

Вариативное исследование использования множителей Лагранжа в треугольном конечном элементе оболочки вращения

Ю. В. Клочков, А. П. Николаев, О. В. Вахнина

Волгоградская государственная сельскохозяйственная академия, Россия

e-mail: klotchkov@bk.ru, ovahnina@bk.ru

Представлены результаты вариативного исследования множителей Лагранжа в алгоритмах формирования матриц жесткостей треугольных элементов дискретизации. Показано, что более эффективным по сравнению с вариантами, использующими процедуру численного интегрирования данных множителей по сторонам треугольного элемента дискретизации, является алгоритм, основанный на применении корректирующих множителей Лагранжа в серединах сторон треугольного конечного элемента. Примеры расчета цилиндрической оболочки подтверждают высокую точность результатов, полученных с применением разработанной методики, что позволяет рекомендовать ее к использованию.

Ключевые слова: оболочка вращения, метод конечных элементов, треугольный конечный элемент, множители Лагранжа, матрица жесткости, элемент дискретизации.

Треугольные конечные элементы (КЭ) с различными числами степеней свободы в узлах широко применяются в прочностных расчетах пластин и оболочек [1–3]. Использование в качестве узловых неизвестных производных компонент вектора перемещения приводит к нарушению совместности численных значений производных вектора перемещения на границах соседних элементов.

В [1, 2] без приведения численных результатов указана возможность обеспечения совместности значений производных нормального перемещения на границах треугольных КЭ. Для решения этой задачи применяются метод корректирующих множителей Лагранжа и метод штрафа [1]. В первом случае к функционалу Лагранжа добавлены слагаемые, представляющие интегралы от произведения функции Лагранжа на разность алгебраических выражений производных прогибов соседних элементов по их границам. Метод штрафа предполагает применение в функционале Лагранжа штрафного слагаемого с единым множителем, регулирующим совместность деформирования на границах соседних элементов [1].

В настоящей работе при использовании треугольного КЭ с узловыми неизвестными в виде перемещений и их производных рассмотрены различные варианты алгоритмов реализации метода корректирующих множителей Лагранжа, из которых определен вариант, существенно повышающий точность конечно-элементных расчетов.

Конечный элемент выбирается в виде криволинейного треугольного фрагмента срединной поверхности оболочки вращения с узлами i, j, k . Столбец узловых варьируемых параметров рассматриваемого треугольного элемента дискретизации в глобальной системе координат содержит компоненты вектора перемещения и их первые производные

по криволинейным координатам S (длина дуги меридиана) и θ (угол, отсчитываемый от образующей против хода часовой стрелки) [4]

$$\{U_y^r\}_{1 \times 27}^T = \left\{ \begin{matrix} \{u_y^r\}_{1 \times 9}^T & \{v_y^r\}_{1 \times 9}^T & \{w_y^r\}_{1 \times 9}^T \end{matrix} \right\}, \quad (1)$$

где u и v — тангенциальные, а w — нормальная компоненты вектора перемещения. Входящие в правую часть (1) подматрицы-строки имеют следующий вид:

$$\{q_y^r\}_{1 \times 9}^T = \{q^i q^j q^k q_{,s}^i q_{,s}^j q_{,s}^k q_{,\theta}^i q_{,\theta}^j q_{,\theta}^k\}, \quad (2)$$

где под q понимается компонента вектора перемещения u , v или w .

Рассматриваемый треугольный КЭ является совместным по компонентам вектора перемещения, но несовместным по их производным, в силу чего при использовании данного типа элементов дискретизации возникает погрешность конечно-элементных решений.

На границах между смежными элементами должно выполняться равенство между производными нормальной компоненты вектора перемещения в направлении внешней нормали к стороне элемента (рис. 1), которое в силу противонаправленности ортов \mathbf{n}_{j-k} и $\mathbf{n}_{j'-k'}$ может быть записано в виде

$$\frac{\partial w^{(I)}}{\partial S_n^{j-k}} + \frac{\partial w^{(II)}}{\partial S_n^{j'-k'}} = 0, \quad (3)$$

где верхние индексы I, II указывают на номера смежных элементов дискретизации.

Однако равенство (3) в силу несовместности по производным компонент вектора перемещения не выполняется, поэтому для его корректного соблюдения рассмотрим интегральное равенство

$$\int_{l^{j-k}} \lambda^{j-k} \left(\frac{\partial w^{(I)}}{\partial S_n^{j-k}} + \frac{\partial w^{(II)}}{\partial S_n^{j'-k'}} \right) dl^{j-k} = 0. \quad (4)$$

Здесь l^{j-k} — длина дуги $j-k$ дискретного элемента; λ^{j-k} — функция множителя Лагранжа в произвольной точке дуги $j-k$; dl^{j-k} — дифференциал дуги $j-k$.

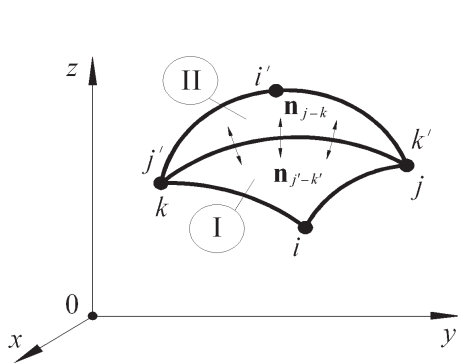


Рис. 1. Смежные треугольные элементы дискретизации в глобальной системе координат

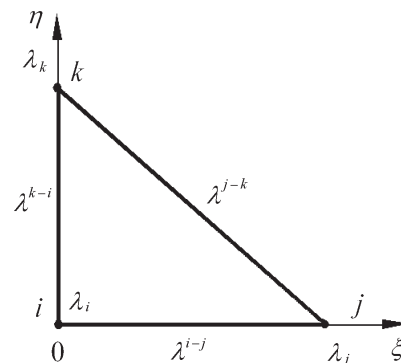


Рис. 2. Треугольный конечный элемент в локальной системе координат

Для отдельного треугольного конечного элемента равенство (4) может быть трансформировано к виду

$$\int_{l^{i-j}} \lambda^{i-j} \frac{\partial w}{\partial S_n^{i-j}} dl^{i-j} + \int_{l^{j-k}} \lambda^{j-k} \frac{\partial w}{\partial S_n^{j-k}} dl^{j-k} + \int_{l^{k-i}} \lambda^{k-i} \frac{\partial w}{\partial S_n^{k-i}} dl^{k-i} = 0, \quad (5)$$

где λ^{i-j} , λ^{j-k} и λ^{k-i} — функции множителей Лагранжа в произвольных точках соответствующих сторон дискретного элемента.

Рассмотрим треугольный элемент дискретизации в локальной системе координат $0 \leq \xi + \eta \leq 1$ (рис. 2). Связь между глобальными S, θ и локальными ξ, η координатами осуществляется с помощью соотношений

$$S = (1 - \xi - \eta)S^i + \xi S^j + \eta S^k, \quad \theta = (1 - \xi - \eta)\theta^i + \xi\theta^j + \eta\theta^k. \quad (6)$$

Множители Лагранжа на границах треугольного КЭ с учетом (6) могут быть выражены через их узловые значения

$$\begin{aligned} \lambda^{i-j}(\eta = 0) &= (1 - \xi)\lambda^i + \xi\lambda^j, \\ \lambda^{j-k}(\xi = 1 - \eta) &= (1 - \eta)\lambda^j + \eta\lambda^k, \\ \lambda^{k-i}(\xi = 0) &= (1 - \eta)\lambda^i + \eta\lambda^k. \end{aligned} \quad (7)$$

Соотношения (7) могут быть представлены в матричном виде

$$\{\lambda^{m-n}\}_{3 \times 1}^T = [\gamma(\xi, \eta)]_{3 \times 3} \{\lambda_y\}_{3 \times 1}, \quad (8)$$

где

$$\{\lambda^{m-n}\}_{1 \times 3}^T = \{\lambda^{i-j} \lambda^{j-k} \lambda^{k-i}\}, \quad \{\lambda_y\}_{1 \times 3}^T = \{\lambda^i \lambda^j \lambda^k\}, \quad [\gamma(\xi, \eta)]_{3 \times 3} = \begin{pmatrix} 1 - \xi & \xi & 0 \\ 0 & 1 - \eta & \eta \\ 1 - \eta & 0 & \eta \end{pmatrix}.$$

Производные нормальной компоненты вектора перемещения в направлении нормалей к сторонам треугольного КЭ могут быть выражены через стандартный набор узловых варьируемых параметров в локальной системе координат

$$\frac{\partial w}{\partial S_n^{i-j}} = f_1(\xi)\{U_y^\pi\}, \quad \frac{\partial w}{\partial S_n^{j-k}} = f_2(\eta)\{U_y^\pi\}, \quad \frac{\partial w}{\partial S_n^{k-i}} = f_3(\eta)\{U_y^\pi\}, \quad (9)$$

где $f_1(\xi)$, $f_2(\eta)$, $f_3(\eta)$ — функции, зависящие от координат на соответствующих сторонах локального треугольника. Входящий в (9) столбец узловых неизвестных в локальной системе координат имеет следующую структуру:

$$\{U_y^\pi\}_{1 \times 27}^T = \left\{ \{u_y^\pi\}_{1 \times 9}^T \{v_y^\pi\}_{1 \times 9}^T \{w_y^\pi\}_{1 \times 9}^T \right\}, \quad (10)$$

где $\{q_y^\pi\}_{1 \times 9}^T = \{q^i q^j q^k q_{;\xi}^i q_{;\xi}^j q_{;\xi}^k q_{;\eta}^i q_{;\eta}^j q_{;\eta}^k\}$.

Соотношение (5) с учетом (8) и (9) может быть представлено в матричном виде

$$\{\lambda_y\}_{1 \times 3}^T [\gamma(\xi, \eta)]_{3 \times 3}^T \{f_n\}_{3 \times 27} \{U_y^\pi\}_{27 \times 1} = 0, \quad (11)$$

где

$$\{f_n\}_{3 \times 27} = \begin{Bmatrix} f_1(\xi) \\ f_2(\eta) \\ f_3(\eta) \end{Bmatrix}.$$

Столбцы $\{\lambda_y\}$ и $\{U_y^{\pi}\}$ представляют собой набор узловых констант для каждого треугольного элемента дискретизации. Матричное произведение $[\gamma(\xi, \eta)]^T \{f_n\}$ зависит от локальных координат (ξ или η) точек на сторонах треугольного КЭ, выбранных в качестве точек интегрирования.

Интегрирование данного матричного произведения удобнее выполнять по трем строкам:

$$\begin{aligned} 1 - & \int_{l^{i-j}} (1 - \xi) f_1(\xi) dl^{i-j} + \int_{l^{k-i}} (1 - \eta) f_3(\eta) dl^{k-i}, \\ 2 - & \int_{l^{i-j}} \xi f_1(\xi) dl^{i-j} + \int_{l^{j-k}} (1 - \eta) f_2(\eta) dl^{j-k}, \\ 3 - & \int_{l^{j-k}} \eta f_2(\eta) dl^{j-k} + \int_{l^{k-i}} \eta f_3(\eta) dl^{k-i}. \end{aligned} \quad (12)$$

Для организации численного интегрирования (12) вначале необходимо выполнить замену переменных ξ и η через параметр $-1 \leq t \leq 1$ по формулам

$$\xi = \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}, \quad \eta = \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}, \quad d\xi = \frac{1}{2}dt, \quad d\eta = \frac{1}{2}dt, \quad (13)$$

а затем воспользоваться квадратурой Гаусса

$$\int_{-1}^1 f(t) dt = \sum_{i=1}^n f(t_i) \cdot w_i, \quad (14)$$

где t_i, w_i — координаты и веса квадратуры Гаусса, n — количество точек интегрирования.

Дифференциал дуги, например, стороны $i - j$ дискретного элемента определяется выражением [4]

$$dl^{i-j} = \sqrt{\left(\frac{dS}{dt}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2} dt, \quad (15)$$

где

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2}(S^j - S^i), \quad \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2}(\theta^j - \theta^i).$$

Равенство (11) с учетом (12) и (13) можно представить в виде

$$\{ \lambda_y \}_{1 \times 3}^T [F]_{3 \times 27} \{ U_y^{\pi} \}_{27 \times 1} = 0, \quad (16)$$

где

$$[F]_{3 \times 27} = \begin{Bmatrix} \{T_1\}_{1 \times 27} \\ \{T_2\}_{1 \times 27} \\ \{T_3\}_{1 \times 27} \end{Bmatrix}.$$

Входящие в (16) подматрицы-строки $\{T_n\}$ ($n = 1, 2, 3$) определяются согласно (13), (14).

Равенство (16) может быть записано в следующем виде:

$$\left\{ \lambda_y \right\}_{1 \times 3}^T [F]_{3 \times 27} [P_R]_{27 \times 27} \left\{ U_y^r \right\}_{27 \times 1} = \left\{ \lambda_y \right\}_{1 \times 3}^T [Z]_{3 \times 27} \left\{ U_y^r \right\}_{27 \times 1} = 0, \quad (17)$$

где $[P_R]_{27 \times 27}$ — матрица преобразования, формируемая на основе соотношений, получаемых дифференцированием (6) по локальным координатам ξ и η :

$$\begin{aligned} \partial S / \partial \xi &= S^j - S^i, & \partial S / \partial \eta &= S^k - S^i, \\ \partial \theta / \partial \xi &= \theta^j - \theta^i, & \partial \theta / \partial \eta &= \theta^k - \theta^i. \end{aligned} \quad (18)$$

В отличие от стандартной конечно-элементной процедуры при реализации описанного выше алгоритма в каждом узле сетки дискретизации появляется дополнительное узловое неизвестное λ_y .

Если в соотношении (5) вместо функций корректирующих множителей Лагранжа λ^{i-j} , λ^{j-k} , λ^{k-i} использовать их значения λ^1 , λ^2 , λ^3 в дополнительных узлах 1, 2, 3, расположенных в серединах сторон треугольного элемента дискретизации (рис. 3), то получим выражение

$$\lambda^1 \int_{i-j} \frac{\partial w}{\partial S_n^{i-j}} dl^{i-j} + \lambda^2 \int_{j-k} \frac{\partial w}{\partial S_n^{j-k}} dl^{j-k} + \lambda^3 \int_{k-i} \frac{\partial w}{\partial S_n^{k-i}} dl^{k-i} = 0. \quad (19)$$

Вычисление интегралов, входящих в (19), можно выполнить по формулам, аналогичным (12)–(14), с учетом того, что из подинтегральных выражений (12) необходимо исключить сомножители вида $(1 - \xi)$, $(1 - \eta)$, ξ , η . Для реализации данного варианта используется сетка дискретизации с узлами, расположенными в серединах сторон треугольных элементов дискретизации (рис. 4).

В каждом из основных узлов сетки дискретизации, отмеченных на рис. 4 кружками, имеется до девяти (в зависимости от заданных граничных условий) узловых неизвестных (2). В дополнительных узлах, расположенных в серединах сторон треугольных КЭ (отмеченных квадратами), в качестве узловых варьируемых параметров принимаются корректирующие множители Лагранжа λ^1 , λ^2 , λ^3 .

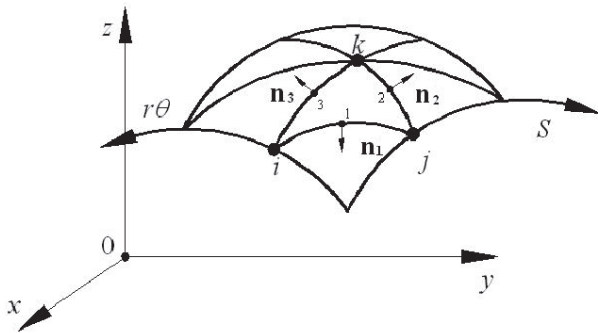


Рис. 3. Треугольный элемент дискретизации с множителями Лагранжа в серединах сторон

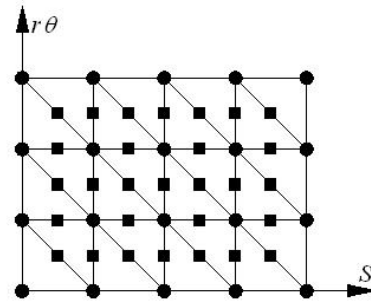


Рис. 4. Сетка дискретизации

Как альтернативный рассмотренным выше алгоритмам можно рассмотреть вариант, при котором в уравнении (5) используются не функции производных нормального перемещения, а их алгебраические значения для узлов, расположенных в серединах сторон треугольного элемента дискретизации (см. рис. 3):

$$\lambda^1 \frac{\partial w^1}{\partial S_{n_1}} + \lambda^2 \frac{\partial w^2}{\partial S_{n_2}} + \lambda^3 \frac{\partial w^3}{\partial S_{n_3}} = 0. \quad (20)$$

Входящие в (20) производные нормальной компоненты вектора перемещения во вновь введенных узлах 1, 2, 3 в направлении нормалей $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3$ могут быть выражены через столбец узловых неизвестных (10)

$$\begin{aligned} \frac{\partial w^m}{\partial S_{n_m}} = & \left[\left(\{\varphi, \xi\}^T \frac{\partial \xi}{\partial S} + \{\varphi, \eta\}^T \frac{\partial \eta}{\partial S} \right) \cos \alpha_m + \right. \\ & \left. + \left(\{\varphi, \xi\}^T \frac{\partial \xi}{\partial \theta} + \{\varphi, \eta\}^T \frac{\partial \eta}{\partial \theta} \right) \cos \beta_m \right] \{U_y^m\}, \end{aligned} \quad (21)$$

где α_m и β_m — углы между вектором \mathbf{n}_m и касательными векторами локального базиса \mathbf{a}_1 и \mathbf{a}_2 узла m ($m = 1, 2, 3$), расположенного в середине стороны треугольного элемента на срединной поверхности оболочки.

В отличие от функций $\{f_n\}$, входящих в (9), полиномиальные выражения (21) определяются путем подстановки в интерполяционные полиномы третьего порядка $\{\varphi\}$ [5] координат узлов 1, 2, 3, расположенных в серединах сторон треугольного КЭ.

Таким образом, процедура интегрирования по сторонам треугольного элемента дискретизации (12)–(15) исключается.

Выражение (20) с учетом (17) и (21) может быть записано в виде

$$\begin{matrix} \{\lambda^c\}^T & [\Phi] & [P_R] & \{U_y^r\} & = & \{\lambda^c\}^T & [Y] & \{U_y^r\}, \\ 1 \times 3 & 3 \times 27 & 27 \times 27 & 27 \times 1 & & 1 \times 3 & 3 \times 27 & 27 \times 1 \end{matrix} \quad (22)$$

где

$$\{\lambda^c\}^T = \{\lambda^1, \lambda^2, \lambda^3\}, \quad [\Phi] = \begin{Bmatrix} \{t_1\} \\ \{t_2\} \\ \{t_3\} \end{Bmatrix}_{3 \times 27}.$$

Равенство работ внешних и внутренних сил на возможном перемещении для треугольного КЭ можно представить в виде выражения

$$\Phi \equiv \begin{matrix} \{U_y^r\}^T & [K] & \{U_y^r\} & - & \{U_y^r\}^T & \{R\} & + & \{\lambda^c\}^T & [Y] & \{U_y^r\} & = & 0. \\ 27 \times 1 & 27 \times 27 & 27 \times 1 & & 1 \times 27 & 27 \times 1 & & 1 \times 3 & 3 \times 27 & 27 \times 1 \end{matrix} \quad (23)$$

Варьируя функционал (23) по узловым неизвестным $\{U_y^r\}^T$ и значениям множителей Лагранжа $\{\lambda^c\}^T$, получим систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{\partial \Phi}{\partial \{U_y^r\}^T} = [K] \begin{matrix} \{U_y^r\} \\ 27 \times 27 \end{matrix} - \begin{matrix} \{R\} \\ 27 \times 1 \end{matrix} + [Y]^T \begin{matrix} \{\lambda^c\} \\ 27 \times 3 \end{matrix} \begin{matrix} \\ 3 \times 1 \end{matrix} = 0, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \{\lambda^c\}^T} = [Y] \begin{matrix} \{U_y^r\} \\ 27 \times 1 \end{matrix} = 0. \end{cases} \quad (24)$$

В расширенной конечно-элементной формулировке система уравнений (24) будет иметь вид

$$\begin{matrix} [K_M] & \{U_{y_M}^r\} & = & \{R_M\}, \\ 30 \times 30 & 30 \times 1 & & 30 \times 1 \end{matrix} \quad (25)$$

где $[K_M] = \begin{bmatrix} [K] & [Y]^T \\ 27 \times 27 & 27 \times 3 \\ [Y] & [0] \\ 3 \times 27 & 3 \times 3 \end{bmatrix}$, $\{U_{y_M}^r\}^T = \left\{ \begin{matrix} \{U_y^r\}^T \{\lambda^e\}^T \\ 1 \times 27 & 1 \times 3 \end{matrix} \right\}$, $\{R_M\}^T = \left\{ \begin{matrix} \{R\}^T \{0\}^T \\ 1 \times 27 & 1 \times 3 \end{matrix} \right\}$ — расши-

ренная матрица жесткости треугольного КЭ, вектор искомых узловых неизвестных и расширенный вектор узловых усилий соответственно.

Процедуру определения входящих в правую часть (21) матриц-строк стоящих перед столбцом узловых варьируемых параметров $\{U_y^r\}$ можно продемонстрировать на примере оболочки вращения, срединная поверхность которой в исходном состоянии описывается радиус-вектором

$$\mathbf{R} = x\mathbf{i} + r \sin \theta \mathbf{j} + r \cos \theta \mathbf{k}, \quad (26)$$

где x — осевая координата, $r = r(x)$ — радиус вращения. Дифференцированием (26) по координатам S , θ определяются векторы локального базиса \mathbf{a}_1 , \mathbf{a}_2 с нормалью $\mathbf{a} = \mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2 / |\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2|$.

Связь между глобальными координатами S , θ и локальными координатами ξ и η элемента треугольной формы задана в виде (6).

Уравнение гипотенузы треугольного КЭ в локальной системе координат имеет вид

$$\eta = 1 - \xi. \quad (27)$$

В результате подстановки (27) в (6) получим равенства

$$S = \xi (S^j - S^k) + S^k, \quad \theta = \xi (\theta^j - \theta^k) + \theta^k. \quad (28)$$

Выразим из первого уравнения (28) локальную переменную ξ и подставим ее во второе уравнение (28). В результате получим следующую зависимость глобальной координаты θ от дуги меридиана S на границе $j - k$ треугольного КЭ:

$$\theta = \frac{(S - S^k) (\theta^j - \theta^k) + \theta^k (S^j - S^k)}{S^j - S^k}. \quad (29)$$

Орт касательной к гипотенузе треугольного КЭ можно получить дифференцированием (26) по формуле полной производной, так как на этой линии $\theta = f(S)$

$$\begin{aligned} \mathbf{t} = \mathbf{R}_{,S} &= \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial S} + \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial S} = x_{,S} \mathbf{i} + r_{,S} \sin \theta \mathbf{j} + \\ &+ r_{,S} \cos \theta \mathbf{k} + (r \cos \theta \mathbf{j} - r \sin \theta \mathbf{k}) \theta_{,S}, \end{aligned} \quad (30)$$

где $\theta_{,S} = \frac{\theta^j - \theta^k}{S^j - S^k}$.

Орт нормали к стороне $j - k$ в касательной плоскости треугольного КЭ определим в результате векторного произведения

$$\mathbf{n} = \mathbf{S}_n^2 = \mathbf{a} \times \mathbf{t}. \quad (31)$$

Найденный по формуле (31) вектор \mathbf{S}_n^2 находится в плоскости векторов локального базиса \mathbf{a}_1 , \mathbf{a}_2 , касательных к срединной поверхности оболочки.

Косинусы углов α и β могут быть вычислены при использовании формулы скалярного произведения

$$\cos \alpha = \frac{\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{S}_n^2}{|\mathbf{a}_1| \cdot |\mathbf{S}_n^2|}, \quad \cos \beta = \frac{\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{S}_n^2}{|\mathbf{a}_2| \cdot |\mathbf{S}_n^2|}. \quad (32)$$

Для треугольного КЭ для узла 2 будет справедливо соотношение

$$\frac{\partial w}{\partial S_n^2} = \frac{\partial w}{\partial S} \cos \alpha + \frac{\partial w}{\partial \theta} \cos \beta. \quad (33)$$

Таким образом, матрица-строка узла 2 для треугольного КЭ имеет вид

$$\{t^2\}_{1 \times 27}^T = \left\{ \begin{matrix} \{0\}_{1 \times 9}^T & \{0\}_{1 \times 9}^T & \left(\{\varphi, s\}_{1 \times 9}^T \cos \alpha + \{\varphi, \theta\}_{1 \times 9}^T \cos \beta \right) \end{matrix} \right\}. \quad (34)$$

Входящие в (34) производные полиномиальных функций определяются по формулам

$$\{\varphi, \theta\}^T = \{\varphi, \xi\}^T \frac{\partial \xi}{\partial \theta} + \{\varphi, \eta\}^T \frac{\partial \eta}{\partial \theta}, \quad \{\varphi, s\}^T = \{\varphi, \xi\}^T \frac{\partial \xi}{\partial S} + \{\varphi, \eta\}^T \frac{\partial \eta}{\partial S}. \quad (35)$$

В качестве примера расчета была решена задача по определению напряженно-деформированного состояния цилиндра, нагруженного двумя противоположно направленными сосредоточенными силами (рис. 5). Приняты следующие исходные данные: модуль упругости $E = 7.38 \cdot 10^6$ Н/см², коэффициент Пуассона $\nu = 0.3$, радиус цилиндра $R = 12.58$ см, толщина оболочки $t = 0.24$ см, сила $P = 453.6$ Н.

Расчеты были выполнены в трех вариантах. В первом случае реализован алгоритм с множителями Лагранжа в вершинах треугольного КЭ (соотношения (4)–(18)), во втором использовались множители Лагранжа в серединах сторон треугольника в сочетании с процедурой интегрирования по сторонам треугольного элемента дискретизации (соотношение (19)), в третьем варианте процедура интегрирования по границам треугольного элемента была исключена (соотношения (20)–(35)). В качестве контрольного реализован стандартный для треугольного КЭ алгоритм без использования корректирующих множителей Лагранжа [5]. В табл. 1 для всех вариантов приведены значения прогибов (в см) в точке приложения сосредоточенной силы (точка A на рис. 5) в зависимости от густоты сетки дискретизации, а также результат известного решения [6]. Анализ табличных данных показывает, что варианты I и II дают существенно заниженные (на несколько порядков) значения прогибов, поэтому их следует признать неудовлетворительными.

В варианте III наблюдается устойчивая сходимость вычислительного процесса, а численные значения прогиба практически совпадают с известным решением [6] (погреш-

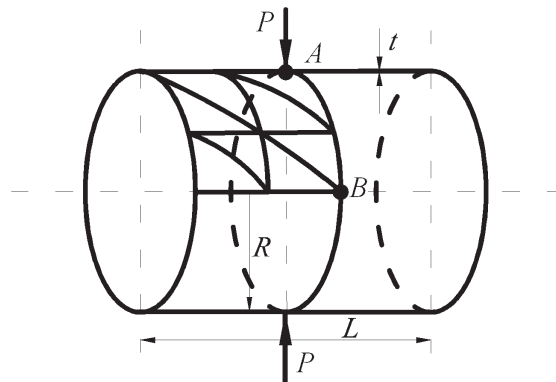


Рис. 5. Расчетная схема цилиндра, нагруженного двумя сосредоточенными силами

Т а б л и ц а 1. Значение прогиба в точке A приложения сосредоточенной силы P

Число узлов сетки дискретизации	Вариант расчета			
	Контрольный	I	II	III
5×5	-0.3058	-0.0130	-0.0118	-0.2715
8×8	-0.3061	-0.0092	-0.0045	-0.2770
10×10	-0.3033	-0.0074	-0.0028	-0.2773
11×11	-0.3021	-0.0068	-0.0023	-0.2773
Решение [6]	-0.2883			

ность при сетке узлов 11×11 составляет 3.8 %). В контрольном варианте также наблюдается удовлетворительная сходимость вычислительного процесса, а значения прогиба несколько (на 4.8 % при сетке узлов 11×11) завышены по сравнению с решением [6].

Таким образом, анализируя данные табл. 1, можно отметить, что варианты III и контрольный дают достаточно близкие величины прогибов в точке приложения силы P . Однако следует отметить, что расчеты на прочность требуют анализа не столько величин прогибов, сколько значений напряжений на внутренней и наружной поверхностях оболочки.

Значения напряжений в точке A приложения силы P могут быть вычислены с использованием узловых варьируемых параметров треугольного элемента как (I), так и элемента (II) (рис. 6). Результаты вычисления меридиональных σ_m и кольцевых σ_k напряжений на внутренней и наружной поверхностях оболочки в точке A приведены в табл. 2. Для сравнительного анализа численных значений напряжений были использованы вариант III с множителями Лагранжа (соотношения (20)–(35)) и контрольный вариант. Очевидно, что напряжения в точке приложения сосредоточенной силы P , вычисленные с привлечением узловых неизвестных треугольного КЭ (I) и элемента (II), должны быть одинаковыми, что и наблюдается в варианте III расчета с множителями Лагранжа. В контрольном варианте численные значения меридиональных напряжений, вычисленные с использованием узловых варьируемых параметров смежных треугольных КЭ, различаются в несколько раз, что указывает на неприемлемость погрешности расчета по стандартной конечно-элементной процедуре в треугольном КЭ без множителей Лагранжа. Весьма интересным является анализ напряжений, вычисленных в точке B (рис. 5) оболочки, отстоящей от точки A на угол $\pi/2$ вдоль окружности. Численные значения напряжений в точке B приведены в табл. 3, в которой представлены значения

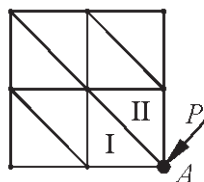


Рис. 6. Сетка дискретизации цилиндра, нагруженного сосредоточенными силами

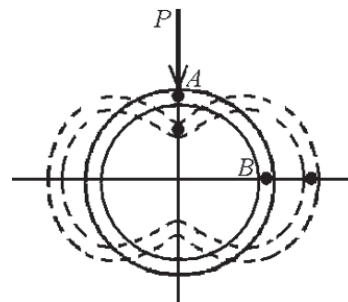


Рис. 7. Деформирование цилиндра под действием сосредоточенных сил

Т а б л и ц а 2. Значения напряжений в точке A приложения сосредоточенной силы P

Численные значения напряжений, в точке A , Н/см ²	Вариант расчета							
	Контрольный				III			
	Число узлов сетки дискретизации							
	5 × 5 (I)	5 × 5 (II)	8 × 8 (I)	8 × 8 (II)	5 × 5 (I)	5 × 5 (II)	8 × 8 (I)	8 × 8 (II)
σ_M^B	5958	1313	11074	2565	2620	2626	2578	2583
σ_M^H	-7248	-2602	-13205	-4697	-1986	-1993	-2452	-2458
σ_K^B	11427	12554	13139	15297	7660	7665	7172	7175
σ_K^H	-8671	-9798	-14353	-16513	-6049	-6054	-7226	-7230

Т а б л и ц а 3. Значения напряжений в точке B

Численные значения напряжений в точке B , Н/см ²	Вариант расчета									
	Контрольный					III				
	Число узлов сетки дискретизации									
	5 × 5	6 × 6	8 × 8	10 × 10	11 × 11	5 × 5	6 × 6	8 × 8	10 × 10	11 × 11
σ_M^B	592	1098	1492	1605	1629	-1111	-1042	-952	-907	-894
σ_M^H	-916	-1338	-1680	-1773	-1789	1100	1089	1036	998	847
σ_K^B	-2290	-1725	-1228	-1045	-994	-4390	-4347	-4264	-4223	-4210
σ_K^H	2179	1721	1276	1105	1060	3743	3827	3823	3801	3792

меридиональных и кольцевых напряжений во внутренней и наружной поверхностях оболочки в зависимости от густоты сетки дискретизации. Как следует из таблицы, меридиональные напряжения в контрольном варианте имеют противоположные знаки по сравнению с меридиональными напряжениями, полученными при использовании варианта III с множителями Лагранжа. Если проанализировать процесс деформирования оболочки под действием двух сосредоточенных сил (рис. 7), то можно отметить, что в точке B внутренняя поверхность будет сжата, а наружная растянута, что и наблюдается в варианте III с множителями Лагранжа. В контрольном же варианте адекватную картину напряженно-деформированного состояния получить не удалось.

Таким образом, проведенные исследования показали, что использование корректирующих множителей Лагранжа в серединах сторон треугольного КЭ без процедуры численного интегрирования по сторонам треугольника (вариант III) существенно повышает точность конечно-элементных расчетов оболочки вращения и может быть рекомендовано к применению.

Список литературы

- [1] Голованов А.И., Тюленева О.Н., Шигабутдинов А.Ф. Метод конечных элементов в статике и динамике тонкостенных конструкций. М.: Физматлит, 2006. 391 с.
- [2] ГАЛЛАГЕР Р. Метод конечных элементов. Основы. М.: Мир, 1984. 428 с.
- [3] ЗЕНКЕВИЧ О. Метод конечных элементов в технике. М.: Мир, 1975. 541 с.
- [4] ПОГОРЕЛОВ А.В. Дифференциальная геометрия. М.: Наука, 1969. 252 с.

- [5] Клочков Ю.В., Николаев А.П., Киселев А.П. О функциях формы в алгоритмах формирования матриц жесткости треугольных конечных элементов // Изв. вузов. Строительство. 1999. № 10. С. 23–27.
- [6] ASHWELL D.G., SABIR A.B. A new cylindrical shell finite elements based on simple independent strain function // Internat. J. Mech. Sci. 1972. Vol. 14, No. 3. P. 171–183.

*Поступила в редакцию 31 августа 2009 г.,
с доработки — 27 мая 2010 г.*