**Вычислительные технологии** **Том 13, № 3, 2008**

# О принципе напряжений Коши

Б. Г. Кузнецов
*Институт вычислительных технологий СО РАН,*
*Новосибирск, Россия*

Necessity of a re-formulation of the Cauchy principle for stresses followed by a re-formulation of the conservation laws (momentum and energy) is discussed. New equations governing viscous gas motion and incompressible fluid motion, which differ from the Navier—Stokes equations are derived.

## 1. Принцип напряжений Коши

При изучении движения жидкости или газа в рамках модели сплошной среды главным является вопрос о взаимодействии различных частей объема газа. Обоснованные модели стало возможно строить после того, как Коши в 1822 году сформулировал свой принцип напряжений [1].

Этот принцип постулируется и в настоящее время: "Для любой замкнутой поверхности $\partial Q$ существует распределение вектора напряжений $\boldsymbol{\sigma}_\mathbf{n}$ с результирующей и моментом, эквивалентными полю сил, действующих на сплошную среду, заключенную внутри $\partial Q$, со стороны среды, расположенной вне этой поверхности" (Трусделл, [2, с. 20]). Предполагается, что в любой момент времени $t$ вектор $\boldsymbol{\sigma}_\mathbf{n}$ зависит только от положения и ориентации элемента $ds$ поверхности $\partial Q$.

При феноменологическом выводе законов сохранения в сплошной среде этот принцип является основным. Так, закон сохранения импульса имеет следующий вид:

$$\frac{d}{dt}\int\limits_Q \rho\mathbf{u}\,dv = \int\limits_Q \rho\mathbf{f}dv + \int\limits_{\partial Q} \boldsymbol{\sigma}_\mathbf{n} ds. \tag{1.1}$$

Здесь $Q$ — подвижный объем, точки которого движутся со скоростью $\mathbf{u}$ среды; $\rho$ — плотность; $\mathbf{f}$ — внешние силы, отнесенные к единице массы.

Тензор напряжений $\boldsymbol{\sigma}$ обычно представляется в виде: $\boldsymbol{\sigma}(t,\mathbf{x}) = \boldsymbol{\tau}(t,\mathbf{x}) - p(t,\mathbf{x})\,\mathbf{I}$, где $\boldsymbol{\tau}$ — тензор вязких напряжений, $p$ — давление, $\mathbf{I}$ — единичный тензор.

До недавнего времени тензор вязких напряжений $\boldsymbol{\tau}(t,\mathbf{x})$ определялся через кинематические характеристики движения газа конечными (недифференциальными) соотношениями, инвариантными относительно произвольных точечных преобразований координат вида $\mathbf{x}' = \mathbf{x}'(t,\mathbf{x})$ при условии, что якобиан $\dfrac{\partial(x')}{\partial(x)}$ отличен от нуля и бесконечности. Назовем для удобства такой газ классическим. Подчеркнем, что требования инвариантности весьма существенны: при их невыполнении говорить о газе лишено смысла.

Для классического газа можно принять, например, что

$$\boldsymbol{\tau} = \lambda\,\mathbf{D} - \zeta\,\mathrm{div}\,\mathbf{u}\,\mathbf{I}, \tag{1.2}$$

где $\lambda$ — коэффициент вязкости, $\mathbf{D}$ — тензор скоростей деформации $\mathbf{I}$ — единичный тензор.

Однако на этом пути не удается построить гиперболическую модель для вязкого газа, ибо из принципа напряжений Коши и соотношения (1.2) следуют известные уравнения Навье—Стокса, так называемая параболическая модель движения, которая при $\tau \neq 0$ дает неограниченную скорость распространения возмущений (СРВ).

В связи с этим для построения гиперболической модели с конечной СРВ в литературе широко используется прием, когда связь между напряжениями и деформациями задается вместо (1.2) некоторым дифференциальным уравнением (см., например, [3, с. 414]):

$$\frac{\partial \boldsymbol{\tau}}{\partial t} - 2p\mathbf{S} = -\frac{p}{\mu}\,\boldsymbol{\tau} \quad (\mu = \lambda/2), \tag{1.3}$$

где

$$S_{ik} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right) - \frac{1}{3}\,\delta_{ik}\,\frac{\partial u_l}{\partial x_l}.$$

Перепишем это уравнение в виде

$$\frac{\partial \boldsymbol{\tau}(t,\mathbf{x})}{\partial t} = \boldsymbol{\alpha}(t,\mathbf{x}), \tag{1.4}$$

где тензор $\boldsymbol{\alpha}(t,\mathbf{x})$ определяется очевидным образом. Напомним, что при этом не следует забывать о требованиях инвариантности, согласно которым уравнение (1.4) в переменных $t, \mathbf{x'}$ должно иметь вид

$$\frac{\partial \boldsymbol{\tau'}(t,\mathbf{x'})}{\partial t} = \boldsymbol{\alpha}'(t,\mathbf{x'}).$$

Нетрудно убедиться, что в данном случае требования инвариантности не выполнены. Для этого достаточно рассмотреть преобразование Галилея: $\mathbf{x'} = \mathbf{x} - \mathbf{V}\,t$ (вектор $\mathbf{x}$ задан в ортогональных декартовых координатах, а $\mathbf{V}$ — постоянный ненулевой вектор). Действительно, в силу этого преобразования: $\boldsymbol{\tau'}(t,\mathbf{x}') = \boldsymbol{\tau}(t,\mathbf{x})$; $\boldsymbol{\alpha}'(t,\mathbf{x}') = \boldsymbol{\alpha}(t,\mathbf{x})$. Но

$$\frac{\partial \boldsymbol{\tau'}(t,\mathbf{x'})}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\,\boldsymbol{\tau}(t,\mathbf{x}) + \mathbf{V}\cdot\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\,\boldsymbol{\tau}(t,\mathbf{x}).$$

Величина $\mathbf{V}\cdot\dfrac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\,\boldsymbol{\tau}(t,\mathbf{x})$, вообще говоря, отлична от нуля, что и доказывает неинвариантность уравнения (1.4).

Таким образом, инвариантными свойствами обладает, по-видимому, только классический газ, и, следовательно, решить проблему бесконечной СРВ на этом пути также не удастся. Но тогда остается единственно возможный путь: рассматривать только классический газ и обратить внимание на формулировку принципа Коши.

## 2. Новая формулировка принципа напряжений

Заметим, что в уравнении (1.1), следующем из принципа Коши, левая и правая части относятся к одному и тому же моменту времени. Иными словами, априори предполагается, что сигналы распространяются мгновенно. Рассмотрим более подробно реальный механизм передачи информации.

Из кинетической теории известно, что скорость газа и напряжения находятся с помощью функции распределения скоростей, а сама функция распределения определяется на ненулевом фазовом объеме, т. е. эти величины формируются на $\partial Q$ движением молекул в некотором слое, содержащем $\partial Q$. В свою очередь информация о состоянии движения молекул в этом слое передается в $Q$ с обязательной задержкой по времени, равной величине $\theta(t, \mathbf{x})$ — среднему времени свободного (без столкновений) движения молекул. Скорость же передачи информации равна средней скорости движения молекул $c$, где $c^2 = \xi/\theta$ ($\xi$ — коэффициент диффузии, см. [4, с. 270]). Отсюда следует, что влияние напряжений Коши, возникшее к моменту времени $t$ на $\partial Q$, может сказаться на движении молекул внутри $Q$, не ранее, чем в момент $t_* = t + \theta(t, \mathbf{x})$.

Итак, мы выяснили, что информация о напряжениях передается обязательно с запаздыванием, т. е. левая и правая части уравнения (1.1) должны быть отнесены к разным моментам времени (см. [5]) и принцип напряжений Коши нужно сформулировать несколько иначе:

"Для любой замкнутой поверхности $\partial Q$ в любой момент времени $t$ существует распределение вектора напряжений $\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{n}}$, с результирующей и моментом, эквивалентными полю сил, действующих в момент $t + \theta(t, \mathbf{x})$ на сплошную среду, заключенную внутри $\partial Q$, со стороны среды, лежащей вне этой поверхности".

## 3. Уравнения движения вязкого газа

Для простоты ограничимся исследованием движения одноатомного газа, т. е. когда в соотношении (1.2) $\zeta = 0$. Получить уравнения для многоатомного газа не представляет затруднений.

Выпишем теперь, в соответствии с новой формулировкой принципа напряжений, законы сохранения импульса и энергии в сплошной среде. Условимся величины, относящиеся к моменту времени $t + \theta$, помечать индексом "$*$".

Закон сохранения импульса в новой формулировке примет вид

$$\frac{d}{dt} \int\limits_{Q_*} \rho_* \mathbf{u}_* \, dv = \int\limits_{Q_*} \rho_* \mathbf{f}_* \, dv + \int\limits_{\partial Q} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \, ds.$$

Здесь $\boldsymbol{\sigma}$ — тензор напряжений, $\rho_* = \rho(t_*, \mathbf{x}_*)$, $\mathbf{u}_* = \mathbf{u}(t_*, \mathbf{x}_*)$. Вектор $\mathbf{x}_*(t_*, \mathbf{x})$ задает в момент $t_* = t + \theta$ положение подвижной точки, занимавшей в момент $t$ положение, задаваемое вектором $\mathbf{x}$. Учитывая, что $Q_*$ — подвижный объем и $\int\limits_{Q_*} \rho_* \, dv = \int\limits_{Q} \rho \, dv$, дифференциальное уравнение сохранения импульса можно записать в виде

$$\rho \frac{d\mathbf{u}_*}{dt} = \rho \mathbf{f}_* + \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}. \tag{3.1}$$

Здесь с точностью до $o(\theta)$ $\mathbf{u}_* = \mathbf{u} + \theta \dfrac{d\mathbf{u}}{dt}$. Тензор напряжений задается формулой $\boldsymbol{\sigma} = \lambda \mathbf{D} - p\mathbf{I}$, где $\lambda$ — коэффициент вязкости, $\mathbf{D}$ — тензор скоростей деформации, $\mathbf{I}$ — единичный тензор. В результате уравнение (3.1) с точностью до членов порядка $\theta$ включительно примет следующий вид:

$$\rho \frac{d}{dt} \left( \mathbf{u} + \theta \frac{d\mathbf{u}}{dt} \right) + \nabla p = \rho \mathbf{f}_* + \nabla(\lambda \mathbf{D}), \tag{3.2}$$

где $\nabla \equiv \mathrm{grad}$ — оператор <градиент> по пространственным переменным. Из (3.2) вытекает следствие

$$\rho\frac{d}{dt}\left(\frac{u^2}{2}+\theta\frac{d}{dt}\frac{u^2}{2}\right)+\lambda\,\mathbf{D}:\mathbf{D}-p\,\mathrm{div}\,\mathbf{u}-\rho\,\theta\frac{d\mathbf{u}}{dt}\cdot\frac{d\mathbf{u}}{dt}=\rho\mathbf{f}_*\cdot\mathbf{u}+\nabla(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{u}). \tag{3.3}$$

Применяя далее те же рассуждения, что и при выводе уравнения сохранения импульса для полной энергии $\rho(E+\dfrac{u^2}{2})$, используя следствие (3.3), найдем уравнение сохранения энергии:

$$\rho\frac{d}{dt}\left(E+\theta\frac{dE}{dt}\right)=\lambda\,\mathbf{D}:\mathbf{D}-p\,\mathrm{div}\,\mathbf{u}-\rho\,\theta\frac{d\mathbf{u}}{dt}\cdot\frac{d\mathbf{u}}{dt}+\nabla\left(c_v\lambda\nabla T\right). \tag{3.4}$$

Здесь $c_v$ — теплоемкость при постоянном объеме, $T$ — абсолютная температура.

Добавляя к уравнениям (3.2), (3.4) уравнение неразрывности:

$$\frac{d\rho}{dt}+\rho\,\mathrm{div}\,\mathbf{u}=0,$$

получим полную систему уравнений движения вязкого газа с учетом задержки в передаче информации. Обратим внимание на то, что в (3.2) и (3.4) фигурирует один и тот же коэффициент $\lambda$, для этого мы воспользовались информацией о коэффициентах вязкости и теплопроводности, изложенной в книге [4, с. 270]. Остается задать функции $p(\rho,T)$, $E(\rho,T)$, $\lambda(\rho,T)$ и $\theta(\rho,T)$. При этом подразумевается, что функции $p(\rho,T)$ и $E(\rho,T)$ заданы так, что первый закон термодинамики имеет место. На определении вида функции $\theta(\rho,T)$ остановимся немного ниже.

Теперь покажем, что в отличие от уравнений Навье—Стокса здесь скорость распространения возмущений (СРВ) при $\theta>0$ конечна. Для этого достаточно рассмотреть характеристики уравнений движения в одномерном случае. Уравнения при этом имеют вид

$$\frac{d\rho}{dt}+\rho\,\frac{\partial u}{\partial x}=0,\quad \frac{d}{dt}=\frac{\partial}{\partial t}+u\,\frac{\partial}{\partial x};$$

$$\rho\,\frac{d}{dt}(u+\theta\,\frac{du}{dt})+\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_T\frac{\partial \rho}{\partial x}+\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_\rho\frac{\partial T}{\partial x}=\rho\,X_*+\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda\,\frac{\partial u}{\partial x}\right);$$

$$\rho\,\frac{d}{dt}(E+\theta\,\frac{dE}{dt})=\lambda\,\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2-p\,\frac{\partial u}{\partial x}-\rho\,\theta\,\left(\frac{du}{dt}\right)^2+\frac{\partial}{\partial x}\left(c_v\,\lambda\,\frac{\partial T}{\partial x}\right). \tag{3.5}$$

Под характеристической поверхностью $\omega(\mathbf{x})=\mathrm{const}$ системы квазилинейных уравнений $q$-го порядка понимается [6, с. 484] такая поверхность, на которой данные Коши и уравнения не позволяют однозначно определить производные от функций $q$-го порядка по нормали к поверхности. Однако в нашем случае стандартная процедура вывода уравнений характеристик не работает, поскольку в системе (3.5) есть уравнения и первого, и второго порядков. В связи с этим рассмотрим сначала простейший случай совершенного газа, когда $E=E(T)$, т. е. функции $u(t,x), T(t,x)$ имеют в уравнениях вторые производные, а $\rho(t,x)$ — только первые. Понятно, что здесь в качестве данных Коши на поверхности $\omega(t,x)=\mathrm{const}$ нужно задать только $\rho, u, \partial u/\partial n, T, \partial T/\partial n$. Обратим внимание на то, что $\partial\rho/\partial n$ не задается. Далее, с помощью уравнений (3.5) и данных Коши, следует найти $\dfrac{\partial\rho}{\partial n}, \dfrac{\partial^2 u}{(\partial n)^2}, \dfrac{\partial^2 T}{(\partial n)^2}$ на рассматриваемой поверхности. Условие, обеспечивающее неоднозначность их определения, имеет вид

$$\begin{vmatrix} \dfrac{d\omega}{dt}, & 0, & 0 \\ \omega_x \left(\dfrac{\partial p}{\partial\rho}\right)_T, & \rho\,\theta\left(\dfrac{d\omega}{dt}\right)^2 - \lambda\,{\omega_x}^2, & 0 \\ 0, & 0, & c_v\left[\rho\,\theta\left(\dfrac{d\omega}{dt}\right)^2 - \lambda\,{\omega_x}^2\right] \end{vmatrix} = 0,$$

т. е. характеристики задаются уравнениями

$$\frac{d\,\omega}{dt} = 0, \quad \rho\,\theta\left(\frac{d\,\omega}{dt}\right)^2 = \lambda\,{\omega_x}^2. \tag{3.6}$$

Заметим, что в общем случае, когда $\left(\dfrac{\partial E}{\partial\rho}\right)_T \neq 0$, приведенные рассуждения не правомерны, поскольку функция $\rho(t,x)$ в системе (3.5) также будет иметь вторые производные. В связи с этим здесь для определения характеристик можно предложить следующий прием: продифференцируем первое уравнение системы (3.5), например, по $t$; в результате полученная продолженная система будет системой второго порядка, для которой можно поставить соответствующую задачу Коши и получить условие, обеспечивающее неоднозначность определения $\dfrac{\partial^2\rho}{(\partial n)^2}, \dfrac{\partial^2 u}{(\partial n)^2}$ и $\dfrac{\partial^2 T}{(\partial n)^2}$, которое имеет вид

$$\begin{vmatrix} \omega_t\,\dfrac{d\omega}{dt}, & \rho\,\omega_t\,\omega_x, & 0 \\ 0, & \Psi, & 0 \\ \left(\dfrac{\partial E}{\partial\rho}\right)_T \Psi, & 0, & \left(\dfrac{\partial E}{\partial T}\right)_\rho \Psi \end{vmatrix} = 0,$$

где $\Psi = \rho\,\theta\left(\dfrac{d\omega}{dt}\right)^2 - \lambda\,{\omega_x}^2$.

Нетрудно убедиться, что отсюда следуют те же уравнения характеристик, что и в (3.6). Подчеркнем, что характеристику $\omega_t = 0$ необходимо исключить, так как она является результатом дифференцирования по $t$ первого уравнения системы (3.5) и к исходной системе отношения не имеет. Таким же образом можно получить уравнения для характеристических поверхностей в многомерном случае.

## 4. Постановка задач

Модифицированная система уравнений движения вязкого газа требует постановки задач, отличной от постановки задач как для модели Эйлера, так и для модели Навье—Стокса. Ниже, ради простоты, ограничимся задачами для одномерного движения совершенного газа. Оговоримся сразу, что трудные вопросы физической реализации поставленных математических условий остаются в стороне.

Уравнения одномерного движения совершенного вязкого газа при отсутствии внешних сил имеют вид

$$\frac{d\rho}{dt}+\rho\,\frac{\partial u}{\partial x}=0,\quad \frac{d}{dt}=\frac{\partial}{\partial t}+u\,\frac{\partial}{\partial x},\quad \rho\frac{d}{dt}\left(u+\theta\frac{du}{dt}\right)+$$
$$+\frac{\partial}{\partial x}(\rho RT)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda\,\frac{\partial u}{\partial x}\right),\quad \rho\, c_v\frac{d}{dt}(T+\theta\frac{dT}{dt})+\rho\, RT\frac{\partial u}{\partial x}=$$
$$=\lambda\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2-\rho\theta\left(\frac{du}{dt}\right)^2+\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda\, c_v\frac{\partial T}{\partial x}\right). \tag{4.1}$$

Здесь $T$ — температура, $R=c_p-c_v>0$ — газовая постоянная, $c_p$, $c_v$ — удельные теплоемкости. Принимается, что $c_p$, $c_v$ — постоянные. Заметим, что при $\lambda=0$, $\theta=0$ уравнения (4.1) переходят в уравнения Эйлера, а при $\lambda>0$, $\theta=0$ — в уравнения Навье—Стокса.

В качестве области $Q$ в пространстве $t$, $x$ рассматривается прямоугольник $0<t<t_1$, $-L<x<L$, где $t_1$, $L$ — некоторые постоянные.

При постановке задач будем руководствоваться известным соображением, что характеристики приносят в $Q$ информацию с ее границы $\partial Q$, следовательно, количество условий на том или ином участке границы должно быть равно числу характеристик, входящих там в область $Q$.

Характеристики $\omega(t,x)=\mathrm{const}$ системы (4.1) подчинены уравнениям:

$$1)\quad \omega_t+u\,\omega_x=0;\quad 2)\quad \omega_t+(u\pm c)\omega_x=0, \tag{4.2}$$

где $c$ — скорость распространения возмущений, причем для невязкого газа она определяется формулой Лапласа: $c^2=\dfrac{c_p}{c_v}\,p/\rho$, а при $\lambda>0$ и $\theta>0$ — формулой $c^2=\lambda/\rho\,\theta$. Характеристики второй группы — двойные, в связи с чем для модифицированных уравнений, в отличие от уравнений Эйлера, потребуются дополнительные начальные условия: при $t=0$, $-L\le x\le L$ необходимо задать не только $\rho$, $u$, $T$, но и $\dfrac{\partial u}{\partial t}$, $\dfrac{\partial T}{\partial t}$. Аналогично, в случае сверхзвукового потока на входе в область ($x=-L$ при $u>0$) необходимо задать не только функции $\rho,u,T$ от $t$, но и $\dfrac{\partial u}{\partial x}$, $\dfrac{\partial T}{\partial x}$. В дозвуковом случае на входе в область следует задать три функции — $\rho$, $u$, $T$, а на выходе — только $u,T$.

Возникает естественный вопрос: откуда взять дополнительную (по сравнению с невязким газом) информацию, чтобы задать величины $\dfrac{\partial u}{\partial t}$, $\dfrac{\partial T}{\partial t}$ в начальных условиях, или $\dfrac{\partial u}{\partial x}$, $\dfrac{\partial T}{\partial x}$ в краевых условиях при сверхзвуке. При решении конкретных физических задач эту информацию можно получить из опыта, а при решении абстрактных задач следует руководствоваться тем соображением, что газ приходит в начальное состояние (или в состояние при $x=0$), подчиняясь соответствующим законам. Иными словами, в начальный момент необходимо знать состояние газа не только при $t=0$, но и немного раньше (аналогично с краевыми условиями).

В качестве примера решения уравнений (4.1) при $\theta>0$, $\lambda>0$ рассмотрим задачу о распространении возмущений в покоящейся среде. В этом случае величина СРВ постоянна, и решение уравнений (4.1) в окрестности волны можно искать в виде $\rho(\omega)$, $u(\omega)$, $T(\omega)$, где $\omega=x+ct$, $c^2=\lambda/\rho\,\theta$. После подстановки в (4.1) найдем:

$$c\rho'+\rho\,u'=0,\quad c\rho\,(u'+\theta\,u''c)+(\rho\,Rt)'=\lambda\,u'',$$
$$c\rho\,c_v(T'+c\,\theta T'')+\rho\,RT\,u'=(\lambda-\rho\theta\,c^2)(u')^2+\lambda\,c_vT''.$$

Здесь штрихом обозначены производные по аргументу $\omega$. После несложных математических выкладок получим отсюда, что при $u' \neq 0$ величина $c^2$, определяемая формулами $c^2 = \dfrac{c_p}{c_v} RT$ и $c^2 = \lambda/\rho\theta$, одна и та же, т. е. функция $\theta$ однозначно определяется формулой

$$\theta = \lambda/\rho \frac{\partial p(\rho, S)}{\partial \rho},$$

где $S$ — энтропия.

Рассмотрим теперь с позиций общих уравнений (4.1) уравнения Навье—Стокса, которые получаются из (4.1), если устремить величину $\theta$ к нулю, предполагая при этом, что величина $\lambda$ остается строго больше нуля. Нетрудно убедиться, что эти условия приводят к физическим противоречиям. Действительно, из кинетической теории газов известно (см., например, [4, с. 270]), что коэффициент вязкости $\lambda$ пропорционален величине $\rho \bar{c} \bar{l}$, где $\bar{c}$ — средняя скорость хаотического движения молекул, а $\bar{l}$ — средняя длина свободного пробега. Далее очевидно, что $\bar{l}$ пропорциональна $\bar{c}\theta$, так что $\lambda$ будет величиной, пропорциональной $\rho \bar{c}^2 \theta$. Отсюда следует, что при стремлении $\theta$ к нулю, $\lambda$ может оставаться отличной от нуля только при $\bar{c}$, стремящемся к бесконечности. Иными словами, это возможно только в случае, когда средняя скорость хаотического движения молекул, а значит, и скорость звука являются неограниченными величинами. С другой стороны, в уравнениях Навье—Стокса подразумевается, что температура газа ограничена, что трудно совмещается с бесконечной скоростью $\bar{c}$. Таким образом, можно заключить, что в модели Навье—Стокса и с точки зрения кинетической теории имеются противоречия.

## 5. Установившееся движение

Для уравнений Навье—Стокса известно решение о так называемом ударном слое (см., например, [2, с. 186–192]). В связи с этим целесообразно рассмотреть некоторые установившиеся одномерные движения совершенного газа, подчиненного уравнениям движения (4.1) при различных значениях параметров $\lambda, \theta$. Из (4.1) следует, что такие движения подчинены уравнениям

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u) = 0, \quad \rho u \frac{\partial}{\partial x}\left(u + \theta u \frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho RT) = \frac{\partial}{\partial x}(\lambda \frac{\partial u}{\partial x}),$$

$$\rho u c_v \frac{\partial}{\partial x}\left(T + \theta u \frac{\partial T}{\partial x}\right) + \rho RT \frac{\partial u}{\partial x} = (\lambda - \rho \theta u^2)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda c_v \frac{\partial T}{\partial x}\right). \qquad (5.1)$$

Отметим, что аналог диссипативной функции Рэлея имеет здесь вид: $\Phi = (\lambda - \rho \theta u^2)\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2$. При дозвуковом ($\lambda - \rho \theta u^2 > 0$) движении $\Phi$ будет положительным и механическая энергия, как обычно, переходит в тепло, правда, немного медленнее. При сверхзвуковом движении $\Phi$ — отрицательно, т. е. в этом случае, наоборот, тепло переходит в кинетическую энергию.

Из уравнений (5.1) нетрудно получить первые интегралы

$$\rho u = m > 0, \quad (\lambda - m\theta u) u \frac{du}{dx} = m(RT + u^2 - au),$$

$$(\lambda - m\,\theta\,u)\,c_v\,\frac{dT}{dx} = m\left(c_v T - \frac{u^2}{2} + a\,u - b\right), \tag{5.2}$$

где $m,\ a,\ b$ — постоянные интегрирования.

Из (5.2) следует, что для невязкого газа существуют только две возможности: либо решение, когда $\rho,\ u,\ T$ постоянны, либо, если набегающий поток сверхзвуковой, возможен скачок уплотнения, по сторонам которого $\rho,\ u,\ T$ связаны известными условиями Рэнкина—Гюгонио.

В отличие от невязкого газа при $\lambda > 0,\ \theta > 0$ (и при $\lambda > 0,\ \theta = 0$) возможны нетривиальные гладкие решения. Для того чтобы найти эти решения с монотонным изменением скорости $u(x)$, удобно в качестве независимой переменной принять функцию $u$. Тогда из уравнений (5.2) следует, что при $\lambda > 0,\ \theta > 0$ (и при $\lambda > 0,\ \theta = 0$) функция $T(u)$ должна удовлетворять уравнению Абеля второго рода:

$$c_v\frac{dT}{du}(RT + u^2 - au) = u\left(c_v - \frac{u^2}{2} + au - b\right). \tag{5.3}$$

Аналитическое решение этого уравнения затруднительно, поэтому авторы задачи об ударном слое (см., например, [2, с. 190]) силовым образом заменили множитель $c_v$ перед $\dfrac{dT}{du}$ в левой части (5.3) на $c_p$ и в результате смогли указать частное решение уравнения (5.3) в виде

$$c_p\,T = b - u^2/2 + a\,u. \tag{5.4}$$

В свою очередь это позволило свести решение задачи об ударном слое к квадратуре. Поскольку наша цель — оценка влияния параметра $\theta$ на решение, будем использовать (5.3) и для случая $\theta > 0$, так что и для модифицированных уравнений можем принять

$$\frac{du}{dx} = \mathrm{const}\,\frac{(u-u_1)(u-u_2)}{(\lambda - m\,\theta\,u)\,u}. \tag{5.5}$$

Здесь $u_1$, $u_2$ — положительные постоянные, определяемые заданием параметров $a$, $b$ из (5.2). В силу произвола выбора $a$, $b$ величины $u_1$, $u_2$ могут принимать произвольные (у нас — положительные) значения.

При $\lambda > 0,\ \theta = 0$ соотношение (5.5) задает функцию $u(x)$, монотонно убывающую от значения $u = u_1 > 0$ при $x = -\infty$ до значения $u = u_2 > 0$ при $x = +\infty$.

Перейдем к исследованию случая $\lambda > 0,\ \theta > 0$, причем решение уравнения (5.5), как мы уже условились, возьмем в том же виде (5.4). Из (5.5) вытекает, что здесь следует различать до- и сверхзвуковой случаи, поскольку они существенно различны. В дозвуковом случае функция $u(x)$ будет монотонно убывать от значения $u_1$ при $x = -\infty$ до значения $u_2 < u_1$ при $x = +\infty$. Профиль $u(x)$ по существу будет при малых $u(x)$ близок к профилю ударного слоя, полученного для $\theta = 0$ (см., [2, с. 187]). Однако в сверхзвуковом потоке картина существенно меняется: при отсутствии разрывов функция $u(x)$ становится монотонно возрастающей от значения $u_1$ при $x = -\infty$ до значения $u_2 > u_1$ при $x = +\infty$.

Рассмотрим более подробно случай, когда набегающий поток — сверхзвуковой $(\lambda - m\,\theta\,u < 0)$, а выходящий — дозвуковой $(\lambda - m\,\theta\,u > 0)$. Из (5.5) с очевидностью следует, что гладкого профиля $u(x)$, соединяющего скорость сверхзвукового потока $u_1$ на $x = -\infty$ со скоростью дозвукового потока $u_2$ на $+\infty$, имеющего вид ударного слоя, здесь не может быть. Это означает, что в модифицированной модели, как и в модели

Эйлера, сверхзвуковой поток может перейти в дозвуковой только с помощью разрыва без какого-либо размазывания за счет вязкости.

## 6. Модель вязкой несжимаемой жидкости

Отдельно рассмотрим случай несжимаемой вязкой жидкости. В соответствующей реальной среде молекулы совершают хаотические движения, сталкиваются между собой, следовательно, можно говорить о параметре $\theta$. Давление $p$ здесь не является термодинамической функцией. Коэффициент вязкости и параметр $\theta$ зависят только от температуры. Ограничимся наиболее простым случаем, когда эти параметры постоянны. Исходя из уравнений (3.2) и (3.4), полагая $\rho \equiv 1$, получаем замкнутую систему уравнений движения вязкой несжимаемой жидкости:

$$\operatorname{div}\mathbf{u} = 0, \quad \frac{d\mathbf{u}}{dt} + \frac{d}{dt}\left(\theta\,\frac{d\mathbf{u}}{dt}\right) + \nabla p = \mathbf{f} + \theta\frac{d\mathbf{f}}{dt} + \nabla(\lambda D). \tag{6.1}$$

Подчеркнем, что уравнение сохранения импульса системы (6.1), в отличие от уравнений Навье—Стокса, содержит дополнительные члены, и среди них — вторая производная по времени от скорости. Найдем характеристики $\omega(t, \mathbf{x}) = \mathrm{const}$ системы (6.1):

$$\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2 = \mathrm{const}, \quad \left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2 = c^2\,(\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2).$$

Первое семейство отражает свойство несжимаемости жидкости и дает бесконечную скорость распространения возмущений. Вторая группа характеристик связана с хаотическим движением молекул и дает конечную скорость распространения возмущений $c = \sqrt{\lambda/\rho\,\theta}$.

В плоском случае можно ввести функцию тока $\psi$ и вихрь скорости $\zeta$ по формулам

$$u = \psi_y, \quad v = -\psi_x, \quad \zeta = u_y - v_x = \Delta\psi,$$

где $u$, $v$ — компоненты скорости, $\Delta$ — оператор Лапласа по переменным $x$, $y$. Исключая перекрестным дифференцированием давление, получим систему уравнений (без внешних сил):

$$\frac{d\zeta}{dt} + \frac{d}{dt}\left(\theta\,\frac{d\zeta}{dt}\right) = \lambda\Delta\zeta, \quad \zeta = \Delta\psi, \tag{6.2}$$

с характеристиками $\omega(t, x, y) = \mathrm{const}$, подчиненными уравнениям

$$\omega_x^2 + \omega_y^2 = 0, \quad \left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2 = c^2\ (\omega_x^2 + \omega_y^2).$$

Заметим,что решение Пуазейля удовлетворяет системе (6.2). В связи с этим представляется интересным выяснить, как повлияет наличие новых (по сравнению с уравнениями Навье—Стокса) членов на устойчивость решения Пуазейля. Если собрать в правой части уравнения для $\zeta$ из системы (6.2) все члены со вторыми пространственными производными, то полученный таким образом оператор будет отрицательным только при условии $u^2 + v^2 < c^2$.

## Список литературы

[1] Cauchy A.L. Sur les équations, qui expriment les conditions d'équilibre, ou les lois du mouvement intérieur d'un corps solid, élastique ou non élastique // Exercices de Mathématique par Cauchy, III-e Année, 1828.

[2] Серрин Дж. Математические основы классической механики жидкости. М.: ИЛ, 1963.

[3] Жданов В.М., Ролдугин В.И. Неравновесная термодинамика и кинетическая теория разреженных газов // Успехи физ. наук. 1998. Т. 168, № 4. С. 407–438.

[4] Штрауф Е.А. Молекулярная физика. М.; Л.: ГИТТЛ, 1949.

[5] Кузнецов Б.Г. Гиперболическая модификация уравнения Навье—Стокса // ПМТФ. 1993. № 6. С. 133–141.

[6] Смирнов В.И. Курс высшей математики. М.; Л.: ГИТТЛ, 1951.

*Поступила в редакцию 5 декабря 2007 г.*