Вычислительные технологии **Том 13, Специальный выпуск 5, 2008**

Исследование устойчивых сетей множественного доступа с источником повторных вызовов, функционирующим в случайной среде

В. А. Вавилов
Филиал Кемеровского государственного университета
в г. Анжеро-Судженске, Россия
e-mail: vavilov@asf.ru
А. А. Назаров
Томский государственный университет, Россия
e-mail: anazarov@fpmk.tsu.ru

This paper addresses on mathematical models of steady communication networks with a source of repeated calls that provide a plural access in the casual environment. Analytical and numerical research is devoted to asymptotic average characteristics of the considered communication networks.

Вопросы повышения производительности сетей связи не могут быть решены без учета влияния на функционирование сетей неконтролируемых внешних воздействий или случайной среды. Одним из инструментов изучения процессов передачи данных в сетях является математическое моделирование. Исследования такого рода позволяют оценить параметры функционирования действующих сетей связи и выработать рекомендации по созданию новых, более производительных сетей передачи данных.

Рассмотрим математическую модель сети множественного доступа с оповещением о конфликте в виде однолинейной системы массового обслуживания (СМО), на вход которой поступают заявки от конечного числа N абонентских станций. Время генерирования заявки от одной станции имеет экспоненциальное распределение с параметром λ/N. Суммарный поток требований от всех абонентских станций поступает на обслуживание. Прибор этой СМО может находиться в одном из трех состояний: $k = 0$, если он свободен; $k = 1$, если он занят обслуживанием заявки; $k = 2$, если на приборе реализуется этап оповещения о конфликте. Заявка, заставшая в момент поступления прибор свободным, начинает немедленно обслуживаться. Продолжительность обслуживания заявки на приборе имеет экспоненциальное распределение с параметром μ. Если в течение обслуживания этой заявки другие требования на прибор не поступают, то исходная заявка по завершении обслуживания покидает систему. Если во время обслуживания одной заявки поступает другая, то возникает конфликт. От этого момента начинается этап оповещения о конфликте. Заявки, попавшие в конфликт, а также поступившие на этапе оповещения о конфликте, переходят в источник повторных вызовов (ИПВ). Число заявок в ИПВ обозначим i. Длины интервалов оповещения о конфликте также имеют экспоненциальное распределение с параметром $1/a$. Любая абонентская станция начинает генерировать новую заявку лишь после завершения успешного обслуживания прибором ее предыдущей заявки.

Сеть функционирует в случайной среде. В качестве математической модели случайной среды рассмотрим однородную цепь Маркова $s(t)$ с конечным множеством состояний $s = 1, 2, \ldots, S$ и непрерывным временем, инфинитезимальные характеристики которой обозначим $q_{s_1 s_2}$.

Влияние случайной среды на функционирование сети связи определяется зависимостью интенсивности γ/N обращения заявок из ИПВ от состояний s случайной среды, т. е. $\gamma/N = \gamma(s)/N$. Вероятность обращения заявок на прибор из ИПВ за бесконечно малый промежуток времени Δt равна $(\gamma(s)/N)\Delta t + o(\Delta t)$.

В силу свойств приведенной математической модели трехмерный случайный процесс $\{k(t), i(t), s(t)\}$ является цепью Маркова с непрерывным временем.

Обозначим $P(k(t) = k, i(t) = i, s(t) = s) = P_k(i, s, t)$. В любой момент времени для распределения $P_k(i, s, t)$ должно выполняться условие нормировки $\sum\limits_{i=0}^{\infty} \sum\limits_{k=0}^{2} \sum\limits_{s=1}^{S} P_k(i, s, t) = 1$.

Можно показать, что распределение $P_k(i, s, t)$ удовлетворяет системе дифференциальных уравнений Колмогорова

$$\frac{\partial P_0(i,s,t)}{\partial t} + \left[\lambda\left(1 - \frac{i}{N}\right) + \gamma(s)\frac{i}{N}\right] P_0(i,s,t) = \mu P_1(i,s,t) + \frac{1}{a} P_2(i,s,t) + \sum_{s_1=1}^{S} P_0(i,s_1,t) q_{s_1 s},$$

$$\frac{\partial P_1(i,s,t)}{\partial t} + \left[\lambda\left(1 - \frac{i}{N}\right) + \gamma(s)\frac{i}{N} + \mu\right] P_1(i,s,t) = \lambda\left(1 - \frac{i}{N}\right) P_0(i,s,t) +$$

$$+ \gamma(s)\frac{i+1}{N} P_0(i+1,s,t) + \sum_{s_1=1}^{S} P_1(i,s_1,t) q_{s_1 s},$$

$$\frac{\partial P_2(i,s,t)}{\partial t} + \left[\lambda\left(1 - \frac{i}{N}\right) + \frac{1}{a}\right] P_2(i,s,t) = \lambda\left(1 - \frac{i-1}{N}\right) P_2(i-1,s,t) +$$

$$+ \lambda\left(1 - \frac{i-1}{N}\right) P_1(i-2,s,t) + \gamma(s)\frac{i-1}{N} P_1(i-1,s,t) + \sum_{s_1=1}^{S} P_2(i,s_1,t) q_{s_1 s}. \qquad (1)$$

Решение $P_k(i, s, t)$ системы (1) достаточно полно определяет функционирование математической модели сети связи и ее вероятностно-временные характеристики, но для нее не существует точных аналитических методов решения, поэтому данную систему будем исследовать методом асимптотического анализа [1] в условиях большого количества абонентских станций $N \to \infty$. Для этого обозначим $1/N = \varepsilon$, $\varepsilon t = \tau$, $\varepsilon i = x$, $P_k(i, s, t) = \varepsilon H_k(x, s, \tau)$ и рассмотрим предельный процесс $x(\tau) = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} (\varepsilon^2 i(\tau/\varepsilon^2))$, имеющий смысл асимптотического среднего нормированного числа заявок в ИПВ. На первых этапах исследования найдено асимптотическое при $N \to \infty$ распределение вероятностей $R_k(x)$ состояний k канала:

$$R_0(x) = \frac{\lambda(1-x) + x\psi_1(x) + \mu}{H(x)}, \quad R_1(x) = \frac{\lambda(1-x) + x\psi_0(x)}{H(x)},$$

$$R_2(x) = \frac{a(\lambda(1-x) + x\psi_0(x))(\lambda(1-x) + x\psi_1(x))}{H(x)}.$$

Здесь $H(x) = a(\lambda(1-x)+x\psi_1(x))(\lambda(1-x)+x\psi_0(x))+2\lambda(1-x)+x(\psi_0(x)+\psi_1(x))+\mu$, где a, λ и μ заданы, $x = x(\tau)$ — детерминированная функция, определяемая обыкновенным дифференциальным уравнением вида

$$x'(\tau) = -x\psi_0(x)R_0(x) + \lambda(1-x)R_2(x) + (2\lambda(1-x) + x\psi_1(x))R_1(x), \tag{2}$$

в котором $\psi_k(x),\ k = 1,\, 2$, есть величины вида

$$\psi_k(x) = \frac{\sum\limits_{s=1}^{S} \gamma(s) Q_k(x,s)}{\sum\limits_{s=1}^{S} Q_k(x,s)}.$$

Здесь $Q_k(x,s)$ определяются решением системы

$$[\lambda(1-x) + \gamma(s)x]Q_0(x,s) = \mu Q_1(x,s) + \frac{1}{a}Q_2(x,s) + \sum_{s_1=1}^{S} Q_0(x,s_1)q_{s_1 s},$$

$$[\lambda(1-x) + \gamma(s)x + \mu]Q_1(x,s) = (\lambda(1-x) + \gamma(s)x)Q_0(x,s) + \sum_{s_1=1}^{S} Q_1(x,s_1)q_{s_1 s}, \tag{3}$$

$$\frac{1}{a}Q_2(x,s) = (\lambda(1-x) + \gamma(s)x)Q_1(x,s) + \sum_{s_1=1}^{S} Q_2(x,s_1)q_{s_1 s}$$

и условием нормировки $\sum\limits_{k=0}^{2} \sum\limits_{s=1}^{S} Q_k(x,s) = 1$.

Аналитическое решение дифференциального уравнения (2), а также соответствующего уравнения для определения точек покоя представляет довольно трудоемкую задачу в связи с наличием в их правых частях функций $\psi_k(x)$, $k = 0, 1$. Рассмотрим случай предельно редких изменений состояний случайной среды. Предельно редкими изменениями состояний случайной среды будем называть ситуацию, когда инфинитезимальные характеристики $q_{s_1 s}$ являются бесконечно малыми одного порядка.

В пределе $q_{s_1 s} \to 0$ система (3) $3S$ уравнений распадается на S систем уравнений

$$(\lambda(1-x) + \gamma(s)x)Q_0(x,s) = \mu Q_1(x,s) + \frac{1}{a}Q_2(x,s),$$

$$(\lambda(1-x) + \gamma(s)x + \mu)Q_1(x,s) = (\lambda(1-x) + \gamma(s)x)Q_0(x,s),$$

$$\frac{1}{a}Q_2(x,s) = (\lambda(1-x) + \gamma(s)x)Q_1(x,s).$$

Решение $\{Q_0(x,s), Q_1(x,s), Q_2(x,s)\}$ для каждой из таких систем можно записать в виде

$$Q_0(x,s) = (\lambda(1-x) + \gamma(s)x + \mu)r(s)/H_1(x), \quad Q_1(x,s) = (\lambda(1-x) + \gamma(s)x)r(s)/H_1(x),$$

$$Q_2(x,s) = a(\lambda(1-x) + \gamma(s)x)^2 r(s)/H_1(x),$$

где $r(s)$ — стационарное распределение вероятностей состояний среды.

Точки покоя уравнения (2) в условиях $q_{s_1 s} \to 0$ определяются уравнением

$$\lambda(1-x) = \sum_{s=1}^{S} \frac{\mu r(s)(\lambda(1-x)+\gamma(s)x)}{a(\lambda(1-x)+\gamma(s)x)^2 + 2(\lambda(1-x)+\gamma(s)x)+\mu}. \tag{4}$$

Устойчивые точки покоя этой математической модели назовем точками стабилизации сети случайного доступа.

При заданных значениях параметров a, λ, $\gamma(s)$, μ и распределении вероятностей $r(s)$ уравнение (4) допускает решение относительно x по крайней мере численными методами, так как оно приводится к алгебраическому уравнению порядка не выше $2S+1$, следовательно, дифференциальное уравнение (2) может иметь $2S+1$ точек покоя, из которых $S+1$ точек покоя будут устойчивыми.

Для примера рассмотрим случайную среду с двумя состояниями: $s = 1$ и $s = 2$. Пусть $r(1) = 0,6$; $r(2) = 0,4$, $a = 1$; $\lambda = 0,32$; $\gamma(1) = 15$; $\gamma(2) = 380$; $\mu = 2,3$.

На рис. 1 при заданных значениях параметров сплошной линией изображена правая часть уравнения (4), а пунктирной — левая его часть.

Нетрудно показать, что уравнение (4) при заданных значениях параметров имеет пять корней: $x_1 = 0.001474$, $x_2 = 0.01328$, $x_3 = 0.04357$, $x_4 = 0.1382$, $x_5 = 0.6167$, из которых x_2 и x_4 являются неустойчивыми точками покоя, а x_1, x_3, x_5 — устойчивыми точками покоя, т. е. точками стабилизации рассматриваемой сети множественного доступа, поэтому такую сеть можно назвать трехстабильной.

Траектории асимптотического среднего $x = x(\tau)$ в зависимости от начального условия изображены на рис. 2, где по оси абсцисс откладывается время τ, а по оси ординат — значения функции $x = x(\tau)$ в логарифмической шкале.

На примере распределения вероятностей состояний канала покажем, что вероятностно-временные характеристики сети меняются при переходе из одной области в другую, что следует из существенного изменения величины x, характеризующей среднее число

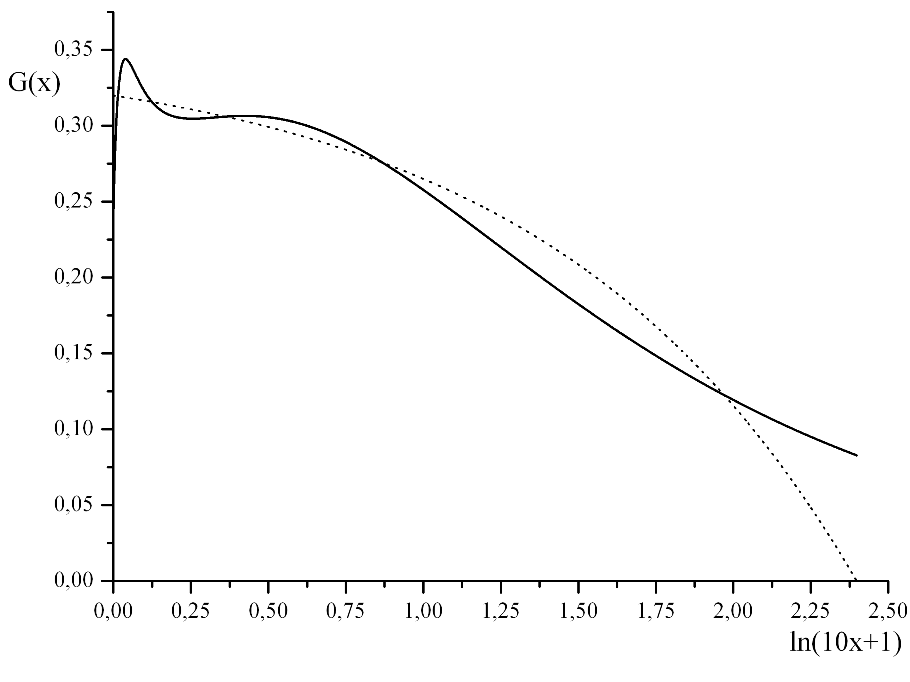

Рис. 1. Точки покоя устойчивых сетей множественного доступа

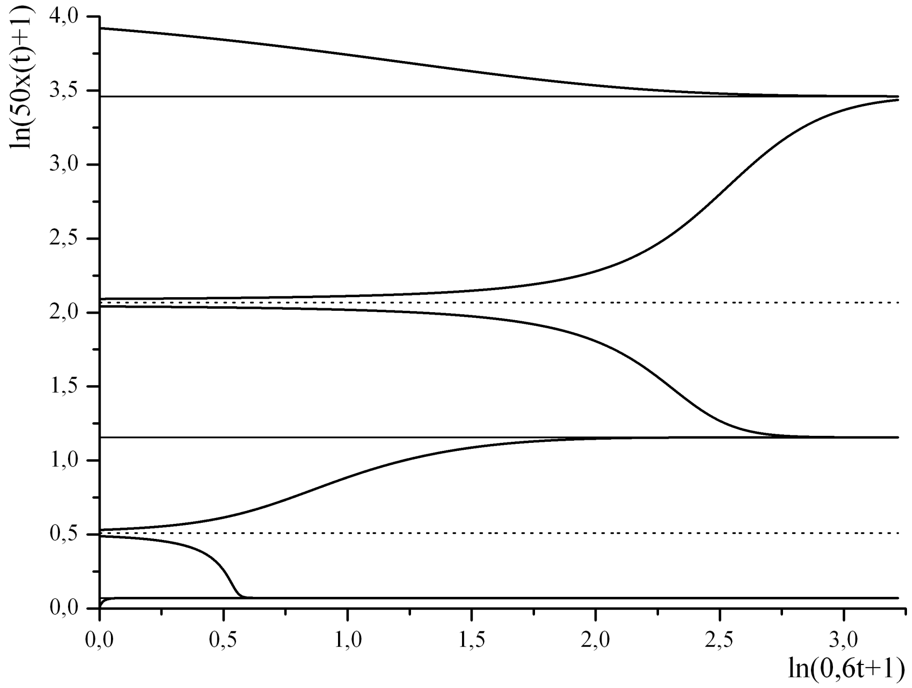

Рис. 2. Траектории асимптотического среднего трехстабильной сети

заявок в ИПВ. Действительно, $R_1(x_1) = 0.139$, $R_1(x_3) = 0.133$, $R_1(x_5) = 0.053$, т. е. в окрестности первой точки стабилизации значительная часть пропускной способности канала расходуется на передачу сообщений. В окрестности точки x_3 пропускная способность уменьшается, а в окрестности точки x_5 падает в три раза.

Рассмотренный пример для предельно редких изменений состояний среды иллюстрирует возможность спонтанных обстоятельств значительного ухудшения работоспособности сети. Это говорит о необходимости дальнейших модификаций протоколов случайного доступа.

Список литературы

[1] Назаров А.А., Моисеева С.П. Метод асимптотического анализа в теории массового обслуживания. Томск: Изд-во НТЛ, 2006. 112 с.

Поступила в редакцию 28 марта 2008 г.