

НЕЯВНАЯ РАЗНОСТНАЯ СХЕМА С ПОГРЕШНОСТЬЮ АППРОКСИМАЦИИ $O(\tau^4, h^8)$ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ*

В. П. ШАПЕЕВ

*Институт теоретической и прикладной механики СО РАН,
Новосибирск, Россия*

e-mail: shapeev@itam.nsc.ru

Implicit two-layer finite-difference scheme for one-dimensional heat conduction equation with 4th order of approximation in time and 8th order in space is constructed and justified.

Введение

Для уравнения теплопроводности рассматривается краевая задача

$$u_t = \lambda u_{xx} + f(t, x), \quad u|_{t=0} = \phi(x), \quad u|_{x=0} = \mu(t), \quad u|_{x=x_M} = \nu(t). \quad (1)$$

Область решения задачи $[0, T] \times [0, x_M]$ покрыта разностной сеткой G с узлами (t_n, x_i) , $t_n = n\tau$, $x_i = ih$, $n = 0, 1, \dots, N$, $i = 0, 1, \dots, M$, где τ и h — шаги по пространственной и временной переменным соответственно. Далее предполагается, что входные данные задачи (функции в краевых условиях и $f(t, x)$) обладают необходимой гладкостью.

Для численного решения задачи (1) известны двух- и трехслойные разностные схемы [1, 2]. Двухслойные схемы обладают тем достоинством, что алгоритмы построения численного решения для всех временных слоев одинаковы, начиная с первого, который вычисляется по начальным данным. Алгоритмы численного решения задачи с применением трехслойных схем сложнее в реализации, чем для двухслойных. Среди двухслойных схем неявные схемы имеют то преимущество перед явными, что они из требования устойчивости не налагают жестких ограничений на соотношение между величинами шагов разностной сетки по временной и пространственной переменным. Известная схема с весами на шеститочечном шаблоне с тремя узлами разностной сетки на нижнем и тремя узлами на верхнем временных слоях является одним из популярных методов численного решения задач для одномерных уравнений теплопроводности. Ввиду того что для вычислений по ней требуется всего лишь трехточечная прогонка, она легко реализуется. Далее для краткости изложения конкретные разностные схемы будем обозначать идентификаторами вида $DS(l, m)$, в которых числа l, m равны порядкам аппроксимации по временной и пространственной переменным соответственно. Среди серии схем с весами содержатся известные схемы Кранка — Николсона $DS(2, 2)$ и повышенного порядка точности $DS(2, 4)$. Здесь предлагается двухслойная неявная схема $DS(4, 8)$ для решения уравнения теплопроводности на шаблоне с пятью узлами с индексом $n + 1$ на верхнем временном слое $t = t_{n+1}$

*Работа выполнена при финансовой поддержке СО РАН (интеграционный проект № 2004-189).

© Институт вычислительных технологий Сибирского отделения Российской академии наук, 2004.

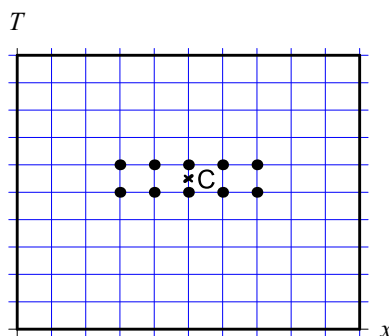


Рис. 1. Шаблон на разностной сетке.

и пятью узлами с индексом n на нижнем слое $t = t_n$ (рис. 1), которая практически столь же легко, как и $DS(2, 4)$, реализуется на ЭВМ. Однако $DS(4, 8)$ имеет преимущества перед $DS(2, 4)$ прежде всего по точности при выборе числа узлов разностной сетки и по порядку сходимости на последовательности сеток при стремлении шагов сетки к нулю.

Хорошо известно, что методы повышенного порядка точности для решения обыкновенных дифференциальных уравнений имеют определенное преимущество перед методами низкого порядка [3]. Также нередко методы повышенной точности для решения краевых задач для уравнений с частными производными имеют определенные преимущества перед методами низкого порядка [4]. Естественно, при наличии особенностей в решении задачи (1) порядок сходимости численного решения по разностной схеме не ожидается равным порядку аппроксимации. Но наличие особенностей в задаче не всегда может быть основанием отвергать схемы повышенного порядка аппроксимации. Есть примеры решения задач с особенностями по схемам повышенного порядка, когда численное решение сходится вне окрестности особенности с высоким порядком [5]. Насколько при этом понижается порядок сходимости, зависит от вида особенности.

Цель данной статьи показать возможности разностных схем высокого порядка при отыскании гладких решений параболических уравнений, т. е. решений, имеющих для рассматриваемых схем необходимое число непрерывных производных.

1. Вывод разностного уравнения для внутренних узлов разностной сетки

Разностное уравнение ищем методом неопределенных коэффициентов путем сравнения его с дифференциальным уравнением (1) на решении последнего. В соотношении

$$u_t - \lambda u_{xx} - f(t, x) - \left(\sum_{j=-2}^2 \frac{a_j}{h^2} u_j^{n+1} + \sum_{j=-2}^2 \frac{b_j}{h^2} u_j^n + g(t, x) \right) = R(\tau^l, h^m), \quad (2)$$

где u_j^n, u_j^{n+1} — значения разностного решения задачи (1) в точках шаблона. Их линейная комбинация с неопределенными коэффициентами a_j, b_j ($j = -2, \dots, 2$) вместе с неоднородным членом $g(t, x)$ представляет собой левую часть искомого разностного уравнения. Если в левую часть (2) подставить некоторое решение уравнения (1), то в общем случае возникает невязка $R(\tau^l, h^m)$. Выделение h в минус второй степени в коэффициентах схемы связано прежде всего с апостериорным анализом результатов, полученных при построении схем вида (2). Числа l и m — младшие степени τ и h , определяющие главную часть в

остаточном члене $R(\tau^l, h^m)$ схемы, — называют порядком аппроксимации по переменным t и x соответственно. Заметим, что переменные t и x неравноправны как в задаче (2), так и на выбранном шаблоне. Поэтому наивысшие порядки аппроксимации отдельно по t и x , достижимые на выбранном шаблоне, будут различными.

На первом этапе выпишем разностное уравнение для однородного уравнения (1). Величины u_j^n, u_j^{n+1} в левой части (2) разлагаем относительно центральной точки шаблона C в отрезки ряда Тейлора, которые содержат дифференцирование по t, x вплоть до порядков $l+1, m+2$ соответственно. Полученное выражение, линейное относительно значений u и ее производных в точке C , обозначим S . Согласно идеологии построения компактных схем, пользуясь дифференциальными следствиями уравнения теплопроводности на достаточно гладком решении задачи (1), младшие производные по t , начиная со второй, и младшие смешанные производные по t, x выражаем через старшие производные по x и исключаем из S . Этот процесс исключения младших производных ведем до тех пор, пока в S имеются производные, содержащие дифференцирование по t ниже порядка $l+1$. В S группируем с первой производной по t и одинаковыми производными по x от $u(t, x)$ и приравниваем к нулю коэффициенты при них последовательно, начиная с производных нулевого порядка. Получается система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) относительно искомых коэффициентов схемы a_j, b_j . В случае выбранного нами шаблона при $l=4$ и $m=8$ таким образом удается “занулить” коэффициенты при оставшейся в S первой производной по t и производных по x вплоть до девятого порядка включительно (в том числе и при производной нулевого порядка). При этом одно уравнение получается зависимым от остальных и для определения десяти величин a_j, b_j получается десять независимых уравнений. Следовательно, устанавливаем, что в случае произвольных τ и h существует единственная схема $DS(4, 8)$ вида (2).

В случае неоднородного уравнения (1) при исключении младших производных по переменной t и смешанных производных из выражения S в нем появляются производные по переменной x от функции $f(t, x)$, которые вместе с ней образуют неоднородный член $g(t, x)$ в формулах схемы.

Изложенный здесь алгоритм построения формул схемы, решение возникающей при этом определяющей ее СЛАУ, различные преобразования и проверка формул осуществлены в системе компьютерной алгебры (СКА) “Математика” [6–10]. Для экономии места опустим промежуточные выкладки, связанные с построением и решением определяющей системы.

После ввода обозначений

$$k = \tau/h^2, \quad (3)$$

$q = k\lambda, q_1 = q\lambda, q_2 = 1/k, r = 20q^2 - 1, r_1 = 13 - 210q^2, p = kr, p_1 = 1/(360k) + k\lambda^2/12, p_2 = \lambda/24, p_3 = 6q, p_4 = -7/(45k) + k\lambda^2/3, p_5 = \lambda/3, p_6 = 3q, p_7 = 41/(60k) + k\lambda^2/2, p_8 = 3\lambda/4, p_9 = 2q, c_1 = -5/(1512p), c_2 = 5/(189p), c_3 = -5/(84p)$ коэффициенты схемы и ее неоднородный член можно записать в виде, удобном для вычислений:

$$a_{-2} = a_2 = p_1 - p_2 + c_1(1 - p_3), \quad b_{-2} = b_2 = -p_1 - p_2 - c_1(1 + p_3),$$

$$a_{-1} = a_1 = -p_4 - p_5 - c_2(1 + p_6), \quad b_{-1} = b_1 = p_4 - p_5 - c_2(-1 + p_6),$$

$$a_0 = p_7 + p_8 - c_3(1 + p_9), \quad b_0 = -p_7 + p_8 - c_3(-1 + p_9), \quad (4)$$

$$g(t, x) = -f + \frac{1}{7560r} (h^2 (120r_1 f^{(0,2)} + h^2 (8(22 - 315q^2) f^{(0,4)} + 3h^2 (4-$$

$$-55 q^2) f^{(0,6)}(t, x) + 5 k^2 (126 \lambda r f^{(1,2)} - 2 h^2 \lambda r_1 f^{(1,4)} - 63 r f^{(2,0)} + h^2 r_1 f^{(2,2)})))).$$

Здесь $f^{(i,j)}$ обозначает смешанную производную порядков i по t и j по x от функции $f(t, x)$. Отметим, что неоднородный член $g(t, x)$ вычисляется в центральной точке шаблона, т. е. на промежуточном временном слое ($t = \tau(n + 1/2)$). Для вычисления $g(t, x)$ можно использовать разностную аппроксимацию с точностью $O(\tau^4, h^8)$. В целях экономии места здесь ее не приводим. Заметим только, что ввиду разнообразия производных от $f(t, x)$ в $g(t, x)$ для этого пришлось использовать все узлы шаблона схемы и семь узлов сетки на промежуточном временном слое, включая точку C .

В разностное уравнение величины τ и h входят в качестве параметров. Для конкретных численных значений τ и h удастся построить схемы более высокого порядка аппроксимации, которые пока не исследованы.

На найденном решении системы, определяющей коэффициенты разностного уравнения, с помощью СКА получено выражение остаточного члена $R(\tau^4, h^8)$. В нем имеются слагаемые с порядками малости $O(\tau^4)$, $O(\tau^3 h^2)$, $O(\tau^2 h^4)$, $O(\tau h^6)$, $O(h^8)$ относительно малых величин τ и h . Если между шагами сетки имеет место соотношение (3), то он при $\lambda = 1$ имеет вид

$$R(\tau^4, h^8) = \frac{h^8 (-316 + 15435 k^2 - 158760 k^4 + 529200 k^6) u_x^X(t, x)}{19051200 p_4}, \quad (5)$$

где $u_x^X(t, x)$ обозначает десятую частную производную по x от решения уравнения (1) в некоторой точке в области шаблона.

Правильность вывода формул можно проверить различными способами. Один из простых способов заключается в том, что берется какое-либо точное решение уравнения теплопроводности, которое в данном случае не является полиномом по переменной x ниже десятого порядка и по t ниже пятого порядка. Далее значение решения в любом из узлов шаблона выражают через значения точного решения в других девяти узлах (2). Наблюдая скорость сходимости на последовательности пар значений (τ, h) при их стремлении к нулю, устанавливаем скорость сходимости к нулю остаточного члена схемы. Такие эксперименты были проделаны в данной работе (при различных законах стремления τ и h к нулю), и установлено, что указанные здесь различные слагаемые присутствуют в остаточном члене. В частности, при стремлении τ и h к нулю по закону (3) при $k = \text{const}$ величина $R(\tau, h)$ стремится к нулю как восьмая степень h .

Интересно отметить, что можно найти корни стоящего в числителе $R(\tau, h)$ (5) полинома третьей степени относительно величины k^2 . Оказывается, что у этого полинома два корня комплексные и один вещественный, положительный. Отсюда устанавливаем, что в случае соотношения между шагами сетки (3) с $k = 0.16605794609065333\dots$ остаточный член найденной схемы становится величиной порядка $O(h^{10})$, что подтверждается численными экспериментами.

2. Доопределение системы разностных уравнений

Решение на каждом временном слое t_{n+1} , $n = 1, 2, \dots, N$, находится через значения решения на предыдущем слое t_n , начиная с нулевого слоя, где значения искомого решения берутся из начальных данных задачи (1). Если на каждом временном слое $n + 1$ для нахождения разностного решения u_i^{n+1} во внутренних узлах сетки с индексами $i = 2, \dots, M - 2$ по оси x использовать найденные формулы схемы (2) на десятиточечном шаблоне (узел шаблона с индексом $j = 0$ последовательно совмещается с узлами номер i), то получается

СЛАУ с пятидиагональной матрицей. При этом очевидно, что в случае решения задачи Дирихле (1) не хватает еще двух уравнений для околограничных узлов с индексами $i = 1$ и $i = M - 1$. Для доопределения СЛАУ имеется много возможностей. При выборе конкретных вариантов здесь учитывались два требования. Во-первых, чтобы дополнительные два соотношения, которые следует добавить к уравнениям схемы $DS(4, 8)$, по возможности меньше снижали порядок аппроксимации задачи (1). А, во-вторых (с точки зрения простоты реализации), чтобы матрица СЛАУ после добавления новых уравнений оставалась пятидиагональной. В данной работе были реализованы и апробированы три варианта. Первым испытан вариант, когда в качестве недостающих уравнений берутся формулы известной схемы $DS(2, 4)$ на шеститочечном шаблоне (с тремя узлами на слое n и тремя на слое $n + 1$), записанные для околограничных узлов $i = 1, i = M - 1$. Для краткости изложения схему $DS(4, 8)$, дополненную в околограничных точках схемой $DS(2, 4)$, обозначим $DS(4, 8) \cup DS(2, 4)$.

В качестве второго варианта записи разностных уравнений для околограничных узлов $i = 1$ и $i = M - 1$ была рассмотрена схема $DS(3, 6)$ на десятиточечном ступенчатом шаблоне с тремя узлами на верхнем слое и семью узлами на нижнем слое. На левом краю такого нерегулярного шаблона на слое $n + 1$ берутся узлы с номерами $i = 0, 1, 2$, на слое n узлы с $i = 0, 1, \dots, 6$. То есть “ступенька” направлена внутрь области. Формула для узла $i = 1$ ищется в виде

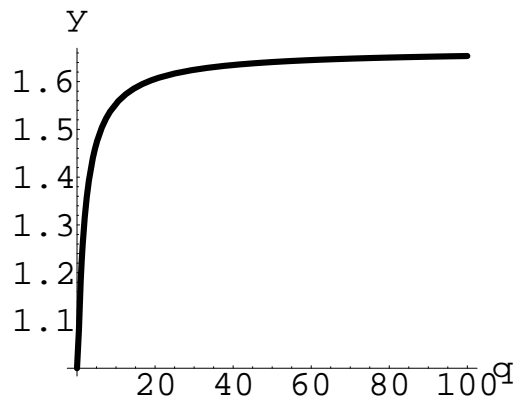
$$u_t - u_{xx} - \left(\sum_{i=0}^2 \frac{a_i}{h^2} u_i^{n+1} + \sum_{i=0}^6 \frac{b_i}{h^2} u_i^n \right) = R(\tau^l, h^m) \quad (6)$$

по алгоритму, изложенному выше. Формула $DS(3, 6)$ также найдена как единственное решение СЛАУ относительно десяти коэффициентов в (6). Установлено, что остаточный член этой схемы имеет третий порядок малости по параметру τ и шестой порядок по h . Аналогично формуле (6) для записи уравнения в околограничном узле номер $i = M - 1$ используется ступенчатый десятиточечный шаблон со ступенькой, направленной также внутрь области.

Существуют и другие варианты реализации краевых условий для $DS(4, 8)$, выполняющие требования, сформулированные выше. В данной работе реализованы были только схемы $DS(4, 8) \cup DS(2, 4)$ и $DS(4, 8) \cup DS(3, 6)$ по формулам (2), (4), (6). Попутно отметим, что разложение в ряд Тейлора величин u_j^n, u_j^{n+1} в (2) в любой точке шаблона, отличной от центральной точки C , если при построении остаточного члена схемы учитываются все дифференциальные следствия уравнения (1), не дает уравнений, не зависящих от построенных путем разложения этих величин в ряд в точке C . Здесь не будем останавливаться на доказательстве этого факта, который легко установить.

3. Результаты численных экспериментов

При решении задач по приведенным здесь схемам с точки зрения выбора конкретных значений шагов сетки (и, возможно, выбора метода решения возникшей задачи линейной алгебры) важно рассмотреть поведение коэффициентов разностных уравнений a_j ($j = -2, -1, \dots, 2$) в зависимости от параметров τ, h . Здесь приведем результат, по которому косвенно можно сделать некоторые предварительные выводы. Из (4) видно, что коэффициенты имеют особенность при $k^2 \lambda^2 = 0.05$ и ведут себя монотонно при больших значениях $k = \tau/h^2$. Малые k неинтересны с точки зрения скорости решения задач. А средние и

Рис. 2. График $y(q) = 2(|a_1| + |a_2|)/|a_0|$.

большие k позволяют тратить меньше времени на решение задач и интересны с точки зрения применения неявных методов. Это именно та область значений параметров (τ, h) , где неявные разностные методы имеют преимущество перед явными. Приведем здесь только интересный для дальнейшего изложения график функции $y(q) = 2(|a_1| + |a_2|)/|a_0|$ (при $\lambda = 1$) (рис. 2), которая, начиная примерно с $k\lambda = 0.35$, монотонно возрастает и при больших k стремится к постоянному значению ≈ 1.665 . На рисунке исключены значения аргумента в окрестности $k\lambda = 0$ вместе с особой точкой. Из графика видно, что матрица схемы $DS(4, 8)$ при больших k не обладает диагональным преобладанием. Поэтому трудно предсказать, как будет вести себя монотонное исключение и решение СЛАУ по Гауссу при использовании схемы $DS(4, 8)$. Здесь применялись два метода: монотонное исключение по Гауссу (пятидиагональная гауссовская прогонка) и ортогональная прогонка по методу отражений, учитывающему разреженность матрицы. В результате многих экспериментов выяснилось, что оба метода дают одну и ту же картину сходимости. Однако некоторое отличие заключалось в том, что вычисления с ортогональной прогонкой на последовательности сеток позволяли на последних этапах мельчения получать результат с меньшей погрешностью, чем при использовании исключения по Гауссу. Очевидно, что ортогональный метод имел лучше обусловленные матрицы. Для реализации схемы $DS(2, 4)$ применялась монотонная прогонка для системы с трехдиагональной матрицей (наиболее быстрый алгоритм для такой СЛАУ). В качестве тестов брались точные решения вида $e^{-t} \sin(x)$, $e^t e^x$, $e^{9t} e^{3x}$ и др. Различие состояло в том, какую минимальную по значению абсолютную погрешность можно достичь на последовательности сеток для того или иного теста. Это различие в общем случае должно быть, поскольку коэффициент остаточного члена схемы зависит от производных решения.

Здесь приведена таблица численных экспериментов для однородного уравнения с коэффициентом температуропроводности $\lambda = 1$ и тестовым решением $e^t e^x$. В ней выписаны результаты экспериментов для схем $DS(2, 4)$, $DS(4, 8) \cup DS(2, 4)$ и $DS(4, 8) \cup DS(3, 6)$, когда между шагами сетки имеет место соотношение $\tau = kh^2$, $k = 1.25$. Погрешность решения подсчитывалась в норме $\|\cdot\|_C$ путем сравнения численного решения с точным. Видно, что существуют важные (с точки зрения численного решения задачи (1)) интервалы значений τ и h , в которых решение по схеме $DS(2, 4)$ сходится с четвертым порядком по h , по схеме $DS(4, 8) \cup DS(2, 4)$ — с шестым порядком, а по схеме $DS(4, 8) \cup DS(3, 6)$ — с восьмым порядком. Правда, для наблюдения последнего факта в некоторых случаях может потребоваться повышенная разрядность вычислений, поскольку на нескольких те-

Численные эксперименты по сходимости решения на последовательности сеток

		$DS(2, 4)$		$DS(4, 8) \cup DS(2, 4)$		$DS(4, 8) \cup DS(3, 6)$	
i	h_i	$\ R_i\ $	$\frac{\ R_{i-1}\ }{\ R_i\ }$	$\ R_i\ $	$\frac{\ R_{i-1}\ }{\ R_i\ }$	$\ R_i\ $	$\frac{\ R_{i-1}\ }{\ R_i\ }$
1	0.2	$1.040 \cdot 10^{-4}$	—	$3.869 \cdot 10^{-5}$	—	$1.188 \cdot 10^{-6}$	—
2	0.1	$6.526 \cdot 10^{-6}$	15.9	$7.068 \cdot 10^{-7}$	54.7	$4.434 \cdot 10^{-9}$	267.9
3	0.05	$4.111 \cdot 10^{-7}$	15.9	$1.206 \cdot 10^{-8}$	58.6	$1.958 \cdot 10^{-11}$	226.5
4	0.025	$2.569 \cdot 10^{-8}$	16.0	$1.973 \cdot 10^{-10}$	61.1	$4.956 \cdot 10^{-13}$	—
5	0.0125	$1.605 \cdot 10^{-9}$	16.0	$3.124 \cdot 10^{-12}$	63.2	—	—
6	0.00625	$9.828 \cdot 10^{-11}$	16.3	—	—	—	—
7	0.003125	$5.912 \cdot 10^{-12}$	16.6	—	—	—	—

стах с гладкими точными решениями со значениями порядка единицы уже при $h \sim 0.02$ ($\tau = kh^2$) было $\|R(\tau, h)\| < 10^{-15}$.

О сходимости численного решения эллиптических и параболических задач с порядком более высоким, чем порядок аппроксимации краевых условий, при использовании схемы повышенного порядка известно уже значительно давно [11]. И это нередко наблюдается в расчетах [6, 9].

Отметим, что были также проведены эксперименты на сходимость численного решения, когда между шагами сетки имеет место соотношение $\tau = ch$, $c = \text{const}$. Например, на последовательности сеток $h = \{0.2, 0.1, 0.05, 0.025, 0.0125, 0.00625\}$ с $c = 1$ на тесте с $u(t, x) = e^t e^x$ по схеме $DS(4, 8) \cup DS(2, 4)$ получилась последовательность соответствующих величин погрешностей $R = \{6.908 \cdot 10^{-4}, 5.066 \cdot 10^{-5}, 3.488 \cdot 10^{-6}, 2.291 \cdot 10^{-7}, 1.468 \cdot 10^{-8}, 9.310 \cdot 10^{-10}\}$. Это отвечает четвертому порядку аппроксимации по переменной t и четвертому порядку сходимости. А схема $DS(4, 8) \cup DS(3, 6)$ дает сходимость только при небольших c и уже при значении $c = 1$ расходится на указанной выше последовательности значений h , хотя для доопределения СЛАУ в ней использовались уравнения схемы $DS(3, 6)$, имеющие большее диагональное преобладание, чем в схеме $DS(2, 4)$. Последний факт легко установить. Можно предположить, что в данном случае более сильное диагональное преобладание двух уравнений в СЛАУ для схемы $DS(4, 8) \cup DS(3, 6)$ по отношению к двум соответствующим уравнениям в СЛАУ для $DS(4, 8) \cup DS(2, 4)$ при тождественном совпадении всех остальных уравнений, которые не имеют диагонального преобладания, не дает лучшей обусловленности первой по сравнению со второй.

Отметим также, что для построения решения по всем использованным здесь схемам матрицу СЛАУ, ввиду того что она постоянная, достаточно привести к треугольному виду только один раз. Тогда на каждом временном слое остается совершать по ней только обратный ход (подъем) по Гауссу. В случае трехдиагональной прогонки треугольная матрица обратного хода имеет две диагонали и при обратном ходе на каждую расчетную точку требуются две арифметические операции. В случае пятидиагональной матрицы треугольная матрица имеет либо три диагонали (при исключении по Гауссу), либо пять диагоналей (при использовании ортогональной матрицы). Поэтому при обратном ходе на каждую расчетную точку требуется не более восьми арифметических операций. При числе временных слоев $N \gg 1$ разница по времени построения треугольной матрицы в рассматриваемых случаях незначительна по сравнению с временем решения задачи. При мельчании сетки вдвое время счета по схеме $DS(4, 8) \cup DS(3, 6)$ по сравнению со схемой $DS(2, 4)$ возрастает почти вдвое (точность почти в 16 раз!). Поэтому для получения результатов в четвертой строчке таблицы различие во времени чуть больше, чем в восемь раз. Но при счете по схеме

$DS(2, 4)$ для достижения точности, которая уже достигнута по схеме $DS(4, 8) \cup DS(3, 6)$, потребуется восьмикратное мельчение сетки по переменной x . Число временных слоев при этом увеличивается в 64 раза. Таким образом, для достижения высокой точности по схеме $DS(2, 4)$ требуется больше времени, чем по схеме $DS(4, 8) \cup DS(3, 6)$. Это преимущество схемы $DS(4, 8) \cup DS(3, 6)$ (аналогично и схемы $DS(4, 8) \cup DS(2, 4)$) перед схемой низкого порядка увеличивается с ростом требуемой точности и, естественно, имеет место и при других зависимостях между τ и h .

Кроме того, результат в четвертой строчке достигнут при $h = 0.025$ и общем числе расчетных точек в области 51 200. При таком количестве расчетных точек вопрос о виде зависимости между τ и h с точки зрения временных затрат для получения результата на ЭВМ теряет остроту. А при меньшей требуемой точности (меньшем числе расчетных точек) он становится еще менее актуальным.

Автор считает своим долгом выразить благодарность А.В. Шапееву за консультации по СКА [10] и предоставленную им программу по методу отражений решения СЛАУ, в которой существенно учтена разреженность матрицы.

Список литературы

- [1] САМАРСКИЙ А.А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1998.
- [2] КАЛИТКИН Н.Н. Численные методы. М.: Наука, 1978.
- [3] БАХВАЛОВ Н.С., ЖИДКОВ Н.П., КОБЕЛЬКОВ Г.М. Численные методы. М.: Наука, 1987.
- [4] МАРЧУК Г.И., ШАЙДУРОВ В.В. Повышение точности разностных схем. М.: Наука, 1979.
- [5] ШАПЕЕВ А.В., ШАПЕЕВ В.П. Решение эллиптических задач с особенностями по схемам высокого порядка // Проблемы теоретической и прикладной математики: Тр. 32-й Регион. молодежной конф. Екатеринбург: УрО РАН, 2001. С. 62–66.
- [6] ВАЛИУЛЛИН А.Н., ГАНЖА В.Г., ИЛЬИН В.П. и др. Задача автоматического построения и исследования на ЭВМ разностных схем в аналитическом виде // Докл. АН СССР. 1984. Т. 275, № 3. С. 528–532.
- [7] SHARPEEV A.V., SHARPEEV V.P. High order approximation schemes // Proc. of the 3rd Europ. Conf. on Numerical Mathematics and Advanced Appl., Finland, July 26–30, 1999.
- [8] ШАПЕЕВ А.В., ШАПЕЕВ В.П. Разностные схемы повышенной точности для решения эллиптических уравнений в области с криволинейной границей // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2000. Т. 40, № 2. С. 223–232.
- [9] ШАПЕЕВ А.В., ШАПЕЕВ В.П. Решение эллиптических задач с особенностями по схемам высокого порядка // Проблемы теоретической и прикладной математики: Тр. 32-й Регион. молодежной конф. Екатеринбург: УрО РАН, 2001. С. 62–66.
- [10] SHARPEEV A.V. Application of computer algebra systems to construct high-order difference schemes // 6th IMACS Intern. Conf. on Appl. of Computer Algebra. Abstracts. St.Petersburg, Russia. June, 25–28, 2000.
- [11] ВАЗОВ В., ФОРСАЙТ ДЖ. Разностные методы решения дифференциальных уравнений в частных производных. М.: Иностран. лит., 1963. 482 с.