

Математическое моделирование работы реечной передачи с эксцентриково-циклоидальным зацеплением

А. М. БУБЕНЧИКОВ, Н. Р. ЩЕРБАКОВ
Томский государственный университет, Россия
e-mail: nrs@math.tsu.ru

В. В. СТАНОВСКОЙ, С. М. КАЗАКЯВИЧЮС, Т. А. РЕМНЁВА
ЗАО “Технология маркет”, Томск, Россия
e-mail: tm@mail.tomsknet.ru

Построена математическая модель работы реечной передачи, преобразующей вращательное движение в поступательное и использующей эксцентриково-циклоидальное зацепление. Механизм состоит из винтового эксцентрика, выполняющего роль зубчатого колеса, и выходной детали (рейки), построенной на базе циклоиды. Предложенный новый вид зацепления обладает повышенными силовыми характеристиками и позволяет получать невысокие скорости перемещения рейки. Создана компьютерная программа, иллюстрирующая кинематически согласованное движение идеальных геометрических фигур — торцевых сечений работающего механизма и позволяющая находить необходимые для конструирования числовые характеристики, а также оптимальные режимы функционирования рассматриваемых систем.

Ключевые слова: математическое моделирование, реечная передача, эксцентриково-циклоидальное зацепление, вектор-функция, оптимизация.

Введение

Рассматриваемый передаточный механизм относится к зубчатым кинематическим парам, а более конкретно, к реечным передачам, преобразующим вращательное движение в поступательное и наоборот. Известные реечные передачи — цилиндрические [1], червячные и др. — имеют либо недостаточную нагрузочную способность, либо низкий КПД. Предлагаемый механизм имеет повышенную нагрузочную способность зацепления при габаритах уже используемых реечных передач, а также возможность получения невысоких скоростей перемещения рейки независимо от размеров вращающегося колеса (определяемых только угловым шагом рейки). Устройство может быть использовано вместо обычных реечных механизмов в линейных приводах станков, в устройствах рулевого управления автомобилей, а также в грузоподъемной технике (реечные домкраты и т. п.).

1. Геометрическая модель механизма

На рис. 1 изображен фрагмент реечной передачи в области зацепления ее составных элементов.

Передача состоит из винтового эксцентрика и зубчатой рейки. Идеальная поверхность винтового эксцентрика образуется как геометрическое место точек окружности с центром, перемещенным по винтовой линии вокруг оси вращения колеса, или, что то же, — как огибающая семейства сфер постоянного радиуса, центры которых находятся на винтовой линии. Следовательно, в каждом сечении винтового эксцентрика, перпендикулярном его оси вращения, мы имеем окружность радиуса ρ , центр которой смещен относительно оси на эксцентриситет ε . В таком же сечении рейки получается эквидистанта трохоиды [2] (укороченной циклоиды), удаленная по нормальям к трохоиде на величину ρ . Таким образом, поверхность рейки образуется смещением эквидистанты вдоль оси эксцентрика с одновременным смещением ее в направлении, перпендикулярном этой оси. Для обеспечения непрерывного контакта червяка и рейки необходимо, чтобы при повороте окружности, образующей поверхность винтового эксцентрика, на угол β эквидистанта сместилась на расстояние βr , где $r = \rho + \varepsilon$ — радиус окружности, образующей исходную циклоиду. Длина арки циклоиды (“шаг” по длине) равна $2\pi r$.

На рис. 2 изображены кривые, участвующие в построении поверхностей деталей реечной передачи: 1 — циклоида, образованная при качении круга 4 радиуса r по оси OY ; 2 — трохоида, вычерчиваемая точкой 6, удаленной от центра круга 4 на ε ; 3 — эквидистанта трохоиды, удаленная от нее по нормальям на расстояние ρ ; 5 — плоское сечение винтового эксцентрика с центром в точке 6. Кривые 2, 3, 5 изображены в сечении, отвечающем значению $\beta = 90^\circ$.

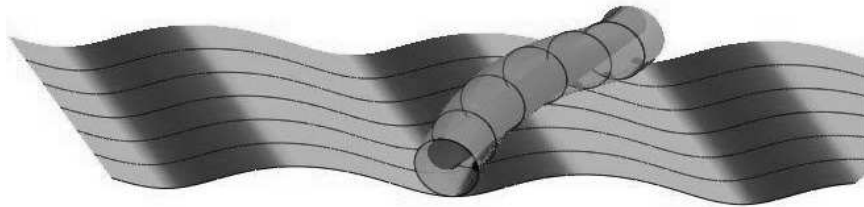


Рис. 1. Фрагмент реечной передачи в области зацепления

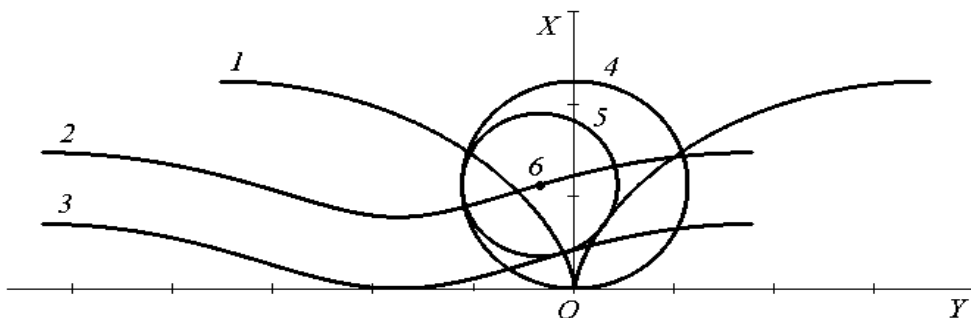


Рис. 2. Образование профилей реечного зацепления

Параметрические уравнения трохойды 2 имеют вид [2]

$$x(\tau) = -\varepsilon \cos \tau + r,$$

$$y(\tau) = -\varepsilon \sin \tau + r\tau,$$

а параметрические уравнения эквидистанты трохойды 3 —

$$X(\tau) = x(\tau) + \rho n_1(\tau),$$

$$Y(\tau) = y(\tau) + \rho n_2(\tau),$$

где $n_1(\tau), n_2(\tau)$ — координаты единичного вектора нормали в точке трохойды. Если ось OZ параллельна оси винтового эксцентрика, то поверхность рейки может быть задана в виде

$$Xr(\tau, \beta) = X(\tau),$$

$$Yr(\tau, \beta) = Y(\tau) - \beta r,$$

$$Zr(\tau, \beta) = \frac{l\beta}{2\pi}, \quad (1)$$

где l — задаваемая ширина рейки, $\beta = 0 \dots 2\pi$, $\tau = 0 \dots 2\pi m$ (m — задаваемое число циклов — арок циклоиды). Проекции в плоскость XOY центров сечений винтового эксцентрика в начальный момент времени имеют координаты

$$xc(\beta) = -\varepsilon \cos \beta + r,$$

$$yc(\beta) = -\varepsilon \sin \beta,$$

а поверхность эксцентрика имеет параметрические уравнения

$$Xc(\alpha, \beta) = xc(\beta) + \rho \cos \alpha,$$

$$Yc(\alpha, \beta) = yc(\beta) + \rho \sin \alpha,$$

$$Zc(\alpha, \beta) = \frac{l\beta}{2\pi}. \quad (2)$$

2. Математическое моделирование работы механизма

Математическая модель работы механизма позволяет проиллюстрировать кинематически согласованное движение геометрических фигур, составляющих контактирующие детали передачи. Другими словами, необходимо получить возможность изображения в каждый момент времени (т. е. для каждого угла поворота винтового эксцентрика) взаимного расположения этих деталей в зацеплении. Для этого нужно иметь уравнения семейств поверхностей (1) и (2), причем параметром этих семейств является угол поворота колеса (винтового эксцентрика). Уравнения таких семейств легко получаются, если повороту эксцентрика вокруг своей оси на угол Δ будет соответствовать сдвиг рейки на величину $(-r\Delta)$.

3. Нахождение линии контакта

Как видно из схемы построения поверхностей (1), (2) (см. рис. 2), профиль винтового эксцентрика в любом торцевом сечении представлен эксцентрично смещенной окружностью 5, а профиль рейки — смещенной эквидистантой 3. Окружность 5 в любом торцевом сечении имеет точку касания с соответствующей эквидистантой. Рассмотрим n торцевых сечений, получающихся при повороте окружности 5 на углы

$$\beta_k = \frac{2\pi(k-1)}{n}, k = 1 \dots n. \quad (3)$$

Координаты точки контакта окружности 5 с эквидистантой 3 находятся как сумма радиус-вектора центра 6 окружности 5 с вектором, направленным по нормали к данной окружности в точке контакта и имеющим длину ρ . Для нахождения этой нормали нет необходимости прибегать к дифференцированию — достаточно применить свойство циклоиды: нормаль в произвольной ее точке проходит через полюс (нижняя точка катящегося круга, образующего циклоиду (с. 241 [2])). В данной конструкции полюс неподвижен и находится в начале координат, а искомая нормаль идет по направлению радиус-вектора точки 6. Учитывая это, нетрудно найти значение параметра на соответствующей эквидистанте, при котором получается точка контакта:

$$\tau_k(\Delta) = \Delta + \beta_k. \quad (4)$$

Линия контакта строится с помощью встроенной в пакете MathCad функции интерполяции массива точек контакта, соответствующих близким торцевым сечениям. Полученная при этом вектор-функция $\mathbf{K}\beta(\beta)$ точек линии контакта дает возможность дифференцирования с помощью символьного процессора пакета MathCad с целью нахождения кривизны в каждой точке этой линии в любой момент времени. Эта кривизна оказывается не постоянной, т. е. линия контакта не является винтовой.

4. Зацепление с составными венцами

При всех достоинствах предлагаемое реечное зацепление достаточно сложно в изготовлении, требует наличия многокоординатных станков с ЧПУ. Эта же идея зацепления может быть реализована в другом варианте, более простом в изготовлении. Обратимся к схеме образования винтового профиля эксцентрика, изображенного на рис. 1. Если профиль получать не непрерывным поворотом и смещением эксцентричной окружности относительно оси вращения, а разделить эти два движения, то получится ступенчатый профиль, образованный отдельными, повернутыми относительно друг друга одинаковыми венцами 3, 3', 3'', 3''' (рис. 3). Каждый венец 3 образован цилиндром с эксцентрично смещенной окружностью в сечении. Соседние венцы 3, 3'... повернуты друг относительно друга на угол, равный угловому шагу колеса 1, деленному на число венцов n , а венец с номером $k = 1 \dots n$ повернут по отношению к первому на угол β_k , определенный формулой (3). На рис. 3 угловой шаг составляет 360° , число венцов равно 6. Следовательно, соседние венцы 3 будут повернуты относительно друг друга на 60° . Изготавливать такой ступенчатый профиль колеса можно либо из отдельных венцов, жестко скрепляемых вместе, либо путем выполнения колеса со ступенчатым профилем в виде единой детали наподобие коленчатого вала. Аналогично строится и составной

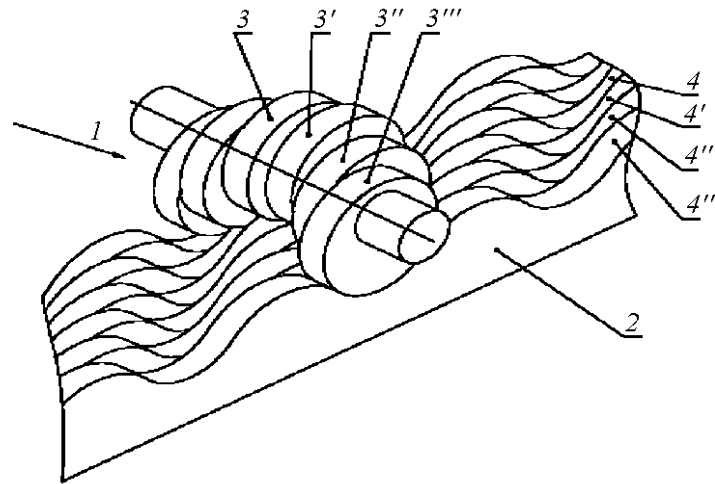


Рис. 3. Зацепление с составными венцами

зубчатый профиль рейки 2, только отдельные венцы 4, 4', 4'', 4''', ... здесь сдвинуты относительно друг друга вдоль рейки на расстояние, равное шагу рейки, деленному на число венцов. В общем случае можно сказать, что венцы составного колеса и составной рейки смещены относительно друг друга по фазе, и это смещение равно шагу соответствующего венца, деленному на число венцов. Каждая пара венцов 3 и 4 колеса 1 и рейки 2 контактируют по прямой линии, и общая линия контакта профилей представляет собой кусочно-непрерывную ломаную кривую. Следует отметить, что увеличивая число венцов в зацеплении, мы будем приближаться к первому варианту зацепления с косыми винтовыми зубьями. В свою очередь, зацепление с косыми зубьями можно рассматривать как зацепление ступенчатых профилей, где число венцов бесконечно велико, а смещение по фазе между соседними венцами бесконечно мало. Учитывая это, дальнейшие расчеты достаточно провести для варианта зацепления с n составными венцами.

5. Радиусы кривизны и расчет усилий в точках контакта

Для нахождения контактных напряжений в точках соприкосновения составных венцов колеса 1 и рейки 2 необходимо знать радиус кривизны той линии G_k на рейке, которая получается торцевым сечением, соответствующим углу поворота β_k , в точке касания линии G_k с окружностью этого же торцевого сечения венца колеса 1. Данная линия является результатом смещения исходной линии G_1 на величину $(-r(\beta_k + \Delta))$, где Δ — угол поворота генератора. Радиусы кривизны вычисляются по обычной формуле

$$R(k, \Delta) = \frac{[X'(\tau_k(\Delta))^2 + Y'(\tau_k(\Delta))^2]^{\frac{3}{2}}}{X'(\tau_k(\Delta))Y''(\tau_k(\Delta)) - X''(\tau_k(\Delta))Y'(\tau_k(\Delta))},$$

где $(X(\tau_k(\Delta)), Y(\tau_k(\Delta)))$ — координаты точки контакта на линии G_k .

Формула для расчета усилий в точках контакта при угле поворота колеса Δ имеет вид

$$F(i, \Delta) = \frac{M \sin \gamma(i, \Delta)}{\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} ((X(\tau_i(\Delta)) - r)^2 + Y(\tau_i(\Delta))^2)^{\frac{1}{2}} \sin(\gamma(i, \Delta))^2}, \quad (5)$$

где M — входной момент на генераторе, $\gamma(i, \Delta)$ — угол между радиус-вектором точки контакта и общей нормалью к касающимся кривым (окружность и эквидистанта). Суммирование ведется по половине всех номеров торцевых сечений, соответствующих “рабочим” венцам колеса 1 (испытывающим силовую нагрузку). Номера “рабочих” венцов зависят от Δ и определяются с помощью специальной подпрограммы.

6. Выходной момент и расчет потерь мощности на трение

При определении силового воздействия со стороны колеса по формуле (5) выходное усилие (тангенциальное воздействие на рейку) может быть определено следующим образом:

$$P_{\text{вых}} = \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} (\mathbf{F}(i, \Delta), \mathbf{e}). \quad (6)$$

Здесь вектор $\mathbf{F}(i, \Delta)$ направлен по общим нормальям к касающимся кривым, \mathbf{e} — единичный вектор, направленный вдоль рейки.

Следуя принципу Лагранжа, при статистическом нагружении системы мы должны иметь

$$M\omega_0 = P_{\text{вых}}\nu_{\text{рей}}, \quad (7)$$

где M — входной момент, ω_0 и $\nu_{\text{рей}}$ — пока еще виртуальные (которые, конечно же, могут совпадать с реальными) угловая скорость колеса и скорость поступательного перемещения рейки. В динамических условиях, т.е. при наличии в системе движения, соотношение (7), следуя принципу Даламбера — Лагранжа, можно обобщить следующим образом:

$$M\omega_0 = P_{\text{вых}}\nu_{\text{рей}} - Q_{\text{тр}},$$

где $Q_{\text{тр}}$ — потери входной мощности на трение, которые определяем как

$$Q_{\text{тр}} = K \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} F(i, \Delta)(\Delta \mathbf{v}, \boldsymbol{\tau}).$$

Здесь K — коэффициент трения, $\boldsymbol{\tau}$ — единичный вектор касательной в точке контакта, $\Delta \mathbf{v} = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_{\text{рей}}$, $\mathbf{v}_1 = \mathbf{r}_k \times \boldsymbol{\omega}_0$, \mathbf{r}_k — радиус-вектор точки контакта относительно оси вращения винтового эксцентрика, $\mathbf{v}_{\text{рей}}$ — вектор скорости перемещения рейки.

7. Оптимизация зацепления

Принципиальная схема нахождения оптимальных параметров линейчатой передачи сводится к следующему. Численно моделируется движение элементов системы в реальном времени, а именно, в каждый момент времени определяются новые положения поверхностей взаимодействия и новые совокупности точек контакта, новые усилия в местах контакта и локальные значения потерь входной мощности на трение. Перемещение по времени заканчивается с завершением полного цикла движения системы. Такой расчет составляет первичный вариант для данного зацепления. Последовательными расчетами строится система базовых вариантов, позволяющая получить поверхности КПД и контактного напряжения. После этого проводится оптимизация по схеме, предложенной для редуктора с циклоидально-эксцентриковым зацеплением [3].

Таким образом, в статье рассмотрен новый вид зубчатого зацепления — эксцентрово-циклоидальное зацепление с криволинейными зубьями, обладающее высоким передаточным отношением при минимальных габаритных размерах. Зубья имеют большой приведенный радиус кривизны, что увеличивает контактную прочность зацепления, а форма зуба обеспечивает большую изгибную прочность. Зацепление обладает повышенным КПД, так как имеет минимальные потери на трение.

Новое зубчатое зацепление оформлено в качестве заявки на изобретение [4].

Список литературы

- [1] Крайнев А.Ф. Словарь-справочник по механизмам. М.: Машиностроение, 1987. 381 с.
- [2] Савелов А.А. Плоские кривые. М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит-ры, 1960. 294 с.
- [3] Бубенчиков А.М., Щербаков Н.Р., Становской В.В. и др. Математическое моделирование работы редуктора с циклоидально-эксцентровым зацеплением // Вычисл. технологии. 2009. Т. 14, № 2. С. 51–57.
- [4] Заявка на изобретение RU2008115365. “Реечное зацепление для линейного привода (варианты)” / В.В. Становской, С.М. Казакиявичюс, Т.А. Ремнева, В.М. Кузнецов, А.М. Бубенчиков, Н.Р. Щербаков. Заявлено 18.04.2008. (решение о выдаче патента от 24.12.2008).

*Поступила в редакцию 17 января 2009 г.,
в переработанном виде — 22 июня 2009 г.*