

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ БЕЗУДАРНОГО СИЛЬНОГО СЖАТИЯ ОДНОМЕРНЫХ ОБЪЕМОВ ПОЛИТРОПНОГО ГАЗА*

С. П. БАУТИН

Уральский государственный университет путей сообщения,

Екатеринбург, Россия

e-mail: SBautin@math.usart.ru

A mathematical description of the different ways of shockless power compression of one-dimensional volumes of gas is given. The results of numerical modeling are provided. Stability of the considered flows is discussed.

Получение больших значений плотности у соответствующих сплошных сред представляет интерес, например, для лазерного термоядерного синтеза [1]. Многочисленные физические эксперименты показали, что основным препятствием на пути реализации управляемого термоядерного синтеза является неустойчивость газовых течений, возникающих при обжати мишеней [1]. Возникновение неустойчивости течений в свою очередь связано с тем, что во всех физических экспериментах внешнее воздействие на мишень сразу вызывает сильные разрывы у плотности и давления, т.е. ударные волны в течениях сжатия.

Альтернативой для такого способа сжатия мишеней является способ безударного сжатия газа, при котором в течении газа имеются только слабые разрывы, и, следовательно, плотность и давление газа в таких течениях распределены непрерывно. В монографии [2] предложен единый подход к математическому описанию безударного сжатия газа до больших (включая бесконечное) значений плотности. В частности, поставлены соответствующие начально-краевые задачи, описывающие сильное сжатие различных объемов первоначально однородного и покоящегося газа, в том числе неоднородных и представляющих интерес для реальных физических экспериментов. Предложенный в [2] подход успешно развивается (см., например, [3]).

В данной работе на основе подхода из [2] приведено математическое описание безударного сильного сжатия одномерных объемов политропного газа. Считается [1], что обнаруженные в случае политропного газа основные закономерности течений сжатия будут сохраняться и в случае других, реальных уравнений состояния сжимаемой среды. Этот вывод подтверждается, в частности, работами [2–5].

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 02-01-01122.

Статья написана по материалам доклада, сделанного на 8-м Российско-японском симпозиуме по вычислительной гидродинамике, Сендай, сент. 2003 г.

© Институт вычислительных технологий Сибирского отделения Российской академии наук, 2004.

Ниже будут исследоваться решения системы уравнений газовой динамики

$$\begin{cases} \sigma_t + u\sigma_r + \frac{\gamma-1}{2}\sigma(u_r + \nu\frac{u}{r}) = 0, \\ u_t + uu_r + \frac{2}{\gamma-1}\sigma\sigma_r = 0, \end{cases} \quad (1)$$

описывающие изэнтропические течения политропного газа. Здесь $\sigma = \rho^{(\gamma-1)/2}$, ρ — плотность газа, $\gamma = \text{const} > 1$ — показатель политропы газа из уравнения состояния $p = \rho^\gamma/\gamma$, где p — давление газа; u — скорость газа. В рассматриваемом случае изэнтропических течений скорость звука в газе совпадает с введенной функцией σ . Случай $\nu = 0$ соответствует плоскосимметричным течениям газа, $\nu = 1$ и $\nu = 2$ — цилиндрически- и сферически-симметричным течениям. В системе (1) независимыми переменными являются время t и пространственная координата r . Если $\nu = 0$, то $r = x_1$, а в случаях $\nu = 1, 2$ $r = (x_1^2 + \dots + x_{\nu+1}^2)^{1/2}$, где x_1, x_2, x_3 — декартовы координаты физического пространства.

Если в системе (1) сделать замены:

$$\zeta = \frac{t}{r}, \quad z = \zeta^2\sigma^2, \quad V = \zeta u,$$

то получим одно обыкновенное дифференциальное уравнение [6]

$$\frac{dz}{dV} = \frac{2z \left\{ (1-V) \left[(1-V) - \nu\frac{(\gamma-1)}{2}V \right] - z \right\}}{V[(1-V)^2 - (\nu+1)z]}, \quad (2)$$

описывающее автомодельные, т.е. зависящие только от переменной $1/\zeta$, течения политропного газа. Часть интегральных кривых и особых точек этого уравнения в случае $\nu = 2$ приведена на рис. 1.

Как показано в работах [7, 8], интегральная кривая уравнения (2), соединяющая особые точки A и B , описывает безударное сжатие в центре симметрии первоначально однородного и покоящегося в сферическом объеме газа. Тем самым описывается безударное сжатие сферических объемов газа до бесконечной плотности. В плоскости физических переменных области такого течения приведены на рис. 2, *a*. Прямая CO является звуковой характеристикой исходного однородного покоящегося газа. Этот исходный газ расположен в области, лежащей ниже этой звуковой характеристики CO . Линия CDO есть траектория движения непроницаемого сжимающего газ поршня и приходящего в момент времени ($t = 0$) в центр симметрии $r = 0$. Таким образом, весь сжимаемый газ оказывается в одной точке, и, следовательно, его плотность в этот момент времени ($t = 0$) равна бесконечности. Искомая волна сжатия, описываемая соответствующей интегральной кривой

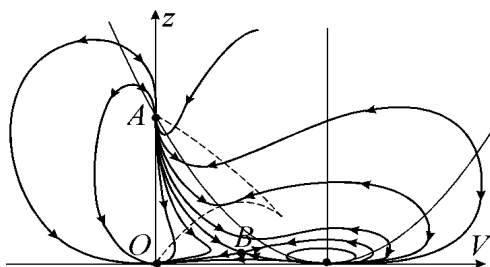


Рис. 1. Интегральные кривые уравнения (2).

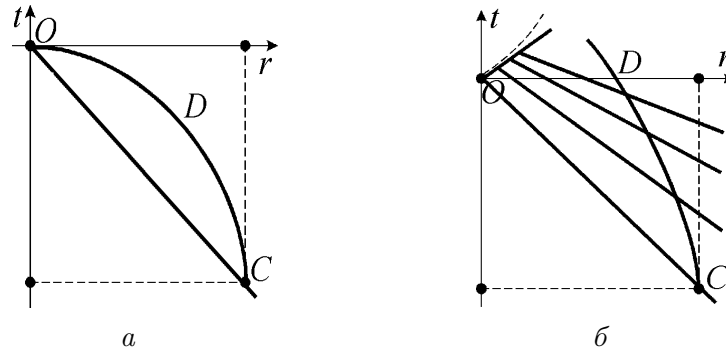


Рис. 2. Области течения в плоскости rOt при сжатии до бесконечной (а) и конечной (б) плотности.

уравнения (2), расположена (см. рис. 2, а) в области между звуковой характеристикой и траекторией движения поршня.

В работах [6, 7] также показано, что интегральные кривые уравнения (2), лежащие на рис. 1 в криволинейном треугольнике ABO и соединяющие особые точки A и O , описывают безударный переход сферического объема газа, первоначально однородного и покоящегося, в сферический объем однородного газа с большей плотностью.

Таким способом описывается безударное сжатие сферического объема газа до любого наперед заданного значения плотности. На рис. 2, б приведена область определения такого течения в плоскости физических переменных. Линия CO есть звуковая характеристика, отделяющая исходный однородный покоящийся газ от волны сжатия. Этот первоначально покоящийся однородный газ также расположен в области, лежащей ниже прямой CO . Линия CD есть траектория движения непроницаемого сжимающего поршня. Однако в этом случае в момент времени $t = 0$ поршень отстоит от центра симметрии на ненулевом расстоянии. В этот момент времени между поршнем и центром симметрии параметры сжатого газа постоянны: $\sigma = \sigma_*$, $u = u_* < 0$.

Для системы (1) в случае $\nu = 0$ также есть автомодельное решение

$$\sigma = \frac{(\gamma - 1)}{2}u + \sigma_0, \quad u = \frac{2}{(\gamma + 1)} \frac{(x_1 - x_*)}{(t - t_*)} - \frac{2}{(\gamma + 1)}\sigma_0, \quad \sigma_0 = \text{const}, \quad (3)$$

являющееся центрированной волной Римана. Решение (3) описывает безударное сжатие до бесконечной плотности в момент времени $t = t_*$ на плоскость $x_1 = x_*$ первоначально однородного и покоящегося плоского слоя газа. Области течения газа, показанной на рис. 2, а, также совпадают с областями течения с центрированной волной (3), если под осью Or понимать Ox_1 .

Если решение (3) через звуковую характеристику непрерывно состыковать с решением, описывающим однородный движущийся газ, то полученное таким образом составное течение описывает безударное сжатие плоского слоя до любого наперед заданного значения плотности. Области течений в этом случае приведены на рис. 3. В области, помеченной цифрой 0, расположен исходный покоящийся однородный газ, в области 1, отделенной от области 0 звуковой характеристикой CE , — центрированная волна (3). В области 2, отделенной звуковой характеристикой DE от центрированной волны, имеется однородный движущийся газ с постоянными параметрами $\sigma = \sigma_*$, $u = u_* > 0$. Составная линия CDF есть траектория движения непроницаемого поршня, осуществляющего требуемое безударное сжатие газа.

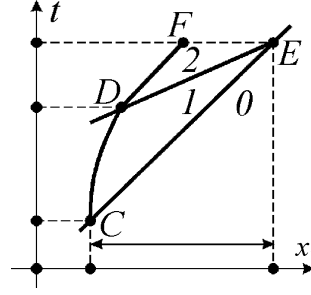


Рис. 3. Области течения в плоскости x_1Ot при сжатии плоского слоя до конечной плотности.

Для случаев $\nu = 1, 2$ в монографии [2] построено обобщение центрированной волны Римана, которое описывает безударное сжатие первоначально однородного и покоящегося цилиндрического или сферического слоя газа с ненулевыми внешним и внутренним радиусами. Для того чтобы описать особенность, возникающую в течении при $t \rightarrow t_* - 0$ и вызванную неограниченным ростом плотности, в системе (1) меняются ролями зависимая σ и независимая r переменные. В результате вместо системы (1) получается следующая система уравнений:

$$\begin{cases} r(u - r_t) + \frac{(\gamma - 1)}{2}\sigma(ru_\sigma + \nu ur_\sigma) = 0, \\ r_\sigma u_t + (u - r_t)u_\sigma + \frac{2}{(\gamma - 1)}\sigma = 0. \end{cases} \quad (4)$$

Для того чтобы искомое течение непрерывно примыкало к однородному покоящемуся газу, необходимо для системы (4) задавать данные на звуковой характеристике:

$$\begin{cases} r(t, \sigma)|_{\sigma=\sigma_0} = r_* \pm \sigma_0(t - t_*), \\ u(t, \sigma)|_{\sigma=\sigma_0} = 0. \end{cases} \quad (5)$$

А для обеспечения единственности решения у получившейся характеристической задачи Коши (4), (5), а также для передачи в момент времени требуемой особенности у течения задается условие

$$r(t, \sigma)|_{t=t_*} = r_* = \text{const} > 0. \quad (6)$$

В монографии [2] доказана

Теорема 1. *Задача (4)–(6) имеет единственное аналитическое решение в виде бесконечного ряда*

$$\mathbf{U}(t, \sigma) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{U}_k(\sigma)(t - t_*)^k/k!, \quad \mathbf{U}_k(\sigma) = \frac{\partial^k \mathbf{U}(t, \sigma)}{\partial t^k} \Big|_{t=t_*},$$

область сходимости которого не меньше области

$$\sigma|t - t_*|^{1/\beta} < M; \quad \beta = \frac{(\gamma + 1)}{2(\gamma - 1)}, \quad M = \text{const} > 0.$$

Здесь вектор $\mathbf{U} = (r, u)$ есть вектор искомых функций задачи (4)–(6).

С учетом найденных асимптотических закономерностей безударного сжатия одномерных цилиндрических и сферических слоев газа [2, 9] также доказано, что существует слой газа с ненулевой массой, который можно сжать до бесконечной плотности. Области течения в физическом пространстве будут похожи на области, показанные на рис. 2, а, с одним

только отличием: неограниченное сжатие произойдет не в начале координат $r = 0$, а на некоторой сфере радиуса $r = r_* > 0$. Эта сфера является неподвижной стенкой, все время ограничивающей с одной стороны сжимаемый сферический слой газа.

Для того чтобы описать безударное сжатие цилиндрического или сферического газового слоя до наперед заданного конечного значения плотности $\rho = \rho_*$, необходимо к системе (1) добавить условия

$$\sigma|_{C_1^\pm} = \sigma_1(t), u|_{C_1^\pm} = u_1(t), \sigma|_{t=t_*} = \sigma_*, \quad \sigma_* = \rho_*^{(\gamma-1)/2} = \sigma_1(t_*). \quad (7)$$

Здесь C_1^\pm — соответствующая звуковая характеристика решения задачи (4)–(6); $\sigma_1(t)$, $u_1(t)$ — параметры газа на ней.

В работе [10] доказана следующая

Теорема 2. *Задача (1), (7) имеет единственное аналитическое решение в некоторой окрестности точки $(t = t_*, r = r_*)$ физического пространства, которое непрерывно через звуковую характеристику C_1^\pm примыкает к решению задачи (4)–(6) и имеет в момент времени $t = t_*$ наперед заданное распределение плотности.*

Конфигурация течений в пространстве физических переменных в этом случае совпадает с конфигурацией, приведенной на рис. 3. Только уже не будет прямой звуковой характеристика DE , отделяющая обобщение центрированной волны Римана — решение задачи (4)–(6) в области 1 — от решения задачи (1), (7) в области 2.

Теоремы 1, 2 доказаны при любых значениях плотности, но являются локальными по массе сжатого газа, т.е. в них доказано, что такие ненулевые массы газа существуют, но ничего не говорится об их конкретных значениях.

Конкретные значения масс газа, которые можно таким способом сжать безударно до большой плотности, определяются численно. В приведенных в работах [11, 12] результатах расчетов они получились достаточно большими. При этом достигнутые (см. [12]) степени сжатия газа оказались следующими: $10^5 \rho_0 \dots 10^6 \rho_0$, где ρ_0 есть исходная плотность покоящегося газа. Естественно, что реальный газ сжать до подобных значений плотности невозможно. Полученные степени сжатия говорят только о том, что абстрактная математическая задача о получении очень больших значений плотности решается правильно.

В серии работ А.Н. Крайко (см., например, работу [13] и библиографию в работе [14]) предложена другая схема безударного сжатия газа: при соответствующем воздействии двух непроницаемых поршней (один из которых все время стоит на месте) первоначально однородный и покоящийся газ безударно переводится также в покоящееся однородное состояние, но уже с другим значением плотности. Поскольку система уравнений газовой динамики инвариантна относительно одновременной смены знака у скорости газа и направления времени, без нарушения общности в задаче Крайко может рассматриваться случай волны разрежения, когда газ безударно переводится в однородный покой с меньшим, чем первоначальное, значением плотности (рис. 4). При зеркальном отражении относительно оси Or получается задача Крайко о соответствующем сжатии газа.

В работе [14] сформулированы три начально-краевых задачи для системы (1), последовательное решение которых дает решение задачи Крайко о безударном переходе “из покоя в покой”. В работе [14] также доказаны теоремы о существовании и единственности решений этих трех задач.

Для построения течений газа в указанных трех задачах рассматривается (рис. 4) плоский, цилиндрический или сферический слой однородного газа ($\rho = \rho_0 = 1$), который в момент $t = 0$ покоится между двумя непроницаемыми стенками, расположенными в точках $O_1(r = r_0)$ и $A(r = r_*)$. Без нарушения общности можно считать, что $r_* = 1$. Для

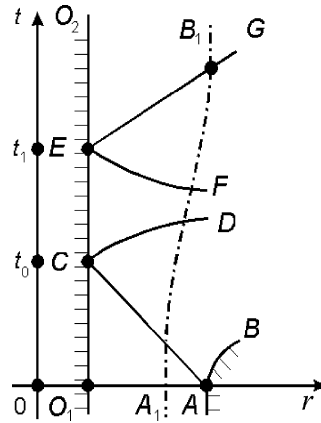


Рис. 4. Области течений газа в задаче Крайко.

определенности положено, что точка O_1 находится левее точки A ($r_0 < r_*$), но при $\nu = 1$ и $\nu = 2$ — строго правее оси или центра симметрии соответственно ($r_0 > 0$).

Первая из трех задач есть задача о резком выдвигании поршня, которая по форме совпадает с задачей (4)–(6) и у которой в соответствии с теоремой 1 имеется единственное аналитическое решение. В этой задаче (рис. 4) при $t \geq 0$ из точки A резко выдвигается поршень, траектория его движения есть линия AB . При малых $t \geq 0$ в области между неподвижной стенкой O_1O_2 и поршнем AB через звуковую характеристику AC непрерывно склеены два течения. Область O_1AC соответствует состоянию покоя газа, область BAC — течению, являющемуся при $\nu = 1, 2$ обобщением центрированной волны Римана.

Вторая составляющая в задаче Крайко есть задача об отражении волны разрежения от жесткой стенки. Поскольку в решении первой задачи скорость газа при $r = r_0, t > t_0$ строго меньше нуля, для него условие непротекания на стенке O_1O_2 выполняться не будет. Следовательно, в результате взаимодействия этого течения и стенки O_1O_2 возникнет новое течение, отделенное от первого звуковой характеристикой CD (рис. 4). Функции, задающие траекторию движения характеристики CD и значения параметров газа на ней, однозначно определяются решением первой задачи и в некоторой окрестности точки $t = t_0$ являются аналитическими функциями. Новое течение, являющееся решением задачи об отражении волны разрежения от жесткой стенки, должно, во-первых, на характеристике CD удовлетворять условиям непрерывного примыкания к решению первой задачи. А, во-вторых, на стенке O_1O_2 для этого течения должно выполняться условие непротекания. Поставленная таким образом задача и есть вторая в задаче Крайко. Как показано в работе [14], у нее также имеется единственное аналитическое решение.

Затем на стенке O_1O_2 выбирается какая-либо точка E с координатами $(t_1, r_0), t_1 > t_0$ (рис. 4), лежащая в области решения второй задачи. Выбор точки E также единственным образом определяет траектории двух звуковых характеристик: EF — решения второй задачи; EG (прямая линия) — состояния однородного покоящегося газа с плотностью ρ_1 , соответствующего области O_2EG (рис. 4). Также единственным образом определяются параметры последнего, третьего течения в задаче Крайко на характеристиках EF и EG . В работе [14] доказано, что у получившейся таким образом задачи Гурса с данными на EF и EG существует единственное аналитическое решение.

Для того чтобы доказать существование ненулевой массы газа, которую можно безударно перевести “из покоя в покой”, на характеристике EG берется некоторая точка B_1 ,

лежащая в области существования решения задачи Крайко. Из нее строится траектория движения частицы газа (штрихпунктирная линия A_1B_1 на рис. 4). С учетом значений первых коэффициентов рядов, задающих решения всех трех перечисленных выше задач, доказано [14], что вся линия A_1B_1 лежит в области существования решения этих задач. Эта линия принимается за траекторию движения нового непроницаемого поршня. Таким образом устанавливается существование ненулевой массы газа в некоторой области $O_1A_1B_1O_2$, безударно переводимой “из покоя в покой”.

Из самой сути задачи Крайко следует, что она является оптимальной с точки зрения энергетических затрат на сжатие газа: при таком способе сжатия энергия тратится только на повышение плотности газа и не тратится на движение газа.

Доказанные в задаче Крайко теоремы имеют локальный характер, и поэтому на их основе нельзя получить значение массы газа, для которой возможен безударный переход “из покоя в покой”. Проведенные Ю.В. Николаевым расчеты задачи Крайко показали, что в этой конфигурации возможно сжатие достаточно больших масс газа до плотностей порядка $10^4\rho_0 \dots 10^5\rho_0$. При этом по сравнению со способом сжатия, приведенным в теоремах 1, 2 (см. рис. 3), выигрыш в работе оказывается в 6–8 раз, а время воздействия поршня на газ увеличивается всего на 10–12 %.

В заключение приведем несколько соображений по устойчивости течений безударного сжатия газа. Найденные в работе [15] асимптотические закономерности безударного сильного сжатия многомерных объемов газа позволяют существенно продвинуться в исследовании устойчивости подобных течений. Как хорошо известно, непрерывные течения, состыкованные между собой через звуковые характеристики, устойчивы до тех пор, пока невелики градиенты газодинамических параметров. В течениях безударного сильного сжатия большие градиенты возникают только при $t \rightarrow t_*$, т.е. в моменты времени, очень близкие к финальному моменту сжатия. Как следует из результатов работы [15], при $t \rightarrow t_*$ тоже будет иметь место устойчивость течения безударного сжатия, но только при условии, что сжатие происходит по нормальям к новой многомерной поверхности, на которой в итоге будет сжат газ.

Таким образом, основываясь на описанных в данной работе одномерных течениях, исследованных в работах [2, 3, 15] многомерных течениях, а также исходя из упомянутого анализа их устойчивости, можно сделать следующие выводы:

- 1) требуемые воздействия, приводящие к безударному сильному сжатию газа, существуют;
- 2) в определенном смысле течения безударного сжатия существенно устойчивее, чем течения сжатия с ударными волнами;
- 3) внешние воздействия, дающие нужный физический эффект, должны специальным образом зависеть от времени и иметь конкретные направления.

Естественно, что внешние воздействия с такими специальными свойствами реализовать в физических экспериментах будет трудно.

Список литературы

- [1] ЗАБАБАХИН Е.И., ЗАБАБАХИН И.Е. Явления неограниченной кумуляции. М.: Наука, 1988.
- [2] БАУТИН С.П. Математическая теория безударного сильного сжатия идеального газа. Новосибирск: Наука, 1997.

- [3] БАУТИН С.П. Математическое исследование безударного сжатия газа // Успехи механики. 2002. Т. 1, № 2. С. 3–36.
- [4] БАУТИН С.П., ЧЕРНЫШОВ Ю.Ю. Одно течение теплопроводного газа, аналогичное центрированной волне Римана // Прикл. математика и механика. 2002. Т. 66, вып. 1. С. 87–94.
- [5] БАУТИН С.П., ЯГУПОВ С.А. Математическое исследование изэнтропического сильного сжатия водорода // Прикл. математика и механика. 2003. Т. 67, вып. 1. С. 42–48.
- [6] СЕДОВ Л.И. Методы подобия и размерности в механике. М.: Наука, 1981.
- [7] КАЖДАН Я.М. К вопросу об адиабатическом сжатии газа под действием сферического поршня // ПМТФ. 1977. № 1. С. 23–30.
- [8] ЗАБАБАХИН И.Е., СИМОНЕНКО В.А. Сферическая центрированная волна сжатия // Прикл. математика и механика. 1978. Т. 42, вып. 3. С. 573–576.
- [9] БАУТИН С.П. Асимптотические законы безударного сильного сжатия квазиодномерных слоев газа // Прикл. математика и механика. 1999. Т. 63, вып. 3. С. 415–423.
- [10] БАУТИН С.П. О задаче получения наперед заданных распределений параметров газа // Там же. 1999. Т. 63, вып. 6. С. 938–946.
- [11] БАУТИН С.П., НИКОЛАЕВ Ю.В. Об одном методе расчета безударного сильного сжатия одномерных слоев газа // Вычисл. технологии. 2000. Т. 5, № 4. С. 3–12.
- [12] НИКОЛАЕВ Ю.В. О численном решении задачи безударного сильного сжатия одномерных слоев газа // Вычисл. технологии. 2001. Т. 6, № 2. С. 104–109.
- [13] КРАЙКО А.Н. О неограниченной кумуляции при одномерном нестационарном сжатии идеального газа // Прикл. математика и механика. 1996. Т. 60, вып. 6. С. 1000–1007.
- [14] БАУТИН С.П. О существовании решений задачи А.Н. Крайко // ПМТФ. 2000. Т. 41, № 3. С. 48–55.
- [15] РОЩУПКИН А.В. Исследование некоторых характеристических задач Коши, возникающих при решении неоднородных задач безударного сильного сжатия газа // Вычисл. технологии. 2002. Т. 7 (совместный выпуск журн. “Вычисл. технологии” и “Региональный вестник Востока”, подготовленный по мат. Междунар. конф. “Вычисл. и информац. технологии в науке, технике и образовании”). Ч. 4. С. 96–103.

Поступила в редакцию 28 октября 2003 г.