Преобразования и решения линейных уравнений с переменными коэффициентами*

О. В. Капцов, И. В. Коростелев
Учреждение Российской академии наук
Институт вычислительного моделирования СО РАН, Красноярск, Россия
e-mail: kaptsov@icm.krasn.ru, ivankor86@bk.ru

В работе представлен метод преобразования специальных линейных дифференциальных уравнений в частных производных с произвольным числом независимых переменных. Данный подход применяется для решения начально-краевых задач некоторых гиперболических уравнений. Развивается обобщение метода на системы линейных дифференциальных уравнений.

Ключевые слова: метод Эйлера, преобразования, неоднородные среды.

Введение

Любую сплошную среду лишь в некотором приближении можно считать однородной. Если неоднородностью нельзя пренебречь, то математические модели таких сред представляют собой линейные или нелинейные уравнения в частных производных с переменными коэффициентами. Линейные модели применяются в акустике, теории упругости, электродинамике, квантовой механике [1, 2]. Аналитическое решение начально-краевых задач и построение точных решений для таких моделей сталкиваются со значительными трудностями. Это связано с тем, что методы, применяемые к уравнениям с постоянными коэффициентами, зачастую не удается перенести на более сложные модели.

Группы преобразований, допускаемые уравнениями с переменными коэффициентами, довольно бедны [3, 4]. Поэтому привлечение стандартных методов группового анализа в данном случае оказывается не очень эффективным. В последнее время стали появляться статьи [5 – 7], в которых для интегрирования уравнений с переменными коэффициентами используются линейные дифференциальные подстановки. Так, С.П. Царев [7] предложил обобщение каскадного метода Лапласа для строго гиперболических систем первого порядка, а в работе [6] метод интегрирования Эйлера [8] был распространен на новые классы линейных уравнений с произвольным числом переменных.

Данная статья посвящена построению решений и преобразований линейных уравнений второго порядка с переменными коэффициентами. Сначала представляется метод Эйлера и конструктивным образом находится решение начально-краевой задачи для уравнения

$$u_{tt} = u_{xx} + G(x)u_x \tag{1}$$

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 07-01-00489) и СО РАН (интеграционный проект № 103).

с коэффициентом $G(x)$ из некоторого семейства функций. Уравнение (1) описывает, в частности, акустические волны в канале и продольные колебания стержней переменного сечения [9, 10]. Далее рассматривается трехмерное уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{\rho c^2}\frac{\partial p}{\partial t}\right) - \operatorname{div}\left(\frac{\nabla p}{\rho}\right) = 0, \tag{2}$$

описывающее акустические волны в неоднородных средах [1, 2], при этом ρ и c считаются заданными функциями. Указываются случаи, в которых (2) редуцируется к уравнению Гельмгольца с постоянным коэффициентом. Развивается обобщение метода Эйлера на специальные системы линейных дифференциальных уравнений в частных производных с произвольным числом независимых переменных.

1. Применение метода Эйлера к решению начально-краевой задачи

Сначала представим краткое описание метода Эйлера для уравнений

$$F\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + G\,\frac{\partial u}{\partial x} + H\,u = \sum_{|\alpha|\geq 0}^{K} b_\alpha(t)\frac{\partial^{|\alpha|}\,u}{\partial {t_1}^{\alpha_1}...\partial {t_n}^{\alpha_n}} = B\,u, \tag{3}$$

где $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ — целочисленный мультииндекс; F, G, H — функции только от x; b_α — функции только от $t = (t_1, \ldots, t_n)$. Следуя [6], рассмотрим преобразование

$$z = \left(u_x - \frac{h_x}{h}\,u\right)\Big/ r, \tag{4}$$

здесь r — произвольная гладкая функция от x, $h(x)$ удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению

$$F\,h'' + G\,h' + (H + c)\,h = 0, \quad c \in R. \tag{5}$$

В дальнейшем (4) будем называть дифференциальным преобразованием Эйлера, или кратко — преобразованием Эйлера. Преобразование вида

$$z = M(x)\,(u_x + s(x)\,u)$$

введено Эйлером [8] для интегрирования уравнений

$$u_{tt} = F(x)\,u_{xx} + G(x)\,u_x + H(x)\,u.$$

Преобразование Эйлера (4) переводит решения уравнения (3) в решения уравнения [6]

$$F\,\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + G_1\,\frac{\partial z}{\partial x} + H_1\,z = B\,z,$$

где B — дифференциальный оператор из правой части (3),

$$G_1 = G + F' + 2\,F\,(\ln r)', \tag{6}$$

$$H_1 = H + \frac{(F\,r' + G\,r)'}{r} + F'\,(\ln h)' + 2\,F\,(\ln h)'', \tag{7}$$

здесь штрих означает производную по x.

Покажем, как с помощью преобразования Эйлера решить уравнение (1) для некоторого семейства функций $G(x)$. Для того чтобы преобразование Эйлера (4) переводило решения уравнения (1) в решения уравнения

$$z_{tt} = z_{xx} + (G + 2(\ln r)')z_x, \tag{8}$$

функция r должна удовлетворять обыкновенному дифференциальному уравнению

$$r'' + Gr' + (G' + 2(\ln h)'')r = 0. \tag{9}$$

Пусть $G = 0$, тогда $u = f(x+t)+g(x-t)$ — общее решение (1), а уравнение на функцию h имеет вид

$$h'' + c\,h = 0, \quad c \in R. \tag{10}$$

В зависимости от выбора c получается три типа решений. Если $c = 0$, то

$$h = a_1 x + a_2, \quad a_1, a_2 \in R.$$

В этом случае решением уравнения (9) является функция

$$r = \frac{c_1 + c_2\,(a_1 x + a_2)^3}{(a_1 x + a_2)}, \quad c_1, c_2 \in R. \tag{11}$$

Значит, преобразованное уравнение

$$z_{tt} = z_{xx} + 2\,(\ln r)'\,z_x, \tag{12}$$

согласно формуле (4), имеет решение

$$z = \frac{a_1 x + a_2}{c_1 + c_2\,(a_1 x + a_2)^3}\left[f' + g' - \frac{a_1}{a_1 x + a_2}\,(f+g)\right].$$

Пусть $c < 0$, тогда, не ограничивая общности, можно считать $c = -1$. В этом случае

$$h = a_1\,\mathrm{sh}(x) + a_2\,\mathrm{ch}(x)$$

является общим решением (10), а

$$r = c_1 - \frac{a_1\,\mathrm{ch}(x) + a_2\,\mathrm{sh}(x)}{a_1\,\mathrm{sh}(x) + a_2\,\mathrm{ch}(x)}(c_1 x + c_2), \quad c_1, c_2 \in R, \tag{13}$$

удовлетворяет (9). Значит, преобразованное уравнение (8) имеет решение

$$z = \frac{1}{r}\left[f' + g' - \frac{a_1\,\mathrm{ch}(x) + a_2\,\mathrm{sh}(x)}{a_1\,\mathrm{sh}(x) + a_2\,\mathrm{ch}(x)}\,(f+g)\right].$$

Наконец, если $c = 1$, то соответствующие функции h, r и z задаются формулами

$$h = a_1 \sin(x) + a_2 \cos(x),$$

$$r = c_1 + \frac{a_2 \sin(x) - a_1 \cos(x)}{a_1 \sin(x) + a_2 \cos(x)}(c_1 x + c_2), \quad c_1, c_2 \in R, \tag{14}$$

$$z = \frac{1}{r}\left[f' + g' + \frac{a_2 \sin(x) - a_1 \cos(x)}{a_1 \sin(x) + a_2 \cos(x)}\,(f+g)\right].$$

Последовательное применение преобразования Эйлера позволяет получать новые интегрируемые уравнения и их общие решения. В [6] приведено решение

$$z = \frac{W(u^0, h_1, \ldots, h_n)}{W(h_1', \ldots, h_n')}$$

уравнения

$$z_{tt} = z_{xx} + 2\left[\ln \frac{W(h_1', \ldots, h_n')}{W(h_1, \ldots, h_n)}\right]' z_x,$$

где $h_i = a_i \operatorname{sh}(\lambda_i x) + b_i \operatorname{ch}(\lambda_i x)$, a_i, b_i, $\lambda_i \in R$, $\lambda_i \neq \lambda_j$ при $i \neq j$, $u^0 = f(x+t) + g(x-t)$, $W(f_1, \ldots, f_n)$ — вронскиан функций $f_1, \ldots, f_n$.

Используя преобразования Эйлера, можно найти решение начально-краевой задачи для уравнения (12) с функцией r, заданной любой из формул (11), (13), (14). Основные результаты по разрешимости начально-краевых задач для линейных гиперболических уравнений имеются в [11, 12]. В дальнейшем все входящие функции считаются дифференцируемыми нужное число раз.

Рассмотрим отрезок $[x_1, x_2]$ и начальные данные

$$z(0,x) = \varphi(x), \quad z_t(0,x) = \psi(x), \quad x \in [x_1, x_2]. \tag{15}$$

Уравнение (12) является гиперболическим, поэтому его решение в любой точке треугольника

$$T = \{(t,x) : t \geq 0, x_1 + t \leq x \leq x_2 - t\} \tag{16}$$

однозначно определяется по данным (15). Найдем явное представление этого решения.

Решения уравнения (12) получаются из решений уравнения

$$u_{tt} = u_{xx} \tag{17}$$

с помощью преобразования Эйлера (4). Начальные данные

$$u_0(x) = u(0,x) = h(x) \int\limits_a^x \frac{\varphi(y)\, r(y)}{h(y)}\, dy, \tag{18}$$

$$u_1(x) = u_t(0,x) = h(x) \int\limits_b^x \frac{\psi(y)\, r(y)}{h(y)}\, dy \tag{19}$$

для уравнения (17) переходят в начальные данные (15) под действием того же преобразования (4). Здесь a, b — произвольные постоянные из отрезка $[x_1, x_2]$. Хорошо известно, что решение уравнения (17) с начальными данными (18), (19) в треугольнике T задается формулой Даламбера

$$u(t,x) = \frac{1}{2}\left[u_0(x+t) + u_0(x-t) + \int\limits_{x-t}^{x+t} u_1(y)\, dy\right].$$

С учетом (18), (19), последнее выражение приобретает вид

$$u(t,x)=\frac{1}{2}\left[h(x+t)\int\limits_a^{x+t}\frac{\varphi(y)\,r(y)}{h(y)}\,dy+h(x-t)\int\limits_a^{x-t}\frac{\varphi(y)\,r(y)}{h(y)}\,dy+\right.$$
$$\left.+\int\limits_{x-t}^{x+t}h(w)\left(\int\limits_b^w\frac{\psi(y)\,r(y)}{h(y)}\,dy\right)dw\right].$$

Применяя преобразование Эйлера, получаем аналог формулы Даламбера для (12):

$$z(t,x)=\frac{h(x)}{2\,r(x)}\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{h(x)}\left(h(x+t)\int\limits_a^{x+t}\frac{\varphi(y)\,r(y)}{h(y)}\,dy+h(x-t)\int\limits_a^{x-t}\frac{\varphi(y)\,r(y)}{h(y)}\,dy+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\int\limits_{x-t}^{x+t}h(w)\int\limits_b^w\left(\frac{\psi(y)\,r(y)}{h(y)}\,dy\right)dw\right)\right]. \tag{20}$$

Решение $z(t,x)$ не зависит от констант a, b, хотя они формально участвуют в его записи (20). В дальнейшем удобно положить $a=b=x_1$.

Пусть теперь для уравнения (12), кроме начальных данных (15), заданы краевые условия

$$z(t,x_1)=z(t,x_2)=0. \tag{21}$$

Если данные (15), (21) удовлетворяют условиям согласования [13], то начально-краевая задача имеет гладкое решение. Ниже описывается конструктивное построение решения.

Выражение (20) при $a=b=x_1$ переписывается в виде

$$z(t,x)=\frac{h(x)}{2\,r(x)}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u_2(x+t)+u_3(x-t)}{h(x)}\right), \tag{22}$$

где функции u_2, u_3 задаются формулами

$$u_2(x)=h(x)\int\limits_{x_1}^{x}\frac{\varphi(y)\,r(y)}{h(y)}\,dy+\int\limits_{x_1}^{x}h(w)\int\limits_{x_1}^{w}\left(\frac{\psi(y)\,r(y)}{h(y)}\,dy\right)dw, \tag{23}$$

$$u_3(x)=h(x)\int\limits_{x_1}^{x}\frac{\varphi(y)\,r(y)}{h(y)}\,dy-\int\limits_{x_1}^{x}h(w)\int\limits_{x_1}^{w}\left(\frac{\psi(y)\,r(y)}{h(y)}\,dy\right)dw. \tag{24}$$

Функции u_2, u_3 определены на $[x_1,x_2]$, и необходимо доопределить $u_2(x+t)$, $u_3(x-t)$ для всех $t\geq 0, x\in[x_1,x_2]$. Подставляя в краевые условия функцию z, заданную формулой (22), приходим к двум обыкновенным дифференциальным уравнениям:

$$\begin{aligned}
&u_3'(x_1-t)+u_2'(x_1+t)-\frac{h'(x_1)}{h(x_1)}(u_3(x_1-t)+u_2(x_1+t))=0,\\
&u_3'(x_2-t)+u_2'(x_2+t)-\frac{h'(x_2)}{h(x_2)}(u_3(x_2-t)+u_2(x_2+t))=0.
\end{aligned} \tag{25}$$

Введем новые переменные $\tau_1=x_1-t$, $\tau_2=x_2+t$. Тогда уравнения (25) запишутся в виде

$$\begin{aligned}
&u_3'(\tau_1)-\frac{h'(x_1)}{h(x_1)}\,u_3(\tau_1)=-u_2'(2x_1-\tau_1)+\frac{h'(x_1)}{h(x_1)}\,u_2(2x_1-\tau_1),\\
&u_2'(\tau_2)-\frac{h'(x_2)}{h(x_2)}\,u_2(\tau_2)=-u_3'(2x_2-\tau_2)+\frac{h'(x_2)}{h(x_2)}\,u_3(2x_2-\tau_2).
\end{aligned} \tag{26}$$

Правые части уравнений (26) известны при $\tau_1 \in [x_1 - l, x_1]$, $\tau_2 \in [x_2, x_2 + l]$. Здесь l — длина отрезка $[x_1, x_2]$. Согласно (23) и (24) должны выполняться условия

$$u_3(x_1) = 0, \quad u_2(x_2) = h(x_2) \int\limits_{x_1}^{x_2} \frac{\varphi(y)\, r(y)}{h(y)}\, dy - \int\limits_{x_1}^{x_2} h(w) \int\limits_{x_1}^{w} \left(\frac{\psi(y)\, r(y)}{h(y)}\, dy \right) dw. \tag{27}$$

Решениями уравнений (26) с начальными условиями (27) являются функции

$$u_3(\tau_1) = e^{\frac{h'(x_1)}{h(x_1)}\tau_1} \int\limits_{\tau_1}^{x_1} \left(u_2'(2\,x_1 - t) - \frac{h'(x_1)}{h(x_1)} u_2(2\,x_1 - t) \right) e^{-\frac{h'(x_1)}{h(x_1)}t} dt, \tag{28}$$

$$u_2(\tau_2) = e^{\frac{h'(x_2)}{h(x_2)}\tau_2} \left(u_2(x_2)\, e^{-\frac{h'(x_2)}{h(x_2)}x_2} + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{x_2}^{\tau_2} \left(-u_3'(2\,x_2 - t) + \frac{h'(x_2)}{h(x_2)} u_3(2\,x_2 - t) \right) e^{-\frac{h'(x_2)}{h(x_2)}t} dt \right). \tag{29}$$

Формулы (28) и (29) позволяют доопределить функции $u_2(x_2+t)$, $u_3(x_1-t)$ при $t \in [0,\, l]$. Чтобы определить функции $u_2(x_2+t)$, $u_3(x_1-t)$ при $t \in [l,\, 2\,l]$, необходимо решить уравнения (26) с начальными условиями $u_3(x_1 - l)$ и $u_2(x_2 + l)$, значения которых определяются по формулам (28) и (29). Последовательно применяя эту процедуру, определим функции $u_2(x_2 + t)$, $u_3(x_1 - t)$ на всей полуоси $t \geq 0$.

С помощью преобразования Эйлера можно получать решения начально-краевых задач более сложных уравнений вида (8). При этом формулы типа (20) будут включать в себя дополнительные квадратуры.

Рассмотрим теперь трехмерное уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{\rho c^2} \frac{\partial p}{\partial t} \right) - \operatorname{div}\left(\frac{\nabla p}{\rho} \right) = 0, \tag{30}$$

описывающее распространение звука в неподвижной неоднородной и нестационарной среде [2]. Здесь ρ, c — плотность и скорость звука, являющиеся заданными функциями, p — давление. Если давление представляется в виде

$$p = v(x, y, z)\cos(\omega t + \varphi), \quad \omega,\, \varphi \in R,$$

то уравнение (30) редуцируется к следующему:

$$\Delta v - \left(\frac{\nabla \rho}{\rho}, \nabla v \right) + k^2\, v = 0, \tag{31}$$

где $k = \omega / c$. Замена $v = \sqrt{\rho}\, u$ позволяет привести (31) к уравнению Гельмгольца

$$\Delta u + m\, u = 0. \tag{32}$$

При этом функция m выражается через k и ρ формулой

$$m = k^2 + \frac{\Delta(\sqrt{\rho})}{\sqrt{\rho}} - \left(\frac{\nabla \rho}{\rho}, \nabla(\sqrt{\rho}) \right).$$

Предположим, что среда является слоисто-неоднородной, т. е. функции ρ, c зависят от одной переменной, например, x. Тогда функция m тоже зависит только от x. Построим примеры уравнений (32), приводимых преобразованием Эйлера к уравнению Гельмгольца с постоянным коэффициентом m. Уравнение Гельмгольца с постоянным коэффициентом запишем в виде

$$u_{xx} = B\,u, \tag{33}$$

где $B\,u = -u_{yy} - u_{zz} - m\,u,\ m \in R$. Поскольку последнее уравнение имеет вид (3), то к нему можно применять преобразование Эйлера. Преобразование

$$u^1 = u_x - \frac{h'}{h}\,u$$

переводит решения уравнения (33) в решения уравнения

$$u^1_{xx} + 2\,(\ln h)''\,u^1 = B\,u^1,$$

при этом функция $h(x)$ должна удовлетворять уравнению

$$h'' + c\,h = 0, \quad c \in R.$$

Пусть $c = -1$, тогда $h = \mathrm{ch}(x)$ — частное решение последнего уравнения. Значит, функция u^1 удовлетворяет уравнению Гельмгольца

$$u^1_{xx} + \frac{2}{ch^2 x}\,u^1_x = B\,u^1. \tag{34}$$

Для того чтобы преобразование Эйлера

$$u^2 = u^1_x - \frac{h_1'}{h_1}\,u^1$$

переводило решения уравнения (34) в решения уравнения

$$u^2_{xx} + 2\,(\ln h\,h_1)''\,u^2_x = B\,u^2,$$

функция h_1 должна удовлетворять уравнению

$$h_1'' + \left(\frac{2}{ch^2 x} + c_1\right) h_1 = 0, \quad c_1 \in R.$$

При $c_1 = -4$ частным решением последнего уравнения служит $h_1 = ch^2 x$. В этом случае уравнение Гельмгольца имеет вид

$$u^2_{xx} + \frac{6}{ch^2 x}\,u^2_x = B\,u^2.$$

Индуктивные рассуждения приводят к уравнению Гельмгольца

$$u^n_{xx} + u^n_{yy} + u^n_{zz} + \left(m + \frac{n(n+1)}{ch^2 x}\right)\,u^n = 0. \tag{35}$$

Преобразование

$$u^n = \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{h'_{n-1}}{h_{n-1}}\right) \dots \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{h_1'}{h_1}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{h'}{h}\right) u$$

переводит решения уравнения (33) в решения уравнения (35), при этом $h = chx$, $h_k = ch^{k+1}x$, $k = 1, \ldots, n-1$.

Очевидно, любое уравнение Гельмгольца вида

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} + \left(m + \frac{n_1(n_1+1)}{ch^2x} + \frac{n_2(n_2+1)}{ch^2y} + \frac{n_3(n_3+1)}{ch^2z}\right) u = 0$$

при n_1, n_2, $n_3 \in N$ можно получить с помощью преобразования Эйлера из уравнения

$$\Delta u + m\, u = 0.$$

Подобное преобразование использовал Г. Дарбу [14] для построения решений обыкновенных дифференциальных уравнений. Используя теорему 3 из [6], можно указать класс уравнений Гельмгольца, получаемый преобразованием Эйлера из уравнения

$$\Delta u + k^2\, u = 0, \quad k \in R. \tag{36}$$

Именно, преобразование

$$v = \frac{W(u, g_1, \ldots, g_n)}{W(g_1, \ldots, g_n)}$$

переводит решения уравнения (36) в решения уравнения

$$\Delta v + \left[2\left(\ln(W(u, g_1, \ldots, g_n))\right)'' + k^2\right]\, v = 0,$$

где $g_i = a_i \operatorname{ch}(\lambda_i x) + b_i \operatorname{sh}(\lambda_i x)$, a_i, b_i, $\lambda_i \in R$, $\lambda_i \neq \lambda_j$ при $i \neq j$, $W(f_1, \ldots, f_n)$ — вронскиан соответствующих функций.

2. Преобразования систем уравнений второго порядка

В этом разделе преобразования Эйлера распространяются на некоторый класс линейных систем дифференциальных уравнений в частных производных. Рассмотрим систему

$$F\,\mathbf{Y}_{xx} + G\,\mathbf{Y}_x + H\,\mathbf{Y} = B\,\mathbf{Y}. \tag{37}$$

Здесь F, G, H — матрицы порядка n, элементами которых являются гладкие функции от x; $\mathbf{Y}$ — вектор искомых функций $y_1(x,t), \ldots, y_n(x,t)$; B — линейный оператор по переменным $t_1, \ldots, t_n$ вида

$$B = \sum_{|\alpha| \geq 0}^{K} b_\alpha(t)\, \partial_t^\alpha, \tag{38}$$

где $t = (t_1, \ldots, t_n)$, $\partial_t^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial_{t_1}^{\alpha_1} \ldots \partial_{t_n}^{\alpha_n}}$, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ — целочисленный мультииндекс, $b_\alpha(t)$ — матрица размерности $n \times n$, элементами которой являются гладкие функции от $t_1, \ldots, t_n$.

Теорема 1. *Пусть φ — решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений*

$$F\,\varphi_{xx} + G\,\varphi_x + H\,\varphi = \varphi\, C, \tag{39}$$

где C — матрица с постоянными коэффициентами порядка n; R — произвольная обратимая матрица порядка n, элементами которой являются гладкие функции от x. Тогда преобразование Эйлера вида

$$\mathbf{Z} = R^{-1}\,(\mathbf{Y}_x - S\,\mathbf{Y}) \tag{40}$$

с матрицей

$$S = \varphi_x\,\varphi^{-1} \tag{41}$$

переводит решение системы (37) в решение системы

$$F_1\,\mathbf{Z}_{xx} + G_1\,\mathbf{Z}_x + H_1\,\mathbf{Z} = B\,\mathbf{Z}, \tag{42}$$

где функции F_1, G_1, H_1 задаются формулами

$$F_1 = R^{-1}\,F\,R, \tag{43}$$

$$G_1 = R^{-1}\,(G + F_x + [F,S])\,R + 2\,R^{-1}\,F\,R_x, \tag{44}$$

$$H_1 = R^{-1}\,(H + [G,S] + 2\,F\,S_x + F_x\,S + [F,S]\,S)\,R+$$
$$+R^{-1}\,(F\,R_x + G\,R)_x + R^{-1}\,[F,S]\,R_x, \tag{45}$$

здесь $[A,B] = A\,B - B\,A$ — коммутатор матриц.

Доказательство. Обозначим через $A\,\mathbf{Y}$ и $A_1\,\mathbf{Y}$ левые части соответственно исходной и преобразованной систем

$$A\,\mathbf{Y} = B\,\mathbf{Y}, \quad A_1\,\mathbf{Z} = B\,\mathbf{Z}. \tag{46}$$

Преобразование (40) запишем в виде

$$\mathbf{Z} = L\,\mathbf{Y}. \tag{47}$$

Вторая система в (46), с учетом (47), переписывается в форме

$$A_1\,L\,\mathbf{Y} = B\,L\,\mathbf{Y}. \tag{48}$$

Так как операторы B и L коммутируют, то уравнение (48) можно преобразовать к виду

$$A_1\,L\,\mathbf{Y} - L\,A\,\mathbf{Y} = 0. \tag{49}$$

Распишем слагаемые в левой части системы (49):

$$A_1\,L\,\mathbf{Y} = F_1\,(R^{-1}\,(\mathbf{Y}_x - S\mathbf{Y}))_{xx} + G_1\,(R^{-1}\,(\mathbf{Y}_x - S\,\mathbf{Y}))_x + H_1\,(R^{-1}\,(\mathbf{Y}_x - S\mathbf{Y})) =$$
$$= F_1\,\{R^{-1}\,\mathbf{Y}_{xxx} + (2\,(R^{-1})_x - R^{-1}\,S)\,\mathbf{Y}_{xx} + ((R^{-1})_{xx} - 2\,(R^{-1})_x\,S - 2\,R^{-1}\,S_x)\,\mathbf{Y}_x+$$
$$+(-(R^{-1})_{xx}\,S - 2(R^{-1})_x\,S_x - R^{-1}\,S_{xx})\,\mathbf{Y}\} + G_1\,\{R^{-1}\,\mathbf{Y}_{xx} + ((R^{-1})_x - R^{-1}\,S)\,\mathbf{Y}_x+$$
$$(-(R^{-1})_x\,S - R^{-1}\,S_x)\,\mathbf{Y}\} + H_1\,\{R^{-1}\,\mathbf{Y}_x - R^{-1}\,S\,\mathbf{Y}\},$$
$$L\,A\,\mathbf{Y} = R^{-1}\,((F\,\mathbf{Y}_{xx} + G\,\mathbf{Y}_x + H\,\mathbf{Y})_x - S\,(F\,\mathbf{Y}_{xx} + G\,\mathbf{Y}_x + H\,\mathbf{Y})) =$$
$$= R^{-1}\,(F\,\mathbf{Y}_{xxx} + F_x\,\mathbf{Y}_{xx} + G\,\mathbf{Y}_{xx} + G_x\,\mathbf{Y}_x + H_x\,\mathbf{Y} + H\,\mathbf{Y}_x - S\,F\,\mathbf{Y}_{xx} - S\,G\,\mathbf{Y}_x - S\,H\,\mathbf{Y}).$$

Левая часть системы (49) является многочленом первой степени относительно $\mathbf{Y}_{xxx}$, $\mathbf{Y}_{xx}$, $\mathbf{Y}_{x}$, $\mathbf{Y}$. Следовательно, коэффициенты при этих величинах должны быть равны нулю.

Собирая коэффициенты при $\mathbf{Y}_{xxx}$, приходим к выражению

$$R^{-1}\,F = F_1\,R^{-1}.$$

Отсюда следует представление (43) для матрицы F_1.

Члены при $\mathbf{Y}_{xx}$ приводят к равенству

$$R^{-1}\,F_x + R^{-1}\,G - R^{-1}\,S\,F = F_1\,(2\,(R^{-1})_x - R^{-1}\,S) + G_1\,R^{-1}.$$

Подставив F_1 в последнее равенство и выразив G_1, получаем выражение (44).

Коэффициенты при $\mathbf{Y}_x$ дают соотношение

$$R^{-1}\,G_x + R^{-1}\,H - R^{-1}\,S\,G = F_1\,((R^{-1})_{xx} - 2\,(R^{-1})_x\,S - R^{-1}\,S_x) +$$

$$+G_1\,((R^{-1})_x - R^{-1}\,S) + H_1\,R^{-1}.$$

Подставив F_1 и G_1 в последнее равенство и выразив H_1, получаем выражение (45).

Собирая коэффициенты при $\mathbf{Y}$, приходим к соотношению

$$R^{-1}\,(H_x - S\,H) = F_1\,((-R^{-1})_{xx}\,S - 2\,(R^{-1})_x\,S_x - R^{-1}\,S_{xx}) +$$

$$+G_1\,(-(R^{-1})_x\,S - R^{-1}\,S_x) - H_1\,R^{-1}\,S.$$

Подставив полученные выражения для F_1, G_1 и H_1 в последнее равенство, имеем

$$H_x - S\,H + F\,S_{xx} + G\,S_x + F_x\,S_x + [F,S]\,S_x + H\,S + [G,S]S + 2FS_xS + F_x\,S^2 +$$

$$+[F,S]\,S^2 + G_x\,S = -F\,R\,(R^{-1})_{xx}\,S - 2\,F\,R\,(R^{-1})_x\,S_x - G\,R\,(R^{-1})_x\,S -$$

$$F_xR(R^{-1})_xS - [F,S]R(R^{-1})_xS - 2FR_x(R^{-1})_xS - 2FR_xR^{-1}S_x -$$

$$-F_x\,R_x\,R^{-1}\,S - F\,R_{xx}\,R^{-1}\,S - G\,R_x\,R^{-1}\,S - [F,S]\,R_x\,R^{-1}\,S.$$

Прямыми вычислениями убеждаемся, что правая часть данного соотношения равна нулю, левую же часть можно преобразовать к виду

$$-(F\,S_x + G\,S + H + F\,S^2)_x + S\,(F\,S_x + G\,S + H + F\,S^2) - (F\,S_x + G\,S + H + F\,S^2)\,S = 0.$$

Полагая что $S = \varphi_x\,\varphi^{-1}$, последнее соотношение перепишем в форме

$$-((F\,\varphi_{xx} + G\,\varphi_x + H\,\varphi)\,\varphi^{-1})_x + \varphi_x\,\varphi^{-1}\,(F\,\varphi_{xx} + G\,\varphi_x + H\,\varphi)\,\varphi^{-1} -$$

$$-(F\,\varphi_{xx} + G\,\varphi_x + H\,\varphi)\,\varphi^{-1}\,\varphi_x\,\varphi^{-1} = 0.$$

Умножая это выражение на φ справа, получаем

$$-(F\,\varphi_{xx} + G\,\varphi_x + H\,\varphi)_x + \varphi_x\,\varphi^{-1}\,(F\,\varphi_{xx} + G\,\varphi_x + H\,\varphi) = 0.$$

Последнее равенство является следствием (39).

Пример. Построим решения системы дифференциальных уравнений с частными производными с помощью преобразования Эйлера. Рассмотрим простейшую систему двух волновых уравнений

$$\mathbf{Y}_{xx} = \mathbf{Y}_{tt}, \quad \mathbf{Y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

Решение этой системы выражается через четыре произвольные функции

$$\mathbf{Y}^* = \begin{pmatrix} f_1(x+t) + g_1(x-t) \\ f_2(x+t) + g_2(x-t) \end{pmatrix}.$$

Согласно теореме 1, по исходной системе можно построить решения другой системы с помощью преобразования

$$\mathbf{Z} = \mathbf{Y}_x - \varphi_x \varphi^{-1}\,\mathbf{Y}.$$

В данном случае матрица $\varphi(x)$ должна удовлетворять системе уравнений с постоянными коэффициентами

$$\varphi_{xx} = \varphi\, C.$$

Если матрица C — нулевая, тогда общее решение предыдущей системы имеет вид

$$\varphi(x) = \begin{pmatrix} b_1 + b_2 x & b_3 + b_4 x \\ b_5 + b_6 x & b_7 + b_8 x \end{pmatrix}.$$

Необходимо выбрать константы b_i такими, чтобы матрица $\varphi(x)$ была обратима. Например, можно взять $\varphi(x)$ равной

$$\varphi(x) = \begin{pmatrix} x+1 & 1 \\ 1 & x-1 \end{pmatrix}.$$

Соответствующее преобразование Эйлера задается формулой

$$\mathbf{Z} = \mathbf{Y}_x + \frac{1}{x^2-2} \begin{pmatrix} x-1 & -1 \\ -1 & x+1 \end{pmatrix} \mathbf{Y}.$$

По теореме 1 это преобразование переводит решения исходной системы в решения системы

$$F_1\,\mathbf{Z}_{xx} + G_1\,\mathbf{Z}_x + H_1\,\mathbf{Z} = \mathbf{Z}_{tt},$$

где $F_1 = E$ — единичная матрица, G_1 — нулевая, а

$$H_1 = \frac{2}{(x^2-2)^2} \begin{pmatrix} -x^2 + 2\,x - 2 & 2\,x \\ 2\,x & -x^2 - 2\,x - 2 \end{pmatrix}.$$

Значит, преобразованная система имеет вид

$$\mathbf{Z}_{xx} + \frac{2}{(x^2-2)^2} \begin{pmatrix} -x^2 + 2\,x - 2 & 2\,x \\ 2\,x & -x^2 - 2\,x - 2 \end{pmatrix} \mathbf{Z} = \mathbf{Z}_{tt}.$$

Ее общее решение определяется по формуле преобразования

$$\mathbf{Z} = \mathbf{Y}^*_x + \frac{1}{x^2-2} \begin{pmatrix} x-1 & -1 \\ -1 & x+1 \end{pmatrix} \mathbf{Y}^*.$$

Перейдем теперь к построению “обратного” преобразования [6], т. е. преобразования Эйлера, переводящего решения системы (42) в решения системы (37).

Теорема 2. *Пусть задано преобразование Эйлера*

$$\mathbf{Z} = R^{-1}(\mathbf{Y}_x - S\,\mathbf{Y}),$$

переводящее решения системы (37)

$$F\,\mathbf{Y}_{xx} + G\,\mathbf{Y}_x + H\,\mathbf{Y} = B\,\mathbf{Y}$$

в решения системы (42)

$$F_1\,\mathbf{Z}_{xx} + G_1\,\mathbf{Z}_x + H_1\,\mathbf{Z} = B\,\mathbf{Z}.$$

Тогда преобразование Эйлера

$$\mathbf{Y} = R_1^{-1}\,(\mathbf{Z}_x - S_1\,\mathbf{Z}) \tag{50}$$

переводит решения системы (42) в решения системы (37), если

$$R_1 = R^{-1}\,F^{-1}, \quad S_1 = -R^{-1}\,(F^{-1}\,G + S + R_x\,R^{-1})\,R. \tag{51}$$

Причем S и S_1 задаются следующими формулами:

$$S = \varphi_x\,\varphi^{-1}, \quad S_1 = \varphi_{1x}\,\varphi_1^{-1},$$

где φ и φ_1 являются решениями систем

$$F\,\varphi_{xx} + G\,\varphi_x + H\,\varphi = \varphi\,C,$$

$$F_1\,\varphi_{1xx} + G_1\,\varphi_{1x} + H_1\,\varphi_1 = \varphi_1\,C_1,$$

а матрицы C и C_1 пропорциональны единичной E:

$$C = C_1 = \lambda\,E.$$

Доказательство. Для того чтобы преобразования (40) и (50) были взаимообратны, коэффициенты в уравнениях (37) и (42) должны быть связаны следующими соотношениями:

$$F_1 = R^{-1}\,F\,R, \tag{52}$$

$$F = R_1^{-1}\,F_1\,R_1; \tag{53}$$

$$G_1 = R^{-1}\,(G + F_x + [F, S])\,R + 2\,R^{-1}\,F\,R_x, \tag{54}$$

$$G = R_1^{-1}\,(G_1 + F_{1x} + [F_1, S_1])\,R_1 + 2\,R_1^{-1}\,F_1\,R_{1x}; \tag{55}$$

$$\begin{gathered} H_1 = R^{-1}\,(H + [G, S] + 2\,F\,S_x + F_x\,S + [F, S]\,S)\,R + \\ + R^{-1}\,(F\,R_x + G\,R)_x + R^{-1}\,[F, S]\,R_x, \end{gathered} \tag{56}$$

$$\begin{gathered} H = R_1^{-1}\,(H_1 + [G_1, S_1] + 2\,F_1\,S_{1x} + F_{1x}\,S_1 + [F_1, S_1]\,S_1)\,R_1 + \\ + R_1^{-1}\,(F_1\,R_{1x} + G_1\,R_1)_x + R_1^{-1}\,[F_1, S_1]\,R_{1x}. \end{gathered} \tag{57}$$

Исключая из (52) и (53) F_1, приходим к соотношению

$$F = R_1^{-1}\,R^{-1}\,F\,R\,R_1.$$

Последнему выражению удовлетворяет $R_1 = R^{-1} F^{-1}$.
Исключая из (54) и (55) F_1 и G_1, получаем

$$G = R_1^{-1} R^{-1} (G + F_x + [F, S] + 2 R^{-1} F R_x) R R_1 + R_1^{-1} ((R^{-1})_x F R + R^{-1} F_x R +$$

$$+ R^{-1} F R_x) R_1 + R_1^{-1} [R^{-1} F R,\, S_1] R_1 + 2 R_1^{-1} R^{-1} F R R_{1x}.$$

Подставляя выражение для R_1 в последнее равенство, имеем

$$G = F G F^{-1} + 2 F F_x F^{-1} + F [F, S] F^{-1} + 3 F^2 R_x R^{-1} F^{-1} + F R (R^{-1})_x +$$

$$+ F^2 R S_1 R^{-1} F^{-1} - F R S_1 R^{-1} + 2 F^2 R (R^{-1})_x F^{-1} + 2 F^2 (F^{-1})_x.$$

Домножив последнее выражение на F^{-1} слева и на F справа, приходим к эквивалентным выражениям

$$F^{-1} G F = G + F S - S F + F R_x R^{-1} - R_x R F + F R S_1 R^{-1} - R S_1 R^{-1} F,$$

$$F (F^{-1} G + S + R_x R^{-1} + R S_1 R^{-1}) = (F^{-1} G + S + R_x R^{-1} + R S_1 R^{-1}) F.$$

Если S_1 выражается формулой

$$S_1 = -R^{-1} (F^{-1} G + S + R_x R^{-1}) R,$$

то последнее равенство превращается в тождество.

Мы получили выражения для S_1 и R_1, теперь нужно проверить, удовлетворяют ли они соотношениям (56) и (57). Пусть S_1 задается формулой

$$S_1 = \varphi_{1x} \varphi_1^{-1}, \tag{58}$$

где φ_1 удовлетворяет системе

$$F_1 \varphi_{1xx} + G_1 \varphi_{1x} + H_1 \varphi_1 = \varphi_1 C_1. \tag{59}$$

С учетом (58) и (59) справедливо соотношение

$$F_1 S_{1x} + G_1 S_1 + H_1 + F_1 S_1^2 = \varphi_1 C_1 \varphi_1^{-1}.$$

Учитывая это выражение, перепишем (57), обозначив для краткости его правую часть через A_1,

$$H = R_1^{-1} A_1 R_1 + R_1^{-1} (F_1 S_1 R_1)_x - R_1^{-1} S_1 G_1 R_1 - R_1^{-1} S_1 F_1 S_1 R_1 +$$

$$+ R_1^{-1} (F_1 R_{1x} + G_1 R_1)_x - R_1^{-1} S_1 F_1 R_{1x} = R_1^{-1} A_1 R_1 +$$

$$+ R_1^{-1} (F_1 S_1 R_1 + F_1 R_{1x} + G_1 R_1)_x - R_1^{-1} S_1 (F_1 S_1 R_1 + F_1 R_{1x} + G_1 R_1).$$

Заметим, что с учетом представлений для F_1, G_1, R_1 и S_1 выполняется соотношение

$$F^{-1} G + S + R_x R^{-1} + R S_1 R^{-1} = -R^{-1} S.$$

Тогда справедливы следующие равенства:

$$H = R_1^{-1} A_1 R_1 + R_1^{-1} (-R^{-1} S)_x - R_1^{-1} S_1 (-R^{-1} S) =$$

$$= F\,R\,A_1\,R^{-1}\,F^{-1} - F\,R\,(R^{-1})_x\,S - F\,S_x - F\,(F^{-1}\,G + S + R_x\,R^{-1})\,S,$$

$$H + F\,S_x + G\,S + F\,S^2 = F\,R\,A_1\,R^{-1}\,F^{-1},$$

$$\varphi\,C\,\varphi^{-1}\,F\,R = F\,R\,\varphi_1\,C_1\,\varphi_1^{-1}. \tag{60}$$

Проверим теперь справедливость выражения (59). Подставим в него представления для F_1, G_1 и H_1:

$$R^{-1}\,F\,R\,\varphi_{1xx} + (R^{-1}\,(G + F_x + [F,S])\,R + 2\,R^{-1}\,F\,R_x)\varphi_{1x} +$$

$$+(R^{-1}\,(H + [G,S] + 2\,F\,S_x + F_x\,S + [F,S]\,S)\,R + R^{-1}\,(F\,R_x + G\,R)_x + R^{-1}\,[F,S]\,R_x)\,\varphi_1 = \varphi_1\,C_1.$$

Используя (51) и (58), найдем

$$\varphi_{1xx} = -(R^{-1}\,(F^{-1}\,G + S + R_x\,R^{-1})\,R)_x\,\varphi_1 - (R^{-1}\,(F^{-1}\,G + S + R_x\,R^{-1})\,R)\,\varphi_{1x}.$$

Подставив последнее выражение в (59), получим

$$(F\,R_x + F_x\,R - S\,F\,R)\,\varphi_{1x} + (\varphi\,C\,\varphi^{-1}\,R - S\,G\,R + (F\,S\,R)_x - S\,F\,S\,R + (F\,R_x + G\,R)_x -$$

$$-S\,F\,R_x - F\,R\,(R^{-1}\,(F^{-1}\,G + S + R_x\,R^{-1})\,R)_x)\,\varphi_1 = R\,\varphi_1\,C_1.$$

Домножая это соотношение на φ_1^{-1} справа, преобразуем его к виду

$$-(F\,R_x + F_x\,R - S\,F\,R)\,R^{-1}\,(F^{-1}\,G + S + R_x\,R^{-1})\,R + \varphi\,C\,\varphi^{-1}\,R - S\,(F\,S\,R + F\,R_x + G\,R) +$$

$$+(F\,S\,R + F\,R_x + G\,R)_x - F\,R\,(R^{-1}(F^{-1}\,G + S + R_x\,R^{-1})\,R)_x = R\,\varphi_1\,C_1\,\varphi_1^{-1}.$$

Приведя подобные, получаем

$$\varphi\,C\,\varphi^{-1}\,R = R\,\varphi_1\,C_1\,\varphi_1^{-1}. \tag{61}$$

Полагая $C = C_1 = \lambda\,E$, убеждаемся, что условия (60) и (61) становятся тождествами.

Замечание. Как следует из доказательства теоремы, для существования "обратного" преобразования Эйлера необходимо выполнение условий (60) и (61).

3. Построение преобразований Эйлера высших порядков

Рассмотрим преобразование Эйлера вида

$$\mathbf{Z} = \mathbf{Y}_x - S\,\mathbf{Y} \tag{62}$$

с матрицей

$$S = \varphi_x\,\varphi^{-1},$$

где φ — решение системы

$$F\,\varphi_{xx} + G\,\varphi_x + H\,\varphi = \varphi\,C. \tag{63}$$

Согласно теореме 1, оно переводит решение системы

$$F\,\mathbf{Y}_{xx} + G\,\mathbf{Y}_x + H\,\mathbf{Y} = B\,\mathbf{Y} \tag{64}$$

в решение системы

$$F\,\mathbf{Z}_{xx} + G_1\,\mathbf{Z}_x + H_1\,\mathbf{Z} = B\,\mathbf{Z}, \tag{65}$$

где функции G_1, H_1 задаются формулами

$$G_1 = G + F_x + [F, S], \tag{66}$$

$$H_1 = H + G_x + [G, S] + 2\,F\,S_x + F_x\,S + [F, S]\,S. \tag{67}$$

Перейдем теперь к построению преобразований Эйлера высших порядков. Для этого воспользуемся понятием квазидетерминанта [15], напомнив его определение.

Обозначим через Q алгебру матриц порядка d над полем R. Пусть $X = (x_{ij})$ — матрица порядка n над Q; X^{ij} — подматрица, полученная удалением i-го ряда и j-го столбца из X; r_i^j — подматрица, полученная из i-го ряда X удалением элемента x_{ij}; c_j^i — подматрица, полученная из j-го столбца X удалением элемента x_{ij}.

Квазидетерминантом будем называть следующее выражение:

$$|X|_{ij} = x_{ij} - r_i^j\,(X^{ij})^{-1}\,c_j^i. \tag{68}$$

Существование квазидетерминанта обусловлено обратимостью X^{ij}. Квазидетерминант может быть вычислен следующим образом [15]:

$$|X|_{ij} = x_{ij} - \sum_{k\neq i}\sum_{l\neq j}(x_{ik}\,(|X^{ij}|_{lk})^{-1}\,x_{lj}). \tag{69}$$

Теорема 3. *Пусть $\varphi_1, \dots, \varphi_k$ — решения системы (63), соответствующие различным матрицам $C_1, \dots, C_k$. Если существует оператор M_k, действие которого задается формулой*

$$M_k\,\mathbf{Y} = |W(\varphi_1, \dots, \varphi_k, \mathbf{Y})|_{k+1,k+1}, \tag{70}$$

где $W(\varphi_1, \dots, \varphi_k, \mathbf{Y})$ — аналог матрицы Вронского

$$W(\varphi_1, \dots, \varphi_k, \mathbf{Y}) = \begin{pmatrix} \varphi_1 & \dots & \varphi_k & \mathbf{Y} \\ \varphi_1' & \dots & \varphi_k' & \mathbf{Y}' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_1^{(k)} & \dots & \varphi_k^{(k)} & \mathbf{Y}^{(k)} \end{pmatrix},$$

то преобразование Эйлера порядка k

$$\mathbf{Z} = M_k\,\mathbf{Y} \tag{71}$$

переводит решение системы (64)

$$F\,\mathbf{Y}_{xx} + G\,\mathbf{Y}_x + H\,\mathbf{Y} = B\,\mathbf{Y}$$

в решение системы

$$F\,\mathbf{Z}_{xx} + G_k\,\mathbf{Z}_x + H_k\,\mathbf{Z} = B\,\mathbf{Z}. \tag{72}$$

При этом G_k и H_k имеют вид

$$G_k = G + k\,F_x + [F, -|U|_{k,k}\,|W|_{k,k}^{-1}], \tag{73}$$

$$H_k = H + k\,G_x + \frac{k(k-1)}{2}\,F_{xx} - 2\,F\,(|U|_{k,k}\,|W|_{k,k}^{-1})_x - F_x\,|U|_{k,k}\,|W|_{k,k}^{-1} + [G, -|U|_{k,k}\,|W|_{k,k}^{-1}] +$$

$$+\sum_{i=1}^{k}\left(\left[F,\sum_{j=1}^{i-1}S_j\right]_x+(i-1)\,[F_x,S_i]+\left[\left[F,\sum_{j=1}^{i-1}S_j\right],S_i\right]+[F,S_i]\,S_i\right), \tag{74}$$

где

$$S_i=(|W(\varphi_1,\dots,\varphi_i)|_{i,i})_x\,(W(\varphi_1,\dots,\varphi_i)^{-1},$$

$$W=W(\varphi_1,\dots,\varphi_k),$$

$$U=U(\varphi_1,\dots,\varphi_k)=\begin{pmatrix}\varphi_1 & \varphi_2 & \dots & \varphi_k\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \varphi_1^{(k-2)} & \varphi_2^{(k-2)} & \dots & \varphi_k^{(k-2)}\\ \varphi_1^{(k)} & \varphi_2^{(k)} & \dots & \varphi_k^{(k)}\end{pmatrix}.$$

Доказательство. Сначала убедимся, что оператор M_k вида (70) действительно задает преобразование Эйлера порядка k. Обозначим через L_φ оператор Эйлера вида

$$L_\varphi=(\partial_x-\varphi_x\,\varphi^{-1}).$$

Построим последовательность функций и операторов

$$\begin{gathered}p_1=\varphi_1,\quad p_2=L_{p_1}\,\varphi_2,\dots,\quad p_n=L_{p_{n-1}}\dots L_{p_1}\,\varphi_n,\\ M_1=L_{p_1},\quad M_2=L_{p_2}\,M_1,\dots,\quad M_n=L_{p_n}\,M_{n-1}.\end{gathered} \tag{75}$$

Действие оператора M_k на произвольный вектор функций соответствующего размера можно записать в форме

$$M_k\,\mathbf{Y}=\mathbf{Y}^{(k)}+a_k\,\mathbf{Y}^{(k-1)}+\dots+a_1\,\mathbf{Y},$$

или

$$M_k\,\mathbf{Y}=\mathbf{Y}^{(k)}+\begin{pmatrix}a_1 & a_2 & \dots & a_k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{Y}\\ \mathbf{Y}'\\ \vdots\\ \mathbf{Y}^{(k-1)}\end{pmatrix}. \tag{76}$$

Из построения операторов видно, что функции $\varphi_1,\dots,\varphi_k$ удовлетворяют системе

$$M_k\,\varphi=0. \tag{77}$$

Найдем вектор матриц $(a_1\quad a_2\quad\dots\quad a_k)$, используя условие (77):

$$(a_1\quad a_2\quad\dots\quad a_k)\begin{pmatrix}\varphi_1 & \varphi_2 & \dots & \varphi_k\\ \varphi_1' & \varphi_2' & \dots & \varphi_k'\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \varphi_1^{(k-1)} & \varphi_2^{(k-1)} & \dots & \varphi_k^{(k-1)}\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}\varphi_1^{(k)} & \dots & \varphi_k^{(k)}\end{pmatrix},$$

$$(a_1\quad a_2\quad\dots\quad a_k)=-\begin{pmatrix}\varphi_1^{(k)} & \dots & \varphi_k^{(k)}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varphi_1 & \varphi_2 & \dots & \varphi_k\\ \varphi_1' & \varphi_2' & \dots & \varphi_k'\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \varphi_1^{(k-1)} & \varphi_2^{(k-1)} & \dots & \varphi_k^{(k-1)}\end{pmatrix}^{-1}.$$

Подставив последнее выражение в (76), получим

$$M_k\,\mathbf{Y} = \mathbf{Y}^{(k)} - \begin{pmatrix} \varphi_1^{(k)} & \dots & \varphi_k^{(k)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1 & \dots & \varphi_k \\ \varphi_1' & \dots & \varphi_k' \\ \dots & \dots & \dots \\ \varphi_1^{(k-1)} & \dots & \varphi_k^{(k-1)} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{Y} \\ \mathbf{Y}' \\ \vdots \\ \mathbf{Y}^{(k-1)} \end{pmatrix}.$$

Следовательно, оператор M_k действительно задает преобразование Эйлера порядка k.

Выражения для G_k и H_k находятся по индукции последовательным применением формул (66) и (67) и имеют вид

$$G_k = G + k\,F_x + [F, S_1 + S_2 + \ldots + S_k],$$

$$H_k = H + k\,G_x + \frac{k(k-1)}{2}\,F_{xx} + 2\,F\,(S_1 + S_2 + \ldots + S_k)_x +$$
$$+ F_x\,(S_1 + S_2 + \ldots + S_k) + [G, S_1 + S_2 + \ldots + S_k] +$$
$$+ \sum_{i=1}^{k}\left(\left[F, \sum_{j=1}^{i-1} s_j\right]_x + (i-1)\,[F_x, s_i] + \left[\left[F, \sum_{j=1}^{i-1} S_j\right], S_i\right] + [F, S_i]\,S_i\right).$$

Необходимо найти коэффициенты S_i и сумму $S_1 + S_2 + \ldots + S_k$. Так как преобразование Эйлера порядка i является суперпозицией преобразований низших порядков, то справедливо следующее выражение:

$$p_{i+1} = p_{ix} - S_i\,p_i,$$

где

$$S_i = (|W(\varphi_1, \ldots, \varphi_i)|_{i,i})_x\,(|W(\varphi_1, \ldots, \varphi_i)|_{i,i})^{-1}.$$

Из построения оператора M_k следует

$$M_k = L_{p_n}\,M_{k-1} = (\partial_x + S_k)\ldots(\partial_x + S_1) =$$
$$= \partial_x^k + (S_1 + S_2 + \ldots + S_k)\partial_x^{k-1} + \ldots$$

Видно, что сумма $S_1 + S_2 + \ldots + S_k$ равна a_k в выражении (76). Этот коэффициент находится из условия (77) и равен

$$a_k = -|U|_{k,k}\,|W|_{k,k}^{-1},$$

где

$$U = U(\varphi_1, \ldots, \varphi_k) = \begin{pmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 & \dots & \varphi_k \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_1^{(k-2)} & \varphi_2^{(k-2)} & \dots & \varphi_k^{(k-2)} \\ \varphi_1^{(k)} & \varphi_2^{(k)} & \dots & \varphi_k^{(k)} \end{pmatrix},$$

$$W = W(\varphi_1, \ldots, \varphi_k) = \begin{pmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 & \dots & \varphi_k \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_1^{(k-2)} & \varphi_2^{(k-2)} & \dots & \varphi_k^{(k-2)} \\ \varphi_1^{(k-1)} & \varphi_2^{(k-1)} & \dots & \varphi_k^{(k-1)} \end{pmatrix}.$$

Список литературы

[1] Виноградова М.Б., Руденко О.В., Сухоруков А.П. Теория волн. М.: Наука, 1979.

[2] Бреховских Л.М., Годин О.А. Акустика неоднородных сред. Т. 1. Основы теории отражения и распространения звука. М.: Наука, 2007.

[3] Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.

[4] Ибрагимов Н.Х. Группы преобразований в математической физике. М.: Наука, 1983.

[5] Аксенов А.В. Линейные дифференциальные соотношения между решениями класса уранений Эйлера—Пуассона—Дарбу // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2001. Т. 63, № 1. С. 15–20.

[6] Капцов О.В. Эквивалентность линейных дифференциальных уравнений с частными производными и преобразования Эйлера—Дарбу // Вычисл. технологии. 2007. Т. 12, № 4. С. 59–72.

[7] Tsarev S.P. Generalized Laplace transformations and integration of hyperbolic systems of linear partial differential equations // Proceedings of the 2005 International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation, Beijing: ACM Press, 2005. P. 325–331.

[8] Эйлер Л. Интегральное исчисление. Т. 3. М.: ГИФМЛ, 1958.

[9] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. М.: Наука, 1986.

[10] Сагомонян А.Я. Волны напряжения в сплошных средах. М.: Изд-во МГУ, 1985.

[11] Курант Р. Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1964. 830 с.

[12] Рождественский Б.П., Яненко Н.Н. Системы квазилинейных уравнений. М.: Наука, 1978.

[13] Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1971.

[14] Darboux G. Leçons sur la théorie générale des surfaces et les applications géométriques du calcul infinitésimal. Vol. 2. Paris: Gauthier-Villars, 1915.

[15] Gelfand I.M., Gelfand S., Retakh V.S., Wilson R.L. Quasideterminants // Adv. Math. 2005. Vol. 193, N 1. P. 56–141.

Поступила в редакцию 31 марта 2009 г.