

## Расчет сильного сжатия сферического парового пузырька в жидкости\*

А. А. АГАНИН, Т. Ф. ХАЛИТОВА, Н. А. ХИСМАТУЛЛИНА  
*Институт механики и машиностроения КазНЦ РАН, Казань, Россия*  
e-mail: taliny@kfti.knc.ru

A numerical technique to study dynamics of a spherical gas bubble under strong compression in a liquid is presented based on a second-order accurate difference scheme. It is shown that the technique is more than 10 times more effective than those used in literature and constructed on basis of the first-order accurate methods.

### Введение

Изучение радиальной динамики газовых пузырьков в жидкости при их сильном сжатии в настоящее время привлекает большое внимание исследователей. Это обусловлено тем, что с сильным сжатием пузырька связан целый ряд интересных явлений. К ним относятся: эрозия твердых поверхностей при кавитации [1], однопузырьковая сонолюминесценция [2, 3], многопузырьковая сонолюминесценция [4], нейтронная эмиссия при акустической кавитации дейтерированного ацетона [5, 6] и т. д. Сонолюминесценция и нейтронная эмиссия наблюдаются в финальной стадии сжатия пузырьков, когда их радиус имеет значение порядка долей микрометра [7]. Столь малые размеры пузырьков значительно затрудняют проведение экспериментальных исследований. Поэтому важное значение приобретают теоретические методы.

Изучение процесса коллапса пузырьков связано с постоянным усложнением и совершенствованием используемых моделей. В частности, в настоящее время считается, что сонолюминесценция и нейтронная эмиссия при сжатии пузырьков обусловлены тем, что в его финальной высокоскоростной стадии стенка пузырька движется со скоростью порядка 1 км/с [7]. В результате этого в полости пузырька образуется сферическая ударная волна, сходящаяся к центру пузырька [8, 9]. По мере схождения ее интенсивность быстро нарастает — так, что в небольшой окрестности центра образуется горячее ядро, излучающее свет [10] и нейтроны [11]. В случае нейтронной эмиссии в области радиусом примерно 100 нм достигаются температура около  $10^8$  К и плотность около  $10 \text{ г/см}^3$  [11].

Исследование сильного сжатия пузырька с образованием ударных волн в его полости, как правило, проводится методом вычислительного эксперимента. В качестве моделей обычно применяются те или иные вариации уравнений динамики газа и жидкости. Во многих работах движение жидкости описывается приближенно в предположении малой сжимаемости. В таком случае применяемые модели различаются уравнениями динамики газа и описанием процессов на межфазной поверхности. В частности,

---

\*Работа выполнена в рамках программы ОЭММПУ РАН и при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 08-01-00215 и № 08-01-97029).

© Институт вычислительных технологий Сибирского отделения Российской академии наук, 2008.

в [8] применяется модель газа Ван-дер-Ваальса без учета вязкости и теплопроводности. В [12] учитываются вибрационные степени свободы молекул газа, его диссоциация и ионизация, потери на излучение. В работе [13] учитываются теплопроводность газа, испарение и конденсация на межфазной поверхности, в [14] — теплопроводность и вязкость, ионизация и рекомбинация. Уравнения газовой динамики для описания движения газа в полости пузырька и уравнения динамики сжимаемой жидкости для описания движения окружающей жидкости впервые применены в работе [9]. Однако в [9] эта модель использовалась при рассмотрении всего процесса расширения—сжатия пузырька. Подобный подход требует больших затрат компьютерного времени. В связи с этим в работах [11, 15, 16] предложена более экономичная модель, в которой при расширении и на начальной стадии сжатия пузырька, когда его поверхность движется с малыми числами Маха, газ полагается гомобарическим, а жидкость — несжимаемой. Полная же гидродинамическая модель применяется лишь на высокоскоростной стадии сжатия, когда число Маха движения стенки пузырька становится близким к единице.

Задачи динамики пузырька решаются в основном с применением расщепления по физическим процессам [17]. При этом для расчета движения невязкого нетеплопроводного газа (и жидкости) применяются методы первого порядка точности. В частности, используются метод Годунова [11, 12, 15, 16], схема Лакса—Фридрихса [8], комплекс KDYNA [9]. TVD-схема второго порядка точности применялась в работе [14]. Однако сделано это лишь в рамках модели с упрощенным описанием динамики жидкости (в предположении ее малой сжимаемости). При этом теплопроводность в [14] учитывается по явной схеме, что означает неоправданно жесткие ограничения на временной шаг интегрирования. В работе [13] для расчета движения газа применяют спектральный метод коллокаций, но его эффективность в задачах с ударными волнами изучена мало.

В настоящей работе предлагается экономичная методика расчета задач высокоскоростной динамики пузырька. В этой методике движение газа в полости пузырька и окружающей жидкости описывается уравнениями динамики сжимаемой жидкости. Осуществляется учет эффектов теплопроводности газа и жидкости, испарения и конденсации на межфазной поверхности, вязкости жидкости и поверхностного натяжения. Уравнения состояния приняты в виде довольно общих зависимостей давления и внутренней энергии от плотности и температуры. При численном решении задачи применяется расщепление на два этапа. На первом этапе решаются уравнения без учета теплопроводности газа и жидкости с помощью модификации метода Годунова на основе UNO-схемы второго порядка точности по пространству и времени, аналогично тому, как это сделано в работе [18]. На втором этапе решается уравнение теплопроводности. При этом используется неявная схема второго порядка точности по пространству. Эффекты испарения и конденсации учитываются по формулам Герца—Кнудсена—Ленгмюра [11].

Проводится сравнение результатов применения методики настоящей работы и методики на основе классической схемы Годунова первого порядка точности, аналогичной тем, что применяются в [11, 12, 15, 16]. Показано, что методика настоящей работы значительно более экономична (более чем в 10 раз).

## 1. Постановка задачи

Рассматривается радиальная динамика сферического пузырька газа в неограниченном объеме жидкости. Движение газа и жидкости в сферической системе координат

с началом отсчета радиальной координаты  $r$  в центре пузырька описывается следующими уравнениями:

$$\begin{aligned}(\rho r^2)_t + (\rho u r^2)_r &= 0, \\(\rho u r^2)_t + (p r^2 + \rho u^2 r^2)_r &= 2pr, \\(\rho E r^2)_t + [u r^2 (p + \rho E) - \kappa T_r r^2]_r &= 0.\end{aligned}\tag{1}$$

Здесь  $\rho$  — плотность,  $u$  — радиальная скорость,  $p$  — давление,  $E = \varepsilon + u^2/2$  — удельная полная энергия,  $\varepsilon$  — удельная внутренняя энергия,  $T$  — температура,  $\kappa$  — коэффициент теплопроводности. Уравнения состояния принимаются в форме зависимостей давления и внутренней энергии от плотности и температуры:  $p = p(\rho, T)$ ,  $\varepsilon = \varepsilon(\rho, T)$ .

Граничные условия в центре пузырька ( $r = 0$ ) имеют следующий вид:

$$u = 0, \quad T_r = 0,\tag{2}$$

а на бесконечном удалении от его поверхности ( $r = \infty$ ) — следующий:

$$p = p_\infty(t), \quad T = T_\infty(t).\tag{3}$$

На межфазной поверхности ( $r = R(t)$ ) имеем

$$p^+ = p^- - \frac{4\mu u^+}{R} - \frac{2\sigma}{R}, \quad \dot{R} = u^+ + j/\rho^+ = u^- + j/\rho^-, \tag{4}$$

$$T^+ = T^-, \quad (\kappa T_r)^+ - (\kappa T_r)^- = jl.\tag{5}$$

Индекс “+” относится к стороне жидкости, индекс “−” относится к стороне пара,  $\mu$  — коэффициент вязкости жидкости,  $\sigma$  — коэффициент поверхностного натяжения,  $j$  — интенсивность фазовых преобразований,  $l$  — теплота парообразования.

Влияние вязкости учитывается приближенно в предположении несжимаемости жидкости и без учета ее влияния на изменение энергии. Поэтому вязкостные слагаемые отсутствуют в уравнениях движения и энергии системы (1), но присутствуют в динамическом граничном условии среди соотношений (4). Учет влияния вязкости жидкости в таком приближении вполне оправдан, поскольку он проявляется в основном при малых скоростях движения межфазной поверхности, когда жидкость ведет себя как несжимаемая. При больших скоростях влиянием вязкости можно пренебречь, так как в этом случае преобладают силы инерции.

Если пузырек заполнен неконденсируемым газом, то  $j = 0$ . Если же пузырек паровой, то для вычисления интенсивности фазовых преобразований  $j$  используется формула Герца–Кнудсена–Ленгмюра [11]:

$$j = \frac{\alpha_{ac}}{\sqrt{2\pi R_\nu}} \left( \frac{p_S(T^+)}{\sqrt{T^+}} - \frac{\chi p^-}{\sqrt{T^-}} \right), \tag{6}$$

где

$$\chi = \exp(-\Omega^2) - \Omega\sqrt{\pi} \left( 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\Omega \exp(-x^2) dx \right), \quad \Omega = \frac{j}{\sqrt{2}p^-} \sqrt{R_\nu T^-}.$$

Здесь  $p_S$  — давление насыщения,  $\alpha_{ac}$  — коэффициент аккомодации,  $R_\nu$  — газовая постоянная для пара. Посредством параметра  $\chi$  учитывается подвижность поверхности пузырька. Зависимости  $p_S(T)$ ,  $\kappa^+(T)$ ,  $\kappa^-(T)$ ,  $\mu(T)$ ,  $l(T)$  обычно определяются по экспериментальным данным.

## 2. Методика расчета

В ходе сжатия пузырька в жидкости около его поверхности возникают большие градиенты давления, а тепловые пограничные слои и в газе, и в жидкости становятся очень тонкими. Градиент давления в жидкости воздействует на скорость сжатия пузырька, а от тепловых пограничных слоев зависит масса пара в пузырьке, что значительно влияет на изменение радиуса пузырька в конце сжатия. Кроме того, в финальной стадии сжатия возле поверхности пузырька в его полости возникает радиально сходящаяся ударная волна. В последующем именно она определяет экстремальные значения газодинамических параметров в окрестности центра пузырька. Поэтому в расчетах важно правильно описать градиенты давления жидкости у поверхности пузырька, тепловые пограничные слои в газе и жидкости и сходящуюся ударную волну. Для учета перечисленных особенностей движения жидкости и газа удобно использовать подвижную эйлерово-лагранжеву систему (СЭЛ) координат, связанную с поверхностью пузырька. Связь СЭЛ-координат с поверхностью пузырька означает явное выделение межфазной границы, что важно для правильного описания ее перемещения. В дополнение к этому СЭЛ-координаты позволяют осуществить плавный переход от сетки с хорошим разрешением пограничных слоев к сетке с хорошим разрешением ударной волны. Соотношение эйлеровой координаты  $r$  и связанного с ней времени  $t$  и СЭЛ-координаты  $\xi$  и связанного с ней времени  $\tau$  имеет вид

$$r = r(\xi, \tau), \quad t = \tau.$$

Система уравнений (1) с граничными условиями (2)–(5) решается численно расщеплением на два этапа. Сначала рассматриваются уравнения газовой динамики в СЭЛ-координатах:

$$\mathbf{Q}_\tau + \mathbf{F}_\xi = \mathbf{S}, \quad (7)$$

где

$$\mathbf{Q} = \sqrt{h}\mathbf{q}, \quad \mathbf{F} = \sqrt{hr}\xi^{-1}\mathbf{f}, \quad \mathbf{S} = \sqrt{h}\mathbf{s}, \quad \sqrt{h} = r^2 r_\xi,$$

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho E \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{pmatrix} \rho(u - r_\tau) \\ \rho u(u - r_\tau) + p \\ \rho E(u - r_\tau) + pu \end{pmatrix}, \quad \mathbf{s} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2p/r \\ 0 \end{pmatrix},$$

с граничными условиями

$$r = 0 : u = 0;$$

$$r = \infty : p = p_\infty(t); \quad (8)$$

$$r = R : p^+ = p^- - \frac{4\mu u^+}{R} - \frac{2\sigma}{R}, \quad \dot{R} = u^+ + j/\rho^+ = u^- + j/\rho^-. \quad (9)$$

Затем решается уравнение теплопроводности в СЭЛ-координатах:

$$T_\tau = -(u - r_\tau)T_\xi r_\xi^{-1} + \frac{1}{\rho\varepsilon_T r^2 r_\xi} (\kappa T_\xi r_\xi^{-1} r^2)_\xi - \frac{p - \rho^2 \varepsilon_p}{\rho\varepsilon_T} (u_\xi r_\xi^{-1} + 2ur^{-1}), \quad (10)$$

с граничными условиями

$$r = 0 : T_\xi = 0; \quad r = \infty : T = T_\infty(t); \quad (11)$$

$$r = R : T^+ = T^-, \quad (\kappa T_\xi r_\xi^{-1})^+ - (\kappa T_\xi r_\xi^{-1})^- = j l^-, \quad (12)$$

и определяется интенсивность фазовых преобразований  $j$  по формуле (6).

В расчетах применяется область  $0 \leq r \leq r_f(t)$  с достаточно далеко удаленной искусственной границей  $r = r_f(t)$ . Начальное положение искусственной границы  $r_f^0$  зависит от конкретной задачи, а ее перемещение находится из граничных условий (8) и (9).

Расчетная область покрывается сеткой размером  $N = N_g + N_l$  ячеек, содержащей  $N_g$  ячеек в области газа и  $N_l$  ячеек в области жидкости. Для детального отображения процессов вблизи поверхности пузырька выбирается сетка, сгущающаяся (по геометрической процессии) к межфазной поверхности как со стороны газа, так и со стороны жидкости. По мере формирования в газе радиально сходящейся ударной волны осуществляется постепенный переход на равномерную сетку, а затем, при необходимости, и на сетку со сгущением к центру пузырька.

В СЭЛ-координатах сетка всегда остается равномерной, с шагом  $\Delta\xi$ , что в значительной степени упрощает построение вычислительной схемы. Сеточные аналоги плотности —  $\hat{\rho}_i$ , давления —  $\hat{p}_i$ , радиальной скорости —  $\hat{u}_i$ , удельной полной энергии —  $\hat{E}_i$  и температуры —  $\hat{T}_i$  представляют собой аппроксимацию среднеинтегральных значений соответствующих величин по объему ячейки с номером  $i$ . В дальнейшем используются следующие обозначения:  $n$  — предыдущий слой  $\tau = \tau^n$ ,  $n + 1/2$  — полуцелый промежуточный слой  $\tau = \tau^{n+1/2} = (\tau^n + \tau^{n+1})/2$ , а  $n + 1$  — последующий слой  $\tau = \tau^{n+1}$ ,  $\Delta\tau^n = \tau^{n+1} - \tau^n$  — шаг по времени.

На первом этапе применяется модификация метода Годунова второго порядка точности по пространству и времени на основе UNO-схемы Хартена для скалярных законов сохранения [18]. Для вычисления значений сеточных функций на следующем временном слое используется явная конечно-объемная схема:

$$\frac{\hat{\mathbf{Q}}_i^{n+1} - \hat{\mathbf{Q}}_i^n}{\Delta\tau^n} + \frac{\hat{\mathbf{F}}_{i+1/2}^{n+1/2} - \hat{\mathbf{F}}_{i-1/2}^{n+1/2}}{\Delta\xi} = \hat{\mathbf{S}}_i^{n+1/2}, \quad (13)$$

где

$$\hat{\mathbf{F}}_{i\pm 1/2}^{n+1/2} = \mathbf{F}(\hat{\mathbf{Q}}_{i\pm 1/2}^{n+1/2}), \quad \hat{\mathbf{S}}_i^{n+1/2} = \mathbf{S}(\hat{\mathbf{Q}}_i^{n+1/2}).$$

Здесь вектор  $\hat{\mathbf{Q}} = \sqrt{\hat{h}}\hat{\mathbf{q}}$  представляет собой сеточный аналог вектора  $\mathbf{Q}$ . При этом  $\hat{\mathbf{q}} = (\hat{\rho}, \hat{\rho}\hat{u}, \hat{\rho}\hat{E})^T$  задается в виде кусочно-линейной функции с разрывами на границах между ячейками:

$$\hat{\mathbf{q}} = \hat{\mathbf{q}}_i^n + (\xi - \xi_i)(\hat{\mathbf{q}}_\xi)_i^n + (\tau - \tau^n)(\hat{\mathbf{q}}_\tau)_i^n, \quad (14)$$

где  $\xi_{i-1/2} < \xi < \xi_{i+1/2}$ ,  $\tau^n \leq \tau < \tau^{n+1}$ .

Для получения аппроксимации производной по времени  $\hat{\mathbf{q}}_\tau$  используется ее явное выражение из системы (7). Аппроксимация пространственной производной  $\hat{\mathbf{q}}_\xi$  в центре ячейки  $i$  осуществляется по формуле

$$(\hat{\mathbf{q}}_\xi)_i = \text{minmod} \left[ \Delta_i^1 - \frac{1}{2}\Delta_{i+1/2}^2, \Delta_{i-1}^1 + \frac{1}{2}\Delta_{i-1/2}^2 \right] / \Delta\xi,$$

где

$$\text{minmod}[x, y] = \frac{1}{2}(\text{sign}(x) + \text{sign}(y)) \min(|x|, |y|),$$

$$\Delta_i^1 = \hat{\mathbf{q}}_{i+1} - \hat{\mathbf{q}}_i, \quad \Delta_{i+1/2}^2 = \min(|\hat{\mathbf{q}}_{i+1} - 2\hat{\mathbf{q}}_i + \hat{\mathbf{q}}_{i-1}|, |\hat{\mathbf{q}}_{i+2} - 2\hat{\mathbf{q}}_{i+1} + \hat{\mathbf{q}}_i|).$$

Используемый принцип минимальных значений производных позволяет уменьшить нефизические осцилляции в окрестности разрывов.

Решение системы (13) осуществляется следующим образом. Сначала вычисляется точное решение  $\hat{\mathbf{q}}_{i\pm 1/2}^{n+1/2}$  задачи Римана о распаде плоского разрыва на границах между ячейками в момент времени  $\tau = \tau^{n+1/2}$ . С использованием этого решения находится значение потока  $\hat{\mathbf{F}}_{i\pm 1/2}^{n+1/2}$ . Затем вычисляется вектор свободных членов  $\hat{\mathbf{S}}_i^{n+1/2}$  и из системы (13) находятся параметры следующего временного слоя.

Такой подход позволяет получить второй порядок точности всюду в области гладких решений, в то время как при использовании TVD-схемы [14] порядок точности снижается не только в окрестности разрывов решения, но и в окрестности локальных экстремумов. Рассматриваемая разностная схема не обладает свойством TVD. Однако возрастание полной вариации происходит в пределах порядка точности схемы, что является вполне приемлемым.

Заметим, что существует и другой вариант кусочно-линейной аппроксимации. В этом случае со вторым порядком точности приближаются не компоненты вектора  $\hat{\mathbf{q}}$  (14), а характеристические величины. Однако применение такого подхода связано со значительным усложнением алгоритма. К тому же наличие в используемых уравнениях (7) источников  $\mathbf{S}$ , не содержащих производных, усложняет построение численной схемы.

На втором этапе для решения уравнения теплопроводности (10) с граничными условиями (11) и (12) применяется неявная схема

$$a_i \hat{T}_{i+2}^{n+1} + b_i \hat{T}_{i+1}^{n+1} + c_i \hat{T}_i^{n+1} + d_i \hat{T}_{i-1}^{n+1} + e_i \hat{T}_{i-2}^{n+1} = f_i, \quad (15)$$

где коэффициенты  $a_i, b_i, c_i, d_i, e_i, f_i$  определяются на временном слое  $\tau = \tau^n$ . Их вид в силу громоздкости не приводится.

В разностной схеме (15) в зависимости от расположения ячейки, в которой составляются аппроксимации производных по пространственной переменной, могут появляться нулевые коэффициенты:

- а) в центре пузырька с учетом условия  $T_\xi = 0$  получим  $a_i = d_i = e_i = 0$ ;
- б) внутри области газа и области жидкости используются центрально-разностные аппроксимации, в соответствующих уравнениях — два нулевых коэффициента  $a_i = e_i = 0$ ;
- в) в приграничных ячейках и в газе, и в жидкости при составлении разностного уравнения применяется явное выражение температуры в граничной точке, которое получается с использованием условия (12). Это уравнение содержит значения температуры в четырех точках (в газе  $e_i = 0$ , в жидкости  $a_i = 0$ );
- г) разностное уравнение в последней ячейке в жидкости составляется с учетом краевого условия на внешней границе и содержит три нулевых коэффициента  $a_i = b_i = e_i = 0$ .

Система уравнений (15) решается методом прогонки. Затем определяется интенсивность фазовых преобразований, которая используется на следующем временном слое в граничных условиях первого этапа.

На каждом временном слое из условия устойчивости Куранта [19] для метода решения уравнений первого этапа вычисляется шаг по времени:

$$\Delta\tau^n = \alpha_{CRT} \frac{\Delta\xi}{a},$$

где  $\alpha_{CRT}$  — число Куранта,  $a$  — наибольшая по модулю скорость распространения волн вдоль оси  $\xi$ . Этот шаг оказывается пригодным и для второго этапа, поскольку расчетная схема второго этапа является неявной.

### 3. Результаты расчетов

Эффективность предлагаемой методики расчета задач динамики сферического пузырька с сильным сжатием демонстрируется путем ее сравнения с методиками первого порядка точности, что описывается в литературе [11, 12, 15, 16], на примере следующей задачи. До начального момента времени  $t = 0$  кавитационный (паровой) сферический пузырек, находящийся в неограниченном объеме жидкости (дейтерированного ацетона), расширяется до радиуса  $R^0$ . В момент  $t = 0$  расширение прекращается, давление пара в полости пузырька считается однородным и равным давлению насыщения  $p_S^0$ . Давление жидкости на бесконечности при  $t \geq 0$  равно  $p_\infty^0$ ,  $p_\infty^0 > p_S^0$ . Под действием перепада давления в жидкости пузырек при  $t > 0$  сжимается. В ходе сжатия в полости пузырька формируется ударная волна.

Начальные распределения давления и скорости жидкости определяются в предположении  $j = 0$  и с учетом того, что сжимаемость жидкости в начале сжатия несущественна. Температура полагается постоянной и равной  $T_\infty^0$ , а распределение плотности определяется из уравнения состояния. При описании состояния жидкого и парообразного дейтерированного ацетона применяются реалистичные уравнения в форме Ми—Грюнайзена [11].

Для реализации граничных условий на бесконечности используется удаленная внешняя искусственная граница  $r = r_f(t)$ , перемещение которой при  $t > 0$  определяется из решения задачи о плоском поршне, вдвигаемом в среду (или выдвигаемом из нее) при известном давлении  $p_f^0$  на поверхности поршня. Величина  $p_f^0$  находится по распределению давления в жидкости при  $t = 0$  с учетом того, что сжимаемость жидкости в начале сжатия несущественна [11]. Путем численного эксперимента установлено, что в данной задаче начальное положение искусственной внешней границы достаточно принять равным  $r_f^0 = 9R^0$ .

В начале сжатия применяется подвижная сетка, сгущающаяся по геометрической прогрессии к межфазной поверхности как в области пузырька  $0 \leq r \leq R$ , так и в области жидкости  $R \leq r \leq r_f$ . Когда в газе появляются большие градиенты давления и начинает формироваться ударная волна, осуществляется постепенный переход на равномерную сетку. Соотношение приграничных ячеек в жидкости и в газе определяется выражениями

$$\frac{\Delta r_f}{\Delta r_g} = \frac{\gamma_0}{\beta(R)}, \quad \Delta r_g = \beta(R) \frac{R}{N_g},$$

где

$$\beta(R) = \begin{cases} \beta_1 & \text{при } R > R_1, \\ [(1 - \beta_1)(R - R_1)/(R_2 - R_1)] + \beta_1 & \text{при } R_2 \leq R \leq R_1, \\ 1 & \text{при } R < R_2. \end{cases}$$

Здесь  $R_1$  и  $R_2$  — значения радиуса пузырька, соответствующие моментам начала и завершения перехода на равномерную сетку. Эти значения, как и значения параметров  $\gamma_0$ ,  $\beta_1$ , определяются экспериментально.

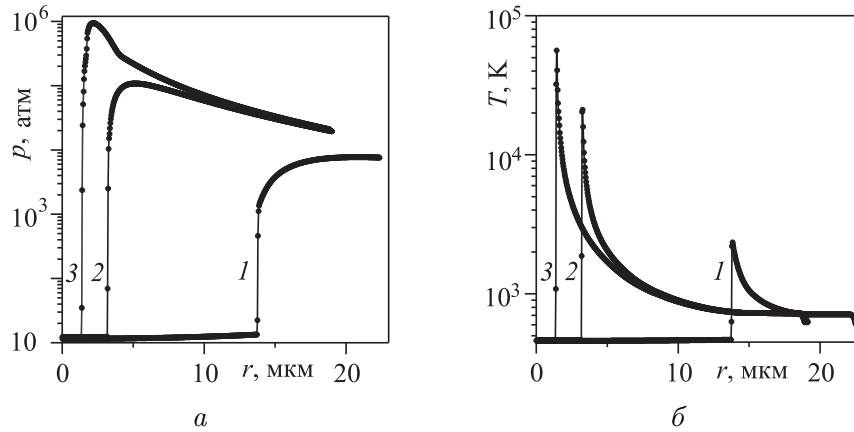


Рис. 1. Пространственное распределение давления (а) и температуры (б) внутри полости пузырька для трех последовательных моментов времени финальной стадии сжатия: кривые 1 соответствуют моменту  $t_1 \approx t^* - 3.38$  нс, кривые 2 —  $t_2 \approx t^* - 0.24$  нс, кривые 3 —  $t_3 \approx t^* - 0.046$  нс

Задача решается при следующих входных данных:  $R^0 = 500$  мкм,  $T_\infty^0 = 273.15$  К,  $p_S^0 = 0.0879$  атм,  $p_\infty^0 = 15$  атм,  $\alpha_{ac} = 1$ ,  $R_1 = 56.31$  мкм,  $R_2 = 35.05$  мкм,  $\gamma_0 = 0.01$ ,  $\beta_1 = 0.08$ .

На рис. 1 представлены пространственные распределения давления и температуры газа внутри полости сферического пузырька для трех последовательных моментов времени  $t_1 - t_3$  (кривые 1–3, номер кривой соответствует номеру момента времени) финальной стадии сжатия. Для согласования моментов времени используется время  $t^*$ , когда температура газа в четвертой от центра пузырька ячейке принимает максимальное по  $r$  значение. По мере сжатия радиальное распределение газодинамических параметров становится все более неоднородным — так, что со временем в области радиально сходящейся волны сжатия в полости пузырька формируется ударная волна (кривые 1). С течением времени интенсивность волны сжатия и ударной волны возрастает. Конфигурация фронта волны сжатия по мере ее схождения к центру полости пузырька значительно усложняется, что лучше видно по кривой давления (кривая 3). При этом наибольшее значение температуры достигается на фронте ударной волны, а давления — за ее фронтом.

Для оценки экономичности предлагаемой методики ее результаты сравниваются с результатами, которые получаются на основе классического метода Годунова первого порядка точности [19]. На рис. 2 приводятся графики пространственных распределений давления газа в полости пузырька в момент времени  $t_1$ , полученные на ряде последовательно сгущающихся расчетных сеток по методике настоящей работы и с применением классической схемы Годунова. Видно, что в масштабе рис. 2, а расхождение между всеми представленными решениями относительно невелико. При этом графики решения, полученного по методике настоящей работы, на всех сетках визуально совпадают с тем, что получается на самой грубой сетке  $a$  со 150 ячейками в газе и 385 ячейками в жидкости. Результаты, полученные с применением классического метода Годунова, сливаются с “эталоном” (здесь и далее под “эталоном” понимается численное решение, визуально не изменяющееся при дальнейшем измельчении сетки), начиная с сетки  $c$  (600 + 1540 ячеек). На рис. 2, б представлен наиболее сложный для численного описания фрагмент решения, приведенного на рис. 2, а. Видно, что здесь сетки  $c$  (600 + 1540 ячеек) для



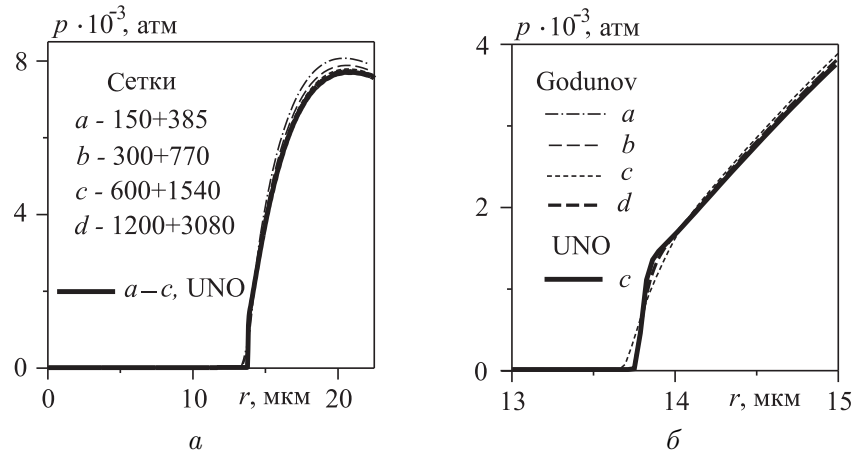


Рис. 2. Пространственные распределения давления газа в полости пузырька в момент времени  $t_1$ , полученные с применением классической схемы Годунова и ее UNO-модификации

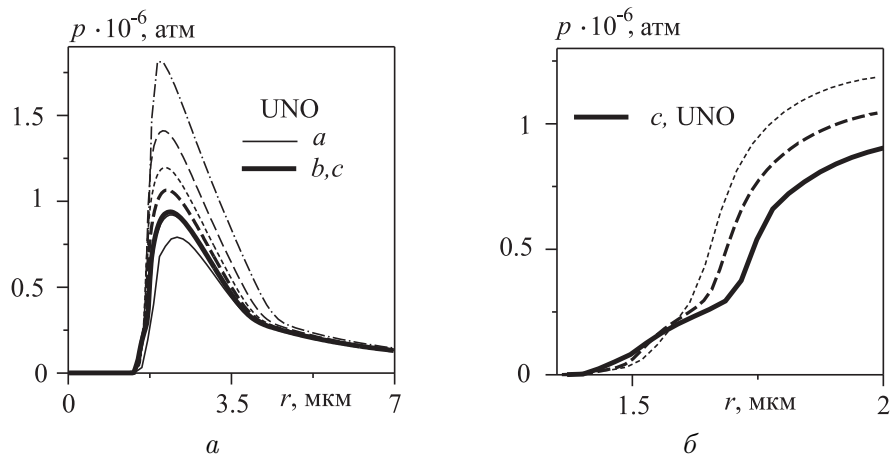


Рис. 3. То же, что и на рис. 2, включая обозначения указанных кривых, но для момента  $t_3$

классического метода Годунова еще недостаточно. Лишь сетка  $d$  (1200 + 3080 ячеек) позволяет добиться решения, достаточно близкого к “эталону”.

С течением времени точность вычислений на каждой отдельной сетке в силу усложнения решения и накопления погрешностей падает. Для получения удовлетворительной точности в момент времени  $t_3$  (рис. 3,  $a$ ) по методике настоящей работы уже требуется сетка  $b$  (300 + 770 ячеек). Значительно хуже обстоит дело с классической схемой Годунова. Для нее даже сетки  $d$  (1200 + 3080 ячеек) оказывается недостаточно. Таким образом, для достижения “эталонного” решения с применением классического метода Годунова затраты компьютерного времени оказываются более чем в 10 раз большими, чем при расчетах по методике настоящей работы.

Интересно отметить, что на первый взгляд схема Годунова первого порядка точности на более грубых сетках (рис. 3,  $a$ ) позволяет описать передний фронт волны сжатия лучше, чем методика настоящей работы второго порядка точности. Однако при более детальном рассмотрении переднего фронта волны (рис. 3,  $b$ ) видно, что он имеет сложную структуру. Эту структуру на сетках  $a-c$  с применением метода Годунова первого порядка описать не удастся. Подобным конфигурации “эталона” становится лишь решение на сетке  $d$ .

## Заключение

Предложена экономичная методика расчета задач динамики сферического пузырька газа с сильным сжатием. В этой методике движение газа в полости пузырька и окружающей жидкости описывается уравнениями динамики сжимаемой жидкости. Учитываются теплопроводность газа и жидкости, испарение и конденсация на межфазной поверхности, вязкость жидкости и поверхностное натяжение. Уравнения состояния отражают довольно общие зависимости давления и внутренней энергии от плотности и температуры. Решение уравнений движения газа в полости пузырька и в окружающей жидкости находится в два этапа. На первом этапе решаются уравнения без учета эффектов теплопроводности, с помощью модификации метода Годунова на основе UNO-схемы второго порядка точности по пространству и времени [18]. На втором этапе решается уравнение теплопроводности по неявной схеме второго порядка точности по пространству. Показано, что предлагаемая методика значительно экономичнее (более чем в 10 раз) тех, что применяются в работах [11, 12, 15, 16], в силу того, что в них используются методы первого порядка точности.

## Список литературы

- [1] BENJAMIN T.B., ELLIS A.T. The collapse of cavitation bubbles and the pressures thereby produced against solid boundaries // *Phil. Trans. Royal Soc. Lond. A.* 1966. Vol. 260, N 1110. P. 221–240.
- [2] GAITAN D.F., CRUM L.A. Observation of sonoluminescence from a single, stable cavitation bubble in a water/glycerine mixture // *12th Intern. Symp. On Nonl. Acoustics.* N.Y.: Elsevier, 1990. P. 459–463.
- [3] BRENNER M.P. Single-bubble sonoluminescence // *Reviews of Modern Physics.* 2002. Vol. 74. P. 425–484.
- [4] МАРГУЛИС М.А. Сонолюминесценция // *Успехи физических наук. Обзоры актуальных проблем.* 2000. Т. 170, № 3. С. 263–287.
- [5] TALEYARKHAN R.P., WEST C.D., CHO J.S. ET AL. Evidence for nuclear emissions during acoustic cavitation // *Science.* 2002. Vol. 295. P. 1868–1873.
- [6] TALEYARKHAN R.P., WEST C.D., LAHEY R.T. ET AL. Nuclear emissions during self-nucleated acoustic cavitation // *Phys. Rev. Lett.* 2006. Vol. 96. P. 034301.1–034301.4.
- [7] BARBER B.P., HILLER R.A., LOFSTEDT R. ET AL. Defining the unknowns of sonoluminescence // *Phys. Rev.* 1997. Vol. 281. P. 65–143.
- [8] WU C.C., ROBERTS P.H. Shock wave propagation in a sonoluminescing gas bubble // *Phys. Rev. Lett.* 1993. Vol. 70. P. 3424–3427.
- [9] MOSS W.C., CLARKE D.B., WHITE J.W., YOUNG D.A. Hydrodynamic simulations of bubble collapse and picosecond somoluminescence // *Phys. Fluids.* 1994. Vol. 6, N 9. P. 2979–2985.
- [10] MOSS W.C., CLARKE D.B., YOUNG D.A. Calculated pulse widths and spectra of a single sonoluminescing bubble // *Science.* 1997. Vol. 276. P. 1398–1401.
- [11] NIGMATULIN R.I., АКХАТОВ I.SH., ТОПОЛНИКОВ A.S. ET AL. The theory of supercompression of vapor bubbles and nanoscale thermonuclear fusion // *Phys. Fluids.* 2005. Vol. 17. P. 107106.1–107106.31.

- [12] KONDIC L., GERSTEN J.I., YUAN C. Theoretical studies of sonoluminescence radiation: Radiative transfer and parametric dependence // Phys. Rev. E. 1995. Vol. 52, N 5. P. 4976–4990.
- [13] STOREY B.D., SZERI A.J. Water vapour, sonoluminescence and sonochemistry // Proc. R. Soc. Lond. A. 2000. Vol. 456. P. 1685–1709.
- [14] HO C.Y., YUAN L., CHU M.-C. ET AL. Effects of ionization in single-bubble sonoluminescence // Phys. Rev. E. 2002. Vol. 65. P. 041201.1–041201.12.
- [15] АГАНИН А.А., ИЛЬГАМОВ М.А. Динамика пузырька газа в центре сферического объема жидкости // Математ. моделирование. 2001. Т. 13, № 1. С. 26–40.
- [16] АКНАТОВ I., LINDAU O., ТОПОЛНИКОВ А. ET AL. Collapse and rebound of a laser-induced cavitation bubble // Phys. Fluids. 2001. Vol. 13, N 10. P. 2805–2819.
- [17] КОВЕНЯ В.М., ЯНЕНКО Н.Н. Метод расщепления в задачах газовой динамики. Новосибирск: Наука, 1981.
- [18] HARTEN A., ENGQUIST B., OSHER S., ШАКРАВАРТХИ S.R. Uniformly high order accurate essentially non-oscillatory schemes III // J. Comp. Phys. 1987. Vol. 71. P. 231–303.
- [19] ЧИСЛЕННОЕ решение многомерных задач газовой динамики / С.К. Годунов, А.В. Забродин, М.Я. Иванов и др. М.: Наука, 1976.

*Поступила в редакцию 7 мая 2008 г.*