

РАСЧЕТ ПАРАМЕТРОВ СЛОЯ ПЕРЕМЕШИВАНИЯ В ВОДОЕМЕ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ РАЗЛИЧНЫХ СПОСОБОВ АППРОКСИМАЦИИ АДВЕКЦИИ В ВИХРЕРАЗРЕШАЮЩЕЙ МОДЕЛИ*

В. А. Шлычков

Институт водных и экологических проблем СО РАН

Новосибирск, Россия

e-mail: slav@ad-sbras.nsc.ru

The results of numerical experiments with eddy-resolving models are presented. The monotonic and centered-difference advection schemes are used. The equivalence of the schemes is shown with the condition of optimal spectral characteristics of model. Numerical calculations and full-scale data are compared.

Введение

При численном исследовании геофизических пограничных слоев широко используется LES-подход (Large Eddy Simulation) [1], согласно которому в спектре турбулентных движений выделяется крупновихревая часть, подлежащая явному описанию на основе уравнений гидротермодинамики. Мелкомасштабная часть спектра считается подсеточной и параметризуется с привлечением различных гипотез турбулентного замыкания. Крупные вихри в природных водоемах формируются, например, в условиях плотностной неустойчивости, когда происходит выхолаживание свободной поверхности и в верхних слоях развиваются процессы термической конвекции. Наблюдения показывают [2], что конвективный обмен реализуется в виде неупорядоченного ансамбля вертикальных струй и термиков, переносящих охлажденные массы воды в глубину.

Формирование собственных пространственно-временных масштабов конвективных крупных вихрей в значительной мере обусловлено механизмами нелинейной адвекции. Поэтому качество численного решения будет зависеть от способа дискретной аппроксимации инерционных членов. Так, при анализе проникающей конвекции важна энергетика процесса [3], и с этой точки зрения выбор пространственной аппроксимации следует сделать в пользу схем со свойствами энергетической сбалансированности [4]. К использованию другого класса схем приводит требование транспортности — совпадения направления переноса с ориентацией вектора скорости (монотонные схемы с разностями против потока)

*Работа поддержана грантом №00-05-98542 “Ведущие научные школы”.

© В. А. Шлычков, 2002.

[5]. В настоящее время успешно применяются TVD-схемы с ограниченной полной вариацией, которые сочетают качества консервативных и монотонных схем [6]. Сопоставительный анализ адвективных схем для атмосферной LES-модели проводился в [7].

В настоящей работе изучается влияние способов сеточной аппроксимации слагаемых адвекции на численное описание стохастического ансамбля конвективных крупных вихрей в водоеме.

В качестве исходной примем систему уравнений гидротермодинамики турбулентной жидкости, записанную в приближении Буссинеска [8]. Математическая постановка задачи базируется на выделении среднего крупномасштабного потока и крупновихревого компонента поля турбулентности с индивидуальным воспроизведением когерентных структур [9]. Размеры водоема предполагаются достаточно большими, а область решения представляет выделенную в воде колонну квадратного сечения со стороной L , причем среднее течение внутри колонны считается горизонтально однородным. Уравнения гидротермодинамики для компонентов скорости U, V и температуры T среднего течения имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} &= -lV + \frac{\partial}{\partial z} K \frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z} \overline{uw}, & \frac{\partial V}{\partial t} &= -lU + \frac{\partial}{\partial z} K \frac{\partial V}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z} \overline{vw}, \\ \frac{\partial T}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial z} K_{\tau} \frac{\partial T}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z} \overline{T'w}, \end{aligned} \quad (1)$$

где z — вертикальная координата; t — время; l — параметр Кориолиса; K_{τ} — коэффициент вертикального турбулентного обмена подсеточного масштаба; черта сверху означает горизонтальное осреднение; u, v, w, T' — компоненты скорости и отклонение температуры крупновихревого течения. Уравнения для u, v, w, T' получим вычитанием (1) из исходной системы:

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} + w \frac{\partial U}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + lv + D_{xy}u + \frac{\partial}{\partial z} K \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z} \overline{uw}, \\ \frac{dv}{dt} + w \frac{\partial V}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - lu + D_{xy}v + \frac{\partial}{\partial z} K \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z} \overline{vw}, \\ \frac{dw}{dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + g\beta_{\tau}T' + D_{xy}w + \frac{\partial}{\partial z} K \frac{\partial w}{\partial z}, \\ \frac{dT'}{dt} + \frac{\partial T'}{\partial z} w &= D_{xy}T' + \frac{\partial}{\partial z} K_{\tau} \frac{\partial T'}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z} \overline{wT'}, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0, \end{aligned} \quad (2)$$

где $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (U+u)\frac{\partial}{\partial x} + (V+v)\frac{\partial}{\partial y} + w\frac{\partial}{\partial z}$; $D_{xy} = \frac{\partial}{\partial x} K_x \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} K_y \frac{\partial}{\partial y}$; β_{τ} — коэффициент термического расширения; g — ускорение силы тяжести; p — давление; ρ — плотность воды.

Направим ось z вверх и совместим уровень $z = 0$ с поверхностью водоема. Для уравнений (1) поставим следующие граничные условия:

$$\frac{\partial U}{\partial z} = \frac{\partial V}{\partial z} = 0, \quad \rho c_p K_{\tau} \frac{\partial T}{\partial z} = -B_0 \quad \text{при } z = 0, \quad (3)$$

$$U = V = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial z} = \gamma_H \quad \text{при } z = H, \quad (4)$$

где B_0 — заданный поверхностный поток тепла; H — нижняя граница расчетной области; γ_H — устойчивая температурная стратификация водоема на глубине. Краевые условия для системы (2) запишем в виде

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial z} = 0, \quad w = 0, \quad T' = T'_0(t, x, y) \quad \text{при} \quad z = 0, \quad (5)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} - C \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \quad \text{при} \quad z = H, \quad (6)$$

где $\phi = (u, v, w, T')$, T'_0 — случайные малые возмущения температуры; C — скорость внутренних гравитационных волн. В качестве краевых условий по горизонтали примем предположение о периодичности процессов. В начальный момент зададим состояние покоя и линейное убывание температуры с глубиной.

Задача (1)–(6) решалась методом конечных разностей. Для интегрирования по времени разработан полунявный метод расщепления в варианте [9], близкий к схеме “предиктор — корректор”. Метод обеспечивает второй порядок точности для операторов адвективного переноса и строго неявную реализацию слагаемых, описывающих распространение быстрых гравитационных волн.

Пространственная дискретизация полей проводится в целые и полуцелые узлы с проекцией компонентов скорости на смежные грани элементарного объема в соответствии с уравнением неразрывности в (2). Рассмотрим два варианта конечно-разностных аналогов исходной задачи. Вариант *A* второго порядка точности по пространству получен из консервативной формы уравнений с использованием центральных разностей при аппроксимации адвективных членов. В варианте *B* для этой цели применяются односторонние разности с общим понижением порядка точности схемы.

Проблема корректного разделения спектра турбулентности на крупные вихри и мелкомасштабные пульсации связана со способом описания подсеточных процессов, т. е. применяемой моделью турбулентной вязкости. Аппроксимация *B* приводит к возникновению дополнительной “схемной” вязкости [5] и увеличивает уровень диссипации, обусловленный влиянием диффузионных членов в уравнениях. В отличие от турбулентной вязкости схемная вязкость не поддается прямой физической интерпретации и не связана явно с параметрами физической системы. В связи с этим целесообразно провести оценку влияния эффектов схемной вязкости на численное решение, задавая “контролируемый” механизм турбулентной диссипации.

Эксперимент 1. Рассмотрим простейшую модель турбулентного замыкания с постоянными значениями $K_x = K_y = 10 \text{ см}^2/\text{с}$, $K = 1 \text{ см}^2/\text{с}$, характерными для рассматриваемых масштабов явления [10]. Для значений $L = 100 \text{ м}$ и $H = -8 \text{ м}$ принято сеточное разрешение $128 \times 128 \times 80$ узлов, шаг по времени задан равным 15 с. Моделировалось развитие турбулентной проникающей конвекции в стратифицированном водоеме при возрастании B_0 от нуля до максимального значения $300 \text{ Вт}/\text{м}^2$, типичного для теплоотдачи в ночное время суток осенью [11]. По мере развития конвективного обмена в верхних слоях водоема формируется слой перемешивания с безразличной стратификацией, причем его толщина H_i растет со временем. Возрастает также средняя кинетическая энергия системы $K_{\text{conv}} = \rho \langle u^2 + v^2 + w^2 \rangle$, где угловые скобки означают осреднение по области.

Кривые 1, 2 на рис. 1 иллюстрируют ход кинетической энергии решений, полученных по схемам *A*, *B* соответственно. Разница в решениях становится заметной при достижении “конечных” амплитуд крупных вихрей и усилении влияния нелинейных эффектов.

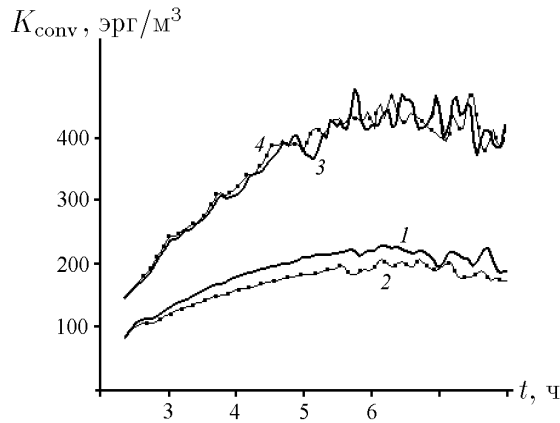


Рис. 1. Изменение со временем кинетической энергии конвективных движений при аппроксимации *A* (кривые 1, 3) и *B* (кривые 2, 4).

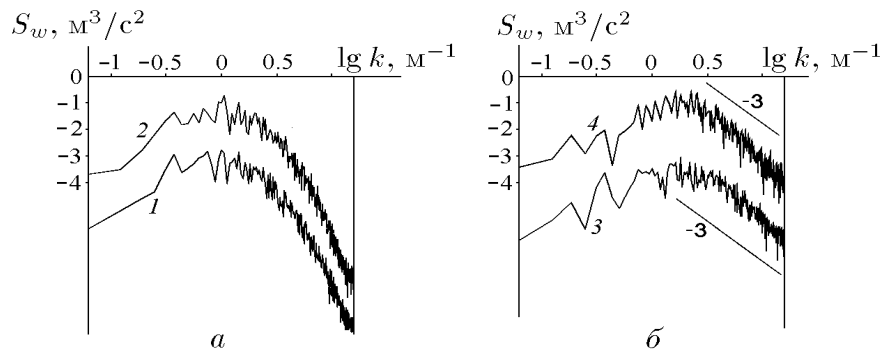


Рис. 2. Модельные энергетические спектры в экспериментах 1 (слева) и 2 (справа) при аппроксимации *A* (кривые 1, 3) и *B* (кривые 2, 4).

Отчетливо проявляется диссипативный характер монотонной схемы (кривая 2), выражающийся в более слабых темпах нарастания K_{conv} по сравнению с центрально-разностной схемой (кривая 1). Вместе с тем, статистические характеристики полей и структура энергетических переходов практически не меняются, а относительная разница в конвективном потоке тепла wT' не превышает 5%.

Анализ внутренней структуры решения проведем в терминах энергетических спектров. Согласно представлениям [12], оптимальное задание спектрального окна и разрешения сеточной модели должно обеспечивать детальное описание интервала энергии и начальной зоны инерционного интервала спектра турбулентных пульсаций. Мгновенное распределение спектральной функции S_w по волновым числам k в логарифмическом масштабе иллюстрирует рис. 2, *a*. Отметим однотипность конфигурации спектров в моделях *A*, *B* (кривые 1, 2 разнесены по вертикали для удобства анализа). Энергетический пик расположен вблизи значения $\lg k = 0$, что соответствует оценкам масштаба плавучести в океане ($L_b \approx 6$ м) [10]. Согласно рис. 2, *a*, в диапазоне $\lg k > 0.5$ спектральные кривые убывают примерно по линейному закону; эту область спектра можно интерпретировать как инерционный интервал. Отметим, что наклон кривой 2 (составляющий значение около -9) слегка превышает наклон кривой 1 (≈ -8), что соответствует большей диссипативности модели *B*. Транспортность модели *A* реализуется за счет малости амплитуд коротких волн, вносящих основную фазовую ошибку при описании адвекции.

Проведенный анализ показывает близость схем *A* и *B* по воспроизведению ансамбля крупных вихрей при условии оптимальности спектральных характеристик модели. Последнее условие является существенным, так как отказ от оптимальности обуславливает появление значительных отличий в свойствах схем. Это можно показать путем расчета задачи с увеличенным размером области, задавая, например, $L = 1000$ м при неизменных значениях прочих параметров. Воспроизводимая область волновых чисел расположится левее указанной на рис. 2, *a* на значение $\Delta \lg k = 1$, так что коротковолновая часть спектра совместится с интервалом энергоснабжения, а разрешение инерционного интервала будет ограничено малым числом последних гармоник, недостаточным для оптимальности. Интегрирование задачи по схеме *A* привело к нереалистичному результату в виде пространственной “пилы”, обусловленной вкладом энергетически активных старших компонентов Фурье. Решение, полученное по модели *B*, оказалось более гладким, спектральное распределение имеет максимум, правее которого подавление гармоник происходит в основном за счет фиктивной схемной диссипации. Это качество монотонных схем используется в [12] для фильтрации гармоник малых масштабов в процедуре “рационального осреднения”. Как следует из приведенных результатов, в модели пограничного слоя с “явным” описанием турбулентности эффекты схемной диссипации невелики, однако становятся существенными, когда величина турбулентной вязкости не обеспечивает необходимое коротковолновое усечение спектра.

Эксперимент 2 служит для проверки полученных выводов с использованием более сложной модели турбулентного замыкания. Расчет K_x , K_y проводился по модели Смагоринского [4], а для описания вертикального подсеточного обмена использовалась двухпараметрическая модель

$$\frac{\partial b}{\partial t} = \alpha_b \frac{\partial}{\partial z} K \frac{\partial b}{\partial z} + KJ - \epsilon, \quad \frac{\partial \epsilon}{\partial t} = \alpha_\epsilon \frac{\partial}{\partial z} K \frac{\partial \epsilon}{\partial z} + c_2 \frac{\epsilon}{b} KJ - c_3 \frac{\epsilon^2}{b}, \quad K = c_1 \frac{b^2}{\epsilon}, \quad (7)$$

где b — кинетическая энергия турбулентности, ϵ — скорость диссипации, $J = U_z^2 + V_z^2 - g\beta_T T_z$; α_i , c_i — эмпирические постоянные. Краевые условия для системы (7) заданы из предположения о затухании турбулентных движений на границах области.

Изменение кинетической энергии в данной постановке показывают кривые 3, 4 на рис. 1, построенные на основе схем *A*, *B* соответственно. Диссипативные свойства монотонной схемы (кривая 4) здесь практически не проявляются — уровень энергетического насыщения примерно одинаков в обоих решениях, близки временные масштабы флуктуаций K_{conv} , обусловленные внутренней динамикой ансамбля крупных вихрей. Незначительно отличаются размеры структурных элементов ансамбля, определенные по среднеэнергетическому волновому числу: 4.8 и 5.1 м при $t = 8$ ч. Анализ коэффициентов турбулентного обмена показывает, что их средние значения в консервативной схеме на 3–5% больше, чем в монотонной. То есть “эффективная” вязкость в методе *B*, обусловленная совместным действием турбулентной и схемной вязкостей, близка в среднем к расчетной турбулентной вязкости в методе *A*, что, по сути, делает эти схемы эквивалентными в смысле близости воспроизводимых статистических и интегральных характеристик крупных вихрей. Авторы [7] пришли к аналогичному выводу, рассматривая LES-модели конвекции в атмосфере на основе монотонной и центрально-разностной аппроксимаций.

Спектральное распределение энергии в данном эксперименте иллюстрируют кривые 3, 4 на рис. 2, *б*. Прямые линии показывают теоретический наклон спектра в инерционном интервале [10]. Видно, что спектры решений *A*, *B*, незначительно различаясь в деталях,

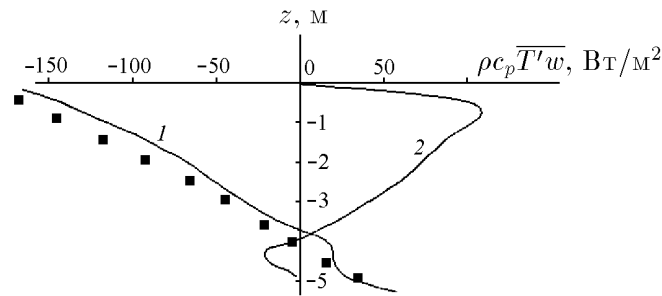


Рис. 3. Распределение по глубине суммарного (кривая 1) и конвективного (кривая 2) потоков тепла: точки — данные измерений [11].

идентичны в целом, правильно воспроизводят интервал энергии и отражают асимптотику затухания турбулентных пульсаций в диапазоне больших волновых чисел.

Эксперимент 3. Тестирование модели (1)–(7) проводилось с помощью данных полевого эксперимента на водохранилище Веллингтон [11]. В период ночного охлаждения в верхнем слое водоема зарегистрирована конвекция. Поверхностный поток тепла и начальный профиль средней температуры задавались по данным наблюдений. Начальные распределения скорости дрейфа и полей турбулентности определялись с помощью предрасчетного решения уравнений (1), (7) с использованием информации об измеренных характеристиках течения [11]. Период интегрирования задачи соответствовал 00–06 ч локального времени.

Модель правильно воспроизводит эволюцию слоя перемешивания, расчетное положение суточного термоклина близко к фактическому. Разница между модельной и измеренной температурами поверхности составила в среднем 0.07°C . Варианты расчета по схемам *A*, *B* дали практически одинаковые профили средней температуры. На рис. 3 представлен расчетный профиль полного потока тепла (кривая 1) в сравнении с фактическими значениями (отдельные точки). Отметим неплохое количественное согласие данных. Кривая 2 иллюстрирует вклад конвективной составляющей $\rho c_p \overline{T'w}$.

Заключение

Численное исследование вихреразрешающих моделей, построенных на основе симметричной и односторонней аппроксимации адвективных членов, показало приемлемость обеих схем для прямого воспроизведения ансамбля турбулентных конвективных структур в водоеме. Необходимым условием инвариантности решений относительно способа аппроксимации является согласованность границ спектрального окна, сеточного разрешения и модели турбулентного замыкания, обеспечивающая корректное описание интервала энергии и каскадного переноса в инерционном интервале спектра. Схема с направленными разностями приводит к дополнительной диссипации энергии, не предусмотренной в исходных дифференциальных уравнениях. В моделях с расчетом турбулентной вязкости этот эффект компенсируется формированием более низких значений коэффициентов обмена по сравнению с консервативной схемой, так что характер убывания спектров в обеих схемах практически одинаков и соответствует универсальным колмогоровским законам. В целом представленная модель крупных вихрей в водоеме позволяет численно воспроизводить

конвективный ансамбль с устойчивыми статистическими и средними характеристиками, удовлетворительно совпадающими с данными наблюдений.

Список литературы

- [1] STEVENS B., LENSCHOW D.H. Observations, experiments, and large eddy simulation // Bull. Am. Met. Soc. 2001. Vol. 82, No. 2. P. 283–294.
- [2] RAASH S., ETLING D. Modelling deep ocean convection: large eddy simulation in comparison with laboratory experiments // J. Phys. Oceanogr. 1998. Vol. 28. No. 9. P. 1786–1802.
- [3] ВАН МИГЕМ Ж. Энергетика атмосферы. Л.: Гидрометеиздат, 1977. 327 с.
- [4] ПЕНЕНКО В. В., АЛОЯН А. Е. Модели и методы для задач охраны окружающей среды. Новосибирск: Наука, 1985. 256 с.
- [5] РОУЧ П. Вычислительная гидродинамика. М.: Мир, 1980. 616 с.
- [6] ПИНЧУКОВ В.И., ШУ Ч.-В. Численные методы высоких порядков для задач газовой динамики. Новосибирск: Изд-во Сиб. отд-ния РАН, 2000. 231 с.
- [7] BROWN A. R., MACVEAN M. K., MASON P. J. The effects of numerical dissipation in large eddy simulations // J. Atmos. Sci. 2000. Vol. 57, No. 19. P. 3337–3345.
- [8] БЕЛОЛИПЕЦКИЙ В. М., КОСТЮК В. Ю., ШОКИН Ю. И. Математическое моделирование течений стратифицированной жидкости. Новосибирск: Наука, 1991. 175 с.
- [9] ШЛЫЧКОВ В. А., ПУШИСТОВ П. Ю. Подобие структур конвективных пограничных слоев атмосферы и водоема: результаты численных экспериментов с вихреразрешающими моделями // Вычисл. технологии. 2002. Т. 7, №2. С. 113–122.
- [10] ОЗМИДОВ Р. В. Диффузия примесей в океане. Л.: Гидрометеиздат, 1985. 280 с.
- [11] IMBERGER J. The diurnal mixed layer // Limnol. Oceanogr. 1985. Vol. 30, No. 4. P. 737–770.
- [12] БЕЛОЦЕРКОВСКИЙ О. М., ОПАРИН А. М. Численный эксперимент в турбулентности: от порядка к хаосу. М.: Наука, 2000. 223 с.

Поступила в редакцию 5 апреля 2002 г.