагаемые с коэффициентами, имеющими номера не выше первого, то получится уравнение

$$(t - t_*)\frac{d\Theta(t)}{dt} = -1,$$

общее решение которого следующее:

$$\Theta(t) = -\ln\left(\frac{t_* - t}{\rho_{01}}\right), \quad \rho_{01} = \text{const} > 0. \tag{17}$$

Естественно, что формула (17) является некоторым приближением для искомой зависимости $\Theta(t)$. При использовании этого приближения для значения плотности газа на сжимающем поршне получится приближенная зависимость

$$\rho \approx \frac{\rho_{01}}{t_* - t}.$$

Неограниченность по переменной ϑ области сходимости ряда (5) приводит к следующему математически строго обоснованному выводу: для любой наперед заданной плотности $\rho_* > 1$ существует ненулевая масса покоящегося и однородного (с $\rho = 1$) газа, которую под действием непроницаемого поршня можно безударно сжать до плотности ρ_*. Этот вывод следует из того, что для любого значения $\rho_* > 1$ можно подобрать такую траекторию движения сжимающего поршня, которая при всех значениях $0 \le \Theta \le \vartheta_* = \ln(\rho_*)$ не выходит из области (14) — из области сходимости ряда (5). Тогда значение $t_1 - t_0$ задаст исходную ширину слоя газа с $\rho = 1$, сжатого до $\rho = \rho_*$. Здесь моменты времени t_1 и t_0 такие, что $\Theta(t_1) = \vartheta_*$, $\Theta(t_0) = 0$.

Список литературы

[1] Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н. Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. М.: Наука, 1968.

[2] Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике. М.: Наука, 1981.

[3] Забабахин Е. И., Забабахин И. Е. Явления неограниченной кумуляции М.: Наука, 1988.

[4] Баутин С. П. Математическая теория безударного сильного сжатия идеального газа. Новосибирск: Наука, 1997.

[5] Анучин М. Г. Влияние теплопроводности на неограниченное безударное сжатие плоского газового слоя // Прикладная механика и техническая физика. 1998. Т. 39, №4. С. 25–32.

[6] Баутин С. П. Аналитическое построение течений вязкого газа при помощи последовательности линеаризованных систем Навье—Стокса // Прикладная математика и механика. 1988. Т. 52, вып. 4. С. 579–589.

Поступила в редакцию 11 января 2001 г.