Исследование полумарковского потока событий

А. А. Назаров, С. В. Лопухова
Томский государственный университет, Россия
e-mail: nazarov@fpmk.tsu.ru, lopuchovasv@mail.ru

И. Р. Гарайшина
Филиал Кемеровского государственного университета
в г. Анжеро-Судженске, Россия
e-mail: irina_g@asf.ru

In the submitted work, the semimarkovian process is considered. Limiting model is considered. Results of analytical treatment of limiting model are compared with results, obtained by the asymptotical method.

Введение

Существует проблема расширения класса математических моделей потоков однородных событий. Зачастую классические модели случайных потоков событий не могут быть адекватны реальным информационным, телекоммуникационным потокам. Моделей пуассоновского и простейшего потоков часто бывает недостаточно для более правдоподобного, приближенного к реальности описания входящих потоков для систем массового обслуживания. Несмотря на то что существуют потоки фазового типа и модулированные пуассоновские потоки, которые более адекватны реальным ситуациям, большой интерес представляют модели полумарковского потока, частным случаем которых являются потоки марковского восстановления и все вышеперечисленные потоки. Методы исследования таких моделей достаточно сложны и приводят к значительным математическим проблемам. Поэтому наряду с задачей расширения классов потоков существует проблема развития методов их исследования.

1. Математическая модель

Случайным потоком однородных событий (потоком) будем называть упорядоченную последовательность

$$t_1 < t_2 < \dots < t_m < t_{m+1} < \dots \tag{1}$$

случайных величин t_m — моментов наступления событий в потоке.

Пусть задана полумарковская матрица $A(x)$ с элементами $A_{k_1k_2}(x)$. Матрица $P = \lim\limits_{x\to\infty} A(x)$ является стохастической, поэтому при заданном начальном распределении она определяет некоторую цепь Маркова $k\left(t_m\right)$ с дискретным временем, которую будем называть вложенной в полумарковский поток цепью Маркова.

Случайный поток однородных событий будем называть полумарковским, если вероятностный закон формирования последовательности (1) определяется начальным распределением и равенствами

$$A_{k_1k_2}(x) = P\left\{k(t_{m+1}) = k_2, t_{m+1} - t_m < x\,|k(t_m) = k_1\right\}$$

при всех $m \geq 1$.

Обозначим $n(t)$ число событий полумарковского потока, наступивших за время t на интервале $[0, t]$.

Задачей исследования данной работы является установление распределения вероятностей $P(n,t) = P\{n(t) = n\}$ при стационарном функционировании эргодической цепи Маркова $k\,(t_m)$. Очевидно, процесс $n(t)$ — немарковский, поэтому определим еще два случайных процесса: $z(t)$ — длину интервала от момента времени t до момента наступления очередного события в рассматриваемом потоке, $k(t)$ — непрерывный слева процесс с непрерывным временем, значение которого на интервале $(t_m, t_{m+1}]$ постоянны и определяются равенствами $k\,(t) = k\,(t_{m+1})$. В силу сделанных определений случайный процесс $\{k(t), n(t), z(t)\}$ является трехмерным марковским процессом с непрерывным временем.

Заметим, что случайный процесс $k(t)$ не является полумарковским в классическом определении [1], так как полумарковский процесс $S(t)$ непрерывен справа и, как указано в [1], для его переходных вероятностей не существует дифференциальных эволюционных уравнений Колмогорова, в то время как предложенный выше процесс $\{k(t), n(t), z(t)\}$ — марковский, поэтому для его распределения вероятностей

$$P\,(k,n,z,t) = P\left\{k(t) = k, n(t) = n, z(t) < z\right\} \tag{2}$$

нетрудно составить систему дифференциальных уравнений Колмогорова

$$\frac{\partial P\,(k,n,z,t)}{\partial t} = \frac{\partial P\,(k,n,z,t)}{\partial z} - \frac{\partial P\,(k,n,0,t)}{\partial z} + \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\partial P\,(\nu,n-1,0,t)}{\partial z}A_{\nu k}\,(z).$$

Обозначим

$$H(k,u,z,t) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{jun}P(k,n,z,t),$$

где $j = \sqrt{-1}$ — мнимая единица. Для этих функций из системы дифференциальных уравнений Колмогорова можно записать

$$\frac{\partial H\,(k,u,z,t)}{\partial t} = \frac{\partial H\,(k,u,z,t)}{\partial z} - \frac{\partial H\,(k,u,0,t)}{\partial z} + e^{ju}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\partial H\,(\nu,u,0,t)}{\partial z}A_{\nu k}\,(z)\,. \tag{3}$$

Обозначим $H\,(u,z,t) = \{H\,(1,u,z,t)\,, H\,(2,u,z,t)\,, \ldots\}$ строку вектор-функции, тогда систему уравнений (3) перепишем в матричном виде

$$\frac{\partial H\,(u,z,t)}{\partial t} = \frac{\partial H\,(u,z,t)}{\partial z} + \frac{\partial H\,(u,0,t)}{\partial z}\left\{e^{ju}A(z) - I\right\}, \tag{4}$$

решение которой удовлетворяет начальному условию $H(u,z,0) = R(z)$, где I — единичная матрица, а стационарное распределение $R(z)$ двумерного марковского процесса $\{k(t), z(t)\}$ является решением задачи Коши

$$\begin{cases} \dfrac{\partial R(z)}{\partial z} = \dfrac{\partial R(0)}{\partial z}\left(I - A(z)\right), \\ R(0) = 0 \end{cases}$$

и определяется равенством $R(z) = æ_1 r \int\limits_0^z (P - A(x))dx$, где $æ_1 = \dfrac{1}{rAE}$. Здесь r — вектор-строка стационарного распределения вероятностей значений вложенной цепи Маркова $k(t_m)$; E — единичный вектор-столбец и матрица $A = \int\limits_0^\infty (P - A(x))dx$.

2. Допредельная модель

Пусть имеем дифференциальное уравнение (4), решение $H(u,z,t)$ которого удовлетворяет начальному условию $H(u,z,0) = R(z)$. Тогда преобразование Фурье — Стилтьесса $\phi(u,\alpha,t) = \int\limits_0^\infty e^{j\alpha z} d_z H(u,z,t)$ вектор-функции $H(u,z,t)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial \phi(u,\alpha,t)}{\partial t} = -j\alpha\phi(u,\alpha,t) + \frac{\partial H(u,0,t)}{\partial z}\left(e^{ju}A^*(\alpha) - I\right) \tag{5}$$

и начальному условию

$$\phi(u,\alpha,0) = R^*(\alpha) = \int\limits_0^\infty e^{j\alpha z} dR(z),$$

где $A^*(\alpha) = \int\limits_0^\infty e^{j\alpha z} dA(z)$. Решение уравнения (5) имеет вид

$$\phi(u,\alpha,t) = e^{-j\alpha t}\left(R^*(\alpha) + \int\limits_0^t e^{j\alpha\tau}\frac{\partial H(u,0,\tau)}{\partial z}\left(e^{ju}A^*(\alpha) - I\right)d\tau\right). \tag{6}$$

Устремив t в бесконечность в выражении (6), получим преобразование Фурье по τ от вектор-функции $\dfrac{\partial H(u,0,\tau)}{\partial z}$. Выполнив обратное преобразование Фурье, определим, что

$$\frac{\partial H(u,0,\tau)}{\partial z} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-j\alpha\tau} R^*(\alpha)\left(I - e^{ju}A^*(\alpha)\right)^{-1} d\alpha.$$

Теперь равенство (6) можно записать в виде

$$\phi(u,\alpha,t) = e^{-j\alpha t}\Bigg(R^*(\alpha) + \\ + \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^t e^{j\alpha\tau}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-jy\tau} R^*(y)\left(I - e^{ju}A^*(y)\right)^{-1} dy \left(e^{ju}A^*(\alpha) - I\right) d\tau \Bigg). \quad (7)$$

Зная, что $H(u,\infty,t) = H(u,t) = \phi(u,0,t)$, получим выражение для вектор-функции $H(u,t)$:

$$H(u,t) = R + \frac{æ_1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{y^2}\left(1 - e^{-jyt}\right) r\left\{I - A^*(y)\right\}\left(I - e^{ju}A^*(y)\right)^{-1} dy \left(e^{ju}P - I\right).$$

Тогда распределение вероятностей $P(n,t)$ числа событий, наступивших за время t, является обратным преобразованием Фурье по переменной u от характеристической функции $h(u,t) = Me^{jun(t)} = H(u,t)E$, оно имеет вид

$$P(n,t) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{-jun} H(u,t) E du = \frac{æ_1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - e^{-jyt}}{y^2} r\Big[I - A^*(y)\Big]^2 A^*(y)^{n-1} E dy, \quad (8)$$

$$P(0,t) = 1 - \frac{æ_1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - e^{-jyt}}{y^2} r\Big[I - A^*(y)\Big] E dy.$$

Заключение

Выполняя асимптотические исследования полумарковского потока событий, аналогичные исследованию потоков марковского восстановления [2, 3], получим, что асимптотику третьего порядка для характеристической функции можно записать в виде

$$Me^{jun(t)} = e^{ju\left(æ_1 t + \frac{(ju)^2}{2}æ_2 t + \frac{(ju)^3}{3!}æ_3 t\right)},$$

где коэффициенты $æ_1$, $æ_2$, $æ_3$ для полумарковского потока определяются аналогично тому, как это сделано в работах [2, 3]. Полученные равенства (8) определяют распределение вероятностей $P(n,t)$ числа событий, наступивших в стационарном полумарковском потоке, заданном полумарковской матрицей $A(x)$ и ее преобразованием $A^*(x)$ Фурье — Стилтьесса. Численная реализация формул (8) позволяет находить численные значения вероятностей $P(n,t)$ для достаточно широкого класса матриц $A^*(x)$ и значений t. Но возможности численной реализации ограничены вычислительными ресурсами. Для достаточно больших значений t естественно применить метод асимптотического анализа полумарковского потока аналогично тому, как это выполнено для потока марковского восстановления в работе [2] и просеянного потока марковского восстановления в работе [3]. Наличие численного алгоритма (8) позволяет определить область применения асимптотических результатов. Для рассмотренных потоков с тремя состояниями вложенной цепи Маркова расстояние Колмогорова — Смирнова между распределениями, полученными асимптотически и по формулам (8), не превосходит 2–3 % для определенных значений $t = T$, это позволяет утверждать, что при $t > T$ эффективно применение асимптотических результатов, а при $t < T$ целесообразно использовать формулы (8), полученные в данной работе.

Список литературы

[1] Королюк В.С. Стохастические модели систем. Киев: Наук. думка, 1989. 208 с.

[2] Назаров А.А., Лопухова С.В. Исследование потока марковского восстановления асимптотическим методом второго порядка // Матер. Междунар. науч. конф. "Математические методы повышения эффективности функционирования телекоммуникационных сетей". Гродно, 2007. С. 170–174.

[3] Лопухова С.В. Исследование полумарковского потока асимптотическим методом третьего порядка // Матер. VI Междунар. научно-практ. конф. "Информационные технологии и математическое моделирование". Томск: Изд-во Том. ун-та, 2007. Ч. 2. С. 30–34.

Поступила в редакцию 28 марта 2008 г.