Вычислительные технологии **Том 9, № 1, 2004**

О СХОДИМОСТИ МЕТОДА ЧАСТИЦ ДЛЯ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ*

Е. В. Овчинникова
Красноярский государственный технический университет, Россия
А. М. Франк
Институт вычислительного моделирования СО РАН, Красноярск, Россия
e-mail: `frank@icm.krasn.ru`

The first result on convergence for the particles method for incompressible fluid for the case of inner initial-boundary value problem for Navier — Stokes equations has been proven. The result is valid both in 2D and 3D, provided that the differential problem has a solution.

Введение

Метод частиц для несжимаемой жидкости как новый консервативный свободно-лагранжев метод был предложен около 10 лет назад [1]. Подробное его описание можно найти в [2]. Метод представляет собой некоторый специальный вариант метода Галеркина, в котором конвективный перенос осуществляется с помощью материальных частиц. Такой подход имеет ряд очевидных принципиальных достоинств. В частности, материальная производная вычисляется в лагранжевых переменных, поэтому основная схема метода (без внешних и поверхностных сил) полностью консервативна и безусловно устойчива. С другой стороны, массовые, внутренние и поверхностные силы вычисляются в естественных, т.е. эйлеровых, координатах. Использование частиц позволяет легко отслеживать границы раздела, причем произвольное изменение связности течения и границ не доставляет никаких дополнительных алгоритмических сложностей. Использование B-сплайнов в качестве базисных функций в методе Галеркина дает возможность проводить расчеты в областях с криволинейными и подвижными границами. Удачный выбор базисных функций часто позволяет получать хорошие результаты даже при очень грубом (с точки зрения традиционных конечно-разностных и конечно-элементных схем) пространственном разрешении. Примеры решенных двумерных и трехмерных задач для невязкой жидкости можно найти в [2]. Недавно метод был обобщен на случай вязких течений с поверхностным натяжением [3].

*Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования РФ, грант КЦФЕ для аспирантов А03-2.8-872.

Несмотря на определенные успехи в развитии метода и его применении к решению гидродинамических задач, вопрос о его сходимости оставался открытым. В настоящей статье доказана первая из таких теорем.

1. Постановка задачи

Рассмотрим следующую начально-краевую задачу для системы уравнений Навье — Стокса:

$$\mathbf{u}_t + u_k \mathbf{u}_{x_k} - \nu \mathbf{\Delta u} = 0, \ \operatorname{div} \mathbf{u} = 0; \tag{1}$$

$$\mathbf{u}|_S = 0, \ \mathbf{u}|_{t=0} = \mathbf{a}(\mathbf{x}) \tag{2}$$

в области $Q_T = \Omega \times (0, T)$. Здесь Ω — ограниченная область с кусочно-гладкой границей S. Относительно $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ предположим

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = 0, \mathbf{a}|_S = 0. \tag{3}$$

Мы будем иметь дело с обобщенным решением [4] задачи (1),(2). Обобщенное решение задачи (1),(2) — это вектор-функция $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$, для которой интегралы $\int\limits_\Omega \sum\limits_{i=1}^{3} u_i^4(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x}$ равномерно ограничены при $t \in [0, T]$, производные $\mathbf{u}_{x_k}$, $\mathbf{u}_t$ существуют и квадратично суммируемы на Q_T, а также выполнены условия

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \ \mathbf{u}|_S = 0, \ \mathbf{u}|_{t=0} = \mathbf{a}(\mathbf{x}) \tag{4}$$

и тождество

$$\int\limits_{Q_T} (-\mathbf{u}\mathbf{\Phi}_t + \nu \mathbf{u}_x \mathbf{\Phi}_x - u_k \mathbf{u} \mathbf{\Phi}_{x_k})\, d\mathbf{x}dt + \int\limits_\Omega \mathbf{u\Phi}|_{t=T} d\mathbf{x} - \int\limits_\Omega \mathbf{a\Phi}|_{t=0} d\mathbf{x} = 0 \tag{5}$$

при любой $\Phi \in W_2^{1,1}(Q_T) \cap J(Q_T)$. Здесь пространство $J(\Omega) = \{\mathbf{u} \in L_2(\Omega) |\ \operatorname{div}\ \mathbf{u} = 0, \mathbf{u}|_S = 0\}$. Скалярное произведение и норму в $L_2(\Omega)$ будем обозначать $(\ ,\ )$ и $||\ ||$ соответственно. Под нормой производной будем понимать

$$||\mathbf{u}_x||^2 \equiv \int\limits_\Omega |\mathbf{u}_x|^2 d\mathbf{x}, \ |\mathbf{u}_x| \equiv \left(\sum_{i,j=1}^{3} (u_{i_{x_j}})^2 \right)^{1/2}.$$

Схема метода частиц с обсуждением особенностей численной реализации подробно изложена в [2, 3]. Здесь мы приведем лишь основные уравнения для случая простейшей дискретизации первого порядка по времени. В качестве базисных функций возьмем в гильбертовом пространстве $W_2^2(\Omega) \cap H(\Omega)$ фундаментальную систему функций $\{\mathbf{a}^k(\mathbf{x})\}$, ортонормированную в $L_2(\Omega)$. Пусть V_m — пространство, представляющее собой линейную оболочку функций $\{\mathbf{a}^k(\mathbf{x})\}_{k=1}^m$. В начальный момент времени $t = 0$ аппроксимируем объем Ω конечной системой материальных частиц ω_k с координатами $\xi_k = \mathbf{x}^0(\xi_k)$ и массами $m_k = \mu(\omega_k)$, $\ k = 1, \dots, N$. Зададим начальное распределение скорости $\mathbf{v}^0(\mathbf{x})$ из V_m, аппроксимирующее поле $\mathbf{a}(\mathbf{x})$. Обозначим через τ шаг по времени, а через d — максимальный линейный размер частиц. Положим по определению $((\mathbf{a}(\mathbf{x}^n), \mathbf{b}(\mathbf{x}^n))) =$

$\sum\limits_{k=1}^{N} m_k \mathbf{a}(\mathbf{x}^n(\xi_k)) \cdot \mathbf{b}(\mathbf{x}^n(\xi_k))$, $[[\mathbf{a}(\mathbf{x}^\mathbf{n})]]^2 = ((\mathbf{a}(\mathbf{x}^n), \mathbf{a}(\mathbf{x}^n)))$. Тогда на каждом временном шаге новое поле скоростей из V_m находится из системы уравнений

$$\left(\left(\frac{\mathbf{v}^{n+1}(\mathbf{x}^{n+1}) - \mathbf{v}^n(\mathbf{x}^n)}{\tau}, \mathbf{a}^l(\mathbf{x}^{n+1})\right)\right) + \nu \left(\left(\mathbf{v}^{n+1}_{x_i}(\mathbf{x}^{n+1}), \mathbf{a}^l_{x_i}(\mathbf{x}^{n+1})\right)\right) = 0, \qquad (6)$$

где $l = 1, ..., m$, а частицы движутся в силу уравнения

$$\mathbf{x}^{n+1}(\xi_k) = \mathbf{x}^n(\xi_k) + \tau \mathbf{v}^n(\mathbf{x}^n(\xi_k)).$$

2. Априорные оценки

Сначала оценим норму поля скорости

$$\mathbf{v}^n(\mathbf{x}^n) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^n \mathbf{a}^i(\mathbf{x}^n).$$

Умножим уравнения (6) на λ_l^{n+1} и просуммируем l от 1 до m:

$$\left(\left(\mathbf{v}^{n+1}(\mathbf{x}^{n+1}) - \mathbf{v}^n(\mathbf{x}^n), \mathbf{v}^{n+1}(\mathbf{x}^{n+1})\right)\right) + \nu\tau \left(\left(\mathbf{v}^{n+1}_{x_i}(\mathbf{x}^{n+1}), \mathbf{v}^{n+1}_{x_i}(\mathbf{x}^{n+1})\right)\right) = 0.$$

Используя тождество $2((\mathbf{a} - \mathbf{b}, \mathbf{a})) = [[\mathbf{a}]]^2 - [[\mathbf{b}]]^2 + [[\mathbf{a} - \mathbf{b}]]^2$, получим

$$[[\mathbf{v}^{n+1}(\mathbf{x}^{n+1})]]^2 - [[\mathbf{v}^n(\mathbf{x}^n)]]^2 + [[\mathbf{v}^{n+1}(\mathbf{x}^{n+1}) - \mathbf{v}^n(\mathbf{x}^n)]]^2 + 2\nu\tau[[\mathbf{v}^{n+1}_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}^{n+1})]]^2 = 0.$$

Просуммировав по n от 0 до $k-1$, получим тождество

$$[[\mathbf{v}^k(\mathbf{x}^k)]]^2 + \sum_{i=0}^{k-1} [[\mathbf{v}^{i+1}(\mathbf{x}^{i+1}) - \mathbf{v}^i(\mathbf{x}^i)]]^2 + 2\nu\tau \sum_{i=0}^{k-1} [[\mathbf{v}^{i+1}_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}^{i+1})]]^2 = [[\mathbf{v}^0]]^2, \qquad (7)$$

из которого, в частности, следует безусловная устойчивость схемы. Для доказательства сходимости нам понадобится оценка на якобиан $|\partial \mathbf{x}^n / \partial \xi|$ преобразования лагранжевых переменных в эйлеровы, поскольку при дискретизации по времени он перестает быть равным 1. Обозначим J_n^{n+1} якобиан преобразования $|\partial \mathbf{x}^{n+1} / \partial \mathbf{x}^n|$, J_0^n — якобиан преобразования $|\partial \mathbf{x}^n / \partial \xi|$. Очевидно

$$J_0^n = \left|\frac{\partial \mathbf{x}^n}{\partial \xi}\right| = \left|\frac{\partial \mathbf{x}^n}{\partial \mathbf{x}^{n-1}}\right| \cdot \left|\frac{\partial \mathbf{x}^{n-1}}{\partial \mathbf{x}^{n-2}}\right| \cdots \left|\frac{\partial \mathbf{x}^1}{\partial \xi}\right|.$$

Справедливо следующее утверждение:

Лемма 1. *Если*

$$\tau^{1-\varepsilon} \le \frac{1}{4T}, \ \tau^\varepsilon \le \frac{1}{32F^2(m)[[\mathbf{v}^0]]^2}, \ \tau < \frac{1}{12F(m)[[\mathbf{v}^0]]},$$

а

$$d \le \left(24 \cdot e^{6TF(m)[[\mathbf{v}^0]]} \mu(\Omega) m M F(m)\right)^{-1},$$

где

$$F^2(m) = \sum_{j,k=1}^{3} \sum_{i=1}^{m} \max_{\mathbf{x}\in\Omega} (a^i_{k_{x_j}})^2(\mathbf{x}),\ \ M = \max_{\substack{0\le l\le m\\ \mathbf{x}\in\Omega}} |\mathbf{a}^l(\mathbf{x})|,$$

а $\mu(\Omega)$ *— объем области* Ω*, то:*

1) $\mathbf{x}^n = \mathbf{x}^n(\xi)$ *— взаимно-однозначное преобразование* Ω *на* Ω*, обратное преобразование* $\xi = \xi(\mathbf{x}^n)$ *принадлежит классу* C^1*;*

2) $|\mathbf{x}^n_\xi| \le e^{6TF(m)[[\mathbf{v}^0]]}$*;*

3) $||\mathbf{v}||^2 \le 2(1+\tau^{2-\varepsilon})^{T/\tau}[[\mathbf{v}(\mathbf{x}^n)]]^2$*;*

4) $\left|\dfrac{\partial \mathbf{v}^n}{\partial x_j}\right| \le 2F(m)[[\mathbf{v}^0]]$*;*

5) $|J^{n+1}_n - 1| \le \tau^{2-\varepsilon}$*.*

Доказательство. (по индукции). Для $n=0$ утверждения леммы очевидны, кроме п. 3 и 5. Приведенное ниже их доказательство по индукции верно (безусловно) и для $n=0$. Пусть теперь п. 1–5 верны для $n \le k-1$, докажем их справедливость для $n=k$.

Для п. 1 достаточно показать, что $\mathbf{x}^k = \mathbf{x}^k(\mathbf{x}^{k-1})$ есть взаимно-однозначное отображение Ω на Ω. Сначала докажем "от противного", что $\mathbf{x}^k = \mathbf{x}^k(\mathbf{x}^{k-1})$ — это взаимно-однозначное отображение Ω на свою область значений Ω_k.

Пусть $\tau \le \dfrac{1}{12F(m)[[\mathbf{v}^0]]}$ и $\mathbf{x}^{k-1}_1 \ne \mathbf{x}^{k-1}_2$, а

$$\mathbf{x}^{k-1}_1 + \tau\mathbf{v}^{k-1}(\mathbf{x}^{k-1}_1) = \mathbf{x}^{k-1}_2 + \tau\mathbf{v}^{k-1}(\mathbf{x}^{k-1}_2),$$

$$|\mathbf{x}^{k-1}_1 - \mathbf{x}^{k-1}_2| = \tau|\mathbf{v}^{k-1}(\mathbf{x}^{k-1}_1) - \mathbf{v}^{k-1}(\mathbf{x}^{k-1}_2)| \le$$

$$\le 6F(m)[[\mathbf{v}^0]]\tau|\mathbf{x}^{k-1}_1 - \mathbf{x}^{k-1}_2| \le \frac{1}{2}|\mathbf{x}^{k-1}_1 - \mathbf{x}^{k-1}_2| < |\mathbf{x}^{k-1}_1 - \mathbf{x}^{k-1}_2|.$$

Противоречие. Теперь покажем, что $\Omega_k \subset \Omega$. Пусть $\mathbf{x}^{k-1}_1 \in \Omega$. Обозначим расстояние от $\mathbf{x}^{k-1}_1$ до $\partial\Omega$ – δ. Поскольку $\mathbf{v}^{k-1}|_{\partial\Omega} = 0$, то $\mathbf{v}^{k-1}(\mathbf{x}^{k-1}_1) \le 6F(m)[[\mathbf{v}^0]]\delta$. Тогда расстояние, пройденное этой частицей за время τ, меньше либо равно $6F(m)[[\mathbf{v}^0]]\tau\delta \le \dfrac{1}{2}\delta$, следовательно, $\mathbf{x}^k_1 \in \Omega$ для любого $\mathbf{x}^k_1$, что и требовалось доказать.

Далее, поскольку $\mathbf{v}^{k-1}|_{\partial\Omega} = 0$, преобразование $\mathbf{x}^k = \mathbf{x}^k(\mathbf{x}^{k-1})$ переводит границу области Ω в себя, т.е. $\partial\Omega \in \Omega_k$. Осталось показать, что $\forall\overline{\mathbf{x}} \in \Omega \setminus \partial\Omega$ уравнение

$$\overline{\mathbf{x}} = \mathbf{x} + \tau\mathbf{v}^{k-1}(\mathbf{x}) \tag{8}$$

разрешимо в Ω. Преобразуем уравнение (8) к виду

$$\mathbf{y} = -\tau\mathbf{v}^{k-1}(\mathbf{y} + \overline{\mathbf{x}}) = \varphi(\mathbf{y}). \tag{9}$$

Обозначим δ расстояние от $\overline{\mathbf{x}}$ до $\partial\Omega$. Нетрудно видеть, что при $\tau \le \dfrac{1}{12F(m)[[\mathbf{v}^0]]}$ $\varphi(\mathbf{y})$ отображает шар $B(0,\delta)$ в себя и является сжимающим отображением. Следовательно, по теореме о неподвижной точке уравнение (9) имеет единственную неподвижную точку в $B(0,\delta)$. А следовательно, уравнение (8) имеет корень в Ω. Таким образом, $\Omega \subset \Omega_k$. А значит, $\Omega_k = \Omega$. Так как якобиан J^k_{k-1} всюду отличен от 0, по теореме об обратном отображении $\mathbf{x}^{k-1} = \mathbf{x}^{k-1}(\mathbf{x}^k)$ принадлежит классу C^1 в окрестности каждой точки из Ω.

Для п. 2 оценим $|\mathbf{x}^k_\xi|$.

$$\mathbf{x}^k = \mathbf{x}^{k-1} + \tau \mathbf{v}^{k-1}(\mathbf{x}^{k-1}).$$

Тогда

$$|\mathbf{x}^k_\xi| \le |\mathbf{x}^{k-1}_\xi| + 3\tau \max_{j,\Omega} |\mathbf{v}^{k-1}_{x_j}| \cdot |\mathbf{x}^{k-1}_\xi| \le |\mathbf{x}^{k-1}_\xi|(1 + 6F(m)[[\mathbf{v}^0]]\tau) \le$$

$$\le (1 + 6F(m)[[\mathbf{v}^0]]\tau)^k \le e^{6TF(m)[[\mathbf{v}^0]]}.$$

Для п. 3 докажем, что

$$||\mathbf{v}||^2 \le 2(1 + \tau^{2-\varepsilon})^{T/\tau}[[\mathbf{v}(\mathbf{x}^k)]]^2. \qquad (10)$$

Поскольку $\mathbf{v}$ принадлежит конечномерному пространству V_m, имеет место неравенство

$$\alpha^{km}||\mathbf{v}|| \le [[\mathbf{v}(\mathbf{x}^k)]] \le \beta^{km}||\mathbf{v}||,$$

где

$$\alpha^{km} = \inf_{\sum\limits_{i=1}^m \lambda_i^2 = 1} \left(\sum_{j=1}^N m_j \left(\sum_{i=1}^m \lambda_i \mathbf{a}^i(\mathbf{x}^k(\xi_j)) \right)^2 \right)^{1/2} =$$

$$= \inf_{\sum\limits_{i=1}^m \lambda_i^2 = 1} \left(\int\limits_\Omega \left(\sum_{i=1}^m \lambda_i \mathbf{a}^i(\mathbf{x}^k(\xi)) \right)^2 d\xi - R^k \right)^{1/2},$$

где $R^k = \int\limits_\Omega \left(\sum\limits_{i=1}^m \lambda_i \mathbf{a}^i(\mathbf{x}^k(\xi)) \right)^2 d\xi - \sum\limits_{j=1}^N m_j \left(\sum\limits_{i=1}^m \lambda_i \mathbf{a}^i(\mathbf{x}^k(\xi_j)) \right)^2$.

По предположению индукции $J^k_0 \le (1 + \tau^{2-\varepsilon})^{T/\tau}$, тогда

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i^2 = \int\limits_\Omega \left(\sum_{i=1}^m \lambda_i \mathbf{a}^i(\mathbf{x}) \right)^2 d\mathbf{x} = \int\limits_\Omega \left(\sum_{i=1}^m \lambda_i \mathbf{a}^i(\mathbf{x}^k(\xi)) \right)^2 J^k_0 d\xi \le$$

$$\le \left(1 + \tau^{2-\varepsilon}\right)^{T/\tau} \int\limits_\Omega \left(\sum_{i=1}^m \lambda_i \mathbf{a}^i(\mathbf{x}^k(\xi)) \right)^2 d\xi$$

и, следовательно,

$$\int\limits_\Omega \left(\sum_{i=1}^m \lambda_i \mathbf{a}^i(\mathbf{x}^k(\xi)) \right)^2 d\xi \ge \frac{\sum\limits_{i=1}^m \lambda_i^2}{\left(1 + \tau^{2-\varepsilon}\right)^{T/\tau}}. \qquad (11)$$

Оценим сверху R^k:

$$|R^k| = \left| \sum_{j=1}^N \int\limits_{\omega_j} \left[\left(\sum_{i=1}^m \lambda_i \mathbf{a}^i(\mathbf{x}^k(\xi)) \right)^2 - \left(\sum_{i=1}^m \lambda_i \mathbf{a}^i(\mathbf{x}^k(\xi_j)) \right)^2 \right] d\xi \right| =$$

$$= \left| \sum_{j=1}^N \int\limits_{\omega_j} \sum_{i,l=1}^m \lambda_i \lambda_l [\mathbf{a}^i(\mathbf{x}^k(\xi)) \left(\mathbf{a}^l(\mathbf{x}^k(\xi)) - \mathbf{a}^l(\mathbf{x}^k(\xi_j)) \right) + \mathbf{a}^l(\mathbf{x}^k(\xi_j)) \left(\mathbf{a}^i(\mathbf{x}^k(\xi)) - \mathbf{a}^i(\mathbf{x}^k(\xi_j)) \right)] d\xi \right| \le$$

$$\le \max_{\substack{0\le l\le m\\ \mathbf{x}\in\Omega}} |\mathbf{a}^l(\mathbf{x})| \max_{0\le i\le m} |\mathbf{a}^i_\xi| \cdot d\sum_{i,l=1}^m |\lambda_i\lambda_l| \cdot 2\sum_{j=1}^N \int\limits_{\omega_j} 1\cdot d\mathbf{x} \le$$

$$\le 6\mu(\Omega)m \max_{\substack{0\le l\le m\\ \mathbf{x}\in\Omega}} |\mathbf{a}^l(\mathbf{x})| \max_{\substack{0\le i\le m\\ j,\ \mathbf{x}\in\Omega}} |\mathbf{a}^i_{x_j}(\mathbf{x})| \cdot |\mathbf{x}^k_\xi| d\sum_{i=1}^m \lambda_i^2 \le$$

$$\le 6\cdot e^{6TF(m)[[\mathbf{v}^0]]} md\mu(\Omega)MF(m)\sum_{i=1}^m \lambda_i^2.$$

Положив

$$d \le \frac{1}{24\cdot e^{6TF(m)[[\mathbf{v}^0]]} m\mu(\Omega)MF(m)}, \tag{12}$$

получим

$$|R^k| \le \frac{\sum\limits_{i=1}^m \lambda_i^2}{4} \le \frac{\sum\limits_{i=1}^m \lambda_i^2}{2(1+\tau^{2-\varepsilon})^{T/\tau}}. \tag{13}$$

Теперь оценим снизу α^{km}:

$$\alpha^{km} = \inf_{\sum\limits_{i=1}^m \lambda_i^2=1} \left(\int\limits_\Omega \left(\sum_{i=1}^m \lambda_i \mathbf{a}^i(\mathbf{x}^k(\xi)) \right)^2 d\xi - R^k \right)^{1/2} \ge$$

$$\ge \inf_{\sum\limits_{i=1}^m \lambda_i^2=1} \left(\frac{\sum\limits_{i=1}^m \lambda_i^2}{(1+\tau^{2-\varepsilon})^{T/\tau}} - \frac{\sum\limits_{i=1}^m \lambda_i^2}{2(1+\tau^{2-\varepsilon})^{T/\tau}} \right)^{1/2} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}(1+\tau^{2-\varepsilon})^{T/2\tau}}.$$

Отсюда непосредственно следует (10).

Для п. 4

$$\left|\frac{\partial \mathbf{v}^k}{\partial x_j}\right|^2 = \left|\sum_{i=0}^m \lambda_i^k \mathbf{a}^i_{x_j}\right|^2 \le \sum_{i=0}^m (\lambda_i^k)^2 \sum_{i=0}^m (\mathbf{a}^i_{x_j})^2 \le ||\mathbf{v}^k||^2 F^2(m) \le$$

$$\le 2F^2(m)\left(1+\tau^{2-\varepsilon}\right)^{T/\tau} [[\mathbf{v}^k(\mathbf{x}^k)]]^2 \le 2F^2(m)\left(1+\tau^{2-\varepsilon}\right)^{T/\tau} [[\mathbf{v}^0]]^2.$$

Поскольку $\tau^{1-\varepsilon} < \dfrac{\ln 2}{T}$, то и $\left|\dfrac{\partial \mathbf{v}^k}{\partial x_j}\right|^2 \le 4F^2(m)[[\mathbf{v}^0]]^2$.

Для п. 5

$$J_k^{k+1} = \left|\frac{\partial \mathbf{x}^{k+1}}{\partial \mathbf{x}^k}\right| = \begin{vmatrix} 1+\tau\dfrac{\partial v_1^k}{\partial x_1} & \tau\dfrac{\partial v_1^k}{\partial x_2} & \tau\dfrac{\partial v_1^k}{\partial x_3} \\ \tau\dfrac{\partial v_2^k}{\partial x_1} & 1+\tau\dfrac{\partial v_2^k}{\partial x_2} & \tau\dfrac{\partial v_2^k}{\partial x_3} \\ \tau\dfrac{\partial v_3^k}{\partial x_1} & \tau\dfrac{\partial v_3^k}{\partial x_2} & 1+\tau\dfrac{\partial v_3^k}{\partial x_3} \end{vmatrix} =$$

$$= 1 + P_1\left(\frac{\partial v_i^k}{\partial x_j}\right)\tau^2 + P_2\left(\frac{\partial v_i^k}{\partial x_j}\right)\tau^3 \le 1 + \left(24F^2(m)[[\mathbf{v}^0]]^2\tau^\varepsilon + 48F^3(m)[[\mathbf{v}^0]]^3\tau^{1+\varepsilon}\right)\tau^{2-\varepsilon}.$$

Вместе с тем $J_k^{k+1} \ge 1 - (24F^2(m)[[\mathbf{v}^0]]^2\tau^\varepsilon + 48F^3(m)[[\mathbf{v}^0]]^3\tau^{1+\varepsilon})\,\tau^{2-\varepsilon}$.

Положив

$$\tau^\varepsilon \le \frac{1}{32F^2(m)[[\mathbf{v}^0]]^2} \text{ и } \tau < \frac{1}{6F(m)[[\mathbf{v}^0]]},$$

получим

$$\left(24F^2(m)[[\mathbf{v}^0]]^2\tau^\varepsilon + 48F^3(m)[[\mathbf{v}^0]]^3\tau^{1+\varepsilon}\right) \le 1,$$

и тем самым $|J_n^{n+1} - 1| \le \tau^{2-\varepsilon}$. □

Следствие 1. *В условиях леммы 1* $|J_0^n - 1| \le 2T\tau^{1-\varepsilon}$.

Доказательство. Докажем, что $J_0^n \le 1 + 2T\tau^{1-\varepsilon}$.

$$J_0^n \le (1+\tau^{2-\varepsilon})^{\frac{T}{\tau}} = (1+\tau^{2-\varepsilon})^{\frac{1}{\tau^{2-\varepsilon}}T\tau^{1-\varepsilon}} \le e^{T\tau^{1-\varepsilon}} \le 1 + 2T\tau^{1-\varepsilon}.$$

Аналогично доказывается, что $J_0^n \ge 1 - 2T\tau^{1-\varepsilon}$. □

При доказательстве сходимости численной схемы нам понадобится ряд неравенств, связывающих различные нормы функций из пространства V_m. Введем скалярное произведение в лагранжевых координатах $(\ ,\ )_\xi$:

$$(\mathbf{a}(\mathbf{x}^n), \mathbf{b}(\mathbf{x}^n))_\xi = \int\limits_\Omega \mathbf{a}(\mathbf{x}^n(\xi))\mathbf{b}(\mathbf{x}^n(\xi))d\xi.$$

Соответственно, $||\mathbf{a}||_\xi = (\mathbf{a}, \mathbf{a})_\xi$.

Лемма 2. *Если выполнены условия леммы 1, то* $\forall i, j, n$ *и* $\forall \mathbf{v} \in V_m$ *в* Ω *справедливы неравенства:*

1) $|\mathbf{v}_{x_i}| \le F(m)||\mathbf{v}||$;

2) $|\mathbf{v}_{x_i x_j}| \le F_1(m)||\mathbf{v}||$;

3) $|\mathbf{v}| \le \sqrt{m}M||\mathbf{v}||$;

4) $||\mathbf{v}|| \le 2[[\mathbf{v}(\mathbf{x}^n)]]$;

5) $\frac{1}{\sqrt{2}}||\mathbf{v}(\mathbf{x}^n)||_\xi \le ||\mathbf{v}|| \le \sqrt{2}||\mathbf{v}(\mathbf{x}^n)||_\xi$,

где $F(m)$, $F_1(m)$, M *те же, что и в лемме 1.*

Доказательство. Первые три неравенства очевидны. Четвертое — непосредственное следствие леммы 1. Пятое — доказывается так:

$$||\mathbf{v}||^2 = \int\limits_\Omega J_0^n|\mathbf{v}(\mathbf{x}^n)|^2 d\xi \le (1 + 2T\tau^{1-\varepsilon})||\mathbf{v}(\mathbf{x}^n)||_\xi^2 \le 2||\mathbf{v}(\mathbf{x}^n)||_\xi^2,$$

$$||\mathbf{v}||^2 = \int\limits_\Omega J_0^n|\mathbf{v}(\mathbf{x}^n)|^2 d\xi \ge (1 - 2T\tau^{1-\varepsilon})\cdot||\mathbf{v}(\mathbf{x}^n)||_\xi^2 \ge \frac{1}{2}||\mathbf{v}(\mathbf{x}^n)||_\xi^2.$$

□

3. Сходимость численной схемы.

Теорема 1. *Пусть $\mathbf{u}(\mathbf{x},t)$ есть обобщенное решение задачи (1), (2) и функции $\mathbf{a}^k(\mathbf{x})$ образуют базис в $H(\Omega)$ и в $L_4(\Omega)$, ортонормированный в $L_2(\Omega)$. Если функции $\mathbf{a}^k \in C^2(\Omega)$ и нормы $||\mathbf{u}_{tt}||$ и $||\mathbf{u}_x||$ равномерно ограничены и, кроме того, функция $\mathbf{u}(\mathbf{x},t)$ такова, что ее ряд Фурье сходится в $H(\Omega)$ равномерно по $t \in [0,T]$, то последовательность приближенных решений $\mathbf{v}$ сходится к $\mathbf{u}$ при $\tau \to 0$, $m \to \infty$, $d \to 0$ и следующих ограничениях:*

$$\tau F(m) \to 0,\ \tau m M^2 F_1(m) \to 0,\ \tau F^4(m) \le \frac{1}{1024[[\mathbf{v}^0]]^4},$$

$$\left(\sqrt{m} M F_1(m) + F^2(m)\right) \cdot e^{6TF(m)[[\mathbf{v}^0]]} d \to 0,$$

$$d \cdot e^{6TF(m)[[\mathbf{v}^0]]} m M F(m) \le \frac{1}{24\mu(\Omega)},$$

где

$$F^2(m) = \sum_{j,k=1}^{3} \sum_{i=1}^{m} (\max_{\mathbf{x}\in\Omega} a^i_{k_{x_j}})^2(\mathbf{x}),$$

$$M = \max_{\substack{0\le l\le m \\ \mathbf{x}\in\Omega}} |\mathbf{a}^l(\mathbf{x})|,$$

$$F_1^2(m) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{k,j,l=1}^{3} \max_{\mathbf{x}\in\Omega} (a^i_{k_{x_j x_l}})^2(\mathbf{x}),$$

а $\mu(\Omega)$ — объем области Ω.

Доказательство. Легко видеть, что при выполнении условий теоремы выполнены также условия леммы 1 с $\varepsilon = 1/2$.

Обозначим $\mathbf{u}^{(m)}(\mathbf{x},t)$ отрезок ряда Фурье функции $\mathbf{u}(\mathbf{x},t)$ по системе $\{\mathbf{a}^k(\mathbf{x})\}_{k=1}^m$:

$$\mathbf{u}^{(m)}(\mathbf{x},t) = \sum_{i=1}^{m} (\mathbf{u}(\mathbf{x},t), \mathbf{a}^i)\mathbf{a}^i = \sum_{i=1}^{m} c_i(t)\mathbf{a}^i.$$

Для $\mathbf{u}^{(m)}$ справедливы равенства

$$\left(\frac{\partial \mathbf{u}^{(m)}}{\partial t}, \mathbf{a}^l\right) - \left(u_k^{(m)} \mathbf{u}^{(m)}, \mathbf{a}^l_{x_k}\right) + \nu \left(\mathbf{u}^{(m)}_{x_i}, \mathbf{a}^l_{x_i}\right) = I_{ml}, \tag{14}$$

где

$$I_{ml} = -\nu \left(\mathbf{u}_{x_i} - \mathbf{u}^{(m)}_{x_i}, \mathbf{a}^l_{x_i}\right) + \left(u_k \mathbf{u} - u_k^{(m)} \mathbf{u}^{(m)}, \mathbf{a}^l_{x_i}\right).$$

Для дальнейших преобразований необходимо, чтобы в (14) скалярные произведения были теми же, что и в численной схеме, а именно дискретными. Перепишем уравнение (14) в следующем виде:

$$\left(\left(\frac{\partial \mathbf{u}^{(m)}}{\partial t}(\mathbf{x}^{n+1}, t^{n+1}), \mathbf{a}^l(\mathbf{x}^{n+1})\right)\right) - \left([u_k^{(m)} \mathbf{u}^{(m)}](t^{n+1}), \mathbf{a}^l_{x_k}\right) +$$
$$+\nu \left(\left(\mathbf{u}^{(m)}_{x_i}(\mathbf{x}^{n+1}, t^{n+1}), \mathbf{a}^l_{x_i}(\mathbf{x}^{n+1})\right)\right) = I^n_{ml} + G^n_{ml} + Q^n_{ml}, \tag{15}$$

где $I^n_{ml} = I_{ml}(t^{n+1})$,

$$G^n_{ml} = \left(\frac{\partial \mathbf{u}^{(m)}}{\partial t}(\mathbf{x}^{n+1}, t^{n+1}), \mathbf{a}^l(\mathbf{x}^{n+1})\right)_\xi - \left(\frac{\partial \mathbf{u}^{(m)}}{\partial t}(\mathbf{x}, t^{n+1}), \mathbf{a}^l(\mathbf{x})\right) +$$
$$+\nu \left(\mathbf{u}^{(m)}_{x_i}(\mathbf{x}^{n+1}, t^{n+1}), \mathbf{a}^l_{x_i}(\mathbf{x}^{n+1})\right)_\xi - \nu \left(\mathbf{u}^{(m)}_{x_i}(\mathbf{x}, t^{n+1}), \mathbf{a}^l_{x_i}(\mathbf{x})\right),$$

$$Q^n_{ml} = \left(\left(\frac{\partial \mathbf{u}^{(m)}}{\partial t}(\mathbf{x}^{n+1}, t^{n+1}), \mathbf{a}^l(\mathbf{x}^{n+1})\right)\right) - \left(\frac{\partial \mathbf{u}^{(m)}}{\partial t}(\mathbf{x}^{n+1}, t^{n+1}), \mathbf{a}^l(\mathbf{x}^{n+1})\right)_\xi +$$
$$+\nu \left(\left(\mathbf{u}^{(m)}_{x_i}(\mathbf{x}^{n+1}, t^{n+1}), \mathbf{a}^l_{x_i}(\mathbf{x}^{n+1})\right)\right) - \nu \left(\mathbf{u}^{(m)}_{x_i}(\mathbf{x}^{n+1}, t^{n+1}), \mathbf{a}^l_{x_i}(\mathbf{x}^{n+1})\right)_\xi .$$

Обозначим $\mathbf{w}^n(\mathbf{x}) = \mathbf{v}^n(\mathbf{x}) - \mathbf{u}^{(m)}(\mathbf{x}, t^n)$. Вычтем из (6) уравнение (15), результат умножим на $\lambda^{n+1}_l - c_l(t^{n+1})$ и просуммируем по l от 1 до m. В итоге получим

$$\left(\left(\frac{\mathbf{w}^{n+1}(\mathbf{x}^{n+1}) - \mathbf{w}^n(\mathbf{x}^n)}{\tau}, \mathbf{w}^{n+1}(\mathbf{x}^{n+1})\right)\right) + \nu \left(\left(\mathbf{w}^{n+1}_{x_i}(\mathbf{x}^{n+1}), \mathbf{w}^{n+1}_{x_i}(\mathbf{x}^{n+1})\right)\right) =$$
$$= -I^n_m - G^n_m - Q^n_m + r^n_m, \tag{16}$$

где
$$r^n_m = \left(\left(\mathbf{u}^{(m)}_t(\mathbf{x}^{n+1}, t^{n+1}), \mathbf{w}^{n+1}(\mathbf{x}^{n+1})\right)\right) - \left([u^{(m)}_k \mathbf{u}^{(m)}](t^{n+1}), \mathbf{w}^{n+1}_{x_k}\right) -$$
$$- \left(\left(\frac{\mathbf{u}^{(m)}(\mathbf{x}^{n+1}, t^{n+1}) - \mathbf{u}^{(m)}(\mathbf{x}^n, t^n)}{\tau}, \mathbf{w}^{n+1}(\mathbf{x}^{n+1})\right)\right),$$

I^n_m получится, если в I^n_{ml} вместо $\mathbf{a}^l$ взять $\mathbf{w}^{n+1}$. То же с G^n_m и Q^n_m.

Используя тождество $2((\mathbf{a} - \mathbf{b}, \mathbf{a})) = [[\mathbf{a}]]^2 - [[\mathbf{b}]]^2 + [[\mathbf{a} - \mathbf{b}]]^2$, получим

$$[[\mathbf{w}^{n+1}]]^2 - [[\mathbf{w}^n]]^2 + [[\mathbf{w}^{n+1} - \mathbf{w}^n]]^2 + 2\nu\tau[[\mathbf{w}^{n+1}_x]]^2 =$$
$$= -2\tau I^n_m - 2\tau G^n_m - 2\tau Q^n_m + 2\tau r^n_m. \tag{17}$$

Теперь мы покажем, что все члены в правой части последнего уравнения стремятся к нулю быстрее, чем τ. Член I^n_m мал, поскольку при достаточно больших m мала разница между функцией и отрезком ее ряда Фурье. Остаток G^n_m мал, поскольку якобиан преобразования $|\partial \mathbf{x}^{n+1}/\partial\xi|$ мало отличается от 1. Значение Q^n_m мало вследствие малости d, а r^n_m мал, так как мала разность между точным и приближенным значениями материальной производной. Приведем соответствующие оценки.

Оценка I^n_m приведена в [4]:

$$|I^n_m| \le \nu||\mathbf{w}^{n+1}_x|| \cdot ||\mathbf{u}(t^{n+1}) - \mathbf{u}^{(m)}(t^{n+1})||_H + ||\mathbf{w}^{n+1}_x||\times$$
$$\times\left(\sum_{i,j=0}^{3} \int_\Omega \left(u_i u_j - u^{(m)}_i u^{(m)}_j\right)^2 d\mathbf{x}\right)^{1/2} \le \nu||\mathbf{w}^{n+1}_x|| \cdot ||\mathbf{u}(t^{n+1}) - \mathbf{u}^{(m)}(t^{n+1})||_H +$$
$$+||\mathbf{w}^{n+1}_x||\Bigg(6\left[\sum_{j=0}^{3} \int_\Omega u^4_j d\mathbf{x}\right]^{1/2} \left[\sum_{i=0}^{3} \int_\Omega (u_i - u^{(m)}_i)^4 d\mathbf{x}\right]^{1/2} +$$

$$+6\left[\sum_{i=0}^{3}\int\limits_{\Omega}(u_j^{(m)})^4 d\mathbf{x}\right]^{1/2}\left[\sum_{j=0}^{3}\int\limits_{\Omega}(u_i-u_i^{(m)})^4 d\mathbf{x}\right]^{1/2}\Bigg)^{1/2}\leq$$

$$\leq C_1||\mathbf{w}_x^{n+1}||\cdot||\mathbf{u}(t^{n+1})-\mathbf{u}^{(m)}(t^{n+1})||_H.$$

Используя неравенство Юнга при $\epsilon=\sqrt{\dfrac{\nu}{16C_1}}$, получим

$$|2\tau I_m^n|\leq\frac{\nu\tau}{16}||\mathbf{w}_x^{n+1}||^2+\tau\frac{16C_1^2}{\nu}||\mathbf{u}(t^{n+1})-\mathbf{u}^{(m)}(t^{n+1})||_H^2\leq$$

$$\leq\frac{\nu\tau}{4}[[\mathbf{w}_x^{n+1}]]^2+\tau\frac{16C_1^2}{\nu}||\mathbf{u}(t^{n+1})-\mathbf{u}^{(m)}(t^{n+1})||_H^2.$$

Оценка G_m^n:

$$2\tau|G_m^n|\leq 2\tau\left|\Big(\mathbf{u}_t^{(m)}(\mathbf{x}^{n+1},t^{n+1}),\mathbf{w}^{n+1}(\mathbf{x}^{n+1})\Big)_\xi-\Big(\mathbf{u}_t^{(m)}(\mathbf{x},t^{n+1}),\mathbf{w}^{n+1}(\mathbf{x})\Big)\right|+$$

$$+2\nu\tau\left|\big(\mathbf{u}_{x_i}^{(m)}(\mathbf{x}^{n+1},t^{n+1}),\mathbf{w}_{x_i}^{n+1}(\mathbf{x}^{n+1})\big)_\xi-\big(\mathbf{u}_{x_i}^{(m)}(\mathbf{x},t^{n+1}),\mathbf{w}_{x_i}^{n+1}(\mathbf{x})\big)\right|.$$

Первое слагаемое

$$2\tau\left|\Big(\mathbf{u}_t^{(m)}(\mathbf{x}^{n+1},t^{n+1}),\mathbf{w}^{n+1}(\mathbf{x}^{n+1})\Big)_\xi-\Big(\mathbf{u}_t^{(m)}(\mathbf{x},t^{n+1}),\mathbf{w}^{n+1}(\mathbf{x})\Big)\right|=$$

$$=2\tau\left|\Big(\mathbf{u}_t^{(m)}(\mathbf{x}^{n+1},t^{n+1}),(1-J_0^{n+1})\mathbf{w}^{n+1}(\mathbf{x}^{n+1})\Big)_\xi\right|\leq$$

$$\leq 4T\tau^{3/2}||\mathbf{u}_t^{(m)}(\mathbf{x}^{n+1},t^{n+1})||_\xi\cdot||\mathbf{w}^{n+1}(\mathbf{x}^{n+1})||_\xi\leq$$

$$\leq 16T\tau^{3/2}||\mathbf{u}_t^{(m)}(t^{n+1})||\cdot[[\mathbf{w}^{n+1}(\mathbf{x}^{n+1})]]\leq$$

$$\leq\frac{\tau}{4}[[\mathbf{w}^{n+1}]]^2+C_2T^2\tau^2||\mathbf{u}_t^{(m)}(t^{n+1})||^2.$$

Второе слагаемое

$$2\nu\tau\left|\big(\mathbf{u}_{x_i}^{(m)}(\mathbf{x}^{n+1},t^{n+1}),\mathbf{w}_{x_i}^{n+1}(\mathbf{x}^{n+1})\big)_\xi-\big(\mathbf{u}_{x_i}^{(m)}(\mathbf{x},t^{n+1}),\mathbf{w}_{x_i}^{n+1}(\mathbf{x})\big)\right|=$$

$$=2\nu\tau\left|\big(\mathbf{u}_{x_i}^{(m)}(\mathbf{x}^{n+1},t^{n+1}),(1-J^{n+1})\mathbf{w}_{x_i}^{n+1}(\mathbf{x}^{n+1})\big)_\xi\right|\leq$$

$$\leq 4\nu T\tau^{3/2}||\mathbf{u}_x^{(m)}(\mathbf{x}^{n+1},t^{n+1})||_\xi\cdot||\mathbf{w}_x^{n+1}(\mathbf{x}^{n+1})||_\xi\leq$$

$$\leq 16\nu T\tau^{3/2}||\mathbf{u}_x^{(m)}(t^{n+1})||\cdot[[\mathbf{w}_x^{n+1}(\mathbf{x}^{n+1})]]\leq$$

$$\leq\frac{\nu\tau}{4}[[\mathbf{w}_x^{n+1}]]^2+C_3\nu T^2\tau^2||\mathbf{u}_x^{(m)}(t^{n+1})||^2.$$

В итоге

$$2\tau|G_m^n|\leq\frac{\tau}{4}[[\mathbf{w}^{n+1}]]^2+\frac{\nu\tau}{4}[[\mathbf{w}_x^{n+1}]]^2+$$

$$+C_2T^2\tau^2||\mathbf{u}_t^{(m)}(t^{n+1})||^2+C_3\nu T^2\tau^2||\mathbf{u}_x^{(m)}(t^{n+1})||^2. \tag{18}$$

Оценка Q_m^n:

$$2\tau|Q_m^n| \le 2\tau \left| \Big(\Big(\mathbf{u}_t^{(m)}(\mathbf{x}^{n+1},t^{n+1}),\mathbf{w}^{n+1}(\mathbf{x}^{n+1})\Big)\Big) - \Big(\mathbf{u}_t^{(m)}(\mathbf{x}^{n+1},t^{n+1}),\mathbf{w}^{n+1}(\mathbf{x}^{n+1})\Big)_\xi \right| +$$
$$+2\nu\tau \left| \big(\big(\mathbf{u}_{x_i}^{(m)}(\mathbf{x}^{n+1},t^{n+1}),\mathbf{w}_{x_i}^{n+1}(\mathbf{x}^{n+1})\big)\big) - \big(\mathbf{u}_{x_i}^{(m)}(\mathbf{x}^{n+1},t^{n+1}),\mathbf{w}_{x_i}^{n+1}(\mathbf{x}^{n+1})\big)_\xi \right|.$$

Для $\mathbf{a},\mathbf{b} \in V_m$ оценим разность:

$$\left|(\mathbf{a}(\mathbf{x}^n),\mathbf{b}(\mathbf{x}^n))_\xi - ((\mathbf{a}(\mathbf{x}^n),\mathbf{b}(\mathbf{x}^n)))\right| =$$
$$= \left| \sum_{k=1}^N \int\limits_{\omega_k} [\mathbf{a}^n(\mathbf{x}^n(\xi))\mathbf{b}^n(\mathbf{x}^n(\xi)) - \mathbf{a}^n(\mathbf{x}^n(\xi_k))\mathbf{b}^n(\mathbf{x}^n(\xi_k))]\,d\xi \right| =$$
$$= \left| \sum_{k=1}^N \int\limits_{\omega_k} \Big[\mathbf{a}^n(\mathbf{x}^n(\xi))\big[\mathbf{b}^n(\mathbf{x}^n(\xi)) - \mathbf{b}^n(\mathbf{x}^n(\xi_k))\big] + \mathbf{b}^n(\mathbf{x}^n(\xi_k))\big[\mathbf{a}^n(\mathbf{x}^n(\xi)) - \mathbf{a}^n(\mathbf{x}^n(\xi_k))\big]\Big] d\xi \right| \le$$
$$\le 3\max_{i,\Omega}|\mathbf{b}_{x_i}|\cdot|\mathbf{x}_\xi^n|d\int\limits_\Omega |\mathbf{a}(\mathbf{x}^n(\xi))|d\xi + 3\max_{i,\Omega}|\mathbf{a}_{x_i}|\cdot|\mathbf{x}_\xi^n|d\sum_{k=1}^n |\mathbf{b}(\mathbf{x}^n(\xi_k))|m_k \le$$
$$\le 3\max_{i,\Omega}|\mathbf{b}_{x_i}|\cdot|\mathbf{x}_\xi^n|d\sqrt{\mu(\Omega)}||\mathbf{a}(\mathbf{x}^n)||_\xi + 3\max_{i,\Omega}|\mathbf{a}_{x_i}|\cdot|\mathbf{x}_\xi^n|d\sqrt{\mu(\Omega)}[[\mathbf{b}(\mathbf{x}^n)]]. \tag{19}$$

Из (19) следует оценка первого слагаемого в выражении для Q_m^n

$$2\tau \left| \Big(\Big(\mathbf{u}_t^{(m)}(\mathbf{x}^{n+1},t^{n+1}),\mathbf{w}^{n+1}(\mathbf{x}^{n+1})\Big)\Big) - \Big(\mathbf{u}_t^{(m)}(\mathbf{x}^{n+1},t^{n+1}),\mathbf{w}^{n+1}(\mathbf{x}^{n+1})\Big)_\xi \right| \le$$
$$\le 6\tau\max_{i,\Omega}|\mathbf{w}_{x_i}^{n+1}|\cdot|\mathbf{x}_\xi^{n+1}|d\sqrt{\mu(\Omega)}||\mathbf{u}_t^{(m)}(\mathbf{x}^{n+1})||_\xi +$$
$$+6\tau\max_{i,\Omega}|\mathbf{u}_{tx_i}^{(m)}|\cdot|\mathbf{x}_\xi^{n+1}|d\sqrt{\mu(\Omega)}[[\mathbf{w}^{n+1}(\mathbf{x}^{n+1})]] \le$$
$$\le 12\sqrt{2}\tau F(m)\cdot e^{6TF(m)[[\mathbf{v}^0]]}d\sqrt{\mu(\Omega)}[[\mathbf{w}^{n+1}]]\cdot||\mathbf{u}_t^{(m)}||+$$
$$+6\tau F(m)||\mathbf{u}_t^{(m)}||\cdot e^{6TF(m)[[\mathbf{v}^0]]}d\sqrt{\mu(\Omega)}[[\mathbf{w}^{n+1}(\mathbf{x}^{n+1})]] \le$$
$$\le \frac{\tau}{4}[[\mathbf{w}^{n+1}]]^2 + 288\tau F^2(m)\cdot e^{12TF(m)[[\mathbf{v}^0]]}d^2\mu(\Omega)\cdot||\mathbf{u}_t^{(m)}||^2+$$
$$+\frac{\tau}{4}[[\mathbf{w}^{n+1}]]^2 + 36\tau F^2(m)\cdot e^{12TF(m)[[\mathbf{v}^0]]}d^2\mu(\Omega)||\mathbf{u}_t^{(m)}||^2.$$

Второе слагаемое

$$2\nu\tau \left| \big(\big(\mathbf{u}_{x_i}^{(m)}(\mathbf{x}^{n+1},t^{n+1}),\mathbf{w}_{x_i}^{n+1}(\mathbf{x}^{n+1})\big)\big) - \big(\mathbf{u}_{x_i}^{(m)}(\mathbf{x}^{n+1},t^{n+1}),\mathbf{w}_{x_i}^{n+1}(\mathbf{x}^{n+1})\big)_\xi \right| \le$$
$$\le 18\nu\tau\max_{i,j,\Omega}|\mathbf{w}_{x_ix_j}^{n+1}|\cdot|\mathbf{x}_\xi^{n+1}|d\sqrt{\mu(\Omega)}||\mathbf{u}_x^{(m)}(\mathbf{x}^{n+1})||_\xi +$$
$$+18\nu\tau\max_{i,j,\Omega}|\mathbf{u}_{x_ix_j}^{(m)}|\cdot|\mathbf{x}_\xi^{n+1}|d\sqrt{\mu(\Omega)}[[\mathbf{w}_x^{n+1}(\mathbf{x}^n)]] \le$$
$$\le 18\nu\tau F_1(m)||\mathbf{w}^{n+1}||\cdot e^{6TF(m)[[\mathbf{v}^0]]}d\sqrt{\mu(\Omega)}||\mathbf{u}_x^{(m)}(\mathbf{x}^{n+1})||_\xi +$$

$$
\begin{aligned}
&+18\nu\tau F_1(m)||\mathbf{u}^{(m)}||\cdot e^{6TF(m)[[\mathbf{v}^0]]}d\sqrt{\mu(\Omega)}[[\mathbf{w}_x^{n+1}(\mathbf{x}^n)]]\leq\\
&\leq\frac{\tau}{4}[[\mathbf{w}^{n+1}]]^2+C_5\nu^2\tau F_1^2(m)\cdot e^{12TF(m)[[\mathbf{v}^0]]}d^2\mu(\Omega)\cdot||\mathbf{u}_x^{(m)}||^2+\\
&+\frac{\nu\tau}{4}[[\mathbf{w}_x^{n+1}]]^2+C_6\nu\tau F_1^2(m)\cdot e^{12TF(m)[[\mathbf{v}^0]]}d^2\mu(\Omega)||\mathbf{u}^{(m)}||^2.
\end{aligned}
$$

Возвращаясь к Q_m^n, получим

$$
\begin{aligned}
2\tau|Q_m^n|&\leq\frac{3\tau}{4}[[\mathbf{w}^{n+1}]]^2+\frac{\nu\tau}{4}[[\mathbf{w}_x^{n+1}]]^2+\\
&+C_4\tau F^2(m)\cdot e^{12TF(m)[[\mathbf{v}^0]]}d^2\mu(\Omega)\cdot||\mathbf{u}_t^{(m)}||^2+\\
&+C_5\nu^2\tau F_1^2(m)\cdot e^{12TF(m)[[\mathbf{v}^0]]}d^2\mu(\Omega)\cdot||\mathbf{u}_x^{(m)}||^2+\\
&+C_6\nu\tau F_1^2(m)\cdot e^{12TF(m)[[\mathbf{v}^0]]}d^2\mu(\Omega)||\mathbf{u}^{(m)}||^2.
\end{aligned}
\tag{20}
$$

Оценка r_m^n:

$$
\begin{aligned}
r_m^n=&\Big(\Big(\mathbf{u}_t^{(m)}(\mathbf{x}^{n+1},t^{n+1}),\mathbf{w}^{n+1}(\mathbf{x}^{n+1})\Big)\Big)-\Big([u_k^{(m)}\mathbf{u}^{(m)}](t^{n+1}),\mathbf{w}_{x_k}^{n+1}\Big)-\\
&-\Big(\Big(\frac{\mathbf{u}^{(m)}(\mathbf{x}^{n+1},t^{n+1})-\mathbf{u}^{(m)}(\mathbf{x}^n,t^n)}{\tau},\mathbf{w}^{n+1}(\mathbf{x}^{n+1})\Big)\Big),
\end{aligned}
$$

$$
\frac{\mathbf{u}^{(m)}(\mathbf{x}^{n+1},t^{n+1})-\mathbf{u}^{(m)}(\mathbf{x}^n,t^n)}{\tau}=\mathbf{u}_t^{(m)}(\mathbf{x}^{n+1},t^{n+1})+v_k^n(\mathbf{x}^n)\mathbf{u}_{x_k}^{(m)}(\mathbf{x}^{n+1},t^{n+1})+\tau\rho_m^n,
$$

где

$$
\boldsymbol{\rho}_m^n=\boldsymbol{\eta}^{0,nm}+v_k^n(\mathbf{x}^n)\boldsymbol{\eta}_k^{1,nm}+v_k^n(\mathbf{x}^n)v_j^n(\mathbf{x}^n)\boldsymbol{\eta}_{kj}^{2,nm};
$$

а

$$
|\boldsymbol{\eta}^{0,nm}|^2=\sum_{i=1}^3\left(\eta_i^{0,nm}\right)^2\leq\sum_{i=1}^3\max_{\substack{t\in[t^n,t^{n+1}]\\ \mathbf{x}\in\Omega}}\Big(u_{i_{tt}}^{(m)}(\mathbf{x},t)\Big)^2;
$$

$$
|\boldsymbol{\eta}_k^{1,nm}|^2\leq\sum_{i=1}^3\max_{\substack{t\in[t^n,t^{n+1}]\\ \mathbf{x}\in\Omega}}\Big(u_{i_{tx_k}}^{(m)}(\mathbf{x},t)\Big)^2;
$$

$$
|\boldsymbol{\eta}_{kj}^{2,nm}|^2\leq\sum_{i=1}^3\max_{\substack{t\in[t^n,t^{n+1}]\\ \mathbf{x}\in\Omega}}\Big(u_{i_{x_jx_k}}^{(m)}(\mathbf{x},t)\Big)^2.
$$

Таким образом,

$$
\begin{aligned}
2\tau|r_m^n|&\leq2\tau^2\left|\Big(\Big(\boldsymbol{\eta}_m^n,\mathbf{w}^{n+1}\Big)\Big)\right|+\\
&+2\tau\left|\Big(\Big(v_k^n(\mathbf{x}^n)\mathbf{u}_{x_k}^{(m)}(\mathbf{x}^{n+1},t^{n+1}),\mathbf{w}^{n+1}(\mathbf{x}^{n+1})\Big)\Big)+\Big([u_k^{(m)}\mathbf{u}^{(m)}](t^{n+1}),\mathbf{w}_{x_k}^{n+1}\Big)\right|\leq\\
&\leq2\tau\left|\Big(\Big(v_k^n\mathbf{u}_{x_k}^{(m)}(\mathbf{x}^{n+1},t^{n+1}),\mathbf{w}^{n+1}\Big)\Big)-\Big(v_k^n\mathbf{u}_{x_k}^{(m)}(\mathbf{x}^{n+1},t^{n+1}),\mathbf{w}^{n+1}\Big)_\xi\right|+\\
&+2\tau\left|\Big((v_k^n-v_k^{n+1})\mathbf{u}_{x_k}^{(m)}(\mathbf{x}^{n+1},t^{n+1}),\mathbf{w}^{n+1}\Big)_\xi\right|+\\
&+2\tau\left|\Big(v_k^{n+1}\mathbf{u}_{x_k}^{(m)},\mathbf{w}^{n+1}\Big)_\xi-\Big(v_k^{n+1}\mathbf{u}_{x_k}^{(m)},\mathbf{w}^{n+1}\Big)\right|+\\
&+2\tau\left|\Big(v_k^{n+1}\mathbf{u}_{x_k}^{(m)},\mathbf{w}^{n+1}\Big)+\Big([u_k^{(m)}\mathbf{u}^{(m)}](t^{n+1}),\mathbf{w}_{x_k}^{n+1}\Big)\right|+
\end{aligned}
$$

$$+2\tau^2 \left| \left(\left(\boldsymbol{\rho}_m^n, \mathbf{w}^{n+1} \right) \right) \right| .$$

Первое слагаемое

$$2\tau \left| \left(\left(v_k^n(\mathbf{x}^n)\mathbf{u}_{x_k}^{(m)}(\mathbf{x}^{n+1}, t^{n+1}), \mathbf{w}^{n+1}(\mathbf{x}^{n+1}) \right) \right) - \left(v_k^n(\mathbf{x}^n)\mathbf{u}_{x_k}^{(m)}(\mathbf{x}^{n+1}, t^{n+1}), \mathbf{w}^{n+1}(\mathbf{x}^{n+1}) \right)_\xi \right| \leq$$

$$\leq 6\tau \max_{i,\Omega} |\mathbf{w}_{x_i}^{n+1}| \cdot |\mathbf{x}_\xi^{n+1}| d \int_\Omega |v_j^n \mathbf{u}_{x_j}^{(m)}| d\xi +$$

$$+6\tau \left[\max_{i,j,\Omega} \left(|\mathbf{v}^n| \cdot |\mathbf{u}_{x_i x_j}^{(m)}| \right) |\mathbf{x}_\xi^{n+1}| + \max_{i,j,\Omega} \left(|\mathbf{v}_{x_i}^n| \cdot |\mathbf{u}_{x_j}^{(m)}| \right) \cdot |\mathbf{x}_\xi^n| \right] d\sqrt{\mu(\Omega)} [[\mathbf{w}^{n+1}(\mathbf{x}^{n+1})]] \leq$$

$$\leq 6\tau F(m) ||\mathbf{w}^{n+1}|| \cdot e^{6TF(m)[[\mathbf{v}^0]]} d ||\mathbf{v}^n||_\xi \cdot ||\mathbf{u}_x^{(m)}||_\xi +$$

$$+6\tau \left(\sqrt{m} M F_1(m) + F^2(m) \right) ||\mathbf{v}^n|| \cdot ||\mathbf{u}^{(m)}|| \cdot e^{6TF(m)[[\mathbf{v}^0]]} d\sqrt{\mu(\Omega)} [[\mathbf{w}^{n+1}(\mathbf{x}^{n+1})]] \leq$$

$$\leq \frac{\tau}{4} [[\mathbf{w}^{n+1}]]^2 + C_7 \tau F^2(m) d^2 \cdot e^{12TF(m)[[\mathbf{v}^0]]} [[\mathbf{v}^n]]^2 \cdot ||\mathbf{u}_x^{(m)}||^2 +$$

$$+\frac{\tau}{4} [[\mathbf{w}^{n+1}]]^2 + C_8 \tau \left(\sqrt{m} M F_1(m) + F^2(m) \right)^2 \cdot e^{12TF(m)[[\mathbf{v}^0]]} d^2 \mu(\Omega) [[\mathbf{v}^n]]^2 \cdot ||\mathbf{u}^{(m)}||^2.$$

Второе слагаемое

$$2\tau \left| \left(\left((v_k^n(\mathbf{x}^n) - v_k^{n+1}(\mathbf{x}^{n+1})) \mathbf{u}_{x_k}^{(m)}(\mathbf{x}^{n+1}, t^{n+1}), \mathbf{w}^{n+1}(\mathbf{x}^{n+1}) \right)_\xi \right| \leq$$

$$\leq 2\tau \max_\Omega |\mathbf{w}^{n+1}| \cdot \int_\Omega \left| (v_j^{n+1} - v_j^n) \mathbf{u}_{x_j}^{(m)} \right| d\xi \leq$$

$$\leq 2\tau \sqrt{m} M ||\mathbf{w}^{n+1}|| \cdot ||\mathbf{v}^{n+1} - \mathbf{v}^n||_\xi \cdot ||\mathbf{u}_x^{(m)}||_\xi \leq \frac{\tau}{4} [[\mathbf{w}^{n+1}]]^2 + C_9 \tau [[\mathbf{v}^{n+1} - \mathbf{v}^n]]^2 \cdot ||\mathbf{u}_x^{(m)}||^2.$$

Третье слагаемое

$$2\tau \left| \left(v_k^{n+1}(\mathbf{x}^{n+1}) \mathbf{u}_{x_k}^{(m)}(\mathbf{x}^{n+1}, t^{n+1}), \mathbf{w}^{n+1}(\mathbf{x}^{n+1}) \right)_\xi - \left(v_k^{n+1} \mathbf{u}_{x_k}^{(m)}(t^{n+1}), \mathbf{w}^{n+1} \right)_\xi \right| =$$

$$= 2\tau \left| \left([v_k^{n+1} \mathbf{u}_{x_k}^{(m)}](\mathbf{x}^{n+1}, t^{n+1}), (J_0^{n+1} - 1) \mathbf{w}^{n+1}(\mathbf{x}^{n+1}) \right)_\xi \right| \leq$$

$$\leq 4T\tau^{3/2} \max_{\mathbf{x} \in \Omega} |\mathbf{w}^{n+1}(\mathbf{x})| \int_\Omega |v_k^{n+1} \mathbf{u}_{x_k}^{(m)}(\mathbf{x}^{n+1}, t^{n+1})| d\xi \leq$$

$$\leq 4T\tau^{3/2} \sqrt{m} M ||\mathbf{w}^{n+1}|| \cdot ||\mathbf{v}^{n+1}(\mathbf{x}^{n+1})||_\xi \cdot ||\mathbf{u}_x^{(m)}(\mathbf{x}^{n+1}, t^{n+1})||_\xi \leq$$

$$\leq \frac{\tau}{4} [[\mathbf{w}^{n+1}]]^2 + C_{10} m M^2 T^2 \tau^2 [[\mathbf{v}^{n+1}]]^2 \cdot ||\mathbf{u}_x^{(m)}(t^{n+1})||^2.$$

Четвертое слагаемое

$$2\tau \left| \left(v_k^{n+1} \mathbf{u}_{x_k}^{(m)}, \mathbf{w}^{n+1} \right) + \left([u_k^{(m)} \mathbf{u}^{(m)}](t^{n+1}), \mathbf{w}_{x_k}^{n+1} \right) \right| =$$

$$= 2\tau \left| \left(v_k^{n+1} \mathbf{u}^{(m)}, \mathbf{w}_{x_k}^{n+1} \right) - \left([u_k^{(m)} \mathbf{u}^{(m)}](t^{n+1}), \mathbf{w}_{x_k}^{n+1} \right) \right| =$$

$$= 2\tau \left| \left(w_k^{n+1} \mathbf{u}^{(m)}(t^{n+1}), \mathbf{w}_{x_k}^{n+1} \right) \right| \leq 2\tau ||\mathbf{w}_x^{n+1}|| \left[\int_\Omega \sum_{i,k=0}^{3} \left(w_k^{n+1} u_i^{(m)} \right)^2 d\mathbf{x} \right]^{1/2} \leq$$

$$\leq 2\tau||\mathbf{w}_x^{n+1}|| \cdot ||\mathbf{w}^{n+1}||_{L_4(\Omega)} \cdot ||\mathbf{u}^{(m)}(t^{n+1}||_{L_4(\Omega)} \leq$$

$$\leq 16 \cdot 3^{-3/2}\tau \cdot ||\mathbf{u}^{(m)}(t^{n+1}||_{L_4(\Omega)} \cdot ||\mathbf{w}_x^{n+1}|| \cdot ||\mathbf{w}_x^{n+1}||^{3/4} \cdot ||\mathbf{w}^{n+1}||^{1/4} \leq$$

$$\leq 64 \cdot 3^{-3/2}\tau \cdot ||\mathbf{u}^{(m)}(t^{n+1}||_{L_4(\Omega)} \cdot [[\mathbf{w}_x^{n+1}]] \left(\frac{[[\mathbf{w}^{n+1}]]}{4\epsilon^4} + \frac{3\epsilon^{4/3}}{4}[[\mathbf{w}_x^{n+1}]] \right).$$

Выбрав

$$\epsilon = \frac{3^{3/8} \cdot \nu^{3/4}}{8||\mathbf{u}^{(m)}(t^{n+1}||_{L_4(\Omega)}^{3/4}},$$

получим

$$\left|2\tau \left(w_k^{n+1}\mathbf{u}^{(m)}(t^{n+1}), \mathbf{w}_{x_k}^{n+1}\right)\right| \leq \nu\tau[[\mathbf{w}_x^{n+1}]]^2 + C\tau||\mathbf{u}^{(m)}(t^{n+1}||_{L_4(\Omega)}^4[[\mathbf{w}_x^{n+1}]] \cdot [[\mathbf{w}^{n+1}]] \leq$$

$$\leq \nu\tau[[\mathbf{w}_x^{n+1}]]^2 + \frac{\nu\tau}{4}[[\mathbf{w}_x^{n+1}]]^2 + C^2||\mathbf{u}^{(m)}(t^{n+1}||_{L_4(\Omega)}^8\tau[[\mathbf{w}^{n+1}]]^2.$$

Пятое слагаемое

$$\left|2\tau^2((\rho_m^n, \mathbf{w}^{n+1}))\right| \leq 2\tau^2|((\boldsymbol{\eta}^{0,nm}, \mathbf{w}^{n+1}))|+$$

$$+2\tau^2|((v_k^n\boldsymbol{\eta}_k^{1,nm}, \mathbf{w}^{n+1}))| + 2\tau^2|(v_k^n v_j^n \boldsymbol{\eta}_{kj}^{2,nm}, \mathbf{w}^{n+1})_\xi|;$$

$$2\tau^2|((\boldsymbol{\eta}^{0,nm}, \mathbf{w}^{n+1}))| \leq 6\tau^3[[\boldsymbol{\eta}^{0,nm}]]^2 + \frac{\tau}{6}[[\mathbf{w}^{n+1}]]^2 \leq$$

$$\leq 6\tau^3\mu(\Omega)\sum_{i=1}^{3} \max_{\substack{t\in[t^n,t^{n+1}]\\ \mathbf{x}\in\Omega}} \left(u_{i_{tt}}^{(m)}(\mathbf{x},t)\right)^2 + \frac{\tau}{6}[[\mathbf{w}^{n+1}]]^2,$$

$$2\tau^2|((v_k^n\boldsymbol{\eta}_k^{1,nm}, \mathbf{w}^{n+1}))| \leq 2\tau^2\sqrt{\sum_{k,i=1}^{3} \max_{\substack{t\in[t^n,t^{n+1}]\\ \mathbf{x}\in\Omega}} \left(u_{i_{tx_k}}^{(m)}(\mathbf{x},t)\right)^2} \cdot [[\mathbf{v}^n]] \cdot [[\mathbf{w}^{n+1}]] \leq$$

$$\leq 6\tau^3\sum_{k,i=1}^{3} \max_{\substack{t\in[t^n,t^{n+1}]\\ \mathbf{x}\in\Omega}} \left(u_{i_{tx_k}}^{(m)}(\mathbf{x},t)\right)^2[[\mathbf{v}^n]]^2 + \frac{\tau}{6}[[\mathbf{w}^{n+1}]]^2,$$

$$2\tau^2|((v_k^n v_j^n\boldsymbol{\eta}_{kj}^{2,nm}, \mathbf{w}^{n+1}))| \leq$$

$$\leq 6\tau^2\max_{\mathbf{x}\in\Omega}|\mathbf{v}^n|^2\sqrt{\sum_{i,j,k=1}^{3} \max_{\substack{t\in[t^n,t^{n+1}]\\ \mathbf{x}\in\Omega}} \left(u_{i_{x_jx_k}}^{(m)}(\mathbf{x},t)\right)^2}\sqrt{\mu(\Omega)}[[\mathbf{w}^{n+1}]] \leq$$

$$\leq \frac{\tau}{6}[[\mathbf{w}^{n+1}]]^2 + 36\tau^3m^2M^4\sum_{i,j,k=1}^{3} \max_{\substack{t\in[t^n,t^{n+1}]\\ \mathbf{x}\in\Omega}} \left(u_{i_{x_jx_k}}^{(m)}(\mathbf{x},t)\right)^2[[\mathbf{v}^n]]^4.$$

Таким образом,

$$\left|2\tau^2((\rho_m^n, \mathbf{w}^{n+1}))\right| \leq \frac{\tau}{2}[[\mathbf{w}^{n+1}]]^2 + 6\tau^3\mu(\Omega)\sum_{i=1}^{3} \max_{\substack{t\in[t^n,t^{n+1}]\\ \mathbf{x}\in\Omega}} \left(u_{i_{tt}}^{(m)}(\mathbf{x},t)\right)^2+$$

$$+6\tau^3\sum_{k,i=1}^{3} \max_{\substack{t\in[t^n,t^{n+1}]\\ \mathbf{x}\in\Omega}} \left(u_{i_{tx_k}}^{(m)}(\mathbf{x},t)\right)^2[[\mathbf{v}^n]]^2 + 36\tau^3m^2M^4\sum_{i,j,k=1}^{3} \max_{\substack{t\in[t^n,t^{n+1}]\\ \mathbf{x}\in\Omega}} \left(u_{i_{x_jx_k}}^{(m)}(\mathbf{x},t)\right)^2[[\mathbf{v}^n]]^4.$$

Подставив полученные оценки в (17) и просуммировав по n от 0 до $l-1$, получим

$$[[\mathbf{w}^l]]^2 + \sum_{n=0}^{l-1} [[\mathbf{w}^{n+1} - \mathbf{w}^n]]^2 \le \left(\frac{5}{2} + C^2 \max_{t\in[0,T]} ||\mathbf{u}^{(m)}(t)||^8_{L_4(\Omega)}\right) \sum_{n=0}^{l-1} \tau[[\mathbf{w}^{n+1}]]^2 + \sum_{j=1}^{13} R^l_j, \quad (21)$$

где

$$R^l_1 = \sum_{n=0}^{l-1} \tau \frac{16C_1^2}{\nu} ||\mathbf{u}(t^{n+1}) - \mathbf{u}^{(m)}(t^{n+1})||^2_H,$$

$$R^l_2 = C_2 T^2 \tau^2 \sum_{n=0}^{l-1} ||\mathbf{u}^{(m)}_t(t^{n+1})||^2,$$

$$R^l_3 = C_3 \nu T^2 \tau^2 \sum_{n=0}^{l-1} ||\mathbf{u}^{(m)}_x(t^{n+1})||^2,$$

$$R^l_4 = C_4 F^2(m) \cdot e^{12TF(m)[[\mathbf{v}^0]]} d^2 \mu(\Omega) \sum_{n=0}^{l-1} \tau ||\mathbf{u}^{(m)}_t(t^{n+1})||^2,$$

$$R^l_5 = C_5 \nu^2 F_1^2(m) \cdot e^{12TF(m)[[\mathbf{v}^0]]} d^2 \mu(\Omega) \sum_{n=0}^{l-1} \tau ||\mathbf{u}^{(m)}_x(t^{n+1})||^2,$$

$$R^l_6 = C_6 \nu F_1^2(m) \cdot e^{12TF(m)[[\mathbf{v}^0]]} d^2 \mu(\Omega) \sum_{n=0}^{l-1} \tau ||\mathbf{u}^{(m)}(t^{n+1})||^2,$$

$$R^l_7 = C_7 F^2(m) \cdot e^{12TF(m)[[\mathbf{v}^0]]} d^2 \sum_{n=0}^{l-1} \tau [[\mathbf{v}^n]]^2 \cdot ||\mathbf{u}^{(m)}_x(t^{n+1})||^2,$$

$$R^l_8 = C_8 \left(\sqrt{m} M F_1(m) + F^2(m)\right)^2 \cdot e^{12TF(m)[[\mathbf{v}^0]]} d^2 \mu(\Omega) \sum_{n=0}^{l-1} \tau [[\mathbf{v}^n]]^2 \cdot ||\mathbf{u}^{(m)}(t^{n+1})||^2,$$

$$R^l_9 = C_9 \tau \sum_{n=0}^{l-1} [[\mathbf{v}^{n+1} - \mathbf{v}^n]]^2 \cdot ||\mathbf{u}^{(m)}_x(t^{n+1})||^2,$$

$$R^l_{10} = C_{10} m M^2 T^2 \tau^2 \sum_{n=0}^{l-1} [[\mathbf{v}^{n+1}]]^2 \cdot ||\mathbf{u}^{(m)}_x(t^{n+1})||^2,$$

$$R^l_{11} = 6T\tau^2 \mu(\Omega) \sum_{i=1}^{3} \max_{\substack{t\in[t^n, t^{n+1}] \\ \mathbf{x}\in\Omega}} \left(u^{(m)}_{i_{tt}}(\mathbf{x}, t)\right)^2,$$

$$R^l_{12} = 6\tau^2 \sum_{k,i=1}^{3} \max_{\substack{t\in[t^n, t^{n+1}] \\ \mathbf{x}\in\Omega}} \left(u^{(m)}_{i_{tx_k}}(\mathbf{x}, t)\right)^2 \sum_{n=0}^{l-1} \tau [[\mathbf{v}^n]]^2,$$

$$R^l_{13} = 36\tau^2 m^2 M^4 \sum_{i,j,k=1}^{3} \max_{\substack{t\in[t^n, t^{n+1}] \\ \mathbf{x}\in\Omega}} \left(u^{(m)}_{i_{x_j x_k}}(\mathbf{x}, t)\right)^2 \sum_{n=0}^{l-1} \tau [[\mathbf{v}^n]]^4.$$

Следуя [4], обозначим через P_m оператор проектирования, ставящий в соответствие любой функции $\varphi(\mathbf{x})$ отрезок ряда Фурье по системе $\mathbf{a}^k(\mathbf{x})$, а именно

$$P_m\varphi = \sum_{i=1}^{m} (\varphi, \mathbf{a}^i)\mathbf{a}^i.$$

Легко видеть, что P_m являются ограниченными операторами в пространствах $H(\Omega)$ и $L_4(\Omega)$. С другой стороны, они сходятся к единичному оператору на любом из элементов этих пространств. Поэтому в силу теоремы Банаха — Штейнгауза их нормы в обоих пространствах будут ограничены в совокупности: $||P_m||_{H(\Omega)} \leq C_{11}$ и $||P_m||_{L_4(\Omega)} \leq C_{12}$. Это дает для $\mathbf{u}^{(m)}(\mathbf{x}, t)$ оценки

$$||\mathbf{u}^{(m)}(\mathbf{x}, t)||_{H(\Omega)} = ||P_m\mathbf{u}||_{H(\Omega)} \leq C_{11}||\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)||_{H(\Omega)}; \tag{22}$$

$$||\mathbf{u}^{(m)}(\mathbf{x}, t)||_{L_4(\Omega)} \leq C_{12}||\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)||_{L_4(\Omega)}. \tag{23}$$

Так как для обобщенного решения $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ норма в H и интегралы $\int\limits_\Omega \sum\limits_{i=1}^{3} u_i^4(\mathbf{x}, t)d\mathbf{x}$ равномерно ограничены при $t \in [0, T]$, из (22), (23) следует, что равномерно ограничены $||\mathbf{u}^{(m)}(\mathbf{x}, t)||^2_{H(\Omega)}$ и интегралы $\int\limits_\Omega \sum\limits_{i=1}^{3} \left[u_i^{(m)}(\mathbf{x}, t)\right]^4 d\mathbf{x}$.

Теперь, отбросив второе и третье слагаемое левой части (21) и учитывая, что $[[\mathbf{w}^0]] = 0$, получим неравенство, из которого известным образом (разностный аналог леммы Гронуолла) выводится оценка

$$[[\mathbf{w}^l]]^2 \leq C_{13} \sum_{j=1}^{12} R_j^l \tag{24}$$

с постоянной C_{13}, зависящей лишь от T. Остается показать, что $\sum\limits_{j=1}^{13} R_j^l \to 0$ при $\tau \to 0$, $d \to 0$ и $m \to \infty$.

Поскольку по условию теоремы при $m \to \infty$ $\mathbf{u}^{(m)}(\mathbf{x}, t)$ сходятся к $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ в норме $H(\Omega)$ равномерно по $t \in [0, T]$,

$$R_1^l = \sum_{i=0}^{l-1} \tau||\mathbf{u}(t^{i+1}) - \mathbf{u}^{(m)}(t^{i+1})||^2_H \to 0, \text{ при } m \to \infty.$$

Норма $\left|\left|\mathbf{u}_t^{(m)}(\mathbf{x}^{i+1}, t^{i+1})\right|\right|^2 \leq ||\mathbf{u}_t(t^{i+1})||^2$, а $||\mathbf{u}_t||$ ограничена константой, не зависящей от t, следовательно, $R_2^l \to 0$ при $\tau \to 0$.

Согласно (22), $||\mathbf{u}_x^{(m)}(t^{n+1})||^2 \leq C^2||\mathbf{u}_x(t^{n+1})||^2$. Норма $||\mathbf{u}_x||$ равномерно ограничена, следовательно, $R_3^l \to 0$, при $\tau \to 0$.

Далее

$$R_4^l \to 0 \text{ при } F^2(m) \cdot e^{12TF(m)[[\mathbf{v}^0]]}d^2 \to 0,$$

$$R_5^l \to 0 \text{ при } F_1^2(m) \cdot e^{12TF(m)[[\mathbf{v}^0]]}d^2 \to 0,$$

$$R_6^l \to 0 \text{ при } F_1^2(m) \cdot e^{12TF(m)[[\mathbf{v}^0]]}d^2 \to 0.$$

Поскольку $[[\mathbf{v}^n]] \le [[\mathbf{v}^0]]$, а $||\mathbf{u}_x^{(m)}(t^{n+1})||$, как уже было отмечено ранее, равномерно ограничена, $R_7^l \to 0$ при $F^2(m) \cdot e^{12TF(m)[[\mathbf{v}^0]]} d^2 \to 0$. Аналогично

$$R_8^l \to 0 \text{ при } \left(\sqrt{m} M F_1(m) + F^2(m)\right)^2 \cdot e^{12TF(m)[[\mathbf{v}^0]]} d^2 \to 0.$$

Как следует из (7), $\sum\limits_{n=0}^{l-1} [[\mathbf{v}^{n+1} - \mathbf{v}^n]]^2 \le [[\mathbf{v}^0]]^2$. А значит, $R_9^l \to 0$ при $\tau \to 0$.

Далее

$$R_{10}^l \to 0 \text{ при } \tau m M^2 \to 0,$$
$$R_{11}^l \to 0 \text{ при } \tau^2 m M^2 \to 0,$$

поскольку

$$\max_{\substack{t\in[0,T] \\ \mathbf{x}\in\Omega}} \left(u_{i_{tt}}^{(m)}(\mathbf{x}, t)\right)^2 \le mM^2 \max_{t\in[0,T]} ||\mathbf{u}_{tt}^{(m)}||^2 \le mM^2 \max_{t\in[0,T]} ||\mathbf{u}_{tt}||^2;$$

$R_{12}^l \to 0$ при $\tau^2 F^2(m) \to 0$, так как

$$\max_{\substack{t\in[0,T] \\ \mathbf{x}\in\Omega}} \left(u_{i_{tx_k}}^{(m)}(\mathbf{x}, t)\right)^2 \le F^2(m) \max_{t\in[0,T]} ||\mathbf{u}_t^{(m)}||^2 \le F^2(m) \max_{t\in[0,T]} ||\mathbf{u}_t||^2.$$

Аналогично $R_{13}^l \to 0$ при $\tau^2 m^2 M^4 F_1^2(m) \to 0$.

Из вышеизложенного следует, что при выполнении условий теоремы все R_m^l будут стремиться к нулю. Тем самым мы получим равномерное по t стремление к нулю нормы $[[\mathbf{w}^{n+1}]]$, в силу леммы 2 стремление к нулю нормы $||\mathbf{w}^{n+1}||$. Теорема доказана. □

В заключение отметим, что сформулированные в теореме ограничения на шаг τ представляются излишне жесткими. Практика численных расчетов показывает, что из соображений точности шаг τ должен быть порядка $1/m$. Пока такой результат получить не удается в силу отсутствия равномерной оценки на производные решений. Тем не менее мы надеемся в дальнейшем существенно ослабить достаточные условия сходимости, а также обобщить этот результат на случай неортогональных базисных функций, которые используются в реальных расчетах.

Список литературы

[1] Франк А.М., Огородников Е.И. Метод частиц для несжимаемой жидкости // Докл. РАН. 1992. Т. 326, № 6. С. 958–962.

[2] Франк А.М. Дискретные модели несжимаемой жидкости. М.: Физматлит, 2001.

[3] Frank A.M. 3D numerical simulation of regular structure formation in a locally heated falling film // Europ. J. Mech. B/Fluids. 2003. Vol. 22. P. 445–471.

[4] Ладыженская О.А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1961.

Поступила в редакцию 30 октября 2003 г.,
в переработанном виде — 15 декабря 2003 г.