Вычислительные технологии **Том 13, Специальный выпуск 5, 2008**

Плотность вероятностей максимального остаточного времени обслуживания на занятых приборах

А. Б. Орлов
Филиал Кемеровского государственного университета в г. Анжеро-Судженске, Россия
e-mail: orlov@asf.ru

In this article, the probability density for maximum remaining service time on an occupied device is found. Problem is soled for the case of a stationary mode in an infinitely line queuing system with two stochastic incoming flows and with two intensity states.

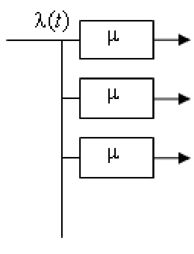
1. Постановка задачи

Рассмотрим бесконечно линейную систему массового обслуживания(СМО) (см. рисунок). Обслуживание будем предполагать экспоненциальным с интенсивностью μ, так что плотность вероятностей времени обслуживания τ имеет $p(\tau) = \mu e^{-\mu\tau}$. Среднее время обслуживания $\theta = 1/\mu$.

Что касается входящего потока событий, то рассмотрим случай, когда он является дважды стохастическим входящим потоком событий с двумя состояниями интенсивности λ_1 и λ_2. Между этими состояниями возможны переходы, которые образуют дискретный марковский процесс с непрерывным временем. Интенсивность перехода $\lambda_1 \to \lambda_2$ обозначим как α_1, интенсивность перехода $\lambda_2 \to \lambda_1$ — как α_2. Этот поток событий подробно изучен в работах А.М. Горцева [1].

Средняя длительность периода занятости, в котором в качестве основной величины, характеризующей систему, используется максимальное остаточное время обслуживания на занятых приборах, найдена в работе [2]. Величина этого максимального остаточного времени в работе [2] обозначена через w. Представляет теоретический интерес нахождение стационарной плотности вероятностей $\pi(w)$ этой величины.

Рассмотрим сначала бесконечно линейную СМО с пуассоновским входящим потоком постоянной интенсивности λ и экспоненциальным обслуживанием с интенсивностью μ.



Пусть в момент времени t мы имеем некоторое значение w. Рассмотрим момент времени $t-\Delta t$ и перечислим варианты, когда в момент времени t мы окажемся в состоянии w.

1. За время Δt не наступило событие потока. Вероятность этого равна $1-\lambda\Delta t+o(\Delta t)$, и попасть в состояние w можно из состояния $w+\Delta t$, что имеет плотность вероятностей $\pi(w+\Delta t)$.

2. За время Δt наступило событие потока. Вероятность этого события равна $\lambda\Delta t + o(\Delta t)$. Тогда возможны следующие варианты:

а) время обслуживания τ поступившей заявки меньше, чем w. Вероятность этого события равна

$$\int\limits_0^w \mu e^{-\mu\tau} d\tau = 1 - e^{-\mu w},$$

и попасть в состояние w можно из $w+\Delta t$;

б) время обслуживания τ поступившей заявки больше, чем w. Тогда установится новое значение w с плотностью вероятностей $\mu e^{-\mu w}$. Но произойти это может либо тогда, когда в момент времени t система или была пуста, вероятность чего равна π_0, либо в момент времени t, когда максимальное остаточное время обслуживания было меньше w, вероятность чего равна $\int\limits_0^w \pi(x)dx$. Замечая, что

$$\pi_0 + \int\limits_0^w \pi(x)dx + \int\limits_w^\infty \pi(x)dx = 1,$$

получаем

$$\pi_0 + \int\limits_0^w \pi(x)dx = 1 - \int\limits_w^\infty \pi(x)dx. \tag{1}$$

Поэтому мы можем записать

$$\pi(w) = (1-\lambda\Delta t)\pi(w+\Delta t) + \\ + \lambda\Delta t \left[\pi(w+\Delta t)\left(1-e^{-\mu w}\right) + \mu e^{-\mu w}\left[1 - \int\limits_w^\infty \pi(x)dx\right]\right] + o(\Delta t). \tag{2}$$

Разлагая $\pi(w+\Delta t)$ в ряд Тейлора

$$\pi(w+\Delta t) = \pi(w) + \pi'(w)\Delta t + o(\Delta t),$$

запишем

$$\pi(w) = \pi(w) + \Delta t\left[\pi'(w) - \lambda\pi(w) + \lambda\pi(w)\left(1-e^{-\mu w}\right) + \right. \\ \left. + \mu e^{-\mu w}\left(1 - \int\limits_w^\infty \pi(x)dx\right)\right] + o(\Delta t), \tag{3}$$

откуда обычным путем получаем уравнение для $\pi(w)$:

$$\pi'(w) - \lambda e^{-\mu w}\pi(w) + \lambda\mu e^{-\mu w}\left(1 - \int_0^\infty \pi(x)dx\right) = 0. \tag{4}$$

Для решения этого уравнения рассмотрим функцию

$$p(w) = 1 - \int_w^\infty \pi(x)dx. \tag{5}$$

Очевидно, что

$$\lim_{w\to+\infty} p(w) = 0, \quad p'(w) = \pi(w),$$

и уравнение (4) примет вид

$$p''(w) - \lambda e^{-\mu w}p'(w) + \lambda\mu e^{-\mu w}p(w) = 0. \tag{6}$$

Для этого уравнения сделаем замену переменных $e^{-\mu w} = z$. Тогда

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dw} = -\mu e^{-\mu w}\frac{d}{dz} = -\mu z\frac{d}{dz}, \\ &\frac{d^2}{dw^2} = \mu^2 z\frac{d}{dz}\left(z\frac{d}{dz}\right) = \mu^2\left(z^2\frac{d^2}{dz^2} + z\frac{d}{dz}\right), \end{aligned} \tag{7}$$

и уравнение (6) примет вид

$$\mu^2 z^2\tilde{p}''(z) + \mu^2 z\tilde{p}'(z) + \lambda z\mu z\tilde{p}'(z) + \lambda\mu z\tilde{p}(z) = 0,$$

где $p(w) = \tilde{p}\left(e^{-\mu w}\right)$. Переходя к безразмерной величине $l = \lambda/\mu$, получим

$$z\left(\tilde{p}''(z) + l\tilde{p}'(z)\right) + \tilde{p}'(z) + l\tilde{p}(z) = 0. \tag{8}$$

Отсюда для функции $\tilde{p}'(z) + l\tilde{p}(z) = q(z)$ запишем уравнение $zq'(z) + q(z) = 0$, общее решение которого имеет вид

$$q(z) = \frac{C_1}{z}.$$

Таким образом, получаем

$$\tilde{p}'(z) + l\tilde{p}(z) = \frac{C_1}{z}.$$

Однако при $z \to 0$ правая часть этого уравнения стремится к бесконечности, в то время как по смыслу всех входящих сюда величин левая часть должна быть ограничена. Поэтому следует положить $C_1 = 0$, тогда для $\tilde{p}(z)$ получается уравнение

$$\tilde{p}'(z) + l\tilde{p}(z) = 0,$$

откуда $\tilde{p}(z) = Ce^{-lz}$. Но, так как при $z \to 0$ $\tilde{p}(z) \to 1$, то $C = 1$ и поэтому $\tilde{p}(z) = e^{-lz}$. Возвращаясь к переменной w, получаем

$$p(w) = \exp\left(-le^{-\mu w}\right). \tag{9}$$

Отсюда следует и явное выражение для $\pi(w)$

$$\pi(w) = p'(w) = l\mu e^{-\mu w} \exp\left(-le^{-\mu w}\right) = \lambda e^{-\mu w} \exp\left(-le^{-\mu w}\right), \tag{10}$$

это и есть окончательный результат. Заметим, что

$$\int\limits_0^\infty \pi(w)dw = \lambda \int\limits_0^\infty e^{-\mu w} \exp\left(-le^{-\mu w}\right) dw = l \int\limits_0^1 e^{-lz} dz = 1 - e^{-l},$$

и поэтому вероятность того, что система пуста, равна $\pi_0 = e^{-l}$, это совпадает с обычной формулой Эрланга.

Другой способ решения уравнения (4) состоит в том, чтобы искать решение в виде ряда

$$\pi(w) = \sum_{k=0}^\infty C_k e^{-\mu(k+1)w} = C_0 e^{-\mu w} + C_1 e^{-2\mu w} + C_2 e^{-3\mu w} + \dots \tag{11}$$

Подставляя это решение в (4) и собирая слагаемые при одинаковых степенях $e^{-\mu w}$, получаем следующую систему:

$$\begin{aligned} &-C_0\mu + \lambda\mu = 0, \\ &-\mu(k+1)C_k - \lambda C_{k-1} - \lambda\mu C_{k-1}\frac{1}{\mu k} = 0. \end{aligned} \tag{12}$$

Отсюда $C_0 = \lambda$ и имеем следующее рекуррентное соотношение:

$$C_k = -\frac{\lambda}{\mu k} C_{k-1} = -\frac{l}{k} C_{k-1}, \quad l = \frac{\lambda}{\mu}. \tag{13}$$

Тогда

$$C_k = (-1)^k \frac{l^k}{k!}\lambda,$$

и поэтому

$$\pi(w) = \lambda e^{-\mu w} \sum_{k=0}^\infty (-1)^k \frac{l^k}{k!} e^{-k\mu w} = \lambda e^{-\mu w} \exp\left(-le^{-\mu w}\right), \tag{14}$$

т. е. получен тот же самый результат, что и ранее.

Вернемся к случаю дважды стохастического входящего потока. Обозначим через $\pi_i(w)$, $i = 1, 2$, стационарную плотность вероятностей величины w при условии, что интенсивность потока $\lambda = \lambda_i$. Тогда, рассматривая, скажем, $\pi_1(w)$, запишем следующее соотношение:

$$\begin{aligned} \pi_1(w) = &\left(1 - \lambda_1\Delta t - \alpha_1\Delta t\right)\pi_1(w + \Delta t) + \alpha_2\Delta t\pi_2(w + \Delta t) + \\ &+ \lambda_1\Delta t\left[\pi_1(w + \Delta t)\left(1 - e^{-\mu w}\right) + \mu e^{-\mu w}\left(1 - \int\limits_w^\infty \pi_1(x)dx\right)\right] + o(\Delta t), \end{aligned}$$

откуда обычным способом получаем уравнение для $\pi_1(w)$:

$$\pi_1'(w) - \lambda_1 e^{-\mu w}\pi_1(w) - \alpha_1\pi_1(w) + \alpha_2\pi_2(w) + \lambda_1\mu e^{-\mu w}\left(1 - \int\limits_w^\infty \pi_1(x)dx\right) = 0. \tag{15}$$

Точно так же, для $\pi_2(w)$, находим

$$\pi_2'(w) - \lambda_2 e^{-\mu w}\pi_2(w) - \alpha_2\pi_2(w) + \alpha_1\pi_1(w) + \lambda_2\mu e^{-\mu w}\left(1 - \int\limits_w^\infty \pi_2(x)dx\right) = 0. \qquad (16)$$

Будем искать решение этой системы уравнений в виде рядов по степеням $e^{-\mu w}$:

$$\pi_1(w) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k e^{-\mu(k+1)w}, \quad \pi_2(w) = \sum_{k=0}^{\infty} D_k e^{-\mu(k+1)w}. \qquad (17)$$

Тогда, подставляя эти ряды и собирая слагаемые с $e^{-\mu w}$, получим

$$\begin{aligned} -\mu C_0 - \alpha_1 C_0 + \alpha_2 D_0 + \lambda_1\mu = 0,\\ -\mu D_0 - \alpha_2 D_0 + \alpha_1 C_0 + \lambda_2\mu = 0, \end{aligned} \qquad (18)$$

откуда имеем

$$\begin{aligned} C_0 &= \frac{\lambda_1\mu + (\lambda_1+\lambda_2)\,\alpha_2}{\mu+\alpha_1+\alpha_2},\\ D_0 &= \frac{\lambda_2\mu + (\lambda_1+\lambda_2)\,\alpha_1}{\mu+\alpha_1+\alpha_2}. \end{aligned} \qquad (19)$$

Приравнивая коэффициенты при $e^{-\mu(k+1)w}$, получаем

$$\begin{aligned} -\mu(k+1)C_k - \lambda_1 C_{k-1} - \alpha_1 C_k + \alpha_2 D_k - \lambda_1\mu\frac{C_{k-1}}{\mu k} = 0\ ,\\ -\mu(k+1)D_k - \lambda_2 D_{k-1} - \alpha_2 D_k + \alpha_1 C_k - \lambda_2\mu\frac{D_{k-1}}{\mu k} = 0, \end{aligned} \qquad (20)$$

или в стандартном виде

$$\begin{aligned} (\mu(k+1)+\alpha_1)\,C_k - \alpha_2 D_k = -\lambda_1\frac{k+1}{k}C_{k-1}\,,\\ (\mu(k+1)+\alpha_2)\,D_k - \alpha_1 C_k = -\lambda_2\frac{k+1}{k}D_{k-1}. \end{aligned} \qquad (21)$$

Отсюда получается рекуррентное соотношение, позволяющее вычислить C_k и D_k через C_{k-1} и D_{k-1}:

$$\begin{aligned} C_k &= -\frac{\lambda_1\,(\mu(k+1)+\alpha_2)}{k\mu\,(\mu(k+1)+\alpha_1+\alpha_2)}C_{k-1} - \frac{\lambda_2\alpha_2}{k\mu\,(\mu(k+1)+\alpha_1+\alpha_2)}D_{k-1},\\ D_k &= -\frac{\lambda_2\,(\mu(k+1)+\alpha_1)}{k\mu\,(\mu(k+1)+\alpha_1+\alpha_2)}D_{k-1} - \frac{\lambda_1\alpha_1}{k\mu\,(\mu(k+1)+\alpha_1+\alpha_2)}C_{k-1}. \end{aligned} \qquad (22)$$

Эта система позволяет, зная C_0 и D_0, вычислять последовательно все C_k и D_k и тем самым находить $\pi_1(w)$ и $\pi_2(w)$, по крайней мере, численно.

Так как финальные вероятности того, что $\lambda(t) = \lambda_1$ и $\lambda(t) = \lambda_2$ равны соответственно $\alpha_2/(\alpha_1+\alpha_2)$ и $\alpha_1/(\alpha_1+\alpha_2)$, безусловная плотность вероятностей $\pi(w)$ величины w равна

$$\pi(w) = \frac{\alpha_2\pi_1(w) + \alpha_1\pi_2(w)}{\alpha_1+\alpha_2}, \qquad (23)$$

что позволяет вычислять $\pi(w)$, по крайней мере, численно.

Список литературы

[1] Горцев А.М., Нежельская Л.А., Шевченко Т.И. Оценивание состояний МС-потока событий при наличии ошибок измерений // Изв. вузов. Физика. 1993. № 12. С. 67–85.

[2] Глухова Е.В., Орлов А.Б. Средняя длительность периода занятости бесконечно линейной системы массового обслуживания с дважды стохастическим входящим потоком // Изв. вузов. Физика. 2003. № 3. С. 62–68.

[3] Назаров А.А. Асимптотический анализ марковизируемых систем. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1991. 158 с.

Поступила в редакцию 28 марта 2008 г.