Вычислительные технологии **Том 13, Специальный выпуск 5, 2008**

Управление капиталом банка путем изменения процентных ставок

К. И. Лившиц, Ю. В. Панина
Томский государственный университет, Россия
e-mail: kim47@mail.ru, oldjul@mail.ru

Influence of the interest rates for credits and deposits on variations of the bank's capital gains is investigated. Equations determining the optimal interest rates for the bank's capital gain maximization at a fixed moment of time have been derived.

Введение

Банком является организация, созданная для привлечения денежных средств и размещения их на условиях возвратности, платности и срочности. Несмотря на многообразие банковских операций, все их можно отнести к одной из двух групп: операции, связанные с привлечением денежных средств за определенную плату (прием вкладов, выпуск облигаций и акций банка и т. д.), и операции, связанные с размещением свободных денежных средств (выдача кредитов, приобретение облигаций и акций других организаций и т. д.). При этом на принятие решения о проведении конкретной операции и на ее результат влияют многочисленные факторы. Однако можно прийти к выводу, что основным инструментом, который позволяет банку управлять изменением своего капитала, являются процентные ставки по принимаемым депозитам и выдаваемым кредитам. Целью данной работы является определение оптимальных процентных ставок, максимизирующих средний капитал банка, для предлагаемой модели изменения его капитала.

1. Модель изменения капитала

Будем предполагать, что поток депозитов является пуассоновским с интенсивностью $\lambda(t)$, депозиты являются независимыми одинаково распределенными неотрицательными случайными величинами x со средним значением $M\{x\} = a_1$. Каждый депозит размещается на случайное время τ с плотностью распределения $b(\tau)$. Будем считать, что проценты по депозитам выплачиваются одновременно с возвратом основной суммы вклада, процентная ставка определяется в момент внесения депозита и остается неизменной. Таким образом, если в момент времени t производится возврат депозита $x(t_i)$, внесенного в момент времени t_i, то выплачивается сумма $[1+u(t_i)(t-t_i)]x(t_i)$, где $u(t_i)$ — процентная ставка в момент времени t_i.

Поток требований на банковские кредиты является пуассоновским с интенсивностью $\mu(t)$. Считается, что каждое такое требование удовлетворяется. Размер кредита ограничен величиной $\beta(t)s(t)$, где $s(t)$ — капитал банка в момент времени t и $0 < \beta(t) \le \beta_0 \le 1$. Введение коэффициента доступности $\beta(t)$ объясняется тем, что банк не может дать в кредит все свои имеющиеся в данный момент средства. Таким образом, средняя величина выдаваемого кредита

$$k(\beta s) = \int\limits_0^{\beta s} xp(x)dx + \beta s \int\limits_{\beta s}^{\infty} p(x)dx, \tag{1}$$

где $p(x)$ — плотность распределения запрашиваемых кредитов. При $\beta \ll 1$ можно считать, что $k(\beta s) \sim \beta s$. Обычно при таком предположении решаются задачи, связанные со сбытом однородного товара [1, 2]. Каждый кредит выдается на случайное время τ с плотностью распределения $c(\tau)$. Считается, что сам кредит и проценты по кредиту возвращаются одновременно. Как и в случае с депозитами, процентные ставки не меняются со временем для определенного кредита. Таким образом, если в момент времени t производится возврат кредита $x(t_i)$, выданного в момент времени t_i, то возвращается сумма $[1 + v(t_i)(t - t_i)]x(t_i)$, где $v(t_i)$ — процентная ставка за пользование кредитом в момент времени t_i.

Рассмотрим среднее изменение капитала банка $\overline{s}(t)$. Пусть вначале изменение капитала банка происходит только за счет движения депозитов. Тогда при принятой модели

$$\overline{s}(t + \Delta t) = \overline{s}(t) + \lambda(t)a_1\Delta t - I(t) + o(\Delta t),$$

где $I(t)$ — средняя выплата за время Δt.

Пусть событие A состоит в том, что до момента времени t было внесено n депозитов в моменты времени t_1, t_2, ..., t_n и на интервале $(t, t + \Delta t)$ возвращается хотя бы один депозит. Наступление такого события возможно в следующих случаях.

1. Возвращается депозит, внесенный в момент времени t_i, а другие депозиты не возвращаются. Вероятность этого события

$$P(A|t_i) = [b(t - t_i)\Delta t + o(\Delta t)] \prod_{j \ne i} [1 - b(t - t_i)\Delta t + o(\Delta t)] = b(t - t_i)\Delta t + o(\Delta t).$$

2. На интервале $(t, t + \Delta t)$ возвращается более одного депозита. Вероятность этого события равна $o(\Delta t)$.

Пусть $P(n, t_i)$ — вероятность того, что на отрезке $[0, t]$ поступило n депозитов и i-й депозит поступил на интервале $(t_i, t_i + dt_i)$. Так как моменты поступления депозитов образуют нестационарный пуассоновский поток, то

$$P(n, t_i) = \frac{\Lambda^{i-1}(t_i, 0)}{(i-1)!}\, \mathrm{e}^{-\Lambda(t_i, 0)} \frac{\Lambda^{n-i}(t - t_i, t_i)}{(n-i)!}\, \mathrm{e}^{-\Lambda(t - t_i, 0)} \lambda(t_i)dt_i,$$

где

$$\Lambda(\tau, t) = \int\limits_0^{\tau} \lambda(t + u)du.$$

Поэтому средняя выплата по депозитам на интервале $(t, t+\Delta t)$ при фиксированной реализации $x(t)$ будет равна

$$I(t|x) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{n}\int\limits_0^t [1+u(t_i)(t-t_i)]x(t_i)P(A|t_i)P(n,t_i) =$$
$$= \int\limits_0^t [1+u(z)(t-z)]x(z)\lambda(z)b(t-z)dz\Delta t.$$

Учитывая, что $M\{x(z)\} = a_1$, и переходя к пределу при $\Delta t \to 0$, получим, что изменение среднего депозитного капитала описывается уравнением

$$\frac{d\overline{s}(t)}{dt} = \lambda(t)a_1 - \int\limits_0^t [1+u(z)(t-z)]\lambda(z)b(t-z)dza_1. \tag{2}$$

Пусть теперь капитал изменяется только за счет выдачи и возврата кредитов. Тогда изменение среднего капитала за время Δt описывается соотношением

$$\overline{s}(t+\Delta t) = \overline{s}(t) - \mu(t)k_1(\beta(t)\overline{s}(t))\Delta t + I(t),$$

где $I(t)$ — средний возврат капитала за время Δt и $k_1(\beta(t)\overline{s}(t)) = M\{k(\beta(t)s(t))\}$. Те же рассуждения, что и при рассмотрении депозитов, показывают, что изменение среднего капитала за счет кредитов имеет вид

$$\frac{d\overline{s}(t)}{dt} = -\mu(t)k_1(\beta(t)\overline{s}(t)) + \int\limits_0^t [1+v(z)(t-z)]k_1(\beta(z)\overline{s}(z))\mu(z)c(t-z)dz. \tag{3}$$

Из (2) и (3) вытекает теперь, что общее изменение среднего капитала банка будет описываться соотношением

$$\frac{d\overline{s}(t)}{dt} = -\mu(t)k_1(\beta(t)\overline{s}(t)) + \int\limits_0^t [1+v(z)(t-z)]\mu(z)k_1(\beta(z)\overline{s}(z))c(t-z)dz +$$
$$+\lambda(t)a_1 - \int\limits_0^t [1+u(z)(t-z)]\lambda(z)b(t-z)dza_1. \tag{4}$$

В дальнейшем будем считать, что $k_1(\beta(t)\overline{s}(t)) = \beta(t)\overline{s}(t)$. Как следует из (4), скорость изменения среднего капитала $\overline{s}(t)$ существенно зависит от процентных ставок $u(t)$, $v(t)$, коэффициента $\beta(t)$ и интенсивностей потоков депозитов $\lambda(t)$ и кредитов $\mu(t)$, которые в свою очередь должны зависеть от процентных ставок. Пусть

$$\mu(t) = \begin{cases} \mu_0(v(t)), & v \le v_m, \\ 0, & v > v_m, \end{cases} \tag{5}$$

где $\mu_0(t)$ — монотонно убывающая функция, так как при увеличении процентной ставки больше некоторого значения v_m кредиты становятся для потребителя невыгодными. Аналогично будем считать, что

$$\lambda(t) = \begin{cases} \lambda_0(u(t)), & u \le u_m, \\ \lambda_0, & u > u_m, \end{cases} \tag{6}$$

где $\lambda_0(t)$ — монотонно возрастающая функция, так как увеличение доходности депозитов выше некоторого уровня уже не может увеличить интенсивность потока хотя бы из-за ограниченности свободной денежной массы.

2. Определение оптимальных процентных ставок

Предположим, что цель банка состоит в выборе таких процентных ставок $u(t)$, $v(t)$ и коэффициента $\beta(t)$, которые максимизируют капитал банка $\overline{s}(t)$ в некоторый заданный момент времени T:

$$\overline{s}(t) = \max . \tag{7}$$

Применение принципа максимума Понтрягина [3] к решению данной задачи будет состоять из следующих этапов. Можно показать, что функция Гамильтона для нашей задачи имеет вид

$$H(\overline{s}, \beta, u, v) = [\lambda(t)a_1 - \mu(t)\beta(t)\overline{s}(t)]\psi(t) + \\ + \int_t^T \psi(y)[(1 + v(t)(y-t))c(y-t)\mu(t)\beta(t)\overline{s}(t) - (1 + u(t)(y-t))a_1\lambda(t)b(y-t)]dy. \tag{8}$$

Здесь сопряженная переменная $\psi(t)$ является решением уравнения

$$\frac{d\psi}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial s} = \mu(t)\beta(t)\phi(t), \tag{9}$$

где

$$\phi(t) = \psi(t) - \int_t^T \psi(y)[1 + v(t)(y-t)]c(y-t)dy \tag{10}$$

с граничным условием $\psi(T) = 0$. Оптимальные процентные ставки по кредитам и депозитам описываются соответственно следующим образом:

$$u(t) = \begin{cases} u_0(t), & u_0(t) \le u_m, \\ u_m, & u_0(t) > u_m; \end{cases} \tag{11}$$

$$v(t) = \begin{cases} v_0(t), & v_0(t) \le v_m, \\ v_m, & v_0(t) > v_m, \end{cases} \tag{12}$$

где $u_0(t)$, $v_0(t)$, а также коэффициент доступности $\beta(t)$ определяются из условия

$$H(\overline{s}, \beta, u, v) = \max,$$

которое приводит к системе соотношений

$$\lambda'_u(t)[\psi(t) - \int_t^T \psi(y)[1 + u(t)(y-t)]b(y-t)dy] - \lambda(t)\int_t^T \psi(y)(y-t)b(y-t)dy = 0; \tag{13}$$

$$\mu'_v(t)[-\psi(t) + \int_t^T \psi(y)[1 + v(t)(y-t)]c(y-t)dy] + \mu(t)\int_t^T \psi(y)(y-t)c(y-t)dy = 0; \tag{14}$$

$$\beta(t) = \begin{cases} \beta_0, & \phi(t) < 0, \\ 0, & \phi(t) > 0. \end{cases} \tag{15}$$

Можно показать, что управление $\beta(t)$ имеет единственную точку переключения t^*, которая определяется как решение уравнения

$$-1 + \int\limits_0^{T-t} (1 + v_m y)c(y)dy = 0. \qquad (16)$$

Смысл условия (16) очевиден. Левая часть соотношения (16) дает прибыль за время $T-t$ от единицы средств, вложенных в кредиты в момент t. При $t > t^*$ вложение средств в кредиты не приносит прибыли.

В качестве примера рассмотрим случай, когда интенсивности потоков депозитов и кредитов соответственно имеют вид

$$\lambda(t) = \begin{cases} \lambda_0[1 - e^{-u(t)}], & u \le u_m, \\ \lambda_0[1 - e^{-u_m}], & u > u_m; \end{cases} \qquad (17)$$

$$\mu(t) = \begin{cases} \mu_0[1 - \frac{v(t)}{v_m}], & v \le v_m, \\ 0, & v > v_m. \end{cases} \qquad (18)$$

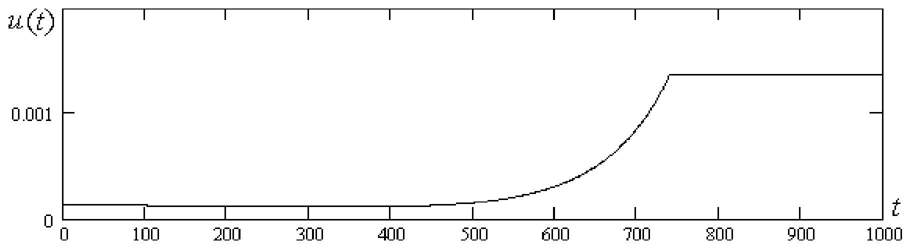

Рис. 1. Оптимальная ставка по депозитам $u(t)$

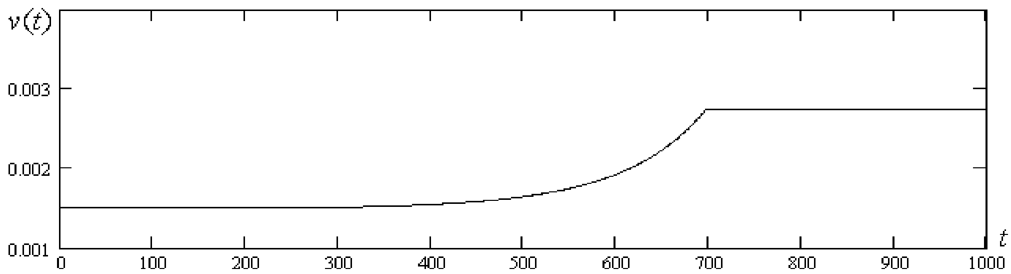

Рис. 2. Оптимальная ставка по кредитам $v(t)$

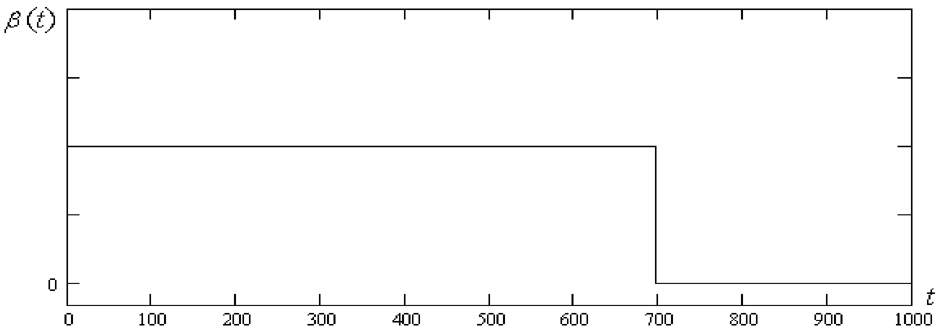

Рис. 3. Оптимальный коэффициент доступности $\beta(t)$

Плотности распределения времени, на которое размещаются депозиты и выдаются кредиты, соответственно определяются следующими соотношениями:

$$b(t) = \theta^2 t e^{-\theta t}, \quad c(t) = \eta^2 t e^{-\eta t}. \tag{19}$$

Графики зависимостей $u(t)$, $v(t)$, $\beta(t)$ приведены на рис. 1–3 для следующих значений параметров: $u_m = 1.37 \cdot 10^{-3}$, $v_m = 2.74 \cdot 10^{-3}$, $T = 1000$, $\beta_0 = 0.0001$, $\mu_0 = 20$, $\theta = 0.01$, $\eta = 0.008$.

Список литературы

[1] Горский А.А., Колпакова И.Г., Локшин Б.Я. Динамическая модель процесса производства, хранения и сбыта товара повседневного спроса // Изв. РАН. Теория и системы управления. 1998. № 1. С. 144–148.

[2] Ланкастер К. Математическая экономика. М.: Сов. радио, 1972.

[3] Ройтенберг Я.Н. Автоматическое управление. М.: Наука, 1978.

Поступила в редакцию 28 марта 2008 г.