

## Моделирование турбулентного перемешивания однородной жидкости методом крупных вихрей

У. С. АБДИБЕКОВ, Д. Б. ЖАКЕБАЕВ, Б. Т. ЖУМАГУЛОВ

*Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Алматы*

e-mail: uali@kazsu.kz, daurjaz@mail.ru

Приводятся результаты моделирования гидродинамики перемешивания однородной жидкости в цилиндрической области, внутри которой расположен пропеллер. Лопасти пропеллера вращаются под углами  $\alpha = 90^\circ$ ,  $\alpha = 45^\circ$  к основанию цилиндра. Построена математическая модель, составлен численный алгоритм, получено решение задачи. Использованы осредненные по ансамблю уравнения Навье—Стокса в цилиндрических координатах.

*Ключевые слова:* гидродинамика больших чисел Рейнольдса, численное моделирование, турбулентное перемешивание, метод крупных вихрей.

### Введение

Турбулентное течение — явление, наблюдаемое во многих потоках жидкостей и газов, заключающееся в образовании многочисленных вихрей различных размеров. Вследствие появления вихрей гидродинамические и термодинамические характеристики (скорость, температура, давление, плотность) испытывают хаотические флуктуации. Для турбулентного движения жидкости при достаточно больших значениях числа Рейнольдса характерна чрезвычайная нерегулярность, беспорядочное изменение скорости со временем в каждой точке потока. В настоящее время полной количественной теории развитой турбулентности не существует.

Разработка и совершенствование методов предсказания и описания турбулентности путем создания новых или улучшения старых модельных уравнений для турбулентной вязкости, масштаба турбулентности, разработка методов прямого численного моделирования турбулентности — актуальные задачи современной вычислительной гидродинамики.

На данном этапе развития технологических разработок широко применяются различные смесители с принципом работы пропеллерного типа. В частности, подобные устройства используются в химической промышленности, фармацевтике и в некоторых других отраслях производства. Известно, что в таких устройствах, как и практически во всех технических устройствах, имеют место турбулентные процессы. Моделированию турбулентного перемешивания в цилиндрической области посвящено множество работ [1–5], однако данная проблема далека от завершения. В настоящей статье рассматривается турбулентное перемешивание в цилиндрической области, вызванное вращением лопастей пропеллера, расположенного на высоте  $\frac{2}{3}H$ . Рассмотрены случаи, когда лопасти

находятся под углами 90 и 45° к основанию цилиндра. Предлагаются математическое описание данной проблемы и реализация численного решения задачи.

## 1. Основные уравнения

Основными уравнениями гидродинамики для описания турбулентного перемешивания являются осредненные уравнения Навье—Стокса, записанные в цилиндрической системе координат  $(r, \varepsilon, z)$ :

$$\begin{aligned} & \rho \left( \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\varepsilon}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \varepsilon} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{v_\varepsilon^2}{r} \right) = -\frac{\partial p}{\partial r} + \\ & + \mu \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v_r}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \varepsilon^2} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} - \frac{v_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial \varepsilon} \right) - \\ & - \rho \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \tau_{rr}) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} (\tau_{r\varepsilon}) + \frac{\partial}{\partial z} (\tau_{rz}) - \frac{1}{r} (\tau_{rr}) \right); \\ & \rho \left( \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial r} + \frac{v_\varepsilon}{r} \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial \varepsilon} + v_z \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial z} + \frac{v_r v_\varepsilon}{r} \right) = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \varepsilon} + \\ & + \mu \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\varepsilon}{\partial \varepsilon^2} + \frac{\partial^2 v_\varepsilon}{\partial z^2} - \frac{v_\varepsilon}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \varepsilon} \right) - \\ & - \rho \left( \frac{\partial}{\partial r} (\tau_{\varepsilon r}) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (\tau_{\varepsilon\varepsilon}) + \frac{\partial}{\partial z} (\tau_{\varepsilon z}) + \frac{2}{r} \tau_{r\varepsilon} \right); \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} & \rho \left( \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\varepsilon}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \varepsilon} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_z}{\partial \varepsilon^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right) - \\ & - F - \rho \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \tau_{zr}) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} (\tau_{z\varepsilon}) + \frac{\partial}{\partial z} (\tau_{zz}) \right); \\ & \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} (r v_\varepsilon) + \frac{\partial}{\partial z} (r v_z) = 0, \end{aligned}$$

где  $v_r, v_\varepsilon, v_z$  — компоненты скорости,  $p$  — давление,  $t$  — время,  $\tau_{i,j}$  — подсеточные напряжения Рейнольдса,  $i, j$  соответствуют  $r, \varepsilon, z$ .

На рис. 1 отражена физическая область рассматриваемой задачи:  $R$  — радиус,  $H$  — высота,  $\varepsilon = 2\pi$  — радиальный угол цилиндра. Лопасти пропеллера имеют форму прямоугольника, длина которого  $L_{pr} = R_2 - R_1 = \frac{1}{4}R$ , высота  $H_{pz} = \frac{H_2 - H_1}{\sin \alpha}$ ,  $\frac{1}{2}(H_2 + H_1) = \frac{2}{3}H$ , время вращения за один период  $T_p$ , угол наклона лопасти  $\alpha = \arctg\left(\frac{B}{A}\right)$ , скорость пропеллера  $v_p$ . Лопасти пропеллера прикреплены к внутреннему цилиндру радиуса  $R_1$ , а  $R_2$  — расстояние от центра внутри цилиндра до края лопасти, число лопастей  $K = 3$ .

Используются следующие начальные (2) и граничные (3), (4) условия:

$$\begin{aligned} & v_r(t = 0, r, \varepsilon, z) = 0, \quad v_\varepsilon(t = 0, r, \varepsilon, z) = 0, \\ & v_z(t = 0, r, \varepsilon, z) = 0, \quad v_p(t = 0, r, \varepsilon, z) = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

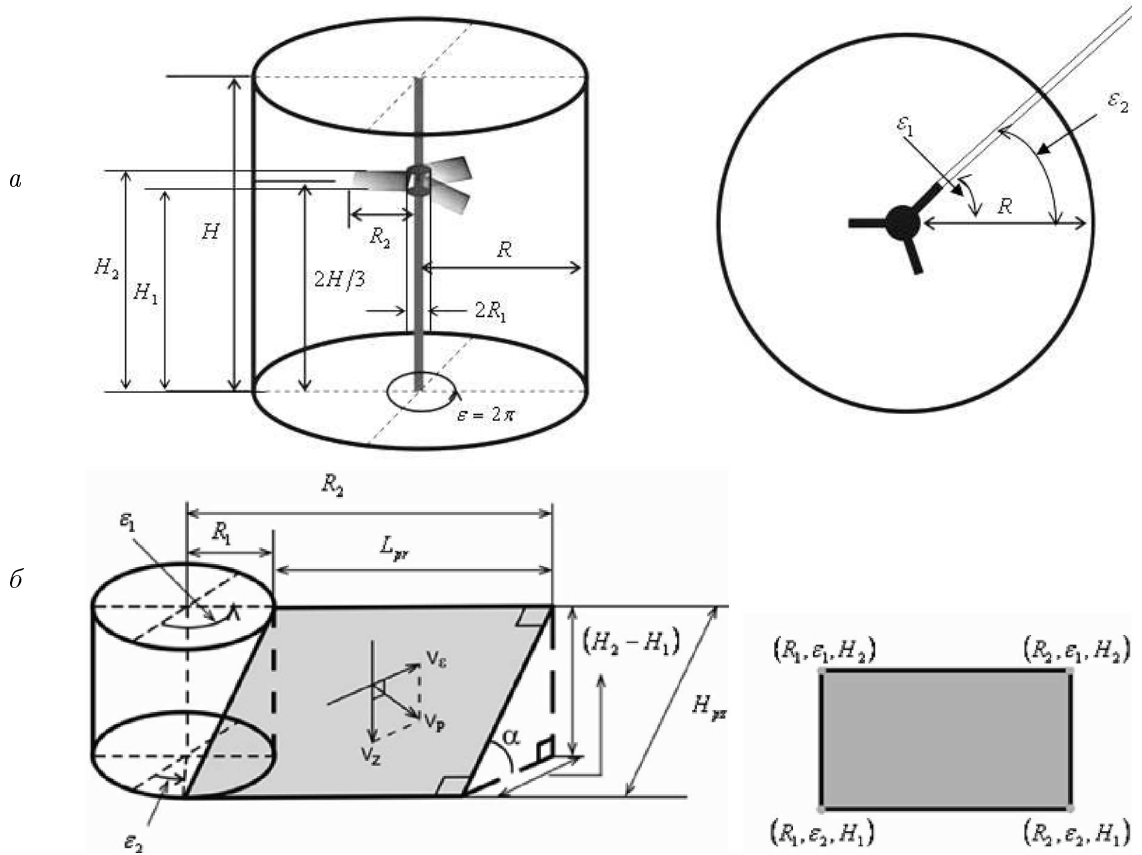


Рис. 1. Физическая область: а — цилиндр; б — лопасть пропеллера

$$\left\{ \begin{array}{l} v_r(t, r = R, \varepsilon, z) = 0, \quad v_\varepsilon(t, r = R, \varepsilon, z) = 0, \quad v_z(t, r = R, \varepsilon, z) = 0, \\ v_r(t, r = 0, \varepsilon, z) = \frac{1}{2} (v_r(t, \Delta r, \varepsilon, z) + v_r(t, \Delta r, \varepsilon + \pi, z)), \\ v_\varepsilon(t, r = 0, \varepsilon, z) = v_\varepsilon(t, r = \Delta r, \varepsilon, z), \\ v_z(t, r = 0, \varepsilon, z) = v_z(t, r = \Delta r, \varepsilon, z), \\ v_r(t, r, \varepsilon, z = 0) = 0, \quad v_r(t, r, \varepsilon, z = H) = 0, \\ v_\varepsilon(t, r, \varepsilon, z = 0) = 0, \quad v_\varepsilon(t, r, \varepsilon, z = H) = 0, \\ v_z(t, r, \varepsilon, z = 0) = 0, \quad v_z(t, r, \varepsilon, z = H) = 0. \end{array} \right. \quad (3)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{При } (R_1 \leq r \leq R_2), (H_1 \leq z \leq H_2) \\ \text{I} - (\varepsilon_1 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_2), \\ \text{II} - (\varepsilon_3 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_4), \\ \text{III} - (\varepsilon_5 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_6). \\ v_r(t, r, \varepsilon, z) = 0, \quad v_\varepsilon(t, r, \varepsilon, z) = A, \quad v_z(t, r, \varepsilon, z) = B, \\ v_p(t, r, \varepsilon, z) = \sqrt{(v_\varepsilon^2(t, r, \varepsilon, z) + v_z^2(t, r, \varepsilon, z))}, \\ \text{где } A = \frac{1}{2}, \quad B = \frac{1}{2}. \end{array} \right. \quad (4)$$

С целью устранения неопределенностей, появляющихся в основных уравнениях (1) при  $r = 0$ , произведено преобразование (рис. 2), позволяющее отобразить физическую область  $(r, \varepsilon, z)$  на вычислительную  $(x_1, x_2, x_3)$ , имеющую форму куба [6], с использованием формул:  $r = e^{x_1}$ ,  $\varepsilon = \Psi x_2$ ,  $z = H x_3$ .

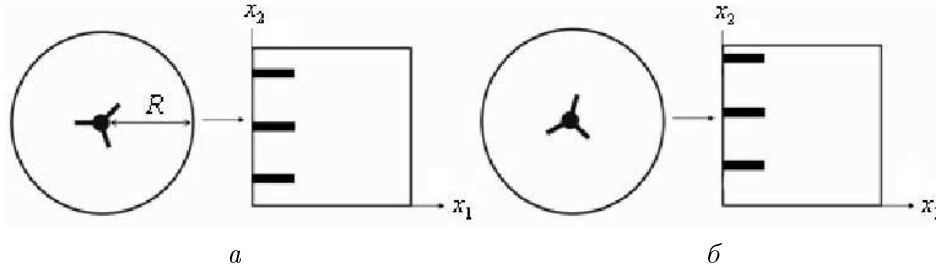


Рис. 2. Расположения лопастей физической области в вычислительной области в разные моменты времени вращения в сечении  $x_3 = H_1$ :  $a - t = t_0$ ;  $b - t = t_0 + \Delta t$ .

После проведения данного преобразования необходимо обезразмерить основные уравнения. Для этого выбираются характерные значения: тангенциальная скорость  $\omega L_1$ ; размеры дискретной области:  $L_1$  — длина области по оси  $x_1$ ,  $L_2$  — длина области по оси  $x_2$ ,  $L_3$  — длина области по оси  $x_3$ .

Используя указанные величины, введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
 x_1^* &= \frac{x_1}{L_1}, & x_2^* &= \frac{x_2}{L_2}, & x_3^* &= \frac{x_3}{L_3}, \\
 \bar{u}_1^* &= \frac{u_1}{\omega L_1}, & \bar{u}_2^* &= \frac{u_2}{\omega L_1}, & \bar{u}_3^* &= \frac{u_3}{\omega L_1}, \\
 \tau &= \frac{t\omega}{L_2}, & \bar{p}^* &= \frac{p}{\rho\omega^2 L_1^2}, & \frac{1}{\text{Re}} &= \frac{\nu}{L_1^2 \omega}, \\
 \sigma(x_1) &= \frac{1}{e^{x_1}},
 \end{aligned} \tag{5}$$

где  $\text{Re}$  — число Рейнольдса.

Подставляя безразмерные величины (5), получим:

$$\begin{aligned}
 &\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial \tau} + \sigma L_2 \bar{u}_1 \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_1} + \sigma \frac{L_1}{\Psi} \bar{u}_2 \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_2} + \frac{(L_2 L_1)}{L_3} \frac{\bar{u}_3}{H} \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_3} - \sigma L_2 L_1 (\bar{u}_2)^2 = \\
 &= -\sigma \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_1} + L^* \frac{1}{\text{Re}} \left[ \sigma^2 \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_1} \right) + \sigma^2 \frac{1}{\Psi^2} \frac{L_1^2}{L_2^2} \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_2} \right) + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{H^2} \frac{L_1^2}{L_3^2} \frac{\partial}{\partial x_3} \left( \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_3} \right) - \sigma^2 L_1^2 \bar{u}_1 - \sigma^2 \frac{2}{\Psi} \frac{L_1^2}{L_2^2} \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial x_2} \right] + \\
 &+ \sigma^2 \frac{\partial}{\partial x_1} \left( -\frac{1}{\sigma} \tau_{11} \right) + \sigma \frac{L_1}{\Psi} \frac{\partial}{\partial x_2} (-\tau_{12}) + \frac{L_1}{H} \frac{\partial}{\partial x_3} (-\tau_{13}) - \sigma (-\tau_{22}), \tag{6}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\frac{\partial \bar{u}_2}{\partial \tau} + \sigma L_2 \bar{u}_1 \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial x_1} + \sigma \frac{L_1}{\Psi} \bar{u}_2 \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial x_2} + \frac{(L_2 L_1)}{L_3} \frac{\bar{u}_3}{H} \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial x_3} + \sigma L_2 L_1 (\bar{u}_1 \bar{u}_2) = \\
 &= -\sigma \frac{1}{\Psi} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_2} + L_2 \frac{1}{\text{Re}} \left[ \sigma^2 \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial x_1} \right) + \sigma^2 \frac{1}{\Psi^2} \frac{L_1^2}{L_2^2} \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial x_2} \right) + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{H^2} \frac{L_1^2}{L_3^2} \frac{\partial}{\partial x_3} \left( \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial x_3} \right) - \sigma^2 L_1^2 \bar{u}_2 + \sigma^2 \frac{2}{\Psi} \frac{L_1^2}{L_2} \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_2} \right] + \\
 &+ \frac{\partial}{\partial x_1} (-\tau_{21}) + \sigma \frac{L_1}{\Psi} \frac{\partial}{\partial x_2} (-\tau_{22}) + \frac{L_1}{H} \frac{\partial}{\partial x_3} (-\tau_{23}) + 2\sigma (-\tau_{12}), \tag{7}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial \tau} + \sigma L_2 \bar{u}_1 \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial x_1} + \sigma \frac{L_1}{\Psi} \bar{u}_2 \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial x_2} + \frac{(L_2 L_1)}{L_3} \frac{\bar{u}_3}{H} \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial x_3} = -\frac{1}{H} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_3} + \\
 & + L_2 \frac{1}{\text{Re}} \left[ \sigma^2 \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial x_1} \right) + \sigma^2 \frac{1}{\Psi^2} \frac{L_1^2}{L_2^2} \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial x_2} \right) + \frac{1}{H^2} \frac{L_1^2}{L_3^2} \frac{\partial}{\partial x_3} \left( \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial x_3} \right) \right] + \\
 & + \sigma^2 \frac{\partial}{\partial x_1} \left( -\frac{1}{\sigma} \tau_{31} \right) + \sigma \frac{L_1}{L} \frac{\partial}{\partial x_2} (-\tau_{32}) + \frac{L_1}{H} \frac{\partial}{\partial x_3} (-\tau_{33}). \quad (8)
 \end{aligned}$$

Подставляя безразмерные величины (5) в уравнение неразрывности, получим

$$\frac{1}{e^{2x_1}} \frac{\partial}{\partial x_1} (e^{x_1} \bar{u}_1) + \frac{1}{\Psi} \frac{1}{e^{x_1}} \frac{\partial}{\partial x_2} (\bar{u}_2) + \frac{1}{H} \frac{\partial}{\partial x_3} (\bar{u}_3) = 0. \quad (9)$$

В (6)–(9) присутствуют подсеточные напряжения Рейнольдса, для моделирования которых используется вязкостная модель

$$\tau_{ij} - \frac{\delta_{ij}}{3} \tau_{kk} = -2\nu_T \bar{S}_{ij}, \quad (10)$$

где турбулентная вязкость представляется в виде

$$\nu_T = (C_S \Delta)^2 (2\bar{S}_{ij} \bar{S}_{ij})^{1/2};$$

$$\bar{S}_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right);$$

$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases}$  — символ Кронекера;  $C_S$  — коэффициент, для данной задачи принят

равным — 0.10 [4];  $\Delta = (e^{x_1} \Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3)^{1/3}$  — характерная длина фильтра, которая имеет порядок шага сетки;  $\Delta x_1 = 1/N_1$ ,  $\Delta x_2 = 1/N_2$ ,  $\Delta x_3 = 1/N_3$  — шаг по вычисляемой сетке в направлении соответствующей оси  $(x_1, x_2, x_3)$ ,  $N_1, N_2, N_3$  — количество узлов.

Таким образом, задача (1) заменена уравнениями (6)–(9), т.е. решение будет осуществляться в декартовой системе координат, при этом начальные и граничные условия для данной постановки соответствуют условиям (2)–(4). Следует учесть также выполнение условия периодичности для скорости пропеллера:

$$v_p(\tau + \Delta\tau k, x_1, x_2 + \Delta x_2, x_3) = v_p(\tau, x_1, x_2, x_3), \quad 0 \leq k \leq T_p,$$

которое свидетельствует об изменении расположения лопастей пропеллера при отображении их на декартову плоскость. При этом  $\Delta\tau = 1/T_p$ .

Компоненты скорости и давления, определенные из уравнений (6)–(9), используются для анализа тензора турбулентных характеристик. Турбулентные члены  $\langle u'_i u'_j \rangle$  можно рассчитать лишь приближенно — на основании каких-либо гипотез. Опираясь на исследования [7], приведем результаты вычисления турбулентных членов:

$$\begin{aligned}
 & \langle u'_i u'_1 \rangle_{n+\frac{1}{2}, m, q} = (P_T)_{n+\frac{1}{2}, m, q} \delta_{1i} - \\
 & - A \frac{\Delta x_1^2}{2} \left| \left\langle \frac{\partial U_1}{\partial x_1} \right\rangle_{n+\frac{1}{2}, m, q} \right| * \left\{ \left\langle \frac{\partial U_i}{\partial x_1} \right\rangle_{n+\frac{1}{2}, m, q} + \left\langle \frac{\partial U_1}{\partial x_i} \right\rangle_{n+\frac{1}{2}, m, q} \right\};
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle u'_i u'_2 \rangle_{n, m + \frac{1}{2}, q} &= (P_T)_{n, m + \frac{1}{2}, q} \delta_{2i} - \\
&- A \frac{\Delta x_2^2}{2} \left| \left\langle \frac{\partial U_2}{\partial x_2} \right\rangle_{n, m + \frac{1}{2}, q} \right| * \left\{ \left\langle \frac{\partial U_i}{\partial x_2} \right\rangle_{n, m + \frac{1}{2}, q} + \left\langle \frac{\partial U_2}{\partial x_i} \right\rangle_{n, m + \frac{1}{2}, q} \right\}; \\
\langle u'_i u'_3 \rangle_{n, m, q + \frac{1}{2}} &= (P_T)_{n, m, q + \frac{1}{2}} \delta_{3i} - \\
&- A \frac{\Delta x_3^2}{2} \left| \left\langle \frac{\partial U_3}{\partial x_3} \right\rangle_{n, m, q + \frac{1}{2}} \right| * \left\{ \left\langle \frac{\partial U_i}{\partial x_3} \right\rangle_{n, m, q + \frac{1}{2}} + \left\langle \frac{\partial U_3}{\partial x_i} \right\rangle_{n, m, q + \frac{1}{2}} \right\},
\end{aligned} \tag{11}$$

где  $i = 1, 2, 3$ ;  $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases}$  — символ Кронекера,  $n$  — номер ячейки вдоль оси  $x_1$ ,  $m$  — вдоль оси  $x_2$ ,  $q$  — вдоль оси  $x_3$ ;  $U_1 = \bar{u}_1$ ,  $U_2 = \bar{u}_2$ ,  $U_3 = \bar{u}_3$  — компоненты скорости,  $u'_i$  — пульсационные составляющие скорости,  $A = 0.02$ .

## 2. Численный метод

Для решения задачи используем схему расщепления по физическим параметрам. Предлагается следующая физическая интерпретация приведенной схемы расщепления. На первом этапе предполагается, что перенос количества движения осуществляется только за счет конвекции и диффузии. Промежуточное поле скорости находится методом дробных шагов при использовании метода прогонки:

- 1)  $\frac{\mathbf{u}^* - \mathbf{u}^n}{\Delta \tau} = -(\mathbf{u}^n \nabla) \mathbf{u}^* - \nu \Delta \mathbf{u}^*$ ;
- 2)  $\Delta p = \frac{\nabla \mathbf{u}^*}{\Delta \tau}$ ;
- 3)  $\frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^*}{\Delta \tau} = -\nabla p$ .

На втором этапе по найденному промежуточному полю скорости определяется поле давления. Уравнение Пуассона для поля давления решается методом Фурье в сочетании с методом матричной прогонки, которая применяется для определения коэффициентов Фурье. На третьем этапе предполагается, что перенос осуществляется только за счет градиента давления [8–10].

## 3. Численные результаты

Численная модель позволяет описывать турбулентное движение нестационарных потоков в цилиндрической области. Расчеты были проведены для различных скоростей вращения лопастей внутри цилиндра. Для расчетов использовались сетки размером  $20 \times 20 \times 20$ ;  $60 \times 60 \times 60$ . Шаг по времени,  $\Delta \tau$ , принимался равным 0.01; 0.001; 0.0001 соответственно. Указанными значениями  $\Delta \tau$  определяется характер движения жидкости: при  $\Delta \tau = 0.01$  — ламинарное течение,  $\Delta \tau = 0.001$  — переход от ламинарного течения к турбулентному,  $\Delta \tau = 0.0001$  — развитое турбулентное течение.

На основе построенной модели определены следующие характеристики: турбулентная кинетическая энергия, корреляция, турбулентные масштабы, средние и пульсационные характеристики течения для различных значений Рейнольдса, а также для разной численности лопастей пропеллера:  $Re = 1000$ ;  $10\,000$ ,  $\Delta \tau = 0.01$ ;  $0.001$ ,  $K = 3$ ;  $6$ ;  $12$ .

Установлено, что увеличение числа  $Re$  приводит к появлению вихрей. Полученные результаты моделирования адекватно согласуются с экспериментальными данными, указанными в работах [1–5].

После получения расчетных данных для наглядности результатов произведено обратное преобразование:

$$u'_r = \frac{1}{e^{x_1}} u'_1, \quad u'_\varepsilon = \frac{1}{\Psi} u'_2, \quad u'_z = \frac{1}{H} u'_3,$$

которое позволило отобразить на рис. 3 картину течения в виде изолиний скорости в сечениях  $\varepsilon_1 = 10^\circ$ ;  $\varepsilon_2 = 200^\circ$  при количестве лопастей  $K = 3$  и угле наклона лопастей пропеллера  $\alpha = 45^\circ$ . Показан характер течения при  $\Delta\tau = 0.001$ ,  $\tau = 6000 \Delta\tau$ . Область белого цвета соответствует наибольшей скорости, черные области — наименьшей.

На рис. 4 и 5 представлено сравнение результатов расчета отношений радиальной пульсационной скорости  $u'_r$  к скорости пропеллера (рис. 4) и кинетической энергии к квадрату скорости пропеллера (рис. 5) в зависимости от оси  $z$ , полученных в рамках данной задачи с экспериментом [4, 5]. Все расчеты проводились для  $v_p = 0.09$  при  $\Delta\tau = 0.0001$ , на сечении, где значение  $r = 0.16$ , а угол  $\varepsilon = 150^\circ$  в физической области. Поскольку расположение пропеллера, определенное для поставленной выше задачи (1), (3), не соответствует эксперименту, опубликованному в [4, 5], было произведено сопоставление расчетных данных перемещением (поворотом) физической области до совпадения с экспериментальной областью. Таким образом, осуществлено объективное сравнение эксперимента с полученными расчетными данными. Из рисунков видно, что отклонение расчетных данных от эксперимента небольшое, что свидетельствует об адекватности предложенного алгоритма.

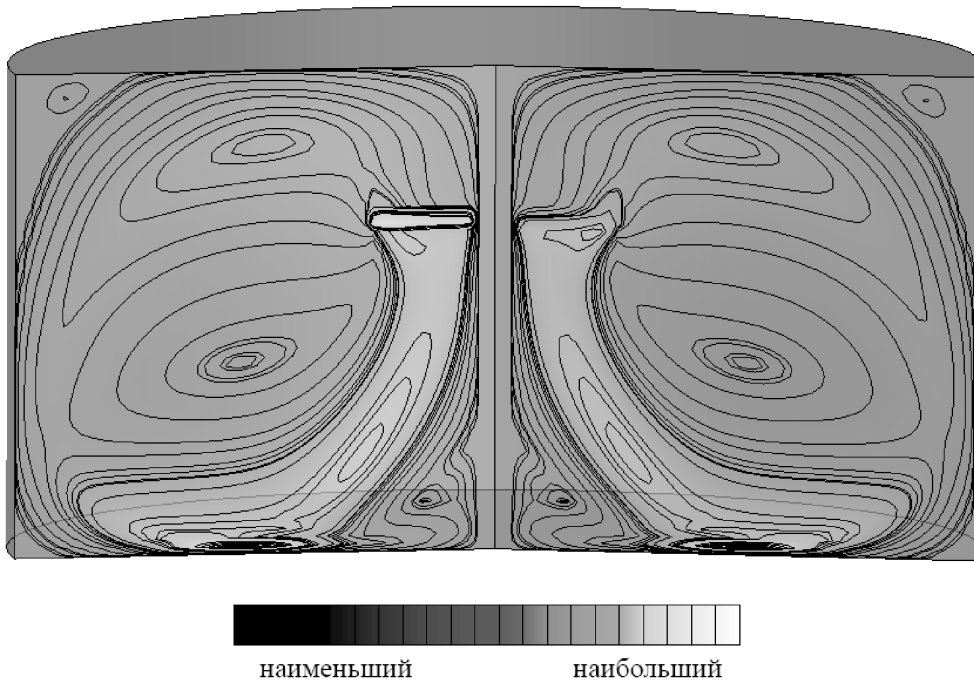


Рис. 3. Изолинии в трехмерной области, при количестве лопастей  $K = 3$  и угле наклона лопастей пропеллера  $\alpha = 45^\circ$

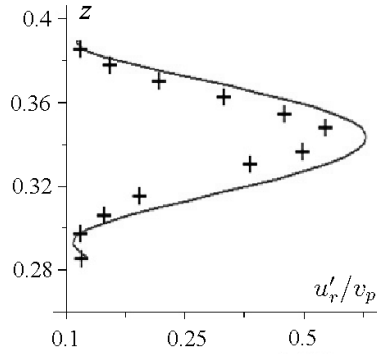


Рис. 4. Отношение радиальной пульсационной скорости к скорости пропеллера,  $u'_r/v_p$ , в зависимости от оси  $z$ : + — эксперимент [4, 5]; сплошная линия — результаты, полученные в настоящей работе

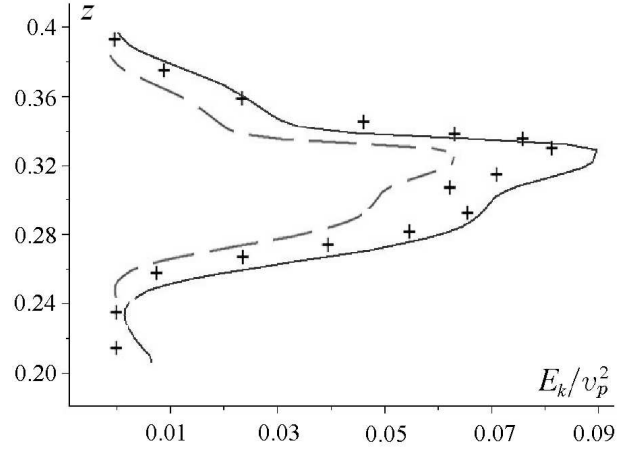


Рис. 5. Отношение кинетической энергии к квадрату скорости пропеллера:  $E_k$  — турбулентная кинетическая энергия; + — экспериментальные данные, штриховая линия — расчет LES(S) [4]; сплошная линия — результаты, полученные в настоящей работе

На рис. 6 показаны рассчитанные по начальному полю коэффициенты корреляции скорости,  $R_{x_1 x_1}$ ,  $R_{x_2 x_1}$ ,  $R_{x_3 x_1}$  (в вычислительной области) (11), в различных точках в зависимости от расстояния между ними,  $\eta = 1, 2, \dots, N/2$ ,  $N = N_1 = N_2 = N_3$ , (при  $\eta > N/2$ ). Характер изменения корреляций, изображенных на рис. 6, соответствует изменению коэффициентов корреляции, рассчитанных в работе [7]:

$$\begin{aligned}
 R_{i x_1} &= \frac{1}{2(N_{x_1} - \eta) N_{x_2} N_{x_3} \langle u_i^2 \rangle} \left( \sum_{n=1}^{N-\eta} \sum_{m=1}^N \sum_{q=1}^N \left[ (u_i)_{n,m,q} (u_i)_{n+\eta,m,q} \right] + \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{n=1+\eta}^N \sum_{m=1}^N \sum_{q=1}^N \left[ (u_i)_{n,m,q} (u_i)_{n-\eta,m,q} \right] \right); \\
 R_{i x_2} &= \frac{1}{2N_{x_1} (N_{x_2} - r) N_{x_3} \langle u_i^2 \rangle} \left( \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^{N-\eta} \sum_{q=1}^N \left[ (u_i)_{n,m,q} (u_i)_{n,m+\eta,q} \right] + \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{n=1}^N \sum_{m=1+\eta}^N \sum_{q=1}^N \left[ (u_i)_{n,m,q} (u_i)_{n,m-\eta,q} \right] \right); \\
 R_{i x_3} &= \frac{1}{2N_{x_1} N_{x_2} (N_{x_3} - \eta) \langle u_i^2 \rangle} \left( \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N \sum_{q=1}^{N-\eta} \left[ (u_i)_{n,m,q} (u_i)_{n,m,q+\eta} \right] + \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N \sum_{q=1+\eta}^N \left[ (u_i)_{n,m,q} (u_i)_{n,m,q-\eta} \right] \right).
 \end{aligned} \tag{12}$$



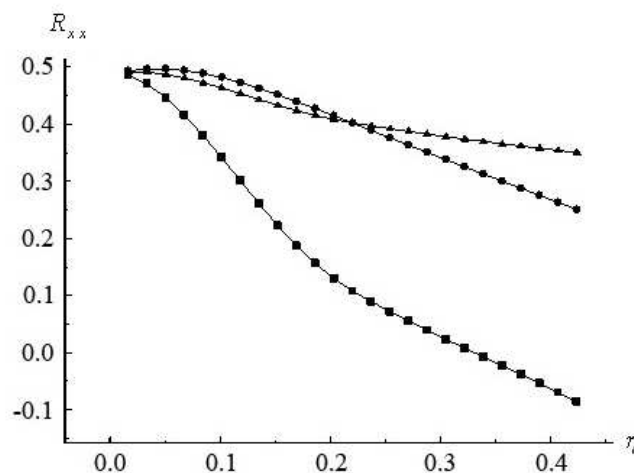


Рис. 6. Коэффициенты корреляции: ● —  $R_{x_1x_1}$ ; ▲ —  $R_{x_2x_1}$ ; ■ —  $R_{x_3x_1}$

Вычисление тензора турбулентных напряжений  $\tau_{i,j}$  дает возможность провести сравнительный анализ изменений турбулентных характеристик, а также определить диссипацию энергии.

В зависимости от количества лопастей пропеллера, характер формирования поля вихря изменяется: с увеличением  $K$  размер вихрей уменьшается, при этом увеличивается количество вихревых зон, что приводит к изменению турбулентного течения в цилиндрической трубе.

Осуществленное в работе численное моделирование турбулентного перемешивания в цилиндрической области позволило определить основные характеристики турбулентного течения для пропеллера без наклона ( $\alpha = 90^\circ$ ) и с наклоном ( $\alpha = 45^\circ$ ). Полученные результаты адекватно описывают турбулентную структуру перемешивания в цилиндрической области и хорошо согласуются с экспериментом. Построенная модель может быть использована для решений технологических задач в различных отраслях промышленности.

## Список литературы

- [1] DERKSEN J.J., VAN DEN AKKER H.E.A. Large eddy simulations on the flow driven by a Rushton turbine // *AIChE J.* 1999. Vol. 45, N 2. P. 209–221.
- [2] YIANNESKIS M., POPIOLEK Z., WHITELAW J.H. An experimental study of the steady and unsteady flow characteristics of stirred reactors // *J. of Fluid Mechanics.* 1987. N 175. P. 537–555.
- [3] PIOMELLI U., MOIN P., FERZIGER J.H. Model consistency in large eddy simulation of turbulent channel flows // *Physics of Fluids.* 1988. N 31. P. 1884–1891.
- [4] HARTMANN H., DERKSEN J.J., VAN DEN AKKER H.E.A. Macro-instability uncovered in a Rushton turbine stirred tank // *AIChE J.* 2004. Vol. 50, N 10. P. 2383–2393.
- [5] VERZICCOY R., IACCARINO G., FATICA M., ORLANDIZ P. Flow in an impeller stirred tank using an immersed boundary method // *AIChE J.* 2004. Vol. 50, N 6. P. 1109–1118.

- [6] БЕЛОЦЕРКОВСКИЙ О.М. Прямое численное моделирование “переходных” течений газа и задач турбулентности // Механика турбулентных потоков. М.: Наука, 1980. С. 70–109.
- [7] ИЕВЛЕВ В.М. Численное моделирование турбулентных течений. М.: Наука, 1990. 216 с.
- [8] ФЛЕТЧЕР К. Вычислительные методы в динамике жидкости. М.: Мир, 1991. 552 с.
- [9] ЯНЕНКО Н.Н. Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. Новосибирск: Наука, СО, 1967. 196 с.
- [10] ПЕЙРЕ Р., ТЕЙЛОР Т.Д. Вычислительные методы в задачах механики жидкости. Л.: Гидрометеоиздат, 1986. 352 с.

*Поступила в редакцию 26 февраля 2008 г.,  
в переработанном виде — 19 июня 2008 г.*