Нелинейно-дисперсионные уравнения мелкой воды на нестационарном дне*

З. И. Федотова, Г. С. Хакимзянов
Институт вычислительных технологий СО РАН, Новосибирск, Россия
e-mail: zf@ict.nsc.ru, khak@ict.nsc.ru

A uniform derivation of the Green—Naghdi, Zheleznyak—Pelinovsky and Aleshkov nonlinear dispersive equations describing water surface waves is given for the case of a non-stationary bottom profile. It is shown, that the Green—Naghdi's and Zheleznyak—Pelinovsky's equations are just different forms of the second order approximation for the system of shallow water equations which accounts for a bottom deformation and movement.

Введение

Вопросы генерации волн подвижным дном — весьма актуальны. Это связано с интересом к математическому моделированию длинных поверхностных волн (цунами), вызванных изменением формы морского дна из-за схода оползней или вследствие образования протяженных трещин [1–3]. Сюда же относятся задачи о движении тел по дну водоема, что также может вызывать волны на поверхности воды [4].

Моделирование поверхностных волн в рамках полных моделей гидродинамики требует большого времени расчета [5, 6]. Так, в статье [5] численно исследовались волновые режимы, возникающие при движении подводного оползня. Специфика моделирования таких волн определяется большой длительностью перемещения оползня от берега в глубоководную часть водоема, довольно большими скоростями его движения и, как следствие, необходимостью использования расчетной области большой протяженности и сеток с большим числом узлов. В результате расчет одного варианта по полной модели занимает несколько часов. Приближенные же модели требуют минуты, причем общая картина возникающих волновых режимов удовлетворительно описывается даже с помощью простейших моделей.

Однако было отмечено, что для детального моделирования явления на продолжительное время требуются модели, способные воспроизводить дисперсию и отражать неоднородность процесса в вертикальном направлении. Это было показано, например, в работах [1, 7], где для изучения генерации волн движущимся по откосу твердым недеформируемым телом были применены как различные приближенные, так и полные уравнения гидродинамики. Кроме того, в работе [1] для изучения волнообразования использованы данные физического эксперимента.

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, (грант № 06-05-64869) и проекта INTAS 06-1000013-9236.

Сравнительный анализ показал, что на начальной стадии процесса в случае длинного тонкого оползня все модели, от классических уравнений мелкой воды до полной модели течения идеальной жидкости, хорошо описывают наиболее заметные характеристики волнообразования, отмеченные и в эксперименте. Даже линейная модель мелкой воды в начальной части процесса показывает картину, достаточно близкую к экспериментальным данным, однако с развитием процесса осредненные по вертикали уравнения приводят к весьма упрощенному волновому полю, далекому от полученного в эксперименте. Кроме того, уравнения мелкой воды показывают значительное превышение амплитудных характеристик.

Что касается нелинейно-дисперсионных (НЛД-) моделей, то они воспроизводят более сложную картину волнового поля: под влиянием дисперсии увеличивается число волн, усложняется процесс перестройки свободной поверхности в момент остановки оползня, уменьшаются амплитуды волн, распространяющихся в сторону мелководья. Причина указанных эффектов — более точное по сравнению с гидростатическим описание вертикальной структуры процессов. В работе [1] применялись модели типа Буссинеска [8], при выводе которых предполагалась малость амплитуды. При использовании НЛД-уравнений, свободных от этого ограничения (назовем их полными НЛД-моделями), точность воспроизведения волнового поля повышается, что показано в работе [7] путем сравнения с расчетами по полной гидродинамической модели, которая с высокой точностью воспроизводит как амплитудный, так и частотный характер волнового режима [1, 9]. Анализ способов вывода известных нелинейно-дисперсионных моделей, работающих в случае нестационарного дна, показал, что большинство моделей получено при использовании предположения о малости амплитуды [8, 9], но есть и полные НЛД-модели: это хорошо известные уравнения Грина—Нагди [10], модель Алешкова [11] и модель Лью—Лайнета, применяемая в одно- и двухслойном вариантах [9, 12]. Модели различаются тем, что в каждой из них по-своему определяется приближенная скорость. Что касается широко используемой модели Железняка—Пелиновского, то она была выведена [13, 14] в предположении, что дно неподвижно. В настоящей работе выполнено обобщение этой модели на случай изменяющейся донной поверхности и показано, что, как и в случае стационарного дна [15], системы уравнений Грина—Нагди и Железняка—Пелиновского, хотя и имеют изначально различный вид определяющих уравнений, эквивалентны и являются разными формами записи одной и той же системы уравнений теории мелкой воды второго приближения. Отметим, что для получения уравнений Железняка–Пелиновского нами применен простой, основанный на интегральных законах сохранения способ вывода; этим же способом здесь выведены нелинейно-дисперсионные уравнения моделей Грина—Нагди и Алешкова.

1. Постановка задачи

Пусть слой несжимаемой жидкости ограничен снизу подвижным дном, заданным функцией $z = -h(x, y, t)$, а сверху — свободной границей, описываемой функцией $z = \eta(x, y, t)$, где t — время, x, y, z — координаты точки в декартовой системе координат $Oxyz$, ось Oz которой направлена вертикально вверх, а координатная плоскость Oxy совпадает с невозмущенной свободной поверхностью. В полной постановке задачи требуется найти вектор скорости $\mathbf{U} = (u_1, u_2, w)$, давление p и функцию η, которые для произвольного значения ζ из промежутка $-h \le \zeta \le \eta$ удовлетворяют системе интегральных соотношений

$$\int\limits_{\zeta}^{\eta} (\nabla \mathbf{u} + w_z)\, dz = 0, \tag{1}$$

$$\int\limits_{\zeta}^{\eta} (\mathbf{u}_t + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} + w\mathbf{u}_z + \nabla p)\, dz = 0, \tag{2}$$

$$\int\limits_{\zeta}^{\eta} (w_t + \mathbf{u}\cdot\nabla w + w w_z + p_z)\, dz = -\int\limits_{\zeta}^{\eta} g\, dz, \tag{3}$$

краевым условиям на свободной границе

$$\eta_t + \mathbf{u}\cdot\nabla\eta - w\Big|_{z=\eta} = 0, \tag{4}$$

$$p\Big|_{z=\eta} = 0, \tag{5}$$

и условию непротекания через подвижное дно

$$h_t + \mathbf{u}\cdot\nabla h + w\Big|_{z=-h} = 0, \tag{6}$$

где $\nabla = (\partial/\partial x,\ \partial/\partial y)$, $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ — вектор горизонтальной составляющей скорости, $\nabla\mathbf{u} = u_{1,x} + u_{2,y}$, g — ускорение свободного падения.

Уравнения приближенных моделей получаются при тех или иных предположениях относительно решения задачи (1)–(6), искомыми величинами в этих уравнениях обычно являются $H = \eta + h$ — полная глубина слоя жидкости и $\mathbf{c} = \mathbf{c}(x, y, t)$ — вектор скорости в приближенной модели, связанный каким-либо образом с вектором скорости $\mathbf{U}(x, y, z, t)$ трехмерного течения. Например, если в качестве $\mathbf{c}$ брать осредненную по глубине горизонтальную составляющую скорости

$$\mathbf{v} = (v_1,\ v_2) = \frac{1}{H}\int\limits_{-h}^{\eta} \mathbf{u}\, dz, \tag{7}$$

то для любой приближенной модели получается одно и то же уравнение неразрывности:

$$H_t + \nabla(H\mathbf{c}) = 0. \tag{8}$$

Оно следует из соотношения (1), записанного при $\zeta = -h$ в виде уравнения

$$\nabla\int\limits_{-h}^{\eta} \mathbf{u}\, dz - \mathbf{u}\nabla\eta\Big|_{z=\eta} - \mathbf{u}\nabla h\Big|_{z=-h} + w\Big|_{z=\eta} - w\Big|_{z=-h} = 0 \tag{9}$$

и учете в нем условий (4), (6).

Если вектор $\mathbf{c}$ выбран так, что осредненная по глубине горизонтальная составляющая вектора ускорения равна вектору ускорения в приближенной модели, т. е.

$$\int\limits_{-h}^{\eta} \Big[\mathbf{u}_t + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} + w\mathbf{u}_z\Big] dz = H\Big(\mathbf{c}_t + (\mathbf{c}\cdot\nabla)\mathbf{c}\Big), \tag{10}$$

то интегральное соотношение (2) при $\zeta = -h$ можно переписать с учетом динамического условия (5) в следующем виде:

$$H\Big(\mathbf{c}_t + (\mathbf{c}\cdot\nabla)\mathbf{c}\Big) + \nabla\int\limits_{-h}^{\eta} p\,dz - p\Big|_{z=-h}\nabla h = 0. \tag{11}$$

Тогда для получения уравнения движения приближенной модели необходимо знать распределение давления в исходном трехмерном течении. Оно может быть получено из уравнения (3) при некоторых предположениях относительно компонент вектора скорости $\mathbf{U}$.

2. Уравнения приближенной модели Грина—Нагди

При выводе уравнений модели Грина—Нагди предполагается [10], что горизонтальная составляющая вектора скорости постоянна по глубине (вектор $\mathbf{u}$ не зависит от координаты z), а вертикальная компонента зависит от z линейно:

$$w(x,y,z,t) = w_0(x,y,t) + [z + h(x,y,t)]\,w_1(x,y,t). \tag{12}$$

В качестве искомого вектора $\mathbf{c}$ возьмем вектор $\mathbf{u}$. Поскольку $\mathbf{u} \equiv \mathbf{v}$, то уравнение неразрывности в модели Грина—Нагди имеет вид (8), где $\mathbf{c} = \mathbf{u}$.

При предположении (12) относительно компоненты w из условия (6) следует, что $w_0 = -Dh$, а из кинематического условия (4) — $w_1 = DH/H$, где D — оператор полной производной

$$D = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{c}\cdot\nabla.$$

Следовательно, вертикальная компонента скорости определяется по формуле

$$w = -Dh + \frac{z+h}{H}DH,$$

которая в силу равенства

$$DH = -H\nabla\mathbf{c}, \tag{13}$$

вытекающего из уравнения неразрывности (8), может быть записана в виде

$$w = -Dh - (z+h)\nabla\mathbf{c}. \tag{14}$$

Тогда

$$Dw = -D^2h - \nabla\mathbf{c}Dh - (z+h)D\left(\nabla\mathbf{c}\right), \tag{15}$$

$$ww_z = \nabla\mathbf{c}Dh + (z+h)\left(\nabla\mathbf{c}\right)^2, \tag{16}$$

поэтому из соотношения (3) при учете динамического условия (5) следует, что давление является квадратичной функцией независимой переменной z:

$$p = -\frac{H^2}{2}R_1 + (g - R_2)H - (g - R_2)(z + h) + \frac{(z + h)^2}{2}R_1, \quad -h \le z \le \eta, \tag{17}$$

где использованы обозначения

$$R_1 = D\left(\nabla \mathbf{c}\right) - \left(\nabla \mathbf{c}\right)^2, \quad R_2 = D^2 h. \tag{18}$$

Поскольку $\mathbf{u}_z = 0$, то будет справедливым равенство (10), поэтому найденное выражение для давления можно использовать в уравнении (11) для вычисления членов с давлением:

$$\nabla \int\limits_{-h}^{\eta} p\, dz - p\Big|_{z=-h} \nabla h = gH\nabla\eta - \nabla\left(\frac{H^3}{3}R_1 + \frac{H^2}{2}R_2\right) + H\nabla h\left(\frac{H}{2}R_1 + R_2\right). \tag{19}$$

В результате уравнение движения примет вид

$$\mathbf{c}_t + (\mathbf{c}\cdot\nabla)\mathbf{c} + g\nabla\eta = \frac{1}{H}\nabla\left(\frac{H^3}{3}R_1 + \frac{H^2}{2}R_2\right) - \nabla h\left(\frac{H}{2}R_1 + R_2\right). \tag{20}$$

Учитывая равенство (13), получаем эквивалентную формулу для R_1:

$$R_1 = -\frac{D^2 H}{H} = -\frac{D^2 h + D^2\eta}{H},$$

следовательно,

$$\frac{H^3}{3}R_1 + \frac{H^2}{2}R_2 = \frac{H^2}{6}D^2\Big(h - 2\eta\Big), \quad \frac{H}{2}R_1 + R_2 = \frac{1}{2}D^2\Big(h - \eta\Big),$$

поэтому после элементарных преобразований правой части уравнение движения (20) принимает вид, приведенный в статье [16]:

$$\mathbf{c}_t + (\mathbf{c}\cdot\nabla)\mathbf{c} + g\nabla\eta = \frac{1}{6}\Big[-D^2\eta\nabla(4\eta + h) + D^2 h\nabla(2\eta - h) - (\eta + h)\nabla\left(2D^2\eta - D^2 h\right)\Big], \tag{21}$$

т. е. уравнение движения (20) эквивалентно уравнению движения (21) приближенной модели Грина—Нагди [10].

3. Уравнения модели Железняка—Пелиновского для подвижного дна

В этой приближенной модели искомые величины — полная глубина и осредненная по глубине горизонтальная составляющая скорости. В таком случае, как указано выше, уравнение неразрывности будет иметь вид (8), при этом $\mathbf{c} = \mathbf{v}$. Для получения уравнения движения вводятся такие предположения относительно скорости исходного течения, чтобы выполнялось равенство (10). В частности, предполагается, что вертикальная компонента скорости является, как и в модели Грина—Нагди, линейной функцией координаты z, а горизонтальные компоненты определяются по-другому — они зависят от вертикальной координаты, являясь квадратичными функциями z. Наводящие соображения относительно вида зависимости от z функций $\mathbf{u}$ и w основаны на предположении о потенциальности течения и на использовании разложения потенциала скорости φ в ряд по некоторому параметру. Поскольку в настоящей работе, в отличие от [13, 14], рассматривается случай подвижного дна, приведем краткий вывод формул для $\mathbf{u}$ и w.

Итак, пусть $\mathbf{u} = \nabla\varphi$, $w = \varphi_z$, φ — потенциал вектора скорости $\mathbf{U}$, являющийся решением уравнения Лапласа. Введем безразмерные переменные:

$$\overline{x} = \frac{x}{L}\,, \quad \overline{y} = \frac{y}{L}\,, \quad \overline{z} = \frac{z}{h_0}\,, \quad \overline{h} = \frac{h}{h_0}\,, \quad \overline{\eta} = \frac{\eta}{a_0}\,, \quad \overline{t} = \frac{t\sqrt{gh_0}}{L}\,, \quad \overline{\varphi} = \varphi\frac{\sqrt{gh_0}}{Lga_0}\,,$$

где L — характерный размер по горизонтали, h_0, a_0 — характерные глубина и амплитуда волны. В безразмерных переменных уравнение Лапласа и условие непротекания (6) примут следующий вид:

$$\overline{\nabla}^2\overline{\varphi} + \frac{1}{\beta}\overline{\varphi}_{\overline{z}\overline{z}} = 0, \tag{22}$$

$$\overline{h}_{\overline{t}} + \alpha\overline{\nabla}\overline{\varphi}\cdot\overline{\nabla}\,\overline{h} + \frac{\alpha}{\beta}\overline{\varphi}_{\overline{z}}\Big|_{\overline{z}=-\overline{h}} = 0, \tag{23}$$

где $\overline{\nabla} = (\partial/\partial\overline{x},\ \partial/\partial\overline{y})$, $\overline{\nabla}^2 = \partial^2/\partial\overline{x}^2 + \partial^2/\partial\overline{y}^2$, $\alpha = a_0/h_0$, $\beta = (h_0/L)^2$. Далее черту над операторами и безразмерными величинами будем опускать.

Подставляя разложение потенциала скорости по параметру β

$$\varphi(x,y,z,t) = f(x,y,t) + \beta\Big[z + h(x,y,t)\Big]f_1(x,y,t) + \beta^2\Big[z + h(x,y,t)\Big]^2 f_2(x,y,t) + \ldots \tag{24}$$

в уравнение (23), получаем

$$f_1 = -\,\frac{h_t/\alpha + \nabla f\cdot\nabla h}{1 + \beta(\nabla h)^2},$$

поэтому

$$\beta f_1 = -\beta\left(h_t/\alpha + \nabla f\cdot\nabla h\right) + O\left(\beta^2\right).$$

Тогда из уравнения Лапласа (22) следует равенство

$$\beta^2 f_2 = -\frac{\beta}{2}\nabla^2 f + O\left(\beta^2\right),$$

таким образом,

$$\varphi = f - \beta(z+h)\left(\frac{h_t}{\alpha} + \nabla f\cdot\nabla h\right) - \beta\frac{(z+h)^2}{2}\nabla^2 f + O\left(\beta^2\right), \tag{25}$$

где f — значение потенциала на дне, при этом

$$\mathbf{v} = \nabla f - \beta\left[\nabla h\left(\frac{h_t}{\alpha} + \nabla f\cdot\nabla h\right) + \frac{H}{2}\nabla\left(\frac{h_t}{\alpha} + \nabla f\cdot\nabla h\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{H}{2}\nabla h\nabla^2 f + \frac{H^2}{6}\nabla\left(\nabla^2 f\right)\right] + O\left(\beta^2\right), \tag{26}$$

где $H = h + \alpha\eta$, $\mathbf{v}$ — средняя по глубине горизонтальная составляющая скорости, записанная в безразмерных переменных

$$\mathbf{v} = \frac{1}{h+\alpha\eta}\int\limits_{-h}^{\alpha\eta} \nabla\varphi\, dz.$$

Учитывая равенство $\nabla f = \mathbf{v} + O\left(\beta\right)$, из формулы (25) получаем

$$\varphi = f - \beta(z+h)\left(\frac{h_t}{\alpha} + \mathbf{v}\cdot\nabla h\right) - \beta\frac{(z+h)^2}{2}\nabla\mathbf{v} + O\left(\beta^2\right). \tag{27}$$

Следовательно,

$$|\nabla\varphi|^2 = \mathbf{v}\cdot\mathbf{v} + \beta\Big[H - 2(z+h)\Big]\left[\mathbf{v}\cdot\nabla\left(\frac{h_t}{\alpha} + \mathbf{v}\cdot\nabla h\right) + \nabla\mathbf{v}\left(\mathbf{v}\cdot\nabla h\right)\right] +$$

$$+\beta\left[\frac{H^2}{3} - (z+h)^2\right]\mathbf{v}\cdot\nabla\left(\nabla\mathbf{v}\right) + O\left(\beta^2\right). \tag{28}$$

Отбрасывая члены порядка $O\left(\beta^2\right)$ и возвращаясь к размерным переменным, получаем следующие формулы для потенциала, горизонтальных и вертикальной компонент вектора скорости и $|\mathbf{u}|^2$:

$$\varphi = f - (z+h)Dh - \frac{(z+h)^2}{2}\nabla\mathbf{v},$$

$$\mathbf{u} = \nabla\varphi = \mathbf{v} + \left[\frac{H}{2} - z - h\right]\Big(\nabla Dh + \nabla h\nabla\mathbf{v}\Big) + \left[\frac{H^2}{6} - \frac{(z+h)^2}{2}\right]\nabla\left(\nabla\mathbf{v}\right), \tag{29}$$

$$w = \varphi_z = -Dh - (z+h)\nabla\mathbf{v}, \tag{30}$$

$$|\mathbf{u}|^2 = \mathbf{v}\cdot\mathbf{v} + \Big[H - 2(z+h)\Big]\Big[\mathbf{v}\cdot\nabla Dh + \nabla\mathbf{v}\left(\mathbf{v}\cdot\nabla h\right)\Big] + \left[\frac{H^2}{3} - (z+h)^2\right]\mathbf{v}\cdot\nabla\left(\nabla\mathbf{v}\right), \tag{31}$$

которые используются только при выводе уравнения движения приближенной модели.

В силу равенства $\mathbf{c} = \mathbf{v}$ выражения (14) и (30) для вертикальной компоненты скорости в моделях Грина—Нагди и Железняка—Пелиновского совпадают. Покажем, что и давление в этих двух моделях определяется по одной и той же формуле (17). В самом деле, используя равенство

$$\mathbf{u}_z = \nabla w, \tag{32}$$

уравнение (3) можно переписать в следующем виде:

$$\int\limits_{\zeta}^{\eta}\left(w_t + \frac{1}{2}\left(|\mathbf{u}|^2\right)_z + ww_z + p_z\right)dz = -g(\eta - \zeta). \tag{33}$$

С учетом формул (30) и (31) убеждаемся в справедливости равенства

$$\frac{1}{2}\left(|\mathbf{u}|^2\right)_z = \mathbf{c}\cdot\nabla w, \tag{34}$$

поэтому

$$w_t + \frac{1}{2}\left(|\mathbf{u}|^2\right)_z = Dw \tag{35}$$

и выражение (17) для давления следует из уравнения (33) при учете формул (15), (16).

Покажем теперь справедливость равенства (10). С учетом равенств (32) и $\mathbf{u} = \nabla\varphi$ имеем

$$\int\limits_{-h}^{\eta} (\mathbf{u}_t + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} + w\mathbf{u}_z)\,dz = \int\limits_{-h}^{\eta}\left(\mathbf{u}_t + \frac{1}{2}\nabla\left(|\mathbf{u}|^2\right) + w\nabla w\right)dz, \tag{36}$$

а в силу равенства (31)

$$\int\limits_{-h}^{\eta} \frac{1}{2}\nabla\left(|\mathbf{u}|^2\right)dz = \frac{H}{2}\nabla\left(\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}\right) + \frac{H}{2}\Big[\nabla H - 2\nabla h\Big]\Big[\mathbf{v}\cdot\nabla Dh + \nabla\mathbf{v}\left(\mathbf{v}\cdot\nabla h\right)\Big] +$$

$$+\left[\frac{H^2}{3}\nabla H - \frac{H^2}{2}\nabla h\right]\mathbf{v}\cdot\nabla\left(\nabla\mathbf{v}\right). \tag{37}$$

Далее используем равенство

$$\frac{1}{2}\nabla\left(\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}\right) = \left(\mathbf{v}\cdot\nabla\right)\mathbf{v} + \mathbf{b},$$

где $\mathbf{b} = (v_2\omega,\ -v_1\omega)$, $\omega = \partial v_2/\partial x - \partial v_1/\partial y$ — функция вихря, которая согласно формуле (29) будет равна

$$\omega = -\Big(\frac{H_x}{2} - h_x\Big)\Big((Dh)_y + h_y\nabla\mathbf{v}\Big) - \frac{H}{2}h_y(\nabla\mathbf{v})_x - \frac{H}{3}H_x(\nabla\mathbf{v})_y +$$

$$+\Big(\frac{H_y}{2} - h_y\Big)\Big((Dh)_x + h_x\nabla\mathbf{v}\Big) + \frac{H}{2}h_x(\nabla\mathbf{v})_y + \frac{H}{3}H_y(\nabla\mathbf{v})_x.$$

Подставляя это выражение в формулу для $\mathbf{b}$, приходим к следующему представлению первого слагаемого в правой части равенства (37):

$$\frac{H}{2}\nabla\left(\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}\right) = H\left(\mathbf{v}\cdot\nabla\right)\mathbf{v} - \frac{H}{2}\Big[\nabla H - 2\nabla h\Big]\Big[\mathbf{v}\cdot\nabla Dh + \nabla\mathbf{v}\left(\mathbf{v}\cdot\nabla h\right)\Big] -$$

$$-\left[\frac{H^2}{3}\nabla H - \frac{H^2}{2}\nabla h\right]\mathbf{v}\cdot\nabla\left(\nabla\mathbf{v}\right) +$$

$$+\frac{H}{2}\Big[\nabla Dh + \nabla\mathbf{v}\nabla h\Big]\Big[\mathbf{v}\cdot\nabla H - 2\mathbf{v}\cdot\nabla h\Big] + \Big[\frac{H^2}{3}\mathbf{v}\cdot\nabla H - \frac{H^2}{2}\mathbf{v}\cdot\nabla h\Big]\nabla\left(\nabla\mathbf{v}\right), \tag{38}$$

следовательно,

$$\int\limits_{-h}^{\eta} \frac{1}{2}\nabla\left(|\mathbf{u}|^2\right)dz = H\left(\mathbf{v}\cdot\nabla\right)\mathbf{v} +$$

$$+\frac{H}{2}\Big[\nabla Dh + \nabla\mathbf{v}\nabla h\Big]\Big[\mathbf{v}\cdot\nabla H - 2\mathbf{v}\cdot\nabla h\Big] + \Big[\frac{H^2}{3}\mathbf{v}\cdot\nabla H - \frac{H^2}{2}\mathbf{v}\cdot\nabla h\Big]\nabla\left(\nabla\mathbf{v}\right). \tag{39}$$

Используя формулу (30) для вертикальной компоненты скорости, получаем, что в равенстве (36)

$$\int_{-h}^{\eta} w\nabla w\,dz = \frac{H}{2}\Big[\nabla Dh + \nabla\mathbf{v}\nabla h\Big]\Big[H\nabla\mathbf{v} + 2Dh\Big] + \Big[\frac{H^2}{3}H\nabla\mathbf{v} + \frac{H^2}{2}Dh\Big]\nabla\left(\nabla\mathbf{v}\right). \quad (40)$$

И наконец, учет выражения (29) для горизонтальной составляющей скорости приводит к следующему выражению:

$$\int_{-h}^{\eta} \mathbf{u}_t\,dz = H\mathbf{v}_t + \frac{H}{2}\Big[\nabla Dh + \nabla\mathbf{v}\nabla h\Big]\Big[H_t - 2h_t\Big] + \Big[\frac{H^2}{3}H_t - \frac{H^2}{2}h_t\Big]\nabla\left(\nabla\mathbf{v}\right). \quad (41)$$

Складывая равенства (39)–(41) и используя уравнение неразрывности (8) и равенство $Dh = h_t + \mathbf{v}\cdot\nabla h$, получаем, что

$$\int_{-h}^{\eta}\left(\mathbf{u}_t + \frac{1}{2}\nabla\left(|\mathbf{u}|^2\right) + w\nabla w\right)dz = H\left(\mathbf{c}_t + (\mathbf{c}\cdot\nabla)\mathbf{c}\right).$$

Тем самым доказано, что равенство (10) выполнено, поэтому уравнение движения модели Железняка—Пелиновского получается из уравнения (11) после подстановки в него давления. Но поскольку давление в модели Железняка—Пелиновского вычисляется по той же формуле (17), что и в модели Грина—Нагди, то и уравнения движения у них будут одинаковыми. Итак, уравнения приближенной модели Железняка—Пелиновского для случая подвижного дна задаются теми же формулами (8), (20), что и в модели Грина—Нагди.

4. Уравнения нелинейно-дисперсионной модели Алешкова

Так же, как и уравнения Железняка—Пелиновского, уравнения приближенной модели Алешкова выводятся на основе предположения о потенциальности исходного трехмерного течения, однако теперь в качестве приближенной скорости $\mathbf{c}$ берется ∇f, поэтому выражение (25) для потенциала принимает следующий вид:

$$\varphi = f - \beta(z+h)\left(\frac{h_t}{\alpha} + \mathbf{c}\cdot\nabla h\right) - \beta\frac{(z+h)^2}{2}\nabla\mathbf{c} + O\left(\beta^2\right), \quad (42)$$

где по-прежнему f — значение потенциала на дне.

Поскольку для приближенной скорости $\mathbf{v}$ модели Железняка—Пелиновского имеет место, как это следует из формулы (26), представление через вектор $\mathbf{c} = \nabla f$:

$$\mathbf{v} = \mathbf{c} - \beta\left[\nabla h\left(\frac{h_t}{\alpha} + \mathbf{c}\cdot\nabla h\right) + \frac{H}{2}\nabla\left(\frac{h_t}{\alpha} + \mathbf{c}\cdot\nabla h\right) + \frac{H}{2}\nabla\mathbf{c}\nabla h + \frac{H^2}{6}\nabla\left(\nabla\mathbf{c}\right)\right] + O\left(\beta^2\right),$$

то после отбрасывания в этом выражении членов порядка $O\left(\beta^2\right)$ и перехода к размерным переменным его можно записать в виде равенства

$$\mathbf{v} = \mathbf{c} - \nabla hDh - \frac{H}{2}\nabla Dh - \frac{H}{2}\nabla\mathbf{c}\nabla h - \frac{H^2}{6}\nabla\left(\nabla\mathbf{c}\right). \quad (43)$$

Подставляя в уравнение неразрывности модели Железняка—Пелиновского

$$H_t + \nabla(H\mathbf{v}) = 0$$

вместо $\mathbf{v}$ правую часть равенства (43), получаем уравнение неразрывности модели Алешкова:

$$H_t + \nabla(H\mathbf{c}) = \nabla\Big[H\nabla h Dh + \frac{H^2}{2}\left(\nabla Dh + \nabla\mathbf{c}\nabla h\right) + \frac{H^3}{6}\nabla\left(\nabla\mathbf{c}\right)\Big]. \tag{44}$$

Для получения уравнения движения предполагаем, основываясь на представлении (42), что потенциал скорости исходного течения вычисляется по формуле

$$\varphi = f - (z+h)Dh - \frac{(z+h)^2}{2}\nabla\mathbf{c}.$$

Тогда

$$\mathbf{u} = \nabla\varphi = \mathbf{c} - \nabla h Dh - (z+h)\Big(\nabla Dh + \nabla\mathbf{c}\nabla h\Big) - \frac{(z+h)^2}{2}\nabla\left(\nabla\mathbf{c}\right), \tag{45}$$

$$w = \varphi_z = -Dh - (z+h)\nabla\mathbf{c}, \tag{46}$$

и аналогом равенства (31) здесь будет следующее:

$$|\mathbf{u}|^2 = \mathbf{c}\cdot\mathbf{c} - 2\Big[Dh\left(\mathbf{c}\cdot\nabla h\right) + (z+h)\Big(\mathbf{c}\cdot\nabla Dh + \nabla\mathbf{c}\ \left(\mathbf{c}\cdot\nabla h\right)\Big) + \frac{(z+h)^2}{2}\mathbf{c}\cdot\nabla\left(\nabla\mathbf{c}\right)\Big]. \tag{47}$$

Видим, что вертикальная компонента скорости в моделях Грина—Нагди, Железняка—Пелиновского и Алешкова определяется по одной и той же формуле (14). Кроме того, используя формулы (45)–(47), убеждаемся в справедливости равенств (32)–(35), вследствие чего делаем вывод, что давление для всех трех моделей также вычисляется по одной и той же формуле (17).

Хотя для модели Алешкова не выполняется равенство (10), служившее основой для вывода уравнений движения первых двух моделей, однако равенство (36) остается верным. Приведем выражения для интегралов от каждого слагаемого подынтегральной функции из правой части этого равенства. В силу предположения (47) получаем

$$\int\limits_{-h}^{\eta}\frac{1}{2}\nabla\left(|\mathbf{u}|^2\right)dz = H\left\{\frac{1}{2}\nabla(\mathbf{c}\cdot\mathbf{c}) - \nabla\Big[Dh\left(\mathbf{c}\cdot\nabla h\right)\Big] - \nabla h\Big[\mathbf{c}\cdot\nabla Dh + \nabla\mathbf{c}\ \left(\mathbf{c}\cdot\nabla h\right)\Big] - \right.$$

$$\left. -\frac{H}{2}\nabla\Big[\mathbf{c}\cdot\nabla Dh + \nabla\mathbf{c}\ \left(\mathbf{c}\cdot\nabla h\right)\Big] - \frac{H}{2}\nabla h\Big(\mathbf{c}\cdot\nabla\left(\nabla\mathbf{c}\right)\Big) - \frac{H^2}{6}\nabla\Big[\mathbf{c}\cdot\nabla\left(\nabla\mathbf{c}\right)\Big]\right\}. \tag{48}$$

Поскольку течение с приближенной скоростью $\mathbf{c} = \nabla f$ является безвихревым, то

$$\frac{1}{2}\nabla(\mathbf{c}\cdot\mathbf{c}) = \left(\mathbf{c}\cdot\nabla\right)\mathbf{c}. \tag{49}$$

Аналогами равенств (40), (41) будут теперь такие выражения:

$$\int\limits_{-h}^{\eta} w\nabla w\,dz = H\Big\{Dh\nabla Dh + Dh\nabla\mathbf{c}\nabla h + \frac{H}{2}\Big[Dh\nabla\left(\nabla\mathbf{c}\right) + \nabla\mathbf{c}\nabla Dh + (\nabla\mathbf{c})^2\nabla h\Big] +$$

$$+\frac{H^2}{3}\nabla\mathbf{c}\nabla\left(\nabla\mathbf{c}\right)\Big\}, \tag{50}$$

$$\int\limits_{-h}^{\eta}\mathbf{u}_t\,dz = H\Big\{\mathbf{c}_t - (Dh\nabla h)_t - h_t\Big(\nabla Dh + \nabla\mathbf{c}\nabla h\Big) - \frac{H}{2}\Big[\Big(\nabla Dh + \nabla\mathbf{c}\nabla h\Big)_t + h_t\nabla\left(\nabla\mathbf{c}\right)\Big] -$$

$$-\frac{H^2}{6}\nabla\left(\nabla\mathbf{c}\right)_t\Big\}. \tag{51}$$

Используя выражения (48), (50), (51) и учитывая равенства (36), (49), получаем аналог равенства (10)

$$\int\limits_{-h}^{\eta}\Big[\mathbf{u}_t + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} + w\mathbf{u}_z\Big]dz = H\Big(\mathbf{c}_t + (\mathbf{c}\cdot\nabla)\mathbf{c} - \mathbf{a}\Big),$$

где

$$\mathbf{a} = \frac{H^2}{6}\nabla R_1 + \frac{H}{2}\nabla R_2 + \frac{1}{2}\nabla\left(Dh\right)^2 + \nabla h\Big(\frac{H}{2}R_1 + R_2\Big).$$

Тогда уравнение движения (11) примет вид

$$H\Big(\mathbf{c}_t + (\mathbf{c}\cdot\nabla)\mathbf{c}\Big) - H\mathbf{a} + \nabla\int\limits_{-h}^{\eta}p\,dz - p\Big|_{z=-h}\nabla h = 0.$$

И наконец, привлекая формулу (19), приходим к окончательному виду уравнения движения модели Алешкова

$$\mathbf{c}_t + (\mathbf{c}\cdot\nabla)\mathbf{c} + g\nabla\eta = \frac{1}{2}\nabla\Big(H^2R_1 + 2HR_2 + (Dh)^2\Big), \tag{52}$$

которое вместе с (44) составляет систему нелинейно-дисперсионных уравнений модели Алешкова.

Заключение

В настоящей работе на основе единого подхода получены определяющие уравнения нелинейно-дисперсионных моделей Грина—Нагди, Железняка—Пелиновского и Алешкова для случая деформирующегося или подвижного дна. Для вывода уравнений Грина—Нагди предполагалось, что вертикальная компонента скорости течения является линейной функцией от координаты z, а компоненты скорости в горизонтальной плоскости от z не зависят вовсе. При выводе уравнений Железняка—Пелиновского и Алешкова оставлено то же самое предположение относительно вертикальной компоненты скорости, однако компоненты скорости в горизонтальной плоскости считаются квадратичными функциями от z, а также предполагается потенциальность течения и разномасштабность процессов по вертикали и в горизонтальной плоскости, что выражается во введении параметра $\beta = (h_0/L)^2$ и неучете в уравнениях членов порядка $O(\beta^2)$.

Показано, что несмотря на разные условия вывода системы уравнений Грина—Нагди и Железняка—Пелиновского эквивалентны и являются разными формами записи одной и той же системы уравнений теории мелкой воды второго приближения.

Следует отметить, что форма записи системы уравнений может иметь важное значение при конструировании эффективных численных алгоритмов. Представляется, что выведенное нами для модели Грина-Нагди уравнение движения в форме (20) более удобно при численной реализации, поскольку, в отличие от полученного ранее для этой модели уравнения движения в виде (21), оно не содержит вторых производных по времени от искомой функции η. Данным преимуществом по сравнению с известной формой записи модели Грина—Нагди обладают также уравнения движения моделей Железняка—Пелиновского (20) и Алешкова (52).

Уравнение неразрывности (44) модели Алешкова, в отличие от уравнения (8) двух других моделей, содержит пространственные производные высокого порядка, и это можно считать недостатком модели Алешкова. Однако правая часть этого уравнения — дивергентный член, поэтому указанный недостаток может и не давать осложнений при численной реализации. Достоинством же формы записи уравнения движения (52) модели Алешкова, в отличие от уравнений (20), (21), является то, что правая часть уравнения представлена как градиент скалярной функции, что можно эффективно учесть при создании численного метода решения. И наконец, несомненное достоинство уравнений модели Алешкова заключается в том, что вихрь приближенной скорости в этой модели, в отличие от двух других рассмотренных моделей, равен нулю, т. е. течение, описываемое этими уравнениями, является потенциальным, поэтому при численном решении можно использовать богатый опыт разработки методов расчета потенциальных течений жидкости и газа. Разумеется, окончательно оценить достоинства и недостатки рассмотренных моделей и известных вычислительных алгоритмов для них можно будет лишь после всестороннего сравнения результатов расчетов широкого круга задач волновой гидродинамики с нестационарным дном. Сейчас такая оценка не возможна, так как имеются лишь отдельные расчеты с использованием этих моделей.

Список литературы

[1] Елецкий С.В., Майоров Ю.Б., Максимов В.В. и др. Моделирование генерации поверхностных волн перемещением фрагмента дна по береговому склону // Тр. Междунар. конф. “Вычислительные и информационные технологии в науке, технике и образовании”. Вестн. КазНУ им. аль-Фараби. Сер. “Математика, механика, информатика”. 2004. № 3(42). Ч. 2. С. 194–206.

[2] Beisel S.A., Chubarov L.B., Fedotova Z.I., Khakimzyanov G.S. On the approaches to a numerical modeling of landslide mechanism of tsunami wave generation // Communications in Applied Analysis. 2007. Vol. 11, N 1. P. 121–135.

[3] Бабайлов В.В., Дамбиева Д.Б., Хакимзянов Г.С., Чубаров Л.Б. Численное моделирование стокового механизма генерации волн цунами // Тр. Междунар. конф. “Вычисл. и информационные технологии в науке, технике и образовании”. Павлодар: ЭКО, 2006. Т. 1. С. 160–171.

[4] Афанасьев К.Е., Афанасьева М.М., Терентьев А.Г. Исследование эволюции свободных границ при нестационарном движении тел в идеальной несжимаемой жидкости методами конечных и граничных элементов // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1986. № 5. С. 8–13.

[5] Хажоян М.Г. Численное моделирование поверхностных волн над подвижным дном // Вычисл. технологии. 2007. Т. 12, № 4. С. 96–105.

[6] Khakimzyanov G.S., Khazhoyan M.G. Numerical simulation of the interaction between surface waves and submerged obstacles // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling. 2004. Vol. 11, N 1. P. 17–34.

[7] Shokin Yu.I., Fedotova Z.I., Khakimzyanov G.S. et al. Modelling surfaces waves generated by a moving landslide with allowance for vertical flow structure // Rus. J. Numer. Anal. Math. Modelling. 2007. Vol. 22, N 1. P. 63–85.

[8] Дорфман А.А., Яговдик Г.И. Уравнения приближенной нелинейно-дисперсионной теории длинных гравитационных волн, возбуждаемых перемещениями дна и распространяющихся в бассейне переменной глубины // Числен. методы мех. сплошной среды: Сб. научн. тр. / АН СССР, Сиб. отд-ние, ВЦ, ИТПМ. 1977. Т. 8, № 1. С. 36–48.

[9] Lynett P.J., Liu P.L.-F. A numerical study of submarine-landslide-generated waves and run-up // Proc. Royal Society of London. A. 2002. Vol. 458. P. 2885–2910.

[10] Green A.E., Naghdi P.M. A derivation of equations for wave propagation in water of variable depth // J. Fluid Mech. 1976. Vol. 78, part 2. P. 237–246.

[11] Алешков Ю.З. Течения и волны в океане. СПб: Изд-во С.-Петербургского ун-та, 1996. 226 с.

[12] Lynett P.J., Liu P.L.-F. A two-layer approach to water wave modeling // Proc. Royal Society of London. A. 2004. Vol. 460. P. 2637–2669.

[13] Железняк М.И., Пелиновский Е.Н. Физико-математические модели наката цунами на берег // Накат цунами на берег: Сб. научн. тр. / Горький, ИПФ АН СССР, 1985. С. 8–33.

[14] Вольцингер Н.Е., Клеванный К.А., Пелиновский Е.Н. Длинноволновая динамика прибрежной зоны. Л.: Гидрометеоиздат, 1989. 272 с.

[15] Численное моделирование течений жидкости с поверхностными волнами / Г.С. Хакимзянов, Ю.И. Шокин, В.Б. Барахнин, Н.Ю. Шокина. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2001. 394 с.

[16] Ertekin R.C., Webster W.C., Wehausen J.V. Waves caused by a moving disturbance in a shallow channel of finite width // J. Fluid Mech. 1986. Vol. 169. P. 275–292.

Поступила в редакцию 28 января 2007 г.,
в переработанном виде — 11 марта 2008 г.