АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ОДНОЙ МОДЕЛИ ВЕТРОВОГО ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ*

Л. А. Компаниец, Т. В. Якубайлик
Институт вычислительного моделирования СО РАН, Красноярск, Россия
e-mail: kla@icm.krasn.ru

An analytical solution of a stationary model of the wind flow in homogeneous fluid in a closed basin is obtained (two-dimensional case in the vertical section). It is assumed that the bottom of the water basin is not flat, and the vertical turbulent exchange coefficient is known function of space variables. The obtained solution may be used as a test of the computational algorithms, for solving problems on the wind flows in closed water basins.

Задача определения движения неоднородной и однородной жидкости под действием ветра — сложная задача и чаще всего решается численными методами [1–3]. Аналитические решения, если они существуют, найдены, как правило, для случая постоянного коэффициента турбулентного обмена [4, 5]. В настоящей работе для одной модели ветрового движения жидкости, применявшейся в [1] для расчета ветрового движения в стратифицированном по температуре водоеме — охладителе Экибастузской ГРЭС-2 и однородном по температуре Чудском озере [2], найдено аналитическое решение для случая переменного коэффициента вертикального турбулентного обмена.

Рассмотрим модель нестационарного трехмерного ветрового движения жидкости, которая использовалась в [1, 2] для численного моделирования гидродинамических режимов конкретных водоемов, в случае однородной по температуре жидкости:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - lv = \frac{\partial}{\partial z}\left(K_z\frac{\partial u}{\partial z}\right) - g\frac{\partial \zeta}{\partial x}, \tag{1}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + lu = \frac{\partial}{\partial z}\left(K_z\frac{\partial v}{\partial z}\right) - g\frac{\partial \zeta}{\partial y}, \tag{2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \tag{3}$$

Здесь $u = u(x,y,z,t)$, $v = v(x,y,z,t)$, $w = w(x,y,z,t)$ — компоненты вектора скорости течения; g — ускорение свободного падения; $K_z > 0$ — коэффициент вертикального турбулентного обмена; $\zeta = \zeta(x,y,t)$ — отклонение поверхности жидкости от равновесного положения; l — параметр Кориолиса. Ось z направлена вертикально вверх.

Эта система уравнений представляет собой приближение Буссинеска, удовлетворяет условию гидростатики и предполагает, что течение медленное, а дно гладкое.

*Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования РФ и CRDF, грант № REC-002.

Граничные условия для вертикальной компоненты скорости будут следующими:
А) на водной поверхности $z^0 = \zeta$

$$\frac{\partial z^0}{\partial t} = w, \tag{4}$$

Б) на дне при $z = z_0(x, y) = -H(x, y)$

$$w = u\frac{\partial z_0}{\partial x} + v\frac{\partial z_0}{\partial y}. \tag{5}$$

Интегрируя уравнение (3) с учетом (4) и (5), получаем уравнение для ζ:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial Q_1}{\partial x} + \frac{\partial Q_2}{\partial y} = 0, \tag{6}$$

где

$$Q_1 = \int\limits_{z_0}^{z^0} u dz,\ Q_2 = \int\limits_{z_0}^{z^0} v dz.$$

Кроме того, система (1)–(3) и (6) должна быть дополнена соответствующими начальными и граничными условиями [1, 2].

Отметим, что в работах [1, 2] для нахождения коэффициента турбулентного обмена используется $k-\varepsilon$-модель. Мы будем считать, что $K_z = K_z(x, y, z, t)$ — известная функция.

Сделаем ряд упрощающих предположений, позволяющих найти аналитическое решение для горизонтальной составляющей скорости u.

Предположение 1. Движение является двумерным в вертикальной плоскости.

Предположение 2. Отклонение свободной поверхности от невозмущенного положения мало, и влияние ветра можно рассматривать при $z^0 = 0$ [6]. На дне задано условие, связывающее касательное напряжение и скорость течения линейным образом. Тогда уравнения (1) и (6) перепишутся следующим образом:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z}\left(K_z\frac{\partial u}{\partial z}\right) - g\frac{\partial \zeta}{\partial x}, \tag{7}$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial Q_1}{\partial x} = 0, \tag{8}$$

$$Q_1 = \int\limits_{z_0}^{0} u dz,\ 0 < x < L. \tag{9}$$

Отметим, что единственность решения данной интегродифференциальной задачи для $H(x) = \text{const}$, $K_z = \text{const}$ в отсутствие ветра и при условии прилипания на дне в неограниченной области по переменной x показана в работе [6].

Предположение 3. Существует стационарное решение задачи (7)–(9). Тогда получаем следующую краевую задачу:

$$g\frac{\partial \zeta}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z}\left(K_z\frac{\partial u}{\partial z}\right), \tag{10}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\int\limits_{-H}^{0} u(x,z)dz\right) = 0, K_z = K_z(x,z), \tag{11}$$

которая решается в области $0 < x < L$, $-H(x) < z < \zeta(x)$ со следующими граничными условиями:

$$K_z \frac{\partial u}{\partial z}\bigg|_{z=0} = \beta(x), \tag{12}$$

где $\beta(x) = \tau/\rho_0$,

$$K_z \frac{\partial u}{\partial z}\bigg|_{z=-H(x)} = k_b u, \tag{13}$$

$$Q_1|_{x=0} = Q_1|_{x=L} = 0. \tag{14}$$

Здесь τ — касательное напряжение ветра на водной поверхности ; ρ_0 — плотность воды; $k_b = \mathrm{const}$ — коэффициент придонного касательного напряжения. Отметим, что вариант $k_b = 0$ отвечает условию скольжения без трения, а $k_b = \infty$ — условию прилипания.

В системе уравнений (10), (11) $\zeta = \zeta(x)$, и поэтому первое из уравнений можно переписать в виде

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(K_z(x,z)\frac{\partial u}{\partial z}\right) = \Psi_1(x) \equiv g\frac{\partial \zeta}{\partial x}.$$

Проинтегрируем это выражение по z:

$$K_z(x,z)\frac{\partial u}{\partial z} = \Psi_1(x)z + \Psi_2(x).$$

Поделив левую часть этого соотношения на $K_z(x,z) > 0$, получаем формулу для определения горизонтальной составляющей скорости

$$u = \int\limits_{-H}^{z} \frac{\Psi_1(x)\eta + \Psi_2(x)}{K_z(x,\eta)} d\eta + \Psi_3(x). \tag{15}$$

Функции $\Psi_1(x)$, $\Psi_2(x)$ и $\Psi_3(x)$ определим из граничных условий (12), (13) и уравнения (11), подставив в них полученное выражение для u.

Из (12) получаем соотношение

$$\Psi_2(x) = \beta(x), \tag{16}$$

из (13) — соответственно

$$-\Psi_1(x)H(x) + \Psi_2(x) = k_b\Psi_3(x), \tag{17}$$

а из уравнения (11) следует, что

$$\int\limits_{-H}^{0} u dz = 0$$

или

$$\int\limits_{-H}^{0} dz \int\limits_{-H}^{z} \frac{\Psi_1(x)\eta + \Psi_2(x)}{K_z(x,\eta)} d\eta + H\Psi_3(x) = 0.$$

Так как функции Ψ_1 и Ψ_2 зависят только от x, последнее уравнение перепишем в виде

$$\Psi_1(x) \int\limits_{-H}^{0} dz \int\limits_{-H}^{z} \frac{\eta}{K_z(x,\eta)} d\eta + \Psi_2(x) \int\limits_{-H}^{0} dz \int\limits_{-H}^{z} \frac{1}{K_z(x,\eta)} d\eta + H\Psi_3(x) = 0. \qquad (18)$$

Система трех линейных уравнений (16)–(18) с тремя неизвестными Ψ_1, Ψ_2, Ψ_3 имеет решение, если ее определитель не равен нулю, т. е.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -H & 1 & -k_b \\ K_{\Psi_1} & K_{\Psi_2} & H \end{vmatrix} \neq 0,$$

или $H^2 - k_b K_{\Psi_1} \neq 0$, где K_{Ψ_1} и K_{Ψ_2} — соответствующие определенные интегралы при Ψ_1 и Ψ_2 в (18). Например, при $k_b = 0$ (на дне условие скольжения без трения) система всегда имеет единственное решение.

Таким образом, формула (15) дает при соответствующим образом вычисленных Ψ_1, Ψ_2, Ψ_3 решение системы уравнений (10), (11) с граничными условиями (12), (13).

Сделаем следующие выводы.

1. Найденное нами решение справедливо для случая задачи протекания под воздействием ветра при нулевом расходе жидкости.

2. Полученное нами решение легко обобщается на случай задачи протекания при воздействии ветра с постоянным расходом q. Тогда в правой части в уравнении (18) вместо нуля нужно поставить величину q.

При $K_z = \mathrm{const}$ можно явным образом выписать формулу для определения горизонтальной составляющей скорости

$$u = \frac{\beta(x)}{K_z} \left(\frac{1 + k_b/2 \cdot H(x)/K_z}{2 + 2 \cdot k_b/3 \cdot H(x)/K_z} \frac{z^2}{H(x)} + z + \frac{2/3 + k_b/6 \cdot H(x)/K_z}{2 + 2k_b/3 \cdot H(x)/K_z} \cdot H(x) \right),$$

и в этом случае при любых значениях k_b распределение скорости по глубине представляет собой полином второй степени.

Отметим, что полученное нами решение в случае $K_z(x,z) = \mathrm{const}$, $k_b = \infty$ совпадает с решением, указанным в работе [4].

Для модельного бассейна длиной 4800 м и глубиной 20 м с помощью численного интегрирования были найдены аналитические решения при различных $K_z = K_z(x,z)$ и при $\beta = 0.000624$, что примерно соответствует ветру со скоростью 2 м/с. Первое из использованных в расчетах $K_z(x,z) = 0.02$ представляет собой постоянную функцию.

Для указанного K_z на рис. 1, *а* и рис. 2, *а* показано качественное поведение скоростей в различных сечениях бассейна для двух значений k_b. Мелким пунктиром обозначен рельеф дна, крупным пунктиром показаны сечения бассейна, в которых рассчитывались скорости. На рис. 1, *б* и рис. 2, *б* представлено количественное поведение скоростей, причем в сечениях 1 и 3 скорости совпадают. Анализ полученных результатов показывает, что при $K_z = \mathrm{const}$ в каждом сечении $x = x_0$ распределение скорости по глубине представляет собой полином второй степени.

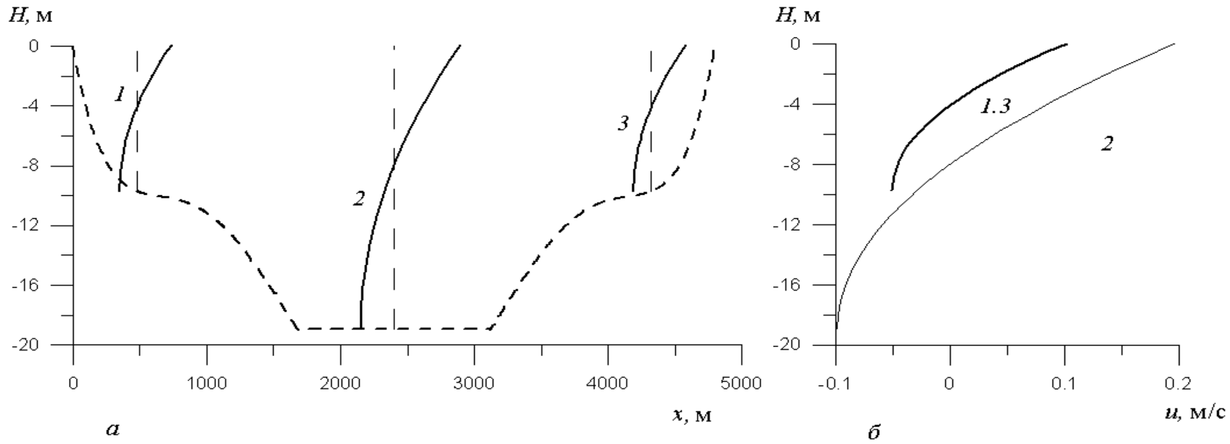

Рис. 1. Распределение скоростей при $k_b = 0$.

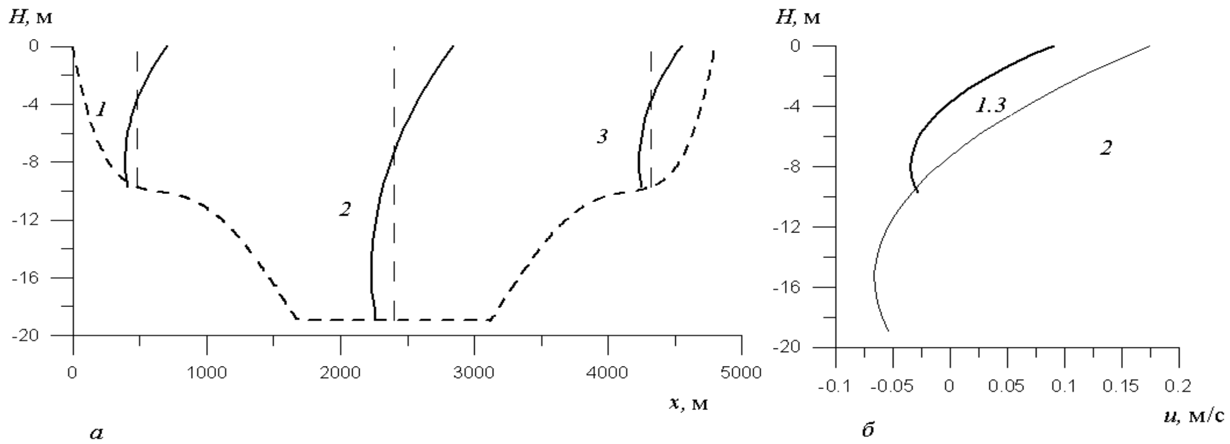

Рис. 2. Распределение скоростей при $k_b = 0.05$.

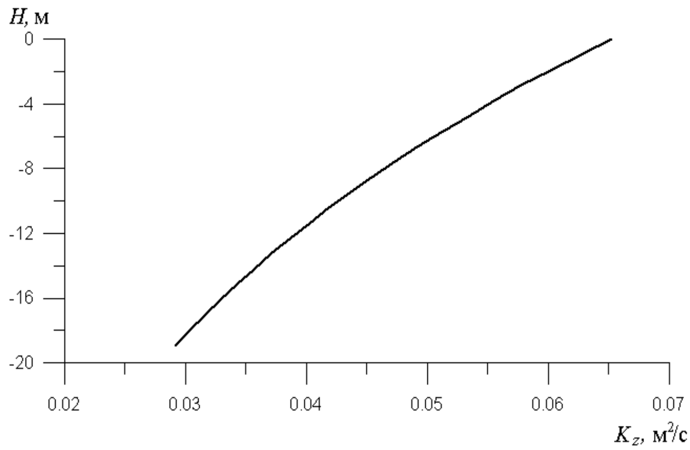

Рис. 3. Распределение K_z в соответствии с [8].

Если использовать для определения $K_z(z)$ формулу, в которой коэффициент вертикального турбулентного обмена экспоненциально убывает по глубине [7, 8], то скорости

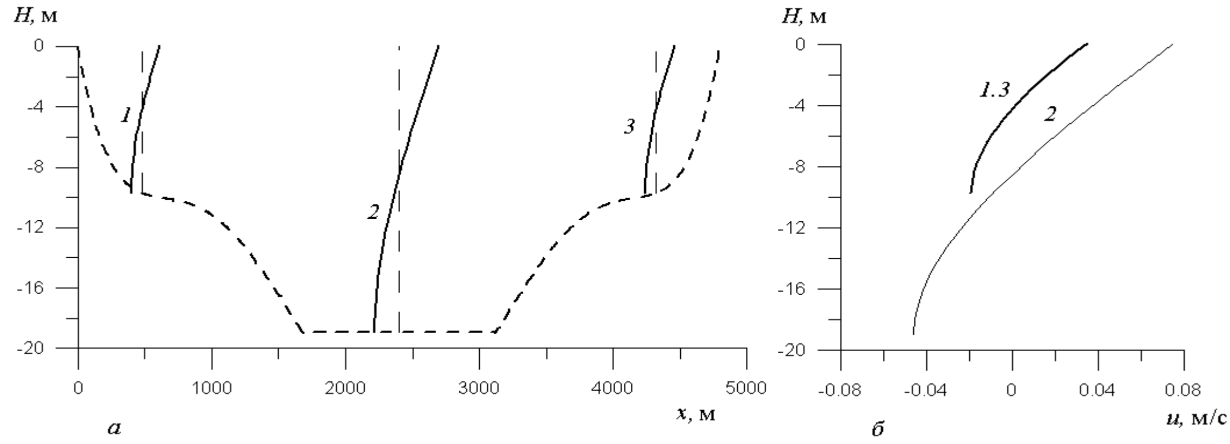

Рис. 4. Распределение скоростей при K_z, представленном на рис. 3.

по глубине изменяются, как показано на рис. 4, и величины скорости на поверхности в указанных сечениях количественно совпадают с наблюдаемыми в природе ($3 \dots 7$ см/с при скорости ветра 2 м/с).

Список литературы

[1] Квон В.И. Гидротермический расчет водоемов — охладителей // Изв. АН СССР. Энергетика и транспорт. 1979. № 5. С. 129–137.

[2] Волкова Г.Б., Квон В.И., Филатова Т.Н. Численное моделирование ветровых течений в Чудском озере // Водные ресурсы. 1981. № 3. С. 91–99.

[3] Wang Y., Hutter K. Methods of substructuring in lake circulation dinamics // Advances in Water Resourses. 2000. Vol. 23. P. 399–425.

[4] Филатов Н.Н. Динамика озер. Л.: Гидрометеоиздат, 1983. 166 с.

[5] Wang Y., Hutter K., Bauerle E. Barotropic response in a lake to wind-forsing // Annales Geophysicae. 2001. Vol. 19. P. 367–388.

[6] Ляпидевский В.Ю., Тешуков В.М. Математические модели распространения длинных волн в неоднородной жидкости. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2000. 420 с.

[7] Witten A., Thomas J. Steady wind-driven currents in large lake with depth-dependent eddy viscousity // J. of Phys. Ocean. 1976. Vol. 6. N 3. P. 85-92.

[8] Belolipetsky V.M., Genova S.N. Investigation of Hydrothermal and Ice Regimes in Hydropower Station Bays // IJCFD. 1998. Vol. 10. P. 151–158.

Поступила в редакцию 8 января 2003 г.,
в переработанном виде — 12 мая 2003 г.