

ВЕРОЯТНОСТНО-СТАТИСТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТУРБУЛЕНТНЫХ ГАЗОДИСПЕРСНЫХ ПОТОКОВ

Е. В. СУГАК

*Сибирская аэрокосмическая академия им. академика М. Ф. Решетнева
Красноярск, Россия*

e-mail: evs@sibru.ru, evs2@mail.ru

The technique of probability- statistical modelling of gas-dispersion streams is suggested taking into account the determinate-stochastic nature of the turbulent motion of continuous and dispersion phases with use of probability theory and random process theory methods. The model of turbulent gas-dispersion stream, the calculation system of the particles (or droplets) concentration profile and its modification along the length of the channel are developed.

Введение

Во многих энергетических, тепло- и массообменных процессах и аппаратах используются режимы интенсивного взаимодействия веществ в различных агрегатных состояниях. Интенсификация таких процессов часто связана с повышением скорости движения фаз, переходом в существенно турбулентные режимы течения [1, 2]. Такие процессы характеризуются, как правило, различными локальными флуктуациями гидродинамических полей и концентраций фаз, что при их математическом описании приводит к необходимости использования статистических подходов.

Для решения многих технологических проблем процессов в режимах с интенсивным взаимодействием фаз требуется создание математических моделей, учитывающих комплекс физических явлений межфазного обмена массой, импульсом и энергией. Однако течение двухфазных турбулентных газодисперсных потоков обычно настолько сложно, что построение их полного математического описания не представляется возможным. Отсутствует строгая теория движения двухфазных систем, учитывающая полидисперсный состав дискретной фазы и ее концентрацию, взаимодействие частиц между собой и с элементами конструкций, турбулентные пульсации среды, возможные процессы дробления и коагуляции, фазовые переходы и т.д. [3, 4].

Физико-химическая механика таких процессов связана с общими закономерностями переноса массы, теплоты и количества движения. Традиционный подход к их изучению базируется на фундаментальных законах классической механики, механики сплошной сре-

ды, физической химии и термодинамики. Однако в процессах с интенсивным взаимодействием фаз явления разной физико-химической природы часто связаны между собой разветвленной сетью причинно-следственных отношений двойственной детерминированно-стохастической природы. Большинство таких систем представляют собой объекты вероятностно-статистической природы. Для их описания необходимо учитывать не только массовое, силовое и энергетическое межфазное взаимодействие, но и неоднородность структуры потоков, неравномерность распределения параметров и т.д. Поэтому представляется оправданным и целесообразным использование для описания этих систем методов статистической физики, теории вероятностей и математической статистики [5–7].

Для описания гидродинамики двухфазных потоков существуют два основных подхода: континуальный и статистический [6–10]. Несмотря на существенные различия, их общей основной проблемой является учет большого количества разнообразных факторов и процессов межфазного взаимодействия, имеющих различную физическую природу. При этом возникают трудности как физического, так и математического характера.

Первые из них связаны со сложностью описания взаимодействия с газом даже отдельной твердой или жидкой частицы (капли) в широком диапазоне режимов обтекания. Противоречие между необходимостью детального описания процессов, происходящих с отдельной частицей, и требованием их учета в виде элементарных актов в общей динамике аэродисперсной смеси требует принятия компромиссных решений, дополнительных гипотез и упрощающих допущений в построении моделей.

Трудности математического характера связаны в основном с тем, что полученные модели оказываются гораздо более сложными, чем для чистого газа или ламинарного режима, так как при этом приходится рассматривать многофазную многокомпонентную и многоэлементную систему со спектром эффектов взаимодействия разной природы, значительная часть которых носит вероятностно-статистический характер.

Трудности полного математического описания кинетики гетерогенных процессов в режимах с интенсивным взаимодействием являются причиной широкого распространения методов формальной кинетики, при реализации которых используются линейные или нелинейные кинетические дифференциальные уравнения, в состав которых входят эмпирические константы. Такие кинетические уравнения удовлетворительно описывают кинетику только отдельных микроэлементов (частиц). Однако расчет процессов обычно требует анализа кинетики гетерогенного обмена для всей совокупности микроэлементов. На практике в большинстве случаев условия протекания гетерогенного обмена неодинаковы в разных частях рассматриваемого пространства и могут различным образом изменяться во времени. В результате даже при наличии адекватного описания кинетики для отдельного микроэлемента переход к описанию кинетики в целом усложняется стохастической природой многих процессов.

Использование исключительно детерминированных методов в большинстве случаев позволяет определять только ориентировочные или усредненные значения параметров и характеристик (математические ожидания), что часто приводит к ошибкам, снижению точности расчетов или необходимости введения дополнительных коэффициентов.

Для многих газодисперсных систем все чаще отмечается замена (или совмещение) односторонних детерминированных моделей вероятностно-статистическими. При этом детерминированная составляющая модели определяется фундаментальными законами классической механики и механики сплошной среды, стохастическая отражает нестационарность процессов, проявляющуюся в различном времени пребывания частиц или потоков массы и энергии, в распределении частиц по времени, скоростям и траекториям.

Вероятностно-статистические методы базируются на моделях, более близких к реальным явлениям, однако часто связаны с существенными математическими трудностями. Для таких систем разработаны эмпирические или полуэмпирические корреляционные соотношения, в которые вводятся осредненные по объему, площади (сечению) или времени параметры или критерии [11, 12]. Однако многие из них справедливы только в узких диапазонах параметров и, кроме того, общий подход к их моделированию часто отсутствует из-за сложности учета распределений характеристик микроэлементов и динамики взаимодействия между фазами и элементами, природа которых часто неизвестна.

Применение статистических методов помимо значительных формальных трудностей (сложности математических моделей, неопределенности статистических параметров, высокой размерности задач и т.д.) осложняется методологическими неопределенностями, связанными с необходимостью анализа статистических совокупностей (ансамблей) частиц дисперсной фазы и гидродинамических флуктуаций сплошной среды (турбулентных вихрей). Использование диффузионных моделей часто приводит к введению неопределенных коэффициентов “продольного перемешивания”, “эффективной” или “турбулентной” диффузии и необходимости их физического истолкования и эмпирической оценки [1, 6, 7, 13].

В некоторых случаях удается с помощью различных упрощающих допущений и усреднения некоторых параметров привести систему к виду, допускающему моделирование с меньшим уровнем сложности или численными методами. В ряде случаев допустимо предположение о постоянстве общего числа микроэлементов макросистемы, что дает возможность рассматривать ее как закрытую. Если взаимодействие с внешней средой не оказывает существенного влияния на процессы внутри макросистемы, то такую макросистему можно считать замкнутой (изолированной). Иногда некоторую ограниченную совокупность микроэлементов в пределах элементарного объема можно описать одним или несколькими усредненными обобщающими параметрами (средние размеры, скорость, концентрация частиц, средний размер турбулентных вихрей и т.д.). Такие допущения позволяют построить модели, пригодные для расчетов. В ряде случаев для этого вместо математического описания объектов дифференциальными уравнениями используются конечно-разностные схемы, для чего объект с распределенными параметрами рассматривается как совокупность локальных зон (ячеек) с сосредоточенными параметрами. Формально такая замена означает интегрирование дифференциальных уравнений модели численными методами [3, 14].

Для турбулентного течения газа характерны беспорядочные хаотические пульсации скорости во всех направлениях во всех точках потока, придающие практически всем происходящим процессам стохастический характер: при турбулентном течении отдельные объемы газа с определенной вероятностью могут перемещаться в любом направлении и истинное значение любой характеристики газа в каждой точке в конкретный момент времени представляет собой сумму величин, характеризующих основное и пульсационное течения. В следствие хаотических пульсационных движений появляются беспорядочное интенсивное перемешивание и специфическая турбулентная диффузия, турбулентная вязкость, более равномерное, чем при ламинарном течении, распределение осредненной скорости и резкое ее падение в пристенной области, резкое увеличение потерь на трение и т.д. Соответственно, мгновенную скорость газа в любой точке потока в каждом направлении можно представить как сумму осредненной скорости и скорости пульсаций [6, 7].

При движении и взаимодействии фаз в турбулентном газодисперсном потоке в общем случае интенсивность перемешивания в стационарных условиях складывается из трех составляющих [12]: перемешивания за счет общих турбулентных вихрей сплошной фазы, за

счет турбулентных вихрей малых масштабов, обусловленных стохастическим движением дисперсной фазы относительно сплошной, и продольного перемешивания за счет полной циркуляции в сплошной фазе. Для большинства аэродисперсных систем при сравнительно небольших концентрациях дисперсной фазы преобладает первый тип перемешивания, интенсивность которого зависит от геометрических параметров, скорости потока, значений критерия Рейнольдса для потока Re и частиц Re_d , относительной скорости частиц [12].

При достаточно высокой концентрации дисперсной фазы взаимодействие частиц друг с другом и с несущей фазой оказывает влияние практически на все характеристики потока: критическое значение числа Рейнольдса [15], степень турбулентности [16–18], частотный спектр пульсаций [15], профиль осредненной скорости [19–21], коэффициент турбулентной диффузии [19, 22], гидравлическое сопротивление [16, 22–26] и др. Предельное значение массовой концентрации дисперсной фазы, выше которой ее влиянием на гидродинамические характеристики потока пренебрегать нельзя, — 0,1–0,2 кг/м³ [24], объемной — 2–5, % [3, 27], для газожидкостных систем — 1,5–2, % [22, 28].

1. Вероятностная модель движения частицы

В турбулентном потоке частицы могут перемещаться как вместе с газом или под воздействием внешних сил, так и посредством турбулентной диффузии под воздействием турбулентных пульсаций газа. Соответственно, траектория движения частицы может рассматриваться как суммарный случайный путь: в любой момент времени любая из ее координат может быть представлена как сумма детерминированной и случайной составляющих:

$$x(t) = \int_0^t u_x(t) dt + x'(t), \quad (1)$$

где $x(t)$ — проекция детерминированной скорости, м/с; $x'(t)$ — случайный процесс.

Если рассматривать движение частицы как последовательность перемещений длиной l через малые промежутки времени Δt в одном из шести возможных направлений в ортогональной системе координат xyz , то траектория движения будет представлять собой трехмерную ломаную, а направление движения в каждый момент времени будет определяться соответствующими вероятностями p_i : p_{+x} , p_{-x} , p_{+y} , p_{-y} , p_{+z} и p_{-z} . Очевидно, в любой момент времени $p_{+x}(t) + p_{-x}(t) + p_{+y}(t) + p_{-y}(t) + p_{+z}(t) + p_{-z}(t) = 1$. В отсутствие конвективного движения и влияния внешних сил (или в системе координат, движущейся с газом), когда частица совершает только случайные движения, при изотропной турбулентности все направления движения равновероятны: $p_i = 1/(2s)$, где s — размерность системы координат, для трехмерной системы $s = 3$ и $p_i = 1/6$.

При движении потока газа с частицами в осесимметричном канале можно перейти к двухмерной системе координат zy ($s = 2$) и в каждый момент времени рассматривать движение частиц в одном из четырех возможных направлений — два направления вдоль оси канала параллельно поверхности ($+z$ и $-z$) и два в поперечном направлении перпендикулярно к поверхности ($+y$ и $-y$). Соответственно, траектория движения будет представлять собой двухмерную ломаную линию, а направление движения в каждый момент времени будет определяться вероятностями p_{+z} , p_{-z} , p_{+y} и p_{-y} ($p_{+z} + p_{-z} + p_{+y} + p_{-y} = 1$). При изотропной турбулентности в этом случае $p_{+z} = p_{-z} = p_{+y} = p_{-y} = 1/4$.

В поле внешних сил частица участвует в детерминированном движении в направлении действия этой силы. Ее влияние можно выразить через соотношение соответствующих

вероятностей направлений движения: при изотропной турбулентности при движении газа вдоль оси z $p_{+z} > p_{-z} = p_{+y} = p_{-y}$.

Пользуясь такой моделью при известных в любой точке канала значениях вероятностей p_i и длины инерционного пробега частицы под действием турбулентных пульсаций l_i , можно с помощью методов вероятностно-статистического моделирования и генератора случайных чисел рассчитать варианты возможных траекторий отдельной частицы в турбулентном потоке (на рис. 1 показан вариант такого расчета) [6, 7]. Однако при использовании модели для описания движения газодисперсных систем в этом случае необходимо рассчитать большое количество случайных траекторий частиц с учетом их различного начального положения. Поэтому такой метод может использоваться только для числа частиц не более нескольких сотен [12, 29] (на рис. 2 представлены десять возможных траекторий одной частицы).

При таком подходе в любой момент времени каждая частица может находиться в одном из узлов сетки с ячейками со сторонами $l_z \times l_y$ (рис. 3). Каждое из таких положений можно рассматривать как возможное состояние частицы в момент времени t , которое характеризуется соответствующей вероятностью $P(i, j, t)$ (где i и j — номера узлов сетки поперек и вдоль оси канала, т.е. безразмерные координаты частицы: $i = y_i/l_y, j = z_i/l_z$).

Пусть известны вероятности всех положений частицы в момент времени t . Рассмотрим изменение вероятности нахождения частицы в положении (i, j) через малый промежуток времени Δt (настолько малый, что вероятность того, что в течение этого времени произойдут более одного перехода частицы из узла в узел, пренебрежимо мала). В момент

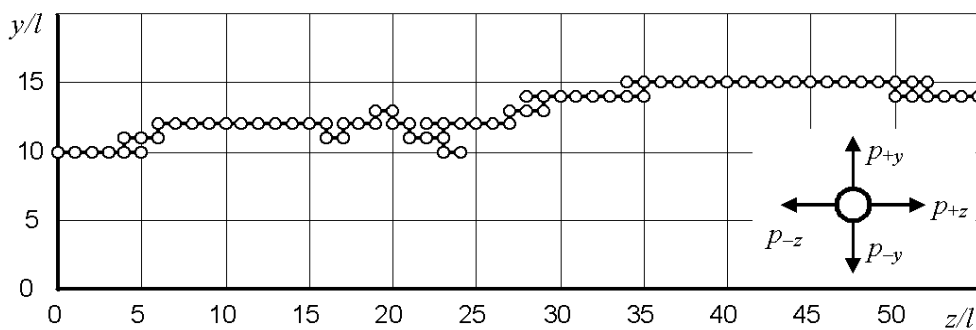


Рис. 1. Схема и пример дискретного вероятностного моделирования движения частицы (100 шагов): $p_{+z} = 0,7, p_{-z} = p_{+y} = p_{-y} = 0,1, l_y = l_z = l$.

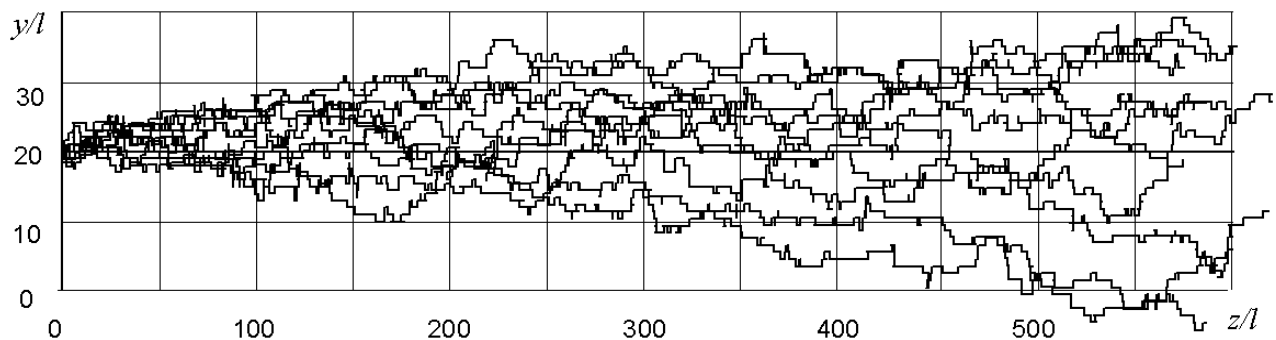


Рис. 2. Дискретное вероятностное моделирование движения частиц (10 частиц, 1000 шагов): $p_{+z} = 0,7, p_{-z} = p_{+y} = p_{-y} = 0,1, l_y = l_z = l$

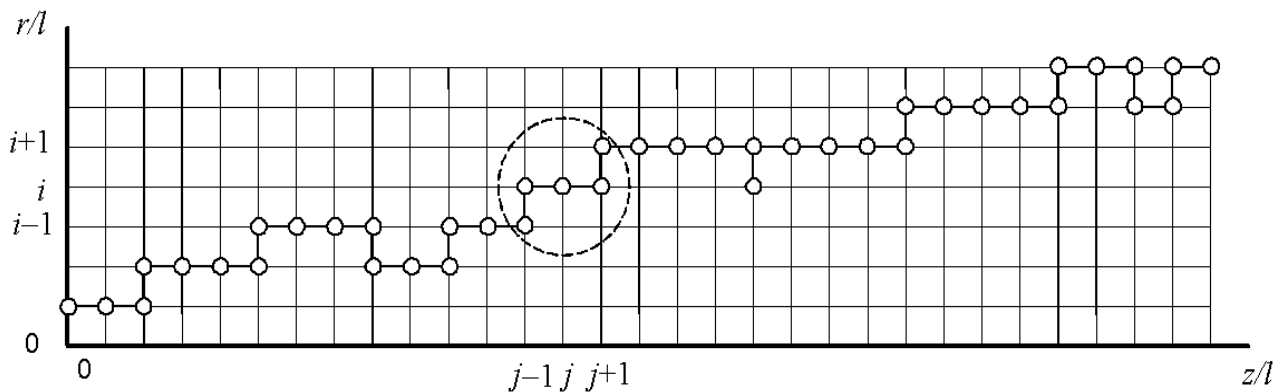


Рис. 3. Схема расчета дискретного движения.

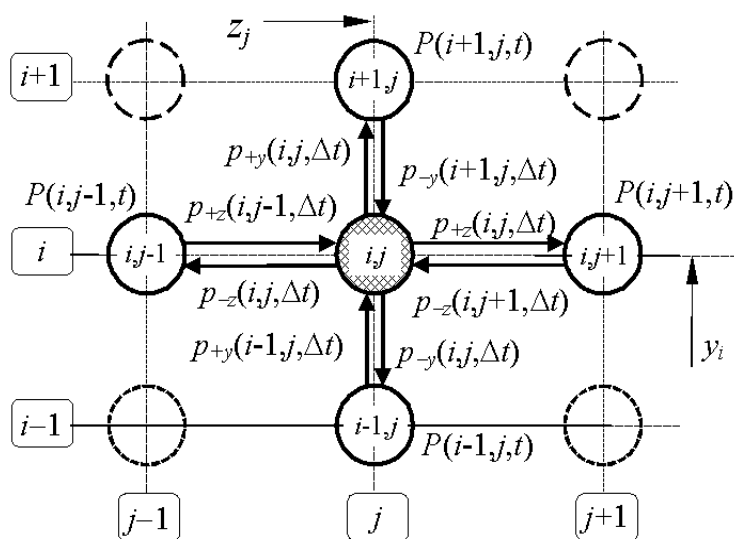


Рис. 4. Фрагмент графа переходов частицы

времени $t + \Delta t$ частица может находиться в положении (i, j) только в одном из двух случаев (рис. 4):

1. В момент t частица находилась в одном из четырех соседних положений: $(i, j - 1)$, $(i, j + 1)$, $(i - 1, j)$ или $(i + 1, j)$, — и в течение времени Δt произошел один из переходов: $(i, j - 1 \rightarrow (i, j)$, $(i, j + 1 \rightarrow (i, j)$, $(i - 1, j) \rightarrow (i, j)$ или $(i + 1, j) \rightarrow (i, j)$. Суммарная вероятность таких событий по теореме сложения вероятностей

$$P_1(i, j, t + \Delta t) = p_{+z}(i, j - 1, \Delta t)P(i, j - 1, t) + p_{-z}(i, j + 1, \Delta t)P(i, j + 1, t) + \\ + p_{+y}(i - 1, j, \Delta t)P(i - 1, j, t) + p_{-y}(i + 1, j, \Delta t)P(i + 1, j, t), \quad (2)$$

где $P(i, j - 1, t)$, $P(i, j + 1, t)$, $P(i - 1, j, t)$ и $P(i + 1, j, t)$ — вероятности нахождения частицы в момент времени t в положениях $(i, j - 1)$, $(i, j + 1)$, $(i - 1, j)$ и $(i + 1, j)$ соответственно; $p_{+z}(i, j - 1, \Delta t)$, $p_{-z}(i, j + 1, \Delta t)$, $p_{+y}(i - 1, j, \Delta t)$ и $p_{-y}(i + 1, j, \Delta t)$ — вероятности переходов в положение (i, j) из положений $(i, j - 1)$, $(i, j + 1)$, $(i - 1, j)$ и $(i + 1, j)$ соответственно.

2. В момент t частица уже находилась в положении (i, j) и в течение времени Δt не перешла ни в одно из соседних положений, т.е. не состоялись переходы $(i, j - 1 \rightarrow (i, j)$,

$(i, j + 1 \rightarrow (i, j), (i - 1, j) \rightarrow (i, j)$ и $(i + 1, j) \rightarrow (i, j)$. Вероятность такого события по теореме умножения вероятностей

$$P_2(i, j, t + \Delta t) = [1 - p_{-z}(i, j, \Delta t)][1 - p_{+z}(i, j, \Delta t)][1 - p_{+y}(i, j, \Delta t)][1 - p_{-y}(i, j, \Delta t)]P(i, j, t), \quad (3)$$

где $p_{+z}(i, j, \Delta t)$, $p_{-z}(i, j, \Delta t)$, $p_{+y}(i, j, \Delta t)$ и $p_{-y}(i, j, \Delta t)$ — вероятности переходов из положения (i, j) в соответствующие соседние положения.

Тогда полная вероятность того, что частица в момент времени $t + \Delta t$ будет находиться в положении (i, j) по теореме сложения вероятностей, равна

$$\begin{aligned} P(i, j, t + \Delta t) &= P_1(i, j, t) + P_2(i, j, t) = \\ &= p_{+z}(i, j - 1, \Delta t)P(i, j - 1, t) + p_{-z}(i, j + 1, \Delta t)P(i, j + 1, t) + \\ &+ p_{+y}(i - 1, j, \Delta t)P(i - 1, j, t) + p_{-y}(i + 1, j, \Delta t)P(i + 1, j, t) + \\ &+ [1 - p_{-z}(i, j, \Delta t)][1 - p_{+z}(i, j, \Delta t)][1 - p_{-y}(i, j, \Delta t)][1 - p_{+y}(i, j, \Delta t)]P(i, j, t). \end{aligned} \quad (4)$$

Для рекуррентного пуассоновского потока событий при $\lambda_i(i, j)\Delta t \ll 1$

$$p_i(i, j, \Delta t) = 1 - \exp[-\lambda_i(i, j)\Delta t] \approx 1 - [1 - \lambda_i(i, j)\Delta t] = \lambda_i(i, j)\Delta t,$$

где λ_i ($i = +z, -z, +y, -y$) — интенсивности соответствующих переходов, которые в турбулентном потоке определяются интенсивностью турбулентных пульсаций, c^{-1} ;

Аналогичные приближения можно записать и для всех соседних положений. Тогда, если пренебречь величинами второго порядка малости, уравнение (4) примет вид

$$\begin{aligned} P(i, j, t + \Delta t) &\approx [\lambda_{+z}(i, j - 1)P(i, j - 1, t) + \lambda_{-z}(i, j + 1)P(i, j + 1, t) + \\ &+ \lambda_{+y}(i - 1, j)P(i - 1, j, t) + \lambda_{-y}(i + 1, j)P(i + 1, j, t)]\Delta t + \\ &+ \{1 - [\lambda_{+z}(i, j) + \lambda_{-z}(i, j) + \lambda_{+y}(i, j) + \lambda_{-y}(i, j)]\Delta t\}P(i, j, t). \end{aligned} \quad (5)$$

Из выражения (5) можно получить

$$\begin{aligned} [P(i, j, t + \Delta t) - P(i, j, t)]/\Delta t &= \\ &= \lambda_{+z}(i, j - 1)P(i, j - 1, t) + \lambda_{-z}(i, j + 1)P(i, j + 1, t) + \lambda_{+y}(i - 1, j)P(i - 1, j, t) + \\ &+ \lambda_{-y}(i + 1, j)P(i + 1, j, t) - [\lambda_{+z}(i, j) + \lambda_{-z}(i, j) + \lambda_{+y}(i, j) + \lambda_{-y}(i, j)]P(i, j, t). \end{aligned} \quad (6)$$

Переходя к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$, получим дифференциальное уравнение относительно вероятности нахождения частицы в точке (i, j) в момент t $P(i, j, t)$:

$$\begin{aligned} \partial P(i, j, t)/\partial t &= \lambda_{+z}(i, j - 1)P(i, j - 1, t) + \lambda_{-z}(i, j + 1)P(i, j + 1, t) + \lambda_{+y}(i - 1, j)P(i - 1, j, t) + \\ &+ \lambda_{-y}(i + 1, j)P(i + 1, j, t) - [\lambda_{+z}(i, j) + \lambda_{-z}(i, j) + \lambda_{+y}(i, j) + \lambda_{-y}(i, j)]P(i, j, t). \end{aligned} \quad (7)$$

Если известны значения интенсивностей переходов $\lambda_i(i = +z, -z, +y, -y)$, то, составив для каждого из положений частицы уравнение вида (7), получим систему дифференциальных уравнений. Так как полученная система линейно зависима, для ее решения одно из уравнений необходимо заменить очевидным нормирующим условием вида

$$\sum_i \sum_j P(i, j, t) = 1. \quad (8)$$

Вероятность нахождения одиночной частицы в любом из положений $P(i, j, t)$ в соответствии с законом больших чисел одновременно означает долю частиц $N(i, j, t)/N$ от их общего числа в системе, находящихся в элементарном объеме $V(i, j)$ сечением $l_z \times l_y$ в момент времени t , т. е.

$$P(i, j, t) = N(i, j, t)/N = n(i, j, t)V(i, j)/N, \quad (9)$$

где $n(i, j, t)$ — локальная численная концентрация частиц, м^{-3} .

Тогда уравнение (7) принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial n(i, j, t)}{\partial t} V(i, j) = & \lambda_{+z}(i, j-1)n(i, j-1, t)V(i, j-1) + \lambda_{-z}(i, j+1)n(i, j+1, t)V(i, j+1) + \\ & + \lambda_{+y}(i-1, j)n(i-1, j, t)V(i-1, j) + \lambda_{-y}(i+1, j)n(i+1, j, t)V(i+1, j) - \\ & - [\lambda_{+z}(i, j) + \lambda_{-z}(i, j) + \lambda_{+y}(i, j) + \lambda_{-y}(i, j)]n(i, j, t)V(i, j). \end{aligned} \quad (10)$$

При постоянном расходе и установившемся течении характеристики турбулентных пульсаций газа (амплитуду и частоту) можно считать постоянными в каждой точке и одинаковыми вдоль оси канала. Тогда $V(i, j-1) = V(i, j+1) = V(i, j) = V(i)$, $V(i-1, j) = V(i+1, j) = V(i+1)$ и в уравнении (10)

$$\begin{aligned} \frac{V(i, j-1)}{V(i, j)} = \frac{V(i, j+1)}{V(i, j)} = 1, \quad \frac{V(i-1, j)}{V(i, j)} = \frac{l_y(i-1)l_z(i-1)}{l_y(i)l_z(i)}, \\ \frac{V(i+1, j)}{V(i, j)} = \frac{l_y(i+1)l_z(i+1)}{l_y(i)l_z(i)}. \end{aligned} \quad (11)$$

Соответственно, оно принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial n(i, j, t)}{\partial t} = & \lambda_{+z}(i)[n(i, j-1, t) - n(i, j, t)] + \lambda_{-z}(i)[n(i, j+1, t) - n(i, j, t)] + \\ & + \lambda_{+y}(i) \left[n(i-1, j, t) \frac{l_y(i-1)l_z(i-1)}{l_y(i)l_z(i)} - n(i, j, t) \right] + \\ & + \lambda_{-y}(i) \left[n(i+1, j, t) \frac{l_y(i+1)l_z(i+1)}{l_y(i)l_z(i)} - n(i, j, t) \right]. \end{aligned} \quad (12)$$

Интенсивности переходов λ_{+z} , λ_{-z} , λ_{+y} и λ_{-y} определяются скоростью потока и интенсивностью турбулентных пульсаций. Скорость частицы в любом направлении определяется суммой детерминированной и случайной составляющих

$$u_x = \bar{u}_x + u'_x. \quad (13)$$

Тогда общая интенсивность переходов вдоль любой из осей определяется суммой интенсивности детерминированных переходов с осредненной скоростью вдоль этой оси \bar{u}_x/l_x и интенсивности турбулентных пульсаций:

$$\lambda_{\pm x} = \bar{u}_x/l_x \pm \lambda_x. \quad (14)$$

Если считать, что детерминированная осредненная скорость частиц направлена строго вдоль оси канала z , то в уравнении (??) $\lambda_{+z}(i) = \bar{u}(i)/l_z(i) + \lambda_z(i)$, $\lambda_{-z}(i) = \lambda_z(i)$, $\lambda_{+y}(i) =$

$\lambda_{-y}(i) = \lambda_y(i)$ и оно примет вид (знак усреднения продольной осредненной скорости частиц далее опущен)

$$\partial n(i, j, t)/\partial t = u(i)[n(i, j-1, t) - n(i, j, t)]/l_z(i) - 2(\lambda_z + \lambda_y)n(i, j, t) + \lambda_z(i)[n(i, j-1, t) + n(i, j+1, t)] + \lambda_y(i)[n(i-1, j, t)l_y(i-1)l_z(i-1) + n(i+1, j, t)l_y(i+1)l_z(i+1)]/[l_y(i)l_z(i)]. \quad (15)$$

Система дифференциальных уравнений (15) при заданных начальных (при $t = 0$) и граничных (во входном сечении при $j = 0$ и на стенке канала при $i = 0$) дает возможность определить текущую локальную концентрацию частиц и ее изменение.

2. Упрощенные модели

В большинстве значимых для практики случаев интерес представляет установившееся течение, при котором $\partial n(i, j, t)/\partial t = 0$, $n(i, j, t) = n(i, j)$ и уравнение (15) принимает вид

$$\frac{u(i)}{l_z(i)}[n(i, j-1) - n(i, j)] - 2[\lambda_z(i) + \lambda_y(i)]n(i, j) + \lambda_z(i)[n(i, j-1) + n(i, j+1)] + \frac{\lambda_y(i)}{l_z(i)l_y(i)}[n(i-1, j)l_z(i-1)l_y(i-1) + n(i+1, j)l_z(i+1)l_y(i+1)] = 0. \quad (16)$$

На входе в канал можно, как правило, принять равномерное распределение частиц по сечению ($n(i, 0) = n_0$). Кроме того, можно исключить вероятности обратных переходов из начального сечения ($p_{-z}(i, 0, \Delta t) = 0$, $\lambda_{-z}(i, 0) = 0$), а интенсивность прямых переходов (в направлении течения) считать зависящей только от детерминированной скорости ($p_{+z}(i, 0, \Delta t) = 1$, $\lambda_{+z}(i, 0) = u(i)/l_z(i)$). Тогда для установившегося течения $n(i, 1) = n_0$.

Основной причиной постепенного изменения профиля концентрации частиц в потоке по длине канала является влияние стенок, в частности неравномерное по сечению поле турбулентных пульсаций. Существенное влияние могут оказывать характер и характеристики непосредственного взаимодействия частиц со стенкой (отскок после соударения, поглощение или прилипание, вероятность или доля отскока, поглощения или вторичного уноса, интенсивность осаждения или уноса и т.д.). Для канала с непоглощающими твердыми стенками можно считать, что после контакта со стенкой и отскока все частицы остаются в потоке. Для рассматриваемой модели это означает, что в любом граничном положении ($i = 0$, $y_i = 0$, рис. 5) исключены как прямые, так и обратные поперечные переходы. Тогда для установившегося течения уравнение (??) для пристенного слоя приобретает вид

$$\frac{u(0)}{l_z(0)}[n(0, j-1) - n(0, j)] - [2\lambda_z(0) + \lambda_y(0)]n(0, j) + \lambda_z(0)[n(0, j-1) + n(0, j+1)] + \lambda_y(0) \frac{l_z(1)l_y(1)}{l_z(0)l_y(0)}n(1, j) = 0. \quad (17)$$

Совокупность уравнений (??) и (??) образует систему, решение которой позволяет определить профиль концентрации частиц в любом сечении канала и его изменение по длине. Однако, если учитывать масштаб турбулентных пульсаций, размерность такой системы довольно велика и расчет трудоемок.

Можно заметить, что любая из расчетных схем на рис. 4 и 5 содержит точки, принадлежащие трем (или двум — для входного сечения) последовательным сечениям (слоям)

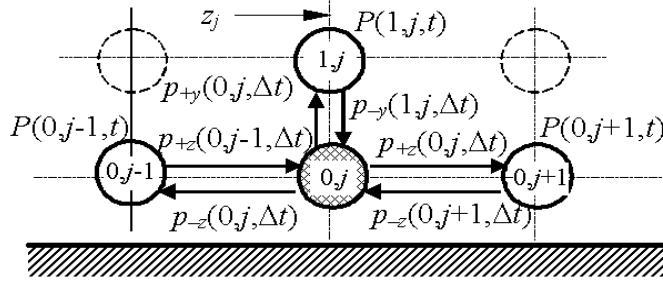


Рис. 5. Фрагмент графа переходов частиц на непоглощающей стенке.

по длине канала — $j - 1$, j и $j + 1$ (для входного сечения — 0 и 1). Следовательно, если известны концентрации в двух (или одном) предыдущих сечениях, то можно рассчитать концентрацию в следующем сечении. Соответственно, уравнения (??) и (??) могут быть представлены как итерационные уравнения вида

$$n(0, j + 1) = \frac{u(0)}{l_z(0) \lambda_z(0)} [n(0, j) - n(0, j - 1)] + 2n(0, j) - n(0, j - 1) + \frac{\lambda_y(0)}{\lambda_z(0)} \left[n(0, j) - \frac{l_z(1) l_y(1)}{l_z(0) l_y(0)} n(1, j) \right], \quad (18)$$

$$n(i, j + 1) = \frac{u(i)}{l_z(i) \lambda_z(i)} [n(i, j) - n(i, j - 1)] + 2n(i, j) - n(i, j - 1) + \frac{\lambda_y(i)}{\lambda_z(i)} \left[2n(i, j) - \frac{l_z(i-1) l_y(i-1)}{l_z(i) l_y(i)} n(i-1, j) - \frac{l_z(i+1) l_y(i+1)}{l_z(i) l_y(i)} n(i+1, j) \right]. \quad (19)$$

Турбулентную миграцию частиц можно интерпретировать как цепочку свободных инерционных пробегов длиной $l_y(y)$ и $l_z(y)$ с периодом и частотой турбулентных пульсаций газа, которые можно считать одинаковыми во всем канале. Тогда в уравнениях (??) и (??) можно принять $\lambda_y(i) = \lambda_z(i) = \lambda(i)$ и они принимают вид

$$n(0, j + 1) = \frac{u(0)}{l_z(0) \lambda(0)} [n(0, j) - n(0, j - 1)] + 3n(0, j) - n(0, j - 1) - \frac{l_z(1) l_y(1)}{l_z(0) l_y(0)} n(1, j), \quad (20)$$

$$n(i, j + 1) = \frac{u(i)}{l_z(i) \lambda(i)} [n(i, j) - n(i, j - 1)] + 4n(i, j) - n(i, j - 1) - \frac{l_z(i-1) l_y(i-1)}{l_z(i) l_y(i)} n(i-1, j) - \frac{l_z(i+1) l_y(i+1)}{l_z(i) l_y(i)} n(i+1, j). \quad (21)$$

В большинстве практически значимых случаев объем вычислений можно сократить. В частности, считая длину пробега частиц вдоль оси l_z намного меньшей длины канала, а функцию $n(z)$ — достаточно плавной, в окрестностях точки (i, j)

$$\Delta n_z(i, j) = n(i, j + 1) - n(i, j) \approx n(i, j) - n(i, j - 1). \quad (22)$$

Тогда уравнение (??) примет вид

$$\frac{u(i)}{l_z(i)} \Delta n_z(i, j) + \lambda_y(i) \left[2n(i, j) - \frac{l_z(i-1) l_y(i-1)}{l_z(i) l_y(i)} n(i-1, j) - \right.$$

$$-\left. \frac{l_z(i+1)l_y(i+1)}{l_z(i)l_y(i)}n(i+1, j) \right] = 0, \quad (23)$$

откуда

$$\begin{aligned} \Delta n_z(i, j) = & \frac{\lambda_y(i)}{u(i)} \left[\frac{l_y(i-1)}{l_y(i)} l_z(i-1) n(i-1, j) + \right. \\ & \left. + \frac{l_y(i+1)}{l_y(i)} l_z(i+1) n(i+1, j) - 2l_z(i) n(i, j) \right]. \end{aligned} \quad (24)$$

Соответственно,

$$\begin{aligned} n(i, j+1) = & n(i, j) + \frac{\lambda_y(i)}{u(i)} \left[\frac{l_y(i-1)}{l_y(i)} l_z(i-1) n(i-1, j) + \right. \\ & \left. + \frac{l_y(i+1)}{l_y(i)} l_z(i+1) n(i+1, j) - 2l_z(i) n(i, j) \right]. \end{aligned} \quad (25)$$

Уравнение (??) позволяет рассчитывать концентрацию частиц в точке каждого следующего сечения по известным значениям концентрации в трех точках предыдущего сечения, что предполагает последовательный расчет прогонкой от начального до конечного сечения с шагом $l_z(i)$.

Для входного сечения

$$n(i, 1) = n_0 \left\{ 1 + \frac{\lambda_y(i)}{u(i)} \left[\frac{l_y(i-1)}{l_y(i)} l_z(i-1) + \frac{l_y(i+1)}{l_y(i)} l_z(i+1) - 2l_z(i) \right] \right\}, \quad (26)$$

для пристенных узлов

$$n(0, j+1) = n(0, j) + \frac{\lambda_y(0)}{u(0)} \left[\frac{l_y(1)}{l_y(0)} l_z(1) n(1, j) - l_z(0) n(0, j) \right]. \quad (27)$$

Расчет по формулам (??) и (??) может быть затруднен из-за переменной по сечению канала длины инерционного пробега частиц. Так как согласно принятой схеме расстояние между соседними узлами равно $l_z(i)$ и $l_y(i)$, пристенные узлы будут “запаздывать” по сравнению с приосевыми, что приведет к искривлению расчетной сетки и деформированию формы ячеек. Поэтому целесообразно ввести сетку с постоянным по длине расстоянием между узлами $\Delta z \ll L$, равным, например, длине пробега частиц на оси канала. Тогда можно принять $n(i, z + \Delta z) \approx n(i, z) + \Delta n_z(i, j) \Delta z / l_z(i)$ и уравнение (??) примет вид

$$\begin{aligned} n(i, z + \Delta z) = & n(i, z) + \\ & + \frac{\lambda_y(i) \Delta z}{u(i)} \left[\frac{l_z(i-1)l_y(i-1)}{l_z(i)l_y(i)} n(i-1, z) + \frac{l_z(i+1)l_y(i+1)}{l_z(i)l_y(i)} n(i+1, z) - 2n(i, z) \right]. \end{aligned} \quad (28)$$

Для входного сечения и пристенных слоев

$$n(i, \Delta z) = n_0 \left\{ 1 + \frac{\lambda_y(i) \Delta z}{u(i)} \left[\frac{l_z(i-1)l_y(i-1)}{l_z(i)l_y(i)} + \frac{l_z(i+1)l_y(i+1)}{l_z(i)l_y(i)} - 2 \right] \right\}, \quad (29)$$

$$n(0, z + \Delta z) = n(0, z) + \frac{\lambda_y(0) \Delta z}{u(0)} \left[\frac{l_z(1)l_y(1)}{l_z(0)l_y(0)} n(1, z) - n(0, z) \right]. \quad (30)$$

Для сокращения объема вычислений можно также принять допущение об изотропной турбулентности в каждой точке потока $l_z(i) = l_y(i) = l(i)$ и $\lambda_z(i) = \lambda_y(i) = \lambda(i)$. Тогда уравнения (??)–(??) примут вид

$$n(i, z + \Delta z) = n(i, z) + \frac{\lambda(i) \Delta z}{u(i)} \left[\frac{l^2(i-1)}{l^2(i)} n(i-1, z) + \frac{l^2(i+1)}{l^2(i)} n(i+1, z) - 2n(i, z) \right], \quad (31)$$

$$n(i, \Delta z) = n_0 \left\{ 1 + \frac{\lambda(i) \Delta z}{u(i)} \left[\frac{l^2(i-1) + l^2(i+1)}{l^2(i)} - 2 \right] \right\}, \quad (32)$$

$$n(0, z + \Delta z) = n(0, z) + \frac{\lambda(0) \Delta z}{u(0)} \left[\frac{l^2(1)}{l^2(0)} n(1, z) - n(0, z) \right]. \quad (33)$$

Если дополнительно принять допущение, что интенсивность турбулентных пульсаций газа и, соответственно, интенсивности переходов одинаковы по сечению канала ($\lambda_i = \lambda$), то окончательно получим (переходя в обозначении точек к нижним индексам)

$$n_i(z + \Delta z) = n_i(z) + \frac{\lambda \Delta z}{u_i} \left[\frac{l_{i-1}^2}{l_i^2} n_{i-1}(z) + \frac{l_{i+1}^2}{l_i^2} n_{i+1}(z) - 2n_i(z) \right], \quad (34)$$

$$n_i(\Delta z) = n_0 \left\{ 1 + \frac{\lambda \Delta z}{u_i} \left[\frac{l_{i-1}^2 + l_{i+1}^2}{l_i^2} - 2 \right] \right\}, \quad (35)$$

$$n_0(z + \Delta z) = n_0(z) + \frac{\lambda \Delta z}{u_0} \left[\frac{l_1^2}{l_0^2} n_1(z) - n_0(z) \right]. \quad (36)$$

3. Результаты численных экспериментов

Расчеты по приведенной модели с использованием известных зависимостей для полей скорости газа, интенсивности (частоты) и масштаба турбулентных пульсаций, степени увлечения частиц турбулентными вихрями хорошо согласуются с экспериментальными данными [6–9, 11, 16, 17, 19, 22, 30, 31]. Получено (рис. 6), что профиль концентрации частиц в турбулентном потоке характеризуется значительной неоднородностью, особенно в пристенной области. Наиболее интенсивная перестройка исходного однородного профиля происходит на начальном участке канала, на котором профиль концентрации изменяется от выпукло-вогнутого до вогнутого (чашевидного), после чего меняется медленно, т.е. наступает динамическое равновесие, при котором число частиц, поступающих из приосевой зоны в пристенную, равно числу возвращающихся частиц. Длина участка стабилизации зависит прежде всего от размера частиц (или от степени их увлечения турбулентными пульсациями) и при обычных условиях лежит в интервале от нескольких диаметров (для частиц диаметром до 1 мкм) до нескольких сотен диаметров (для частиц диаметром более 100 мкм). Установившийся профиль концентрации частиц при $z \rightarrow \infty$ можно определить из уравнений (??)–(??) при $n(z + \Delta z) = n(z)$, из которых следует, что равновесная концентрация в любой точке сечения обратно пропорциональна квадрату длины инерционного пробега частиц ($n_i \sim 1/l_i^2$).

Наличие различных по форме профилей концентрации дисперсной фазы в турбулентном потоке подтверждается экспериментальными исследованиями. В зависимости от значения степени увлечения частиц турбулентными вихрями профиль их концентрации в различных сечениях по длине канала может принимать разный вид — логарифмический, прямоугольный, чашевидный, седловидный или куполообразный [32–37].

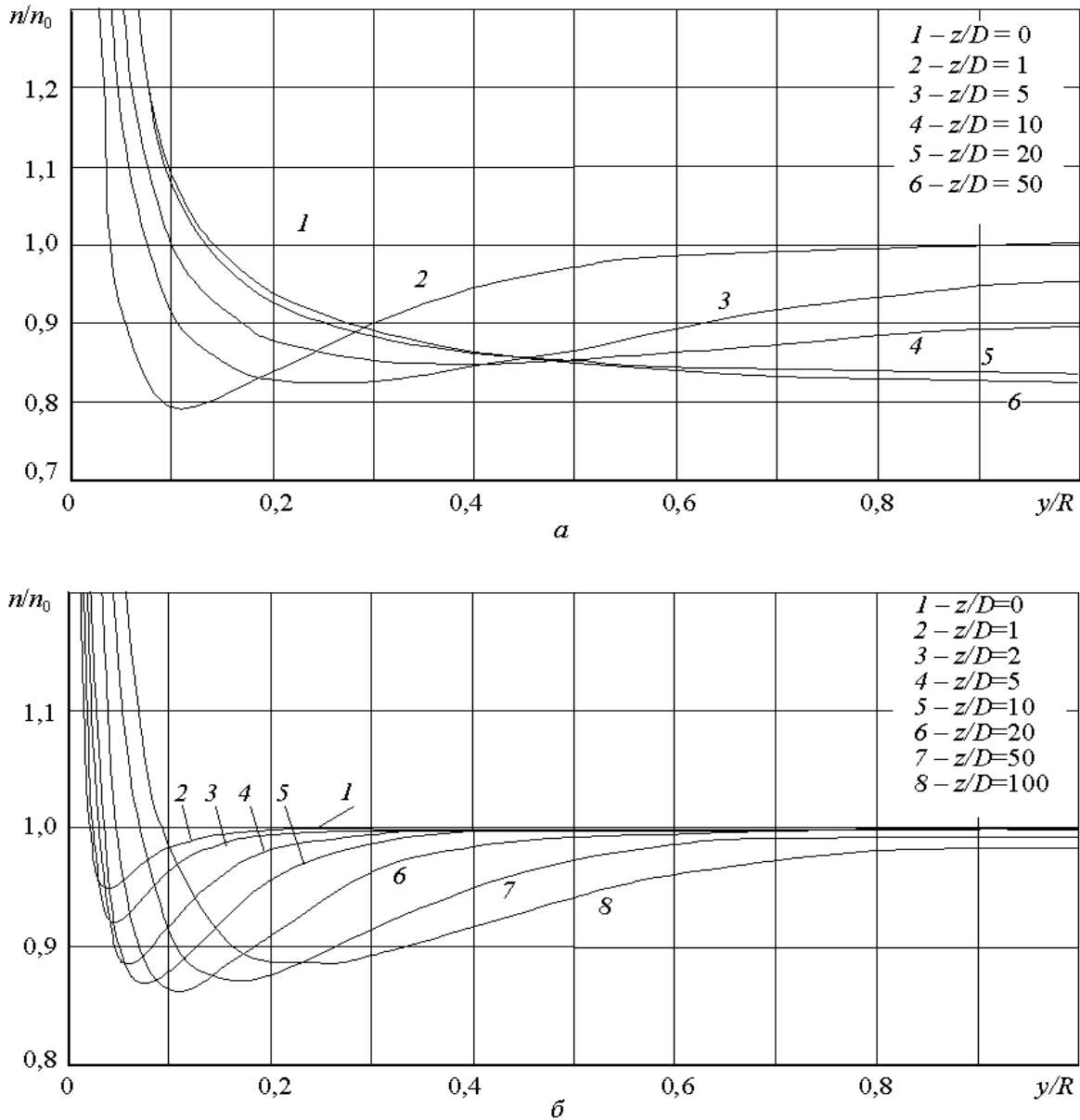


Рис. 6. Профили концентрации частиц диаметром 1 мкм (а) и 100 мкм (б) в цилиндрическом канале: диаметр канала 51 мм, скорость газа 10 м/с, плотность частиц 1000 кг/м³.

Заключение

Предложенный вероятностно-статистический подход позволяет с использованием упрощенных представлений о структуре и характеристиках турбулентных газодисперсных потоков рассчитать поля концентрации дисперсной фазы в любом сечении канала и их изменение по его длине. Его использование дает хорошие результаты при расчете как осевых, так и закрученных газодисперсных потоков, газожидкостных (дисперсно-кольцевых) потоков с учетом фазовых переходов (конденсации или испарения), дробления и коагуляции капель жидкости, осаждения и брызгоуноса с поверхности канала [6, 7].

Использование упрощенной методики вероятностно-статистического моделирования позволило построить эффективные численные алгоритмы расчета, существенно сокращаю-

щие объем вычислений без потери их точности.

Список литературы

- [1] КАФАРОВ В.В. Основы массопередачи. М.: Высш. шк., 1979.
- [2] ТАГАНОВ И.Н. Моделирование процессов массо- и энерготранспорта. Нелинейные системы. Л.: Химия, 1979.
- [3] КАФАРОВ В.В., ГЛЕБОВ М.Б. Математическое моделирование основных процессов химических производств. М.: Высш. шк., 1991.
- [4] КУТЕПОВ А.М.: СТЕРМАН Л.С., СТЮШИН Н.Г. Гидродинамика и теплообмен при парообразовании. М.: Высш. шк., 1986.
- [5] ПРОТОДЬЯКОНОВ И.О., БОГДАНОВ С. Р. Статистическая теория явлений переноса в процессах химической технологии. Л.: Химия, 1983.
- [6] СУГАК Е.В., ВОЙНОВ Н.А., НИКОЛАЕВ Н.А. Очистка газовых выбросов в аппаратах с интенсивными гидродинамическими режимами. Казань: Школа, 1999.
- [7] СУГАК Е.В. Моделирование и интенсификация процессов очистки промышленных газовых выбросов в турбулентных газодисперсных потоках. Дис... докт. техн. наук. Красноярск: СибГТУ, 1999.
- [8] НИГМАТУЛИН Р.И. Динамика многофазных сред. Ч. 1. М.: Наука, 1987.
- [9] НИГМАТУЛИН Р.И. Динамика многофазных сред. Ч. 2. М.: Наука, 1987.
- [10] ОСТРОВСКИЙ Г.М. Прикладная механика неоднородных сред. СПб.: Наука, 2000.
- [11] ХОЛПАНОВ Л.П., ШКАДОВ В.Я. Гидродинамика и теплообмен с поверхностью раздела. М.: Наука, 1990.
- [12] RIETEMA K. Science and technology of dispersed twophase systems // Chem. Eng. Sci. 1982. Vol. 37, No 8. P. 1125–1150.
- [13] БРОУНШТЕЙН Б.И., ФИШВЕЙН Г.А. Гидродинамика, массо- и теплообмен в дисперсных системах. Л.: Химия, 1977.
- [14] ПИРУМОВ У.Г., РОСЛЯКОВ Г.С. Численные методы газовой динамики. М.: Высш. шк., 1987.
- [15] БОРЩЕВСКИЙ Ю.Т. Теория одно- и двухфазного турбулентного пограничного слоя. Киев: Вища шк., 1975.
- [16] БУСРОЙД Р. Течение газа со взвешенными частицами. М.: Мир, 1975.
- [17] BOOTHROYD R.G., WALTON P. J. Fully developed turbulent boundary-layer flow of a fine solid-particle gaseous suspension // Ind. and Eng. Chem. Fundam. 1973. Vol. 12, No 1. P. 75–82.

- [18] КУЧАНОВ С.И., ЛЕВИЧ В.Г. Диссипация энергии в турбулентном газе, содержащем взвешенные частицы // Докл. АН СССР. 1967. Т. 174, № 5. С. 1033–1036.
- [19] BOOTHROYD R.G. Turbulence characteristics of the gaseous phase in duct flow of a suspension of fine particles // Trans. Instn. Chem. Eng. 1967. Vol. 45, No 8. P. 297–310.
- [20] DOIG I.D., ROPER G.H. Air velocity profiles in the presence of cocurrently transported particles // Ind. and Eng. Chem. Fundam. 1967. Vol. 6, No 2. P. 247–256.
- [21] SOO S.L., TREZEK G.L. Turbulent pipe flow of magnesia particles in air // Ind. and Eng. Chem. Fundam. 1966. Vol. 5, No 3. P. 388–392.
- [22] СОУ С. Гидродинамика многофазных систем. М.: Мир, 1971.
- [23] БАБУХА Г.Л.:РАБИНОВИЧ М.И. Механика и теплообмен полидисперсных потоков газовзвеси. Киев: Наук. думка, 1968.
- [24] ROSSETTI S.J., PFEFFER R. Drag reduction in dilute flowing gas-solid suspensions // AIChE J. 1972. No 1. P. 31–39.
- [25] САКС С. Е. Гидравлическое сопротивление при турбулентном движении тонкодисперсных аэросмесей // Инж.-физ. журн. 1968. Т. 14, № 4. С. 633–638.
- [26] ФУКС Н.А. Успехи механики аэрозолей. М.: Изд-во АН СССР, 1961.
- [27] РОМАНКОВ П.Г., КУРОЧКИНА М.И. Гидромеханические процессы химической технологии. Л.: Химия, 1982.
- [28] ГАЛУСТОВ В.С. Прямоточные распылительные аппараты в теплоэнергетике. М.: Энергоатомиздат, 1989.
- [29] ЛАГАРЬКОВ А.Н., СЕРГЕЕВ В.М. // Успехи физ. наук. 1978. Т. 125, вып. 3.
- [30] ХИНЦЕ И.О. Турбулентность, ее механизм и теория. М.: Физматгиз, 1963.
- [31] МЕДНИКОВ Е.П. Турбулентный перенос и осаждение аэрозолей. М.: Энергия, 1980.
- [32] MUNAKATA T. ETC. Velocity of solid particles entrained with reduced-pressure air flow in horizontal duct // J. Chem. Eng. Jap. 1977. Vol. 10, No 5. P. 355–360.
- [33] ТЮТКОВ О.В. Воздействие потока с поперечным градиентом скорости на обтекаемое тело // Теор. основы хим. технологии. 1969. Т. 3, № 6. С. 882–888.
- [34] САКС С. Е. Определение критической скорости взвесенесущего потока // Инж.-физ. журн. 1970. Т. 18, № 5. С. 832–837.
- [35] ГАЛЕРШТЕЙН Д.М. О распределении дисперсного материала в поперечном сечении потоков газовзвеси // Исследование процессов переноса в аппаратах с дисперсными системами. Минск: Наука и техника. 1969. С. 20–26.
- [36] МЕДНИКОВ Е.П. О распределении аэрозольных частиц в трубах и каналах // Пром. и санит. очистка газов. 1980. № 6. С. 21–22.

- [37] SEHMEL G.A. Particle sampling bias introduced by anisokinetic sampling and deposition within the sampling line // Amer. Ind. Hyg. Assoc. J. 1970. Vol. 31, No 6. P. 758–771.

*Поступила в редакцию 27 января 2003 г.,
в переработанном виде — 5 марта 2003 г.*