

## Моделирование умеренно длинных нелинейных пространственных волн на границе двух жидких потоков в горизонтальном канале\*

Д. Г. АРХИПОВ<sup>1,2</sup>, Н. С. САФАРОВА<sup>1</sup>, Г. А. ХАБАХПАШЕВ<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Институт теплофизики СО РАН, Новосибирск, Россия

<sup>2</sup>Новосибирский государственный университет, Россия

e-mail: theory@itp.nsc.ru

Проведено моделирование слабонелинейных планарных волн, которые бегут одновременно в разные стороны по границе раздела двух неглубоких слоев жидкостей, текущих с постоянными скоростями. Рассчитаны взаимодействия как протяженных, так и уединенных возмущений малой, но конечной амплитуды. Показано, что может наблюдаться интенсификация волн при их движении против потока и ослабление при распространении в спутном направлении.

*Ключевые слова:* взаимодействие возмущений, граница раздела, двухслойная жидкость, длинные волны, моделирование, неглубокие слои, нелинейные волны, солитон, стационарный поток, трехмерные возмущения, эволюция.

Изучению длинных волн на свободных границах слоев жидкостей посвящено много работ (см., например, литературу, цитируемую в монографиях [1–8]). В последнее время наибольший интерес исследователей вызывают планарные нелинейно-дисперсионные модели. В работе [9] предложен новый подход для моделирования возмущений поверхности первоначально покоящейся неглубокой жидкости, использующий основные достоинства известных моделей и в то же время свободный от некоторых их недостатков. Данный подход заключается в выводе одного нелинейно-дисперсионного уравнения для существенно трехмерного возмущения поверхности жидкости и нескольких простых линейных вспомогательных уравнений, определяющих векторы скорости частиц среды, которые входят лишь в члены второго порядка малости главного уравнения. В статье [10] этот метод обобщен на случай внутренних волн в водоемах со скачком плотности.

Цель настоящей работы — применение нового подхода к описанию эволюции умеренно длинных слабонелинейных трехмерных возмущений границы раздела двух слоев жидкостей, ограниченных горизонтальными крышкой и дном, при наличии стационарных течений и исследование влияния установившихся потоков на трансформацию волн с помощью численных решений ряда характерных гидродинамических задач.

---

\*Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Правительства России для государственной поддержки научных исследований, проводимых под руководством ведущих ученых в российских вузах, № 11.G34.31.0035.

## 1. Постановка задачи и вывод системы модельных уравнений

Будем предполагать, что, во-первых, горизонтальные крышка и дно канала неподвижны и недеформируемы, во-вторых, несжимаемые и невязкие жидкости не смешиваются, в-третьих, внутри каждого слоя неизменны плотность жидкости  $\rho$  и вектор скорости стационарного потока  $\mathbf{U}$ , в-четвертых, “длина волны”  $\lambda$  существенно больше, а амплитуда возмущения  $\eta_a$  значительно меньше равновесных глубин слоев  $h_l$  ( $h_l/\lambda \sim \varepsilon^{1/2}$ ,  $\eta_a/h_l \sim \varepsilon$ , где  $\varepsilon$  — малый параметр, индекс  $l = 1, 2$  — соответственно для параметров верхней и нижней жидкости), в-пятых, капиллярные эффекты невелики (модифицированное число Бонда  $\text{Bo} = (\rho_2 - \rho_1)gh_1h_2/\sigma > 1$ , здесь  $g$  — ускорение свободного падения,  $\sigma$  — поверхностное натяжение), и наконец, в-шестых, течения в слоях потенциальны. Тогда исходную систему уравнений гидродинамики для каждой жидкости можно записать в виде

$$\frac{D\mathbf{u}_l}{D_l t} + \nabla \left( \frac{\mathbf{u}_l^2}{2} + \frac{p_l}{\rho_l} \right) = 0, \quad (1)$$

$$\frac{Dw_l}{D_l t} + \frac{1}{\rho_l} \frac{\partial p_l}{\partial z} + g = 0, \quad (2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u}_l + \frac{\partial w_l}{\partial z} = 0, \quad (3)$$

где  $\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y)$ ,  $D/D_l t = \partial/\partial t + (\mathbf{U}_l \cdot \nabla)$ ,  $x$  и  $y$  — горизонтальные координаты (рис. 1),  $\mathbf{u}$  — горизонтальная компонента вектора возмущения скорости жидкости,  $w$  — его вертикальная составляющая,  $z$  — вертикальная координата,  $t$  — время,  $p$  — давление в слое.

Поставим стандартные кинематические и динамические краевые условия (условия непротекания жидкости через неподвижные крышку и дно, кинематические условия на границе раздела и условие капиллярного скачка давления на этой поверхности):

$$w_l = 0 \quad \text{при} \quad z = -(-1)^l h_l(x, y),$$

$$w_{li} = D\eta/D_l t + \mathbf{u}_{li} \cdot \nabla \eta, \quad p_{li} = p_{2i} + \sigma \nabla^2 \eta \quad \text{при} \quad z = \eta(t, x, y),$$

где  $\eta$  — отклонение границы раздела, индексом  $i$  помечены значения величин, относящиеся к этой поверхности.

Теперь преобразуем систему (1)–(3). Вначале найдем дивергенцию горизонтальных уравнений движения (1). Тогда в первых слагаемых левых частей этих уравнений дивергенции скоростей  $\nabla \cdot \mathbf{u}_l$  согласно уравнениям неразрывности можно заменить

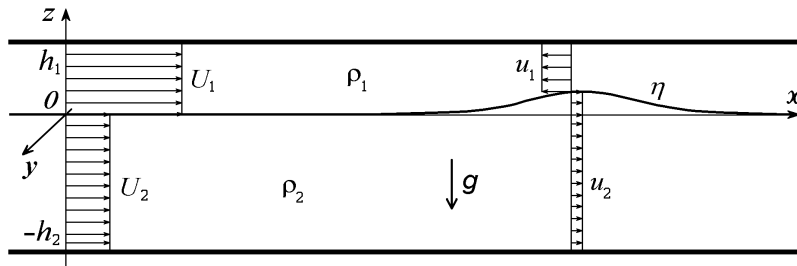


Рис. 1. Волны на границе раздела и профили скоростей стационарного и возмущенного течений в неглубокой двухслойной жидкости между неподвижными крышкой и дном

на  $-\partial w_l/\partial z$ . Затем проинтегрируем полученные уравнения и уравнения (3) по  $z$  от  $-h_2$  до  $\eta$  при  $l = 2$  и от  $\eta$  до  $h_1$  при  $l = 1$ . В результате получим следующие выражения:

$$\int_{(-1)^{l+1}h_l}^{\eta} \left[ \frac{D}{Dt} \frac{\partial w_l}{\partial z} - \frac{1}{2} \nabla^2(\mathbf{u}_l^2) - \frac{1}{\rho_l} \nabla^2 p_l \right] dz = 0, \quad (4)$$

$$\frac{D\eta}{Dt} + \nabla \cdot (\langle \mathbf{u}_l \rangle [\eta + (-1)^l h_l]) = 0. \quad (5)$$

Здесь и далее угловыми скобками обозначены значения величин, усредненные по глубинам слоев. При сделанных предположениях (длинные волны малой амплитуды) профили вертикальных скоростей линейны по  $z$ :

$$w_l = w_{li} \left( 1 + (-1)^l \frac{z}{h_l} \right) = \left( 1 + (-1)^l \frac{z}{h_l} \right) \left( \frac{D\eta}{Dt} + \mathbf{u}_{li} \cdot \nabla \eta \right). \quad (6)$$

Если законы сохранения массы в слоях (5) и формулы для вертикальных скоростей жидкостей (6) линеаризовать, то их можно записать в виде

$$\frac{D\eta}{Dt} = -(-1)^l h_l (\nabla \cdot \langle \mathbf{u}_l \rangle), \quad (7)$$

$$w_l = \left( 1 + (-1)^l \frac{z}{h_l} \right) \frac{D\eta}{Dt}. \quad (8)$$

Эти формулы понадобятся для замен в членах второго порядка малости основного уравнения.

Первые члены интегралов в (4) можно легко трансформировать с помощью правила Лейбница о дифференцировании по параметру, кинематических краевых условий на границе слоев, упрощенных формул для вертикальных скоростей (8) и уравнений (7):

$$\begin{aligned} \int_{(-1)^{l+1}h_l}^{\eta} \frac{D}{Dt} \frac{\partial w_l}{\partial z} dz &= \frac{Dw_{li}}{Dt} - \frac{D\eta}{Dt} \frac{\partial w_l}{\partial z} \Big|_{z=\eta} = \frac{D^2\eta}{Dt^2} + \frac{D}{Dt} [(\mathbf{u}_{li} \cdot \nabla)\eta] - \\ &- \frac{(-1)^l}{h_l} \left( \frac{D\eta}{Dt} \right)^2 = \frac{D^2\eta}{Dt^2} + \frac{D\mathbf{u}_{li}}{Dt} \cdot \nabla \eta - (-1)^l h_l [(\mathbf{u}_{li} \cdot \nabla)(\nabla \cdot \langle \mathbf{u}_l \rangle) + (\nabla \cdot \langle \mathbf{u}_l \rangle)^2]. \end{aligned}$$

При сделанных допущениях во вторых членах интегралов (4) можно заменить верхние пределы на 0 и вынести производные за знаки интегралов:

$$\int_{(-1)^{l+1}h_l}^{\eta} \frac{1}{2} \nabla^2(\mathbf{u}_l^2) dz = \int_{(-1)^{l+1}h_l}^0 \frac{1}{2} \nabla^2(\mathbf{u}_l^2) dz = (-1)^l \frac{h_l}{2} \nabla^2 \langle \mathbf{u}_l^2 \rangle.$$

Наконец, для членов второго порядка малости воспользуемся также приближенными равенствами  $\mathbf{u}_{li} = \langle \mathbf{u}_l \rangle$  и  $\langle \mathbf{u}_l^2 \rangle = \langle \mathbf{u}_l \rangle^2$ .

Для нахождения давлений в слоях проинтегрируем уравнения (2) по  $z$  от  $z$  до  $\eta$ . Используя динамическое краевое условие на границе раздела, имеем

$$\frac{p_l}{\rho_l} = \frac{p_{li}}{\rho_l} + g(\eta - z) + \int_z^{\eta} \frac{Dw_l}{Dt} dz.$$

Учитывая, что вертикальные скорости входят лишь в члены второго порядка малости, подставим в эти формулы линеаризованные профили вертикальной скорости (8):

$$\frac{p_l}{\rho_l} = \frac{p_{li}}{\rho_l} + g(\eta - z) - z \left( 1 + (-1)^l \frac{z}{2h_l} \right) \frac{D^2\eta}{D_1t^2}.$$

С помощью данных выражений находим третьи члены интегралов в уравнениях (4):

$$\frac{1}{\rho_l} \int_{(-1)^{l+1}h_l}^{\eta} \nabla^2 p_l dz = [(-1)^l h_l + \eta] \nabla^2 \left( \frac{p_{li}}{\rho_l} + g\eta \right) - \frac{h_l^2}{3} \nabla^2 \frac{D^2\eta}{D_1t^2}.$$

Еще раз заметим, что при вычислении интегралов в уравнениях (4) поправочные члены третьего и более высоких порядков малости, как всегда, опущены.

В итоге проведенные преобразования линейных, нелинейных и дисперсионных членов позволяют переписать уравнения (4) в следующем виде:

$$\begin{aligned} & \frac{D^2\eta}{D_1t^2} + \frac{D\mathbf{u}_{li}}{D_1t} \cdot \nabla\eta - (-1)^l h_l \nabla^2 (\langle \mathbf{u}_l \rangle^2) - (-1)^l \frac{h_l}{\rho_l} \nabla^2 p_{li} - \\ & - (-1)^l g h_l \nabla^2 \eta - \eta \nabla^2 \left( \frac{p_{li}}{\rho_l} + g\eta \right) - \frac{h_l^2}{3} \nabla^2 \frac{D^2\eta}{D_1t^2} = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Чтобы исключить величины лапласианов давлений на границе раздела слоев из линейных членов уравнений (9), умножим эти уравнения на  $h_2/\rho_2$  при  $l = 1$  и на  $h_1/\rho_1$  при  $l = 2$ . Сложив модифицированные таким образом уравнения, получаем

$$\begin{aligned} & \frac{h_2}{\rho_2} \frac{D^2\eta}{D_1t^2} + \frac{h_1}{\rho_1} \frac{D^2\eta}{D_2t^2} + \left( \frac{h_2}{\rho_2} \frac{D\mathbf{u}_{1i}}{D_1t} + \frac{h_1}{\rho_1} \frac{D\mathbf{u}_{2i}}{D_2t} \right) \cdot \nabla\eta + \frac{h_1 h_2}{\rho_1 \rho_2} \nabla^2 (\rho_1 \langle \mathbf{u}_1 \rangle^2 - \rho_2 \langle \mathbf{u}_2 \rangle^2) - \\ & + \sigma \frac{h_1 h_2}{\rho_1 \rho_2} \nabla^4 \eta + g h_1 h_2 \left( \frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\rho_1} \right) \nabla^2 \eta - \frac{\eta}{\rho_1 \rho_2} \nabla^2 (h_2 p_{1i} + h_1 p_{2i}) - \\ & - g \left( \frac{h_2}{\rho_2} + \frac{h_1}{\rho_1} \right) \eta \nabla^2 \eta - \frac{h_1 h_2}{3} \nabla^2 \left( \frac{h_2}{\rho_2} \frac{D^2\eta}{D_1t^2} + \frac{h_1}{\rho_1} \frac{D^2\eta}{D_2t^2} \right) = 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Величины  $D\mathbf{u}_{li}/D_1t$  входят лишь в член второго порядка малости и поэтому с использованием линеаризованных уравнений (1) могут быть заменены на  $-\nabla p_{li}/\rho_l$ . Эти выражения можно сгруппировать с последним членом во второй строке уравнения (10), содержащим  $p_{li}$ . В итоге получаем член  $-\nabla[\eta \cdot (h_2 \nabla p_{1i} + h_1 \nabla p_{2i})]/(\rho_1 \rho_2)$ , имеющий второй порядок малости.

Следовательно,  $\nabla p_{li}$  могут быть найдены из первого приближения, но тогда  $p_{li} = p_i$ , а в уравнениях (9) нужно опустить нелинейные и дисперсионные члены:

$$\frac{D^2\eta}{D_1t^2} - (-1)^l \frac{h_l}{\rho_l} \nabla^2 p_i - (-1)^l g h_l \nabla^2 \eta = 0. \quad (11)$$

Если вычесть уравнение (11) при  $l = 2$  из уравнения (11) при  $l = 1$ , то получим приближенную формулу для лапласиана давления на границе раздела слоев

$$\nabla^2 p_i = \nabla^2 p_f - \rho_1 \rho_2 g H \nabla^2 \eta / \chi,$$

где  $p_f$  — часть давления  $p_i$ , определяемая скоростями стационарных течений

$$\nabla^2 p_f = \frac{\rho_1 \rho_2}{\chi} \left( 2(\mathbf{U}_2 - \mathbf{U}_1) \nabla \frac{\partial \eta}{\partial t} + [(\mathbf{U}_2 \cdot \nabla)^2 - (\mathbf{U}_1 \cdot \nabla)^2] \eta \right), \quad (12)$$

$H = h_1 + h_2$ ,  $\chi = \rho_1 h_2 + \rho_2 h_1$ . Используя эти выражения и умножая все члены (10) на  $\rho_1 \rho_2 / \chi$ , основное уравнение можно переписать в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - c_0^2 \nabla^2 \eta + 2(\mathbf{U}_{12} + \mathbf{U}_{21}) \cdot \nabla \frac{\partial \eta}{\partial t} + \nabla_{f\eta}^2 \eta - \frac{\alpha}{2} \nabla^2 \eta^2 - \frac{h_1 h_2}{\chi} \nabla^2 (\rho_2 \langle \mathbf{u}_2 \rangle^2 - \rho_1 \langle \mathbf{u}_1 \rangle^2) - \\ - \frac{H}{\chi} \nabla \cdot (\eta \nabla p_f) - \beta \nabla^2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - 2\mathbf{f}_\beta \cdot \nabla \nabla^2 \frac{\partial \eta}{\partial t} - \nabla_{f\beta}^2 \nabla^2 \eta + \sigma \frac{h_1 h_2}{\chi} \nabla^2 \nabla^2 \eta = 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Здесь  $c_0^2 = g(\rho_2 - \rho_1)h_1 h_2 / \chi$ ,  $\mathbf{U}_{12} = \rho_1 h_2 \mathbf{U}_1 / \chi$ ,  $\mathbf{U}_{21} = \rho_2 h_1 \mathbf{U}_2 / \chi$ ,  $\nabla_{f\eta}^2 = [\rho_1 h_2 (\mathbf{U}_1 \cdot \nabla)^2 + \rho_2 h_1 (\mathbf{U}_2 \cdot \nabla)^2] / \chi$ ,  $\alpha = c_0^2 (\rho_2 h_1^2 - \rho_1 h_2^2) / (h_1 h_2 \chi)$ ,  $\beta = h_1 h_2 (\rho_1 h_1 + \rho_2 h_2) / (3\chi)$ ,  $\mathbf{f}_\beta = h_1 h_2 (\rho_1 h_1 \mathbf{U}_1 + \rho_2 h_2 \mathbf{U}_2) / (3\chi)$ ,  $\nabla_{f\beta}^2 = h_1 h_2 [\rho_1 h_1 (\mathbf{U}_1 \cdot \nabla)^2 + \rho_2 h_2 (\mathbf{U}_2 \cdot \nabla)^2] / (3\chi)$ .

В уравнении (13) возмущения скоростей жидкостей остались только в квадратичных членах, поэтому для их определения достаточно простых уравнений первого приближения, т. е. линеаризованных уравнений горизонтального движения (1). Если для этих скоростей ввести потенциалы  $\varphi_l$ , то для них справедливы уравнения Пуассона

$$\nabla^2 \varphi_l = \frac{(-1)^{l+l}}{h_l} \frac{D\eta}{D_t}, \quad \langle \mathbf{u}_l \rangle = \nabla \varphi_l. \quad (14)$$

Таким образом, полученная система модельных уравнений состоит из одного главного уравнения (13) и нескольких простых линейных вспомогательных уравнений (12) и (14). При отсутствии установившихся течений в обоих слоях система уравнений (13) и (14) согласуется с системой, полученной в [10].

## 2. Дисперсионный анализ и солитонные решения модели

В общем случае дисперсионное соотношение (зависимость циклической частоты  $\omega$  от волнового числа  $k$ ) для основного модельного уравнения (13) даже после его линеаризации весьма громоздко. Поэтому рассмотрим простую ситуацию, когда стационарный поток, направленный вдоль координаты  $x$ , имеется лишь в одном из слоев ( $\mathbf{U}_2 = (U_2, V_2) = (U_2, 0)$  и  $\mathbf{U}_1 = 0$ ), а плоские возмущения также распространяются только вдоль этой координаты (все производные по координате  $y$  равны нулю). Подставляя в (13) решение в виде  $\eta = \eta_a \{ \exp[i(kx - \omega t)] + \exp[-i(kx - \omega t)] \}$ , находим дисперсионное соотношение в следующей форме:

$$\begin{aligned} \omega = k \frac{U_{21} + f_\beta k^2}{1 + \beta k^2} \pm \\ \pm k \frac{\sqrt{(U_{21} + f_\beta k^2)^2 + c_0^2 - U_2 U_{21} - (1 + \beta k^2) k^2 (U_2 U_{21} h_2^2 / 3 - \sigma h_1 h_2 / \chi)}}{1 + \beta k^2}. \end{aligned} \quad (15)$$

Заметим, что произведение  $U_2 U_{21}$ , а также параметры  $\beta$  и  $\chi$  больше нуля. Тогда из зависимости (15) следует, что при наличии стационарного относительного движения

слоев жидкости решение может содержать растущие моды в коротковолновой области (аналог неустойчивости Кельвина—Гельмгольца). При отсутствии потоков жидкости уравнение (13) является корректным вариантом уравнения Буссинеска. При учете установившихся сдвиговых течений слоев в основном уравнении модели возникает ряд дополнительных членов. Один из них имеет четвертую производную по пространственным переменным, и при пренебрежении капиллярностью ( $\sigma = 0$ ) данное уравнение становится аналогом некорректного варианта уравнения Буссинеска. Как известно (см., например, [11]), некорректность таких уравнений связана с положительным знаком при старшей производной по горизонтальным координатам. При учете поверхностного натяжения вклад этого члена уменьшается, а при малых скоростях потоков жидкостей может быть полностью нейтрализован.

На рис. 2 показаны нейтральные кривые, вычисленные при значениях параметров задачи, соответствующих условиям проведения лабораторных опытов [12, 13] по распространению одиночных возмущений границы раздела керосина и воды. Слева от кривых — области устойчивости, справа — неустойчивости. На рис. 3 представлены зависимости обезразмеренной мнимой части фазовой скорости  $c = \omega/k$  от обезразмеренного волнового числа, рассчитанные при двух значениях скорости стационарного течения нижнего слоя (одно из них совпадает с тем, при котором выполнялся эксперимент [13]). Как и следовало ожидать, при учете поверхностного натяжения области устойчивости увеличиваются, что особенно заметно при малых скоростях потока жидкости.

В начале раздела 1 мы предположили, что исследуемые волны являются длинными. Поэтому может показаться, что рассмотрение нейтральных и дисперсионных кривых при  $kH > 5$  не имеет смысла. Однако хорошо известно (см., например, [1]), что при численных расчетах различные эффекты перехода к конечным разностям и округления вводят малые высокочастотные осцилляции даже в том случае, когда решаемая задача удовлетворяет условию длинноволновости.

Модельная система уравнений имеет плоские установившиеся бегущие решения типа кноидальных волн. В частности, для уединенных возмущений, распространяющихся в направлении роста координаты  $x$ , получаем формулу

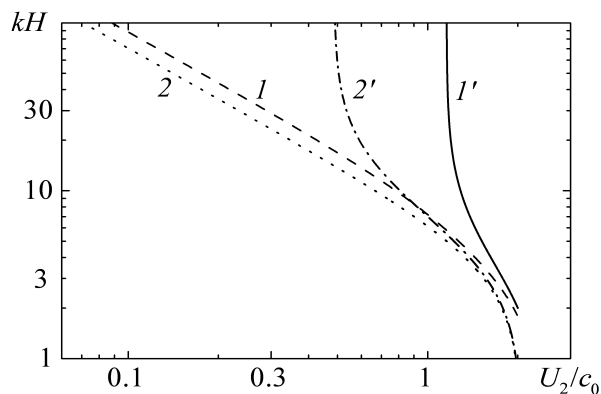


Рис. 2. Кривые нейтральной устойчивости при  $\rho_1/\rho_2 = 0.8$ ,  $\sigma = 0$  (кривые 1 и 2) и  $\sigma = 34$  мН/м (кривые 1' и 2'), а также  $H = 31.5$  мм,  $h_1/h_2 = 2.7$  (кривые 1 и 1') и  $H = 60$  мм,  $h_1/h_2 = 1.26$  (кривые 2 и 2')

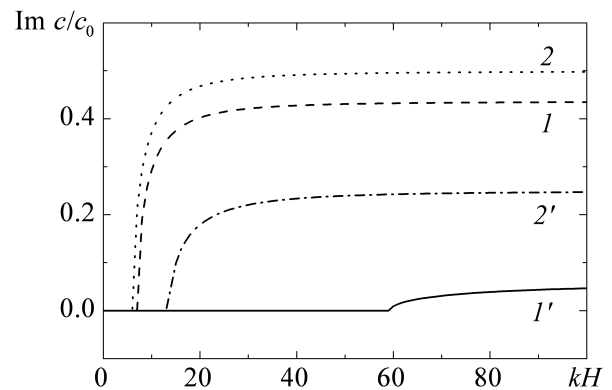


Рис. 3. Зависимости мнимой части фазовой скорости от волнового числа при  $H = 60$  мм,  $h_1/h_2 = 1.26$ ,  $\sigma = 0$  (кривые 1 и 2) и  $\sigma = 34$  мН/м (кривые 1' и 2'), а также  $U_2/c_0 = 0.5$  (кривые 1 и 1') и  $U_2/c_0 = 1$  (кривые 2 и 2')

$$\eta = \eta_a \operatorname{sech}^2 \left( \frac{x - U_s t}{L_s} \right). \quad (16)$$

Здесь скорость волны  $U_s$  находится из решения квадратного уравнения

$$U_s^2 \left( 3 - \frac{2\alpha\eta_a}{c_0^2} \right) - 2U_s \left( 3(U_{12} + U_{21}) - 2\eta_a \left[ \frac{U_{21}}{h_2} - \frac{U_{12}}{h_1} + \frac{\rho_1\rho_2 H}{2\chi^2} (U_2 - U_1) \right] \right) - 3(c_0^2 - U_1 U_{12} - U_2 U_{21}) - 2\eta_a \left[ \frac{\alpha}{2} + \frac{U_2 U_{21}}{h_2} - \frac{U_1 U_{12}}{h_1} + \frac{\rho_1\rho_2 H}{2\chi^2} (U_2^2 - U_1^2) \right] = 0,$$

ее ширина  $L_s = 2\sqrt{B/A}$ , где  $A = U_s^2 - c_0^2 - 2U_s(U_{12} + U_{21}) + U_1 U_{12} + U_2 U_{21}$ ,  $B = \beta U_s^2 - \sigma h_1 h_2 / \chi - [2U_s(h_1^2 U_{12} + h_2^2 U_{21}) + h_1^2 U_1 U_{12} + h_2^2 U_2 U_{21}] / 3$ .

Отметим, что без потери общности скорость течения в одном из слоев ( $U_1$  или  $U_2$ ) можно положить равной нулю, перейдя в соответствующую инерциальную движущуюся систему отсчета. В дальнейшем будем считать, что, как и в лабораторных экспериментах [12, 13] по распространению нелинейных уединенных плоских волн на сдвиговом потоке,  $U_1 = 0$ .

### 3. Методика численного решения системы модельных уравнений

Пусть  $\Lambda_{tt}$ ,  $\Lambda_{xx}$ ,  $\Lambda_{yy}$  — операторы разностной аппроксимации вторых производных по соответствующим переменным со вторым порядком на трехточечном шаблоне, а  $\Lambda_t$ ,  $\Lambda_x$ ,  $\Lambda_y$  — аппроксимации первых производных центральными разностями. Тогда для уравнения (13) будем иметь трехслойную неявную конечно-разностную схему

$$\begin{aligned} & \Lambda_{tt}\eta - (\Lambda_{xx} + \Lambda_{yy})\eta + 2\Lambda_t[(U_{12} + U_{21})\Lambda_x + (V_{12} + V_{21})\Lambda_y]\eta + \\ & + [(r_\rho U_1^2 + r_h U_2^2)\Lambda_{xx} + 2(r_\rho U_1 V_1 + r_h U_2 V_2)\Lambda_x \Lambda_y + (r_\rho V_1^2 + r_h V_2^2)\Lambda_{yy}]\eta / \chi - \\ & - \alpha(\Lambda_{xx} + \Lambda_{yy})\eta^2 / 2 + h_1(\Lambda_{xx} + \Lambda_{yy})[r_\rho(u_1^2 + v_1^2) - u_2^2 - v_2^2] - \\ & - [\Lambda_x(\eta\Lambda_x p_f) + \Lambda_y(\eta\Lambda_y p_f)] / \chi - \beta\Lambda_{tt}(\Lambda_{xx} + \Lambda_{yy})\eta - \\ & - 2h_1[(r_\rho r_h U_1 + U_2)\Lambda_x + (r_\rho r_h V_1 + V_2)\Lambda_y](\Lambda_{xx} + \Lambda_{yy})\Lambda_t\eta / (3\chi) - \\ & - h_1 h_2 [(r_\rho r_h U_1^2 + U_2^2)\Lambda_{xx} + 2(r_\rho r_h U_1 V_1 + U_2 V_2)\Lambda_x \Lambda_y + (r_\rho r_h V_1^2 + V_2^2)\Lambda_{yy}] \times \\ & \times (\Lambda_{xx} + \Lambda_{yy})\eta / (3\chi) + h_1 h_2 (\Lambda_{xx} + \Lambda_{yy})(\Lambda_{xx} + \Lambda_{yy})\eta / \text{Bo} = 0, \end{aligned}$$

где  $r_\rho = \rho_1 / \rho_2$ ,  $r_h = h_1 / h_2$  и все величины обезразмерены с помощью характерных параметров задачи: линейного размера  $H$  и фазовой скорости очень длинных линейных волн в покоящейся жидкости  $c_0$ . Указанная схема имеет второй порядок аппроксимации по всем трем независимым переменным. Решение итоговой системы алгебраических уравнений, полученной в результате разностной аппроксимации уравнения (13) по вышеприведенной схеме, проводилось с помощью итерационного метода Зейделя, который обладает хорошей сходимостью.

В общем случае исследование задачи на устойчивость чрезвычайно громоздко. Поэтому рассмотрим две простые, но характерные частные ситуации. Если стационарные течения жидкостей отсутствуют в обоих слоях, то условие устойчивости имеем в виде

$$(\Delta t)^2 \leq \frac{4\beta + (\Delta l)^2}{1 + \eta_a \alpha + 4h_1 h_2 / [(\Delta l)^2 \text{Bo}]}, \quad (\Delta l)^2 = \frac{(\Delta x)^2 (\Delta y)^2}{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}.$$

Здесь  $\Delta t$ ,  $\Delta x$ ,  $\Delta y$  — шаги разностной сетки по времени и горизонтальным координатам. При  $\rho_1 = 0$  (слой однородной жидкости) указанное условие согласуется с полученным в [14] условием для подобного уравнения (отличаются только формы учета нелинейности и капиллярности).

Другим важным частным случаем является ситуация, когда стационарный поток, направленный вдоль координаты  $x$ , есть лишь в одном из слоев (например, нижнем) и плоские возмущения распространяются только вдоль этой координаты. Тогда находим

$$(\Delta t)^2 \leq \frac{4\beta + (\Delta x)^2}{1 + \eta_a \alpha - \frac{1}{\chi} \left[ r_h U_2^2 + 2u_{1a} r_h U_2 + \frac{\eta_a r_p U_2^2}{h_2^2 \chi} + \frac{4h_1 h_2}{(\Delta x)^2} \left( \frac{U_2^2}{3} - \frac{\chi}{\text{Bo}} \right) \right]}.$$

Приведенное неравенство позволяет выявить влияние установившегося течения на условие устойчивости.

Входящие в уравнение (13) величины градиента давления на границе раздела слоев и векторов скоростей жидкостей определялись из простых линейных вспомогательных уравнений (12) и (14). Эти уравнения Пуассона решались с помощью метода быстрого преобразования Фурье по обоим горизонтальным координатам.

Ниже рассмотрены задачи, для которых в качестве исходного возмущения берутся либо стационарно бегущие плоские уединенные волны, либо первоначально покоящиеся возмущения. Следовательно, задание частных производных по времени на первых двух шагах по времени осуществляется очевидным образом.

На краях расчетной области по координатам  $x$  и  $y$  ставятся условия отражения от вертикальных стенок, заключающиеся в задании производных от отклонения границы раздела  $\eta$  по нормальям к стенкам равными нулю. Эти условия были реализованы следующим образом: значения искомой функции  $\eta$  в краевых и соседних с ними узлах брались равными ее значениям в ближайших внутренних узлах.

#### 4. Результаты расчетов по распространению возмущений

Описанные в предыдущем разделе методика расчетов и разностная схема были протестированы с помощью аналитического решения (16). Как и следовало ожидать, возмущения двигались с постоянной скоростью и с неизменной формой. Так, при распространении солитонов на расстояния порядка  $500L_s$  их амплитуда изменялась менее чем на 1.5%, а закон сохранения массы выполнялся с точностью  $10^{-6}$ . Численные решения были устойчивы и сходились со вторым порядком по всем независимым переменным (времени и горизонтальным координатам). Подчеркнем, что солитонное решение (16) чрезвычайно чувствительно к ошибкам вычислений, так как его профиль формируется только при балансе вкладов нелинейных и дисперсионных членов, имеющих второй порядок малости.

На рис. 4 и 5 показаны профили границы раздела ( $\eta^* = \eta/h_2$ ) при “лобовом” столкновении двух плоских уединенных волн (т. е. волны бегут как в направлении роста координаты  $x$ , так и в противоположном). При этом возмущения были не только одинаковой, но и различной полярности. В первом случае в момент наибольшего взаимодействия солитонов (при  $t = 24.2$ ) максимальная величина отклонения границы раздела немного больше суммы амплитуд исходных волн. Во втором случае в аналогичный момент



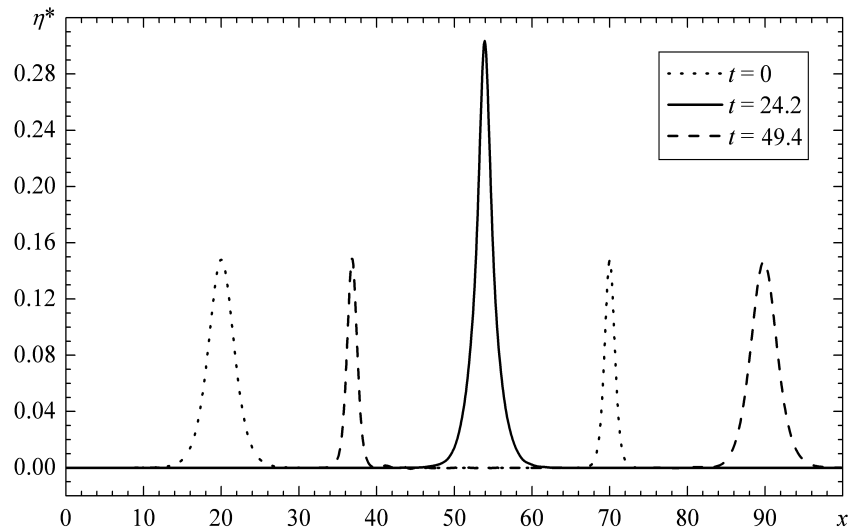


Рис. 4. Трансформация двух плоских солитонов одной полярности ( $\eta_s > 0$ ) при их “лобовом” столкновении (значения параметров расчета:  $\rho_1/\rho_2 = 0.8$ ,  $h_1/h_2 = 2.7$ ,  $U_2 = 0.5$ ,  $Bo = 11$ )

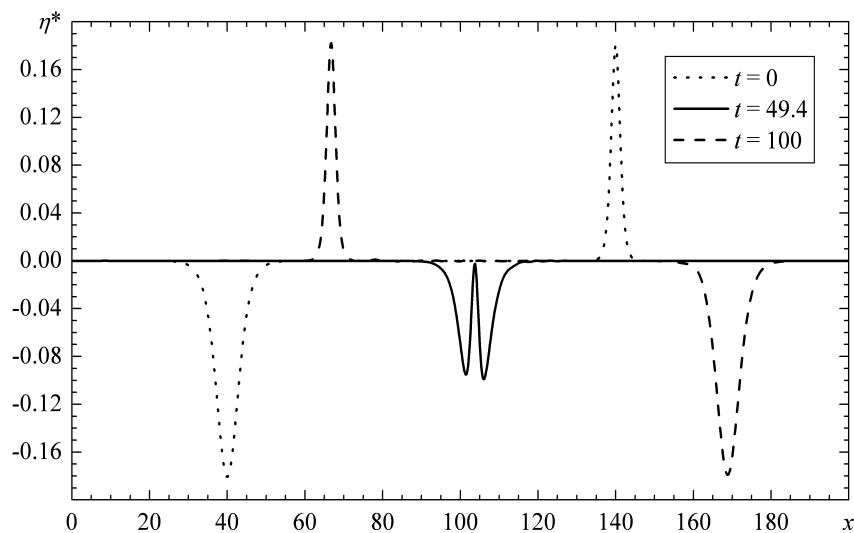


Рис. 5. Эволюция двух плоских солитонов разной полярности ( $\eta_s < 0$  и  $\eta_s > 0$ ) при их “лобовом” столкновении (значения параметров расчета:  $\rho_1/\rho_2 = 0.8$ ,  $h_1/h_2 = 1.26$ ,  $U_2 = 0.5$ ,  $Bo = 51$ )

времени (при  $t = 49.4$ ) наблюдается только отрицательное возмущение, поскольку солитон “впадина” шире солитона “бугор”, а амплитуды начальных волн одинаковы. В дальнейшем уединенные возмущения возвращаются к своим исходным профилям.

В соответствии с формулами (15) и (16) скорости и ширины солитонов больше для спутных возмущений, чем при движении в противоположную сторону. Вычисления проведены для тех же значений параметров задачи, при которых были выполнены эксперименты [12, 13] по распространению волн против потоков.

Значения безразмерных шагов по времени и координате  $x$  были равны 0.1 в первом расчете и 0.2 во втором, а число узлов разностной сетки по  $x$  составляло 1024 в обоих случаях. Следовательно, на характерные горизонтальные размеры волн приходилось не менее 50 узлов сетки.

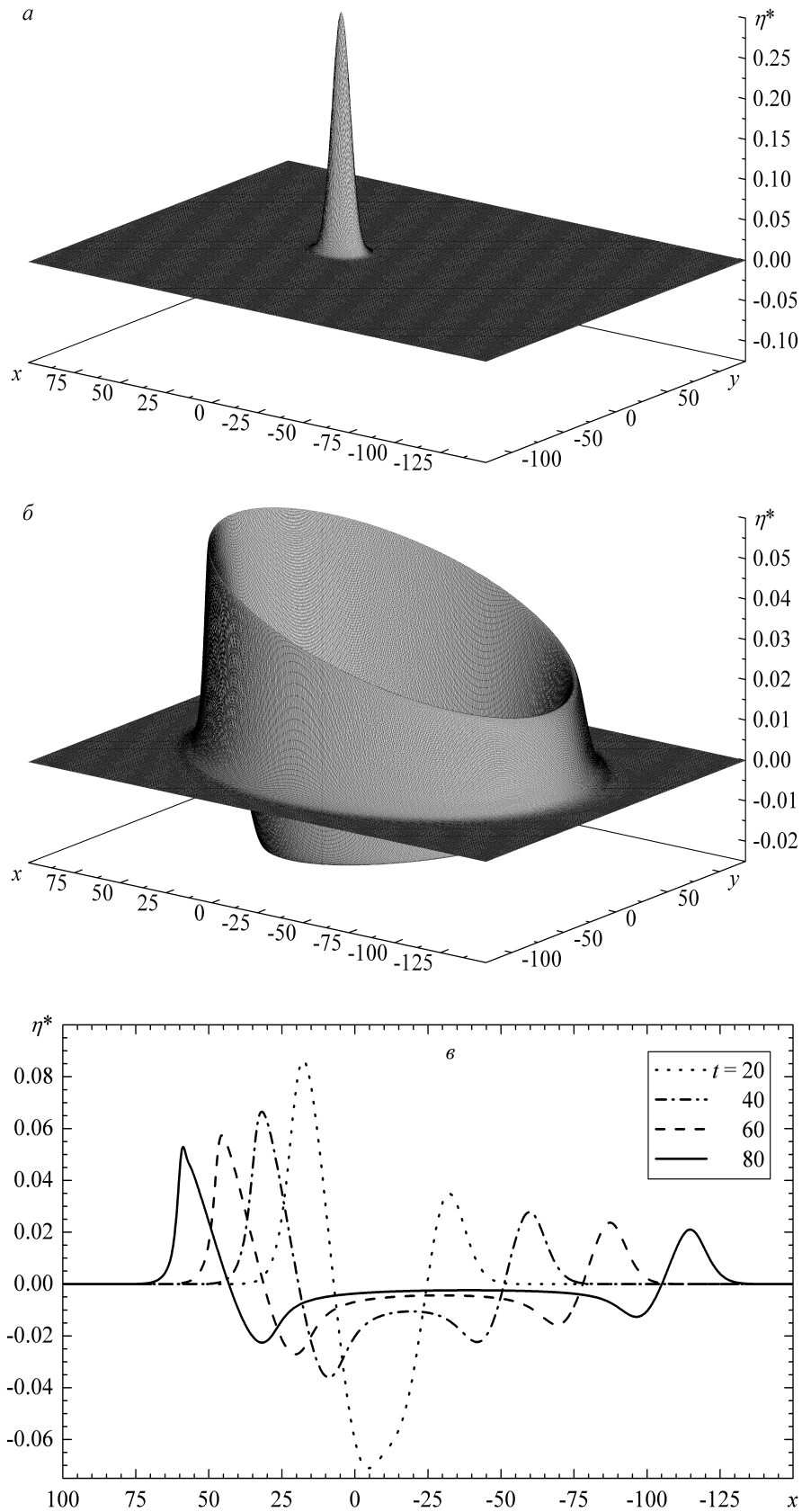


Рис. 6. Трансформация первоначально аксиально-симметричного покоящегося колоколообразного возмущения при  $\rho_1/\rho_2 = 0.8$ ,  $h_1/h_2 = 2.7$ ,  $U_2 = -0.5$ ,  $Bo = 11$ : а —  $t = 0$ ; б —  $t = 80$ ; в — сечения границы раздела при  $y = 0$  в четыре момента времени

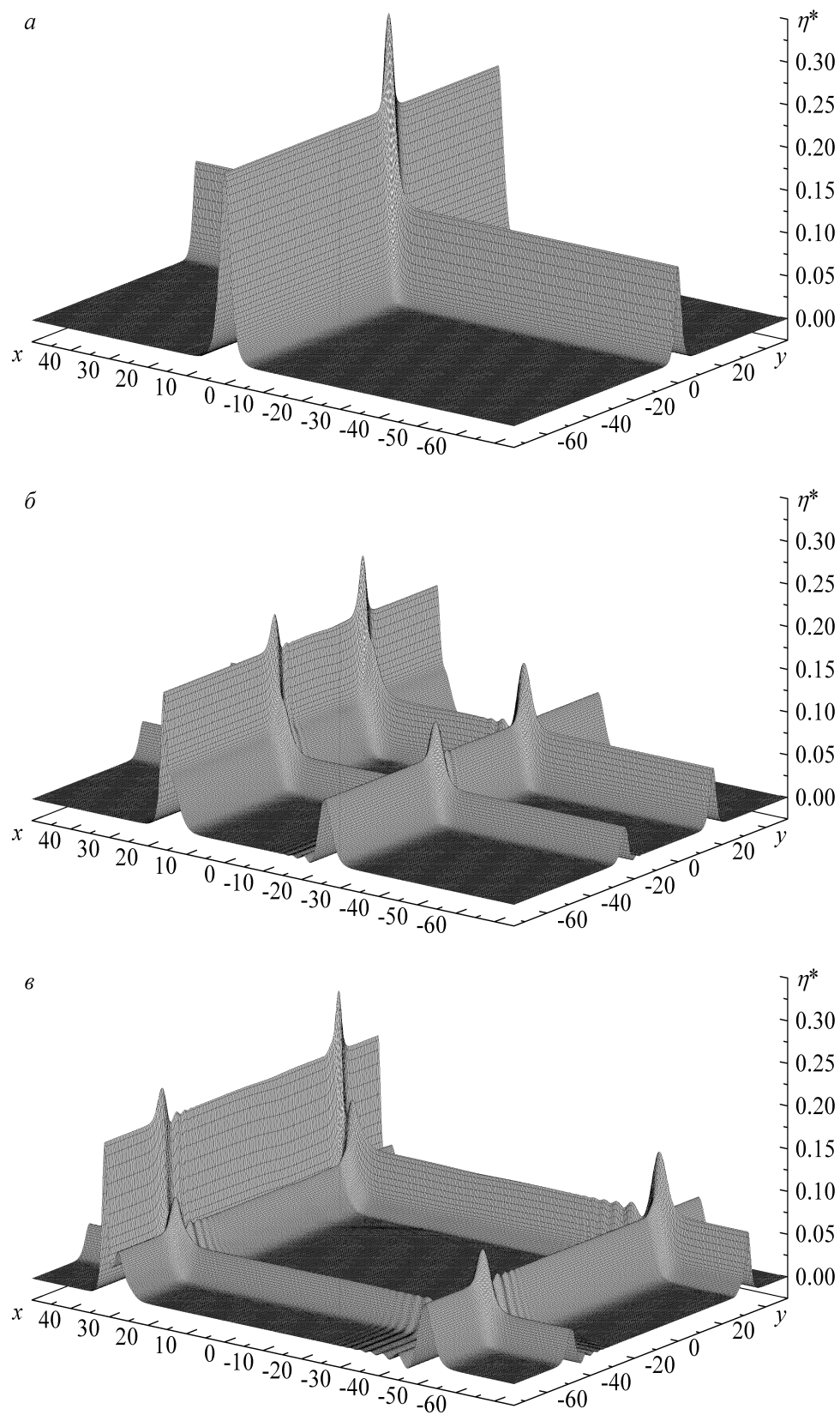


Рис. 7. Эволюция первоначально покоящегося крестообразного возмущения при  $\rho_1/\rho_2 = 0.8$ ,  $h_1/h_2 = 2.7$ ,  $U_2 = -0.3$ ,  $V_2 = -0.4$ ,  $Bo = 11$ : *a* —  $t = 0$ ; *б* —  $t = 20$ ; *в* —  $t = 40$

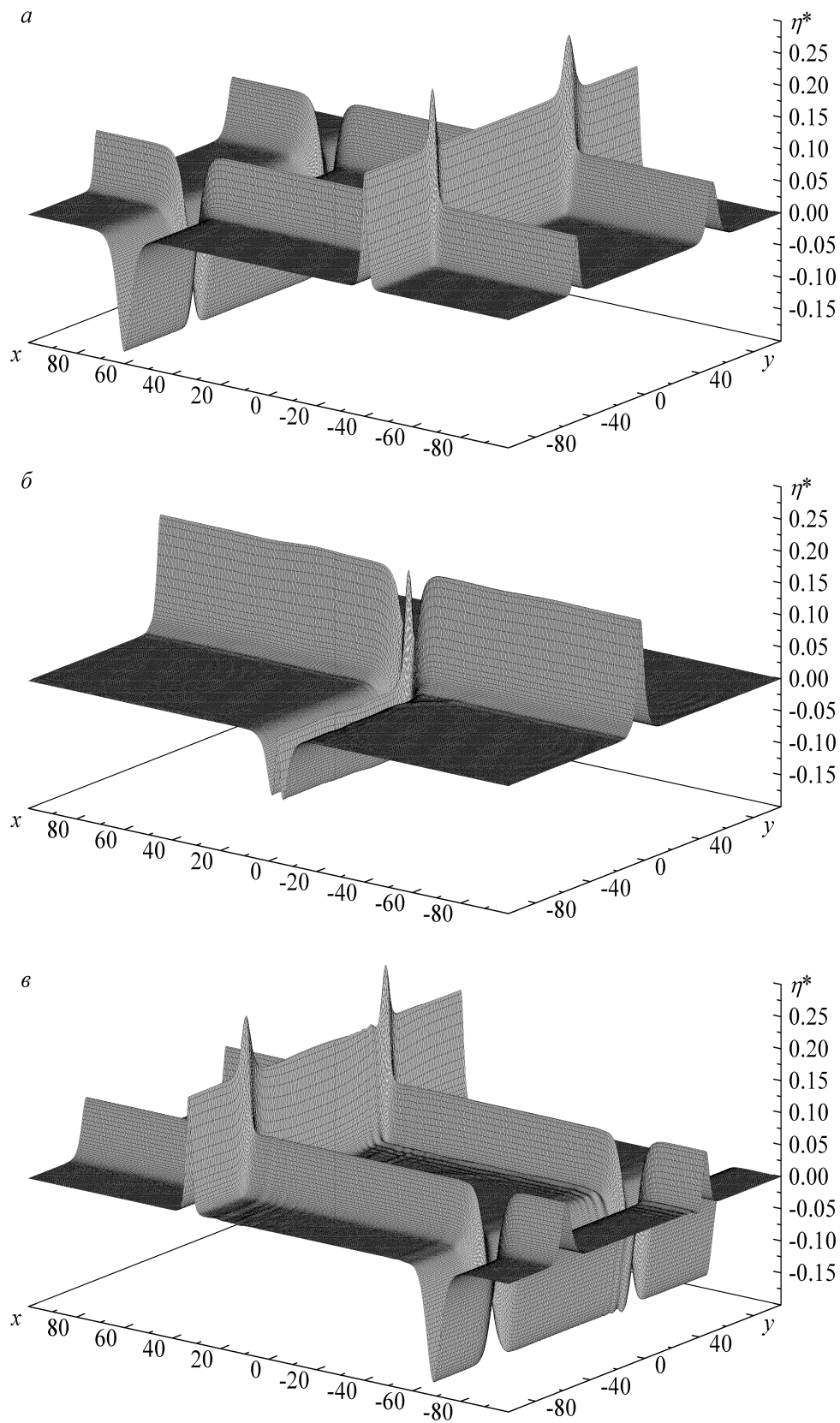


Рис. 8. Столкновение четырех квазиплоских уединенных возмущений при  $\rho_1/\rho_2 = 0.8$ ,  $h_1/h_2 = 1.26$ ,  $U_2 = -0.5$ ,  $V_2 = -0.1$ ,  $Bo = 51$ : *a* —  $t = 0$ ; *б* —  $t = 49.4$ ; *в* —  $t = 100$

Отметим, что для плоских внутренних волн, бегущих только в одну сторону в произвольно стратифицированном сдвиговом потоке уравнение Кортевега — де Вриза было впервые получено в работе [15]. Расширенное уравнение Кортевега — де Вриза для аналогичных возмущений сначала было выведено в [16] при слабой стратификации, а затем без использования этого приближения Буссинеска в работе [17]. Однако в последней статье проиллюстрированы лишь случаи, когда  $U_1 \geq 0$ , а  $U_2 = 0$ .

На рис. 6 представлена эволюция уединенного в пространстве возмущения, которое в начальный момент времени покоилось, а его форма была осесимметричной и колоколообразной:  $\eta(x, y) = \eta_0 \exp[(x^2 + y^2)/100]$ . Как и ожидалось, с некоторого момента времени за фронтом основной волны граница раздела опускается ниже равновесного уровня, а затем медленно стремится к этому уровню. Чтобы влияние стационарного течения было более очевидным, масштаб вертикальной оси на рис. 6, б по сравнению с масштабом на рис. 6, а изменен в пять раз. Профили возмущения в наиболее интересном сечении показаны на рис. 6, в. Что касается значений безразмерных шагов по времени и горизонтальным координатам, то они в данном случае были равны 0.25.

На рис. 7 приведена трансформация крестообразного возмущения, которое первоначально также покоилось. Оно представляло собой суперпозицию четырех плоских уединенных решений: одно решение для волны, распространяющейся в направлении роста координаты  $x$ , другое для волны, движущейся в противоположном направлении, и еще два аналогичных решения — по координате  $y$ , т. е.  $\eta = \eta_{ax} \operatorname{sech}^2(x/L_{sx+}) + \eta_{ax} \operatorname{sech}^2(x/L_{sx-}) + \eta_{ay} \operatorname{sech}^2(y/L_{sy+}) + \eta_{ay} \operatorname{sech}^2(y/L_{sy-})$ , где индексы  $+$  и  $-$  отвечают случаям  $U_s > 0$  и  $U_s < 0$  соответственно (рис. 7, а). Хорошо видно, что образуются четыре квазиплоские волны, разбегающиеся в четыре стороны. На пересечениях этих волн имеются четыре пика возмущения границы раздела. Спутные возмущения превращаются в солитоны со следующими за ними волновыми пакетами. Возмущения, распространяющиеся против стационарных течений, преобразуются вначале в треугольные с крутым передним и растянутым задним фронтами (рис. 7, б), затем из них выделяются цепочки солитонов спадающей амплитуды (рис. 7, в). В данных расчетах  $\Delta t = \Delta x = \Delta y = 0.125$ . Амплитуды возмущений снижаются в спутных направлениях и возрастают в противоположных.

На рис. 8 показано взаимодействие четырех плоских уединенных волн, попарно движущихся навстречу друг другу. При этом возмущения, распространяющиеся вдоль координаты  $y$ , имеют одинаковую полярность, а волны, бегущие вдоль координаты  $x$ , — различную. В данном случае значения безразмерных шагов по времени и горизонтальным координатам были равны 0.2.

При решении всех пространственных задач расчетная область имела размеры  $1024 \times 1024$ , и на характерные горизонтальные масштабы волн приходилось не менее нескольких десятков узлов разностной сетки.

## Заключение

В работе рассмотрена динамика умеренно длинных пространственных волн малой, но конечной амплитуды, одновременно распространяющихся под любыми углами друг к другу по границе раздела сдвигового потока двух жидкостей в горизонтальном канале. Анализ таких задач с помощью стандартных систем уравнений “мелкой воды” (например, уравнений движения (1) и законов сохранения массы (5)) чрезвычайно

затруднителен, так как векторы горизонтальных скоростей сред содержатся не только в линейных, но и в нелинейных членах всех уравнений.

Предложена комбинированная модель, которая состоит из одного основного нелинейного эволюционного уравнения для возмущения границы раздела и нескольких простых вспомогательных линейных уравнений. Последние необходимы для нахождения вклада в градиент давления на границе раздела слоев, связанного со стационарными течениями, и векторов горизонтальных скоростей жидкостей, входящих лишь в члены второго порядка малости главного уравнения.

Численные эксперименты подтвердили пригодность представленного подхода для решения ряда характерных плоских и пространственных задач динамики нелинейных волн. Использование полученной модели позволило исследовать как трансформации одиночных возмущений, так и различные их взаимодействия (столкновения и разбегания). Определено влияние скорости установившихся потоков на эволюцию протяженных и уединенных в пространстве возмущений. Продемонстрировано, что по границе раздела сдвигового течения способны одновременно распространяться плоские или квазиплоские уединенные волны разной полярности. Показано, что может наблюдаться ослабление возмущений, движущихся в спутном направлении, и, наоборот, интенсификация волн, бегущих против потока.

Авторы выражают благодарность П.И. Гешеву, В.Ю. Ляпидевскому, Н.И. Макаренко, Е.Н. Пелиновскому, Ю.А. Степанянцу, Г.С. Хакимзянову, О.Ю. Цвелодубу и Л.Б. Чубарову за ценные советы и полезные обсуждения ряда вопросов.

## Список литературы

- [1] УИЗЕМ ДЖ. Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1976.
- [2] Овсянников Л.В., Макаренко Н.И., Налимов В.И. и др. Нелинейные проблемы теории поверхностных и внутренних волн. Новосибирск: Наука, 1985.
- [3] Шокин Ю.И., Чубаров Л.Б., Марчук Ан.Г., Симонов К.В. Вычислительный эксперимент в проблеме цунами. Новосибирск: Наука, 1989.
- [4] Пелиновский Е.Н. Гидродинамика волн цунами. Н. Новгород: Изд-во ИПФ РАН, 1996.
- [5] Ляпидевский В.Ю., Тешуков В.М. Математические модели распространения длинных волн в неоднородной жидкости. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2000.
- [6] Хакимзянов Г.С., Шокин Ю.И., Барахнин В.Б., Шокина Н.Ю. Численное моделирование течений с поверхностными волнами. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2001.
- [7] Островский Л.А., Потапов А.И. Введение в теорию модулированных волн. М.: Физматлит, 2003.
- [8] Шамин Р.В. Вычислительные эксперименты в моделировании поверхностных волн в океане. М.: Наука, 2008.
- [9] Архипов Д.Г., Хабахпашев Г.А. Новый подход к описанию пространственных нелинейных волн в диспергирующих средах // Докл. АН. 2006. Т. 409, № 4. С. 476–480.
- [10] Архипов Д.Г., Сафарова Н.С., Хабахпашев Г.А. Моделирование нелинейных пространственных внутренних волн в морях и океанах со скачком плотности и пологим дном // Фундамент. и прикл. гидрофизика. 2009. Т. 2, № 2. С. 67–76.

- [11] DARIPA P., HUA W. A numerical study of an ill-posed Boussinesq equation arising in water waves and nonlinear lattices: Filtering and regularization techniques // Appl. Math. Comput. 1999. Vol. 101. P. 159–207.
- [12] БУКРЕЕВ В.И., ГАВРИЛОВ Н.В. Экспериментальное исследование уединенных внутренних волн в двухслойной жидкости // Там же. 1983. Т. 24, № 5. С. 51–56.
- [13] ГАВРИЛОВ Н.В. Уединенные внутренние волны большой амплитуды в двухслойной жидкости // ПМТФ. 1986. Т. 27, № 5. С. 49–54.
- [14] ЛИТВИНЕНКО А.А., ХАБАХПАШЕВ Г.А. Численное моделирование нелинейных достаточно длинных двумерных волн на воде в бассейнах с пологим дном // Вычисл. технологии. 1999. Т. 4, № 3. С. 95–105.
- [15] BENNEY D. J. Long nonlinear waves in fluid flows // J. Math. and Phys. 1966. Vol. 45. P. 52–63.
- [16] ПЕЛИНОВСКИЙ Е.Н., ПОЛУХИНА О.Е., ЛЭМБ К. Нелинейные внутренние волны в океане, стратифицированном по плотности и течению // Океанология. 2000. Т. 40, № 6. С. 805–815.
- [17] ПЕЛИНОВСКИЙ Е.Н., ПОЛУХИНА О.Е. Уравнения Кортевега — де Вриза высшего порядка для внутренних волн в стратифицированных сдвиговых потоках // Изв. Акад. инж. наук. 2000. Т. 1. С. 117–133.

*Поступила в редакцию 20 апреля 2010 г.,  
с доработки — 22 ноября 2010 г.*