

Метод численного решения обратных нелинейных задач по восстановлению компонентов тензора теплопроводности анизотропных материалов*

С. А. КОЛЕСНИК

*Московский авиационный институт
(Национальный исследовательский университет), Россия
e-mail: sergey@oviont.com*

Предлагается новый метод численного решения обратных коэффициентных задач нелинейного теплопереноса в анизотропных материалах, основанный на использовании методов переменных направлений с экстраполяцией, параметрической идентификации и градиентного спуска. Получены результаты по восстановлению компонентов тензора теплопроводности композиционного материала с учётом экспериментальных значений нелинейной теплопроводности этих материалов.

Ключевые слова: обратные задачи теплопереноса, теплопроводность, тензор теплопроводности, анизотропия, композиционный материал, численные методы.

Введение

Большинство теплозащитных композиционных материалов для гиперзвуковых летательных аппаратов (ЛА) являются анизотропными, и их теплопроводность описывается не скалярными величинами, а тензорами (матрицами) теплопроводности, компоненты которых при высоких температурах зависят от температуры, т. е. являются нелинейными. К таким материалам относятся стеклопластики, асбопластики, углерод-углеродные пластики, большинство графитов и графитосодержащих материалов. Моделирование как прямых, так и обратных задач теплопереноса в этих материалах в условиях аэрогазодинамического нагрева ЛА представляет значительные трудности по следующим причинам:

- нестационарное температурное поле многомерно по пространственным переменным;
- вектор плотности теплового потока не ортогонален изотермам, вследствие чего все координатные направления равнозначны и главное из них выделить невозможно;
- дифференциальное уравнение теплопереноса содержит смешанные производные, что не позволяет разделить переменные по координатным направлениям;
- сложность сохранения порядка конечно-разностной аппроксимации краевых условий, содержащих производные, соответствующего порядку во внутренних узлах расчётной области.

*Работа выполнена при финансовой поддержке ФЦП “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России” на 2009–2013 годы, госконтракт № 16.740.11.0454 и грантов РФФИ 12-01-31231 мол_а, 12-01-33095 мол_а_вед.

Поскольку задачи восстановления нелинейных компонентов тензора теплопроводности анизотропных теплозащитных материалов относятся к классу обратных задач теплопереноса, для которых используются решения прямых задач, то все перечисленные трудности решения прямых задач относятся и к обратным задачам. Кроме того, к ним добавляются следующие: сильное влияние на результаты решения обратных коэффициентных задач теплопереноса погрешностей при экспериментальном определении температур; большое число пространственных узлов с экспериментальными значениями температур в анизотропном теплозащитном материале (не менее девяти); сложность учёта нелинейности компонентов тензора переноса и т. п.

Обратные задачи теплопереноса для изотропных материалов рассматривались ранее в работах [1–3]. В [4] решена обратная задача теплопроводности в анизотропном полупространстве на основе аналитического решения, полученного в [5], в [6] решались задачи по восстановлению источника для уравнения диффузии.

В настоящей работе предложен метод численного решения обратных коэффициентных задач теплопроводности в анизотропных теплозащитных материалах в случае, когда компоненты тензора теплопроводности зависят от температуры произвольным образом, например немонотонно (во всех вышеуказанных работах нелинейные коэффициенты были монотонно возрастающими).

1. Постановка задачи

В прямоугольной пластине из анизотропного материала $l_1 \times l_2$ (рис. 1) рассматривается следующая коэффициентная обратная задача теплопереноса по определению компонентов тензора теплопроводности $\lambda_{11}(T)$, $\lambda_{12}(T)$, $\lambda_{21}(T)$, $\lambda_{22}(T)$:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda_{11}(T) \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda_{12}(T) \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda_{21}(T) \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda_{22}(T) \frac{\partial T}{\partial y} \right) = c\rho \frac{\partial T}{\partial t},$$

$$x \in (0; l_1), \quad y \in (0; l_2), \quad t > 0, \quad (1)$$

$$T(x, 0, t) = T(x, l_2, t) = T(0, y, t) = T(l_1, y, t) = T|_{\Gamma}, \quad (2)$$

$$T(x, y, 0) = T_0. \quad (3)$$

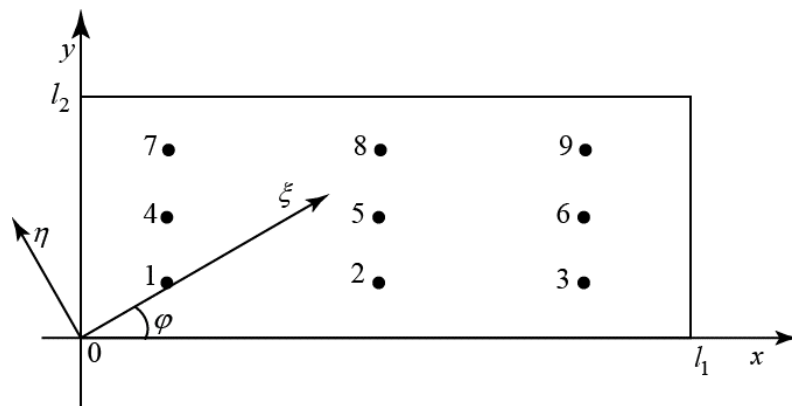


Рис. 1. Расчётная область; Ox , Oy — оси декартовой системы координат, $O\xi$, $O\eta$ — главные оси тензора теплопроводности, ориентированные относительно декартовой системы координат под углом φ

При этом граничное условие принимается в качестве максимального значения температур $T|_{\Gamma} = T_{\max}$, а начальное — в качестве минимального $T_0 = T_{\min}$, т. е.

$$T_{\min} \leq T \leq T_{\max}. \quad (4)$$

Для замыкания коэффициентной обратной задачи теплопереноса в анизотропной пластине задаются экспериментальные значения температур в девяти точках (см. рис. 1) в зависимости от времени

$$T((x, y)_i, t^k) = \tilde{T}_{ik}, \quad i = \overline{1, 9}, \quad k = \overline{1, K_0}. \quad (5)$$

Нелинейные компоненты тензора теплопроводности определяются через главные коэффициенты λ_{ξ} , λ_{η} и угол ориентации φ главных осей $O\xi$ и $O\eta$ следующим образом [5]:

$$\begin{aligned} \lambda_{11}(T) &= \lambda_{\xi}(T) \cos^2 \varphi + \lambda_{\eta}(T) \sin^2 \varphi, \\ \lambda_{22}(T) &= \lambda_{\xi}(T) \sin^2 \varphi + \lambda_{\eta}(T) \cos^2 \varphi, \\ \lambda_{12}(T) &= \lambda_{21}(T) = (\lambda_{\xi}(T) - \lambda_{\eta}(T)) \sin \varphi \cos \varphi. \end{aligned} \quad (6)$$

Поскольку рассматриваемая область двумерна, то количество точек с экспериментальными значениями в направлении каждой координатной оси должно быть не менее двух, а так как она анизотропна, то количество этих точек по координатным направлениям должно быть не менее трех (в соответствии с пространственным шаблоном для конечно-разностных схем). Таким образом, принимается минимально возможное число пространственных точек, равное девяти, с экспериментальными значениями температур, зависящими от времени.

Одним из эффективных методов решения нелинейных коэффициентных обратных задач для уравнений параболического типа вообще и анизотропного переноса тепла, в частности, является метод параметрической идентификации, [3, 4], в котором искомые функции $\lambda_{11}(T)$, $\lambda_{12}(T) = \lambda_{21}(T)$, $\lambda_{22}(T)$ находятся в виде линейной комбинации базисных функций $N_m(T)$, задаваемых на конечных элементах — конечных отрезках ΔT_m , $m = \overline{1, M-1}$ ($T_{\min} \leq T \leq T_{\max}$), причём эти базисные функции приписаны каждому узлу $T_m = T_{\min} + \sum_{l=1}^m \Delta T_{l-1}$ ($\Delta T_0 = 0$), $m = \overline{1, M}$, и ортогональны на отрезке $T \in [T_{\min}, T_{\max}]$ в пространстве L_2 . Здесь используются линейно непрерывные базисные функции [3, 7]

$$N_m(T) = \begin{cases} 0, & T < T_{m-1}, \\ \frac{T - T_{m-1}}{T_m - T_{m-1}}, & T_{m-1} \leq T \leq T_m, \\ \frac{T_{m+1} - T}{T_{m+1} - T_m}, & T_m \leq T \leq T_{m+1}, \\ 0, & T > T_{m+1}. \end{cases} \quad m = \overline{1, M}. \quad (7)$$

Нелинейные компоненты тензора теплопроводности, зависящие от температуры, в методе параметрической идентификации представляются в виде линейных комбинаций базисных функций $N_m(T)$

$$\lambda_{11}(T) \approx \sum_{m=1}^M \lambda_{11}^m N_m(T), \quad (8)$$

$$\lambda_{22}(T) \approx \sum_{m=1}^M \lambda_{22}^m N_m(T), \quad (9)$$

$$\lambda_{12}(T) \approx \sum_{m=1}^M \lambda_{12}^m N_m(T), \quad (10)$$

где коэффициенты линейных комбинаций λ_{11}^m , λ_{22}^m , λ_{12}^m на каждом m -м конечном элементе $m = \overline{1, (M-1)}$ являются искомыми величинами.

На основании принципа максимума можно утверждать, что температура внутри области будет удовлетворять неравенству $T_{\min} \leq T(x, y, t) \leq T_{\max}$. Для дальнейших рассуждений введём следующие обозначения: $\lambda_{11}^1 = \lambda_{11}(T_{\min})$, $\lambda_{12}^1 = \lambda_{12}(T_{\min})$, $\lambda_{22}^1 = \lambda_{22}(T_{\min})$, \dots , $\lambda_{11}^M = \lambda_{11}(T_{\max})$, $\lambda_{12}^M = \lambda_{12}(T_{\max})$, $\lambda_{22}^M = \lambda_{22}(T_{\max})$.

2. Метод определения коэффициентов в линейных комбинациях при параметрическом представлении компонентов тензора теплопроводности

Для определения постоянных компонентов вектора $\lambda = (\lambda_{11}^1, \dots, \lambda_{11}^M, \lambda_{22}^1, \dots, \lambda_{22}^M, \lambda_{12}^1, \dots, \lambda_{12}^M)^T$, $m = \overline{1, M}$, в выражениях (8)–(10) вводится квадратичный функционал

$$S(\lambda) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^9 \sum_{k=1}^{K_0} [T_{i,k}(\lambda) - \tilde{T}_{i,k}]^2 \quad (11)$$

в виде суммы по пространственно-временным переменным квадратов отклонения экспериментальных значений $\tilde{T}_{i,k}$ в точках $((x, y)_i, t^k)$ от расчётных $T_{i,k}(\lambda) \equiv T_{i,k}((x, y)_i, t^k, \lambda)$. В случае отсутствия экспериментальных значений температур в качестве последних принимаются результаты численного решения по приемлемым характеристикам $\lambda_{11}(T)$, $\lambda_{22}(T)$, $\lambda_{12}(T)$, считаемся искомыми. При этом в экспериментальные значения может быть добавлена относительная δ либо абсолютная Δ погрешность. Предполагается, что при достижении стационарного значения функционала (11) искомые характеристики, заложенные в экспериментальных значениях $\tilde{T}_{i,k}$, приближённо совпадут с характеристиками, по которым получены расчётные значения температур.

Для минимизации функционала используется неявный метод градиентного спуска

$$\lambda^{(n+1)} = \lambda^{(n)} - \alpha_n \text{grad } S(\lambda^{(n+1)}), \quad (12)$$

где n — номер итерации, α_n — параметрические шаги, выбираемые достаточно малыми с подчинением условию ($\alpha_n > 0$)

$$S(\lambda^{(n+1)}) < S(\lambda^{(n)}). \quad (13)$$

По условию (13) первоначальное значение α_0 может быть выбрано произвольно, например $\alpha_0 = 0.01$. Тогда, если в результате следующей итерации условие (13) не выполнилось, то α_n на этой итерации уменьшается и расчёт на ней повторяется, в противном случае — при выполнении (13) для следующей итерации — α_n увеличивается. Окончание итерационного процесса устанавливается по близости к нулю $\text{grad } S(\lambda^{(n+1)})$, т. е. при выполнении условия

$$|\text{grad } S(\lambda^{(n+1)})| \leq \varepsilon, \quad (14)$$

где ε — заданная точность.

Для вычисления градиента функционала в (11) с последующей подстановкой его компонентов в (12) и определения вектора $\Delta\lambda^{(n)} = \lambda^{(n+1)} - \lambda^{(n)}$ разложим в ряд Тейлора функцию $T_{i,k}(\lambda^{(n+1)})$ в окрестности $\lambda^{(n)}$, сохраняя линейные относительно $\Delta\lambda^{(n)}$ члены. В результате получим

$$S(\lambda^{(n+1)}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^9 \sum_{k=1}^{K_0} \left[\left(T_{i,k}(\lambda^{(n)}) + \sum_{l=1}^{3M} \frac{\partial T_{i,k}(\lambda^{(n)})}{\partial \lambda_l} \Delta\lambda_l^{(n)} \right) - \tilde{T}_{i,k} \right]^2 + O(\|\Delta\lambda\|^2). \quad (15)$$

Компоненты градиента функционала (15) имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial S(\lambda^{(n+1)})}{\partial \lambda_l} &= \sum_{i=1}^9 \sum_{k=1}^{K_0} \left[\left(T_{i,k}(\lambda^{(n)}) - \tilde{T}_{i,k} \right) + \sum_{k=1}^{K_0} \frac{\partial T_{i,k}(\lambda^{(n)})}{\partial \lambda_l} \Delta\lambda_l^{(n)} \right] \times \\ &\quad \times \left[\frac{\partial T_{i,k}(\lambda^{(n)})}{\partial \lambda_l} + \frac{\partial}{\partial \lambda_l} \left(\sum_{l=1}^{3M} \frac{\partial T_{i,k}(\lambda^{(n)})}{\partial \lambda_l} \Delta\lambda_l^{(n)} \right) \right] \approx \\ &\approx \sum_{i=1}^9 \sum_{k=1}^{K_0} \left[\left(T_{i,k}(\lambda^{(n)}) - \tilde{T}_{i,k} \right) + \sum_{l=1}^{3M} \frac{\partial T_{i,k}(\lambda^{(n)})}{\partial \lambda_l} \Delta\lambda_l^{(n)} \right] \frac{\partial T_{i,k}(\lambda^{(n)})}{\partial \lambda_l}, \\ &\quad l = \overline{1, 3M}, \end{aligned} \quad (16)$$

где $3M$ — количество неизвестных параметров.

Представим (16) в следующей векторно-матричной форме:

$$\text{grad } S(\lambda^{(n+1)}) = Z^T(\lambda^{(n)}) \left(T(\lambda^{(n)}) - \tilde{T} \right) + Z^T(\lambda^{(n)}) Z(\lambda^{(n)}) \Delta\lambda^{(n)}, \quad (17)$$

$$Z(\lambda^{(n)}) = \begin{pmatrix} u^1((x, y)_1, t^1, \lambda^{(n)}) \dots v^1((x, y)_1, t^1, \lambda^{(n)}) \dots w^1((x, y)_1, t^1, \lambda^{(n)}) \dots \\ u^1((x, y)_2, t^1, \lambda^{(n)}) \dots v^1((x, y)_2, t^1, \lambda^{(n)}) \dots w^1((x, y)_2, t^1, \lambda^{(n)}) \dots \\ \dots \dots \dots \\ u^1((x, y)_9, t^{K_0}, \lambda^{(n)}) \dots v^1((x, y)_9, t^{K_0}, \lambda^{(n)}) \dots w^1((x, y)_9, t^{K_0}, \lambda^{(n)}) \dots \end{pmatrix}. \quad (18)$$

Элементы матрицы (18) (её можно назвать матрицей коэффициентов чувствительности) в точках $((x, y)_i, t^k)$ определяются из решения сопряжённых задач относительно производных от прямой задачи (1)–(4) по каждому компоненту λ_l , $l = 1, \dots, 3M$, и имеют смысл коэффициентов чувствительности температуры при изменении параметров λ_l :

$$\begin{aligned} u^m((x, y)_i, t^k, \lambda) &= \frac{\partial T((x, y)_i, t^k, \lambda)}{\partial \lambda_{11}^m}, \quad v^m((x, y)_i, t^k, \lambda) = \frac{\partial T((x, y)_i, t^k, \lambda)}{\partial \lambda_{12}^m}, \\ w^m((x, y)_i, t^k, \lambda) &= \frac{\partial T((x, y)_i, t^k, \lambda)}{\partial \lambda_{22}^m}. \end{aligned} \quad (19)$$

Векторы $T(\lambda^{(n)}) - \tilde{T}$ и $\Delta\lambda^{(n)}$ в (17) имеют вид

$$\begin{aligned} T(\lambda^{(n)}) - \tilde{T} &= \left(T_{1,1}(\lambda^{(n)}) - \tilde{T}_{1,1} \right), \dots, \left(T_{I,1}(\lambda^{(n)}) - \tilde{T}_{I,1} \right), \\ &\left(T_{1,2}(\lambda^{(n)}) - \tilde{T}_{1,2} \right), \dots, \left(T_{I,2}(\lambda^{(n)}) - \tilde{T}_{I,2} \right), \dots, \left(T_{I,K_0}(\lambda^{(n)}) - \tilde{T}_{I,K_0} \right)^T, \end{aligned} \quad (20)$$

$$\Delta\lambda^{(n)} = \left(\Delta\lambda_{11}^{1(n)}, \dots, \Delta\lambda_{11}^{M(n)}, \Delta\lambda_{22}^{1(n)}, \dots, \Delta\lambda_{22}^{M(n)}, \Delta\lambda_{12}^{1(n)}, \dots, \Delta\lambda_{12}^{M(n)} \right)^T. \quad (21)$$

Подставляя (17) в (12), получим

$$\Delta\lambda^{(n)} = -\alpha_n \left[Z^T(\lambda^{(n)}) \left(T(\lambda^{(n)}) - \tilde{T} \right) + Z^T(\lambda^{(n)}) Z(\lambda^{(n)}) \Delta\lambda^{(n)} \right],$$

откуда

$$\left(E + \alpha_n Z^T(\lambda^{(n)}) Z(\lambda^{(n)}) \right) \Delta\lambda^{(n)} = -\alpha_n Z^T(\lambda^{(n)}) \left(T(\lambda^{(n)}) - \tilde{T} \right)$$

или

$$\Delta\lambda^{(n)} = -\alpha_n \left(E + \alpha_n Z^T(\lambda^{(n)}) Z(\lambda^{(n)}) \right)^{-1} Z^T(\lambda^{(n)}) \left(T(\lambda^{(n)}) - \tilde{T} \right). \quad (22)$$

Для определения расчётных значений температур $T_{i,k}(\lambda)$, входящих в функционал (11), используется экономичный абсолютно устойчивый метод переменных направлений с экстраполяцией (МПНЭ), подробно изложенный и обоснованный в [8, 9], а для нахождения элементов матрицы коэффициентов чувствительности необходимо решить $3M$ -независимые начально-краевые задачи относительно функций

$$\begin{aligned} u^1(x, y, t) &= \frac{\partial T}{\partial \lambda_{11}^1}, \dots, u^M(x, y, t) = \frac{\partial T}{\partial \lambda_{11}^M}, \\ v^1(x, y, t) &= \frac{\partial T}{\partial \lambda_{12}^1}, \dots, v^M(x, y, t) = \frac{\partial T}{\partial \lambda_{12}^M}, \\ w^1(x, y, t) &= \frac{\partial T}{\partial \lambda_{22}^1}, \dots, w^M(x, y, t) = \frac{\partial T}{\partial \lambda_{22}^M}, \end{aligned}$$

которые можно получить, продифференцировав задачу (1)–(4) по соответствующим параметрам $\lambda_{11}^1, \dots, \lambda_{11}^M, \lambda_{22}^1, \dots, \lambda_{22}^M, \lambda_{12}^1, \dots, \lambda_{12}^M$.

Продифференцируя уравнения задачи (1)–(4) по параметру λ_{11}^p , получим

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(N_p(T) + \sum_{m=1}^M \lambda_{11}^m \frac{\partial N_m(T)}{\partial \lambda_{11}^p} \right) \frac{\partial T}{\partial x} + \left(\sum_{m=1}^M \lambda_{11}^m N_m(T) \right) \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial \lambda_{11}^p} \right) \right] + \\ & + \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\sum_{m=1}^M \lambda_{12}^m \frac{\partial N_m(T)}{\partial \lambda_{11}^p} \right) \frac{\partial T}{\partial y} + \left(\sum_{m=1}^M \lambda_{12}^m N_m(T) \right) \left(\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial \lambda_{11}^p} \right) \right] + \\ & + \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(\sum_{m=1}^M \lambda_{12}^m \frac{\partial N_m(T)}{\partial \lambda_{11}^p} \right) \frac{\partial T}{\partial x} + \left(\sum_{m=1}^M \lambda_{12}^m N_m(T) \right) \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial \lambda_{11}^p} \right) \right] + \\ & + \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(\sum_{m=1}^M \lambda_{22}^m \frac{\partial N_m(T)}{\partial \lambda_{11}^p} \right) \frac{\partial T}{\partial y} + \left(\sum_{m=1}^M \lambda_{22}^m N_m(T) \right) \left(\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial \lambda_{11}^p} \right) \right] = c\rho \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial T}{\partial \lambda_{11}^p} \right), \\ & x \in [0; l_1], \quad y \in [0; l_2], \quad t > 0, \end{aligned} \quad (23)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \lambda_{11}^p}(x, 0, t) = \frac{\partial T}{\partial \lambda_{11}^p}(x, l_2, t) = \frac{\partial T}{\partial \lambda_{11}^p}(0, y, t) = \frac{\partial T}{\partial \lambda_{11}^p}(l_1, y, t) = 0, \quad (24)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \lambda_{11}^p}(x, y, 0) = 0. \quad (25)$$

Произведём замену в (23)–(25): $\frac{\partial T}{\partial \lambda_{11}^p} = u^p(x, y, t)$, $\tilde{\lambda}_{11}(T) = \sum_{m=1}^M \lambda_{11}^m N_m(T)$. В результате получим следующую начально-краевую дифференциальную задачу относительно неизвестной функции $u^p(x, y, t)$:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(N_p(T) + \sum_{m=1}^M \lambda_{11}^m \frac{\partial N_m(T)}{\partial \lambda_{11}^p} \right) \frac{\partial T}{\partial x} + \tilde{\lambda}_{11}(T) \left(\frac{\partial u^p}{\partial x} \right) \right] + \\ & + \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\sum_{m=1}^M \lambda_{12}^m \frac{\partial N_m(T)}{\partial \lambda_{11}^p} \right) \frac{\partial T}{\partial y} + \tilde{\lambda}_{12}(T) \left(\frac{\partial u^p}{\partial y} \right) \right] + \\ & + \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(\sum_{m=1}^M \lambda_{12}^m \frac{\partial N_m(T)}{\partial \lambda_{11}^p} \right) \frac{\partial T}{\partial x} + \tilde{\lambda}_{12}(T) \left(\frac{\partial u^p}{\partial x} \right) \right] + \\ & + \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(\sum_{m=1}^M \lambda_{22}^m \frac{\partial N_m(T)}{\partial \lambda_{11}^p} \right) \frac{\partial T}{\partial y} + \tilde{\lambda}_{22}(T) \left(\frac{\partial u^p}{\partial y} \right) \right] = c\rho \frac{\partial u^p}{\partial t}, \\ & x \in [0; l_1], \quad y \in [0; l_2], \quad t > 0, \end{aligned} \quad (26)$$

$$u^p(x, 0, t) = u^p(x, l_2, t) = u^p(0, y, t) = u^p(l_1, y, t) = 0, \quad (27)$$

$$u^p(x, y, 0) = 0. \quad (28)$$

Аналогично продифференцировав задачу (1)–(4) по параметрам $\lambda_{12}^p, \lambda_{22}^p$ и введя обозначения $\partial T / \partial \lambda_{12}^p = v^p(x, y, t)$ и $\partial T / \partial \lambda_{22}^p = w^p(x, y, t)$, получим начально-краевые дифференциальные задачи относительно неизвестных функций $v^p(x, y, t)$ и $w^p(x, y, t)$ соответственно:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\sum_{m=1}^M \lambda_{11}^m \frac{\partial N_m(T)}{\partial \lambda_{12}^p} \right) \frac{\partial T}{\partial x} + \tilde{\lambda}_{11}(T) \left(\frac{\partial v^p}{\partial x} \right) \right] + \\ & + \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(N_p(T) + \sum_{m=1}^M \lambda_{12}^m \frac{\partial N_m(T)}{\partial \lambda_{12}^p} \right) \frac{\partial T}{\partial y} + \tilde{\lambda}_{12}(T) \left(\frac{\partial v^p}{\partial y} \right) \right] + \\ & + \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(N_p(T) + \sum_{m=1}^M \lambda_{12}^m \frac{\partial N_m(T)}{\partial \lambda_{12}^p} \right) \frac{\partial T}{\partial x} + \tilde{\lambda}_{12}(T) \left(\frac{\partial v^p}{\partial x} \right) \right] + \\ & + \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\sum_{m=1}^M \lambda_{22}^m \frac{\partial N_m(T)}{\partial \lambda_{12}^p} \right) \frac{\partial T}{\partial y} + \tilde{\lambda}_{22}(T) \left(\frac{\partial v^p}{\partial y} \right) \right] = c\rho \frac{\partial v^p}{\partial t}, \\ & x \in [0; l_1], \quad y \in [0; l_2], \quad t > 0, \end{aligned} \quad (29)$$

$$v^p(x, 0, t) = v^p(x, l_2, t) = v^p(0, y, t) = v^p(l_1, y, t) = 0, \quad (30)$$

$$v^p(x, y, 0) = 0. \quad (31)$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\sum_{m=1}^M \lambda_{11}^m \frac{\partial N_m(T)}{\partial \lambda_{22}^p} \right) \frac{\partial T}{\partial x} + \tilde{\lambda}_{11}(T) \left(\frac{\partial w^p}{\partial x} \right) \right] + \\
& + \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\sum_{m=1}^M \lambda_{12}^m \frac{\partial N_m(T)}{\partial \lambda_{22}^p} \right) \frac{\partial T}{\partial y} + \tilde{\lambda}_{12}(T) \left(\frac{\partial w^p}{\partial y} \right) \right] + \\
& + \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(\sum_{m=1}^M \lambda_{12}^m \frac{\partial N_m(T)}{\partial \lambda_{22}^p} \right) \frac{\partial T}{\partial x} + \tilde{\lambda}_{12}(T) \left(\frac{\partial w^p}{\partial x} \right) \right] + \\
& + \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(N_p(T) + \sum_{m=1}^M \lambda_{22}^m \frac{\partial N_m(T)}{\partial \lambda_{22}^p} \right) \frac{\partial T}{\partial y} + \tilde{\lambda}_{22}(T) \left(\frac{\partial w^p}{\partial y} \right) \right] = c\rho \frac{\partial w^p}{\partial t}, \\
& x \in [0; l_1], \quad y \in [0; l_2], \tag{32}
\end{aligned}$$

$$w^p(x, 0, t) = w^p(x, l_2, t) = w^p(0, y, t) = w^p(l_1, y, t) = 0, \tag{33}$$

$$w^p(x, y, 0) = 0. \tag{34}$$

Задачи (26)–(28), (29)–(31) и (32)–(34) решаются совместно с прямой задачей (1)–(4) с помощью метода переменных направлений с экстраполяцией, причём на каждом временном слое используются значения температур, найденные при решении прямой задачи (1)–(4). Таким образом, одновременно находятся элементы матрицы (18) и компоненты вектора (20), которые подставляются в выражение (22).

Фундаментальной проблемой при решении обратных задач является корректность метода решения [1, 5], поскольку коэффициентные обратные задачи зачастую могут быть некорректными, особенно при использовании экспериментальных значений с погрешностями. Здесь можно применить метод регуляризации А.Н. Тихонова [10], однако в этом случае сложно подобрать параметры регуляризации. С другой стороны, если экспериментальные значения считать точными, то можно доказать теоремы о достаточных условиях существования и единственности обратной коэффициентной задачи теплопроводности [4]. Более конструктивным подходом является численный эксперимент, когда при решении обратной задачи к экспериментальным значениям добавляются погрешности до тех величин, пока решение не станет неустойчивым. Именно такой подход и предлагается в настоящей работе.

3. Результаты численных решений

В качестве иллюстрации работоспособности изложенного метода и программного комплекса восстанавливаются нелинейные компоненты тензора теплопроводности углерод-углеродного композитного материала с армированным однонаправленно непрерывным волокном под углом $\varphi = 30^\circ$ к одной из границ пластины. Главные компоненты тензора теплопроводности имели следующие функциональные зависимости:

$$\lambda_\xi(T) = 0.46875 \cdot 10^{-5} T^2 - 0.625 \cdot 10^{-2} T + 5.0625,$$

$$\lambda_\eta(T) = -0.625 \cdot 10^{-5} T^2 + 0.0125 T - 4.25.$$

Итерационный процесс без погрешностей и с добавленной погрешностью в $\tilde{T}_{i,k}$

Номер итерации	S	λ_{11}^1	λ_{22}^1	λ_{12}^1	λ_{11}^3	λ_{22}^3	λ_{12}^3	α_n
<i>Без погрешности</i>								
0	406181	2	2	0	2	2	0	1
1	12342.1	2.84631	1.54525	0.718053	2.98039	2.41681	0.565249	1.2
2	203.876	2.18072	1.55032	0.824741	3.68822	2.44946	0.939521	1.44
3	7.1019	2.42013	1.55114	0.798976	3.44452	2.45603	0.840014	1.728
4	5.96245	2.44688	1.55192	0.802904	3.44453	2.45661	0.850996	2.073
5	5.96186	2.4473	1.55199	0.802965	3.44458	2.45666	0.851008	2.488
6	5.96186	2.4473	1.55199	0.802966	3.44458	2.45666	0.851009	2.985
<i>С добавленной погрешностью</i>								
0	412407	2	2	0	2	2	0	1
1	13107	2.82382	1.38153	0.720785	2.85262	2.38604	0.444623	1.2
2	1144.68	1.98963	1.3996	0.820823	3.70417	2.41087	0.944771	1.44
3	595.848	2.28734	1.39834	0.755414	3.40942	2.41461	0.738225	1.728
4	569.87	2.37226	1.39837	0.781108	3.3967	2.40425	0.816026	2.073
5	569.418	2.36953	1.39864	0.779428	3.38991	2.40567	0.809205	2.488
6	569.489	2.37102	1.39862	0.779979	3.39048	2.40538	0.810346	2.985
7	569.489	2.37066	1.39861	0.779769	3.39037	2.40542	0.810189	3.583

Используя соотношения (1), получим функциональные зависимости для компонентов тензора

$$\lambda_{11}(T) = 0.1953125 \cdot 10^{-5}T^2 - 0.15625 \cdot 10^{-2}T + 2.734375,$$

$$\lambda_{22}(T) = -0.3515625 \cdot 10^{-5}T^2 + .78125 \cdot 10^{-2}T - 1.921875,$$

$$\lambda_{12}(T) = 0, 4736076428 \cdot 10^{-5}T^2 - 0, 8118988162 \cdot 10^{-2}T + 4.032430788.$$

Для решения прямой задачи с граничными условиями $T|_{\Gamma} = T_{\max} = 1400 \text{ К}$, $T(x, y, 0) = T_{\min} = 600 \text{ К}$ принимались входные данные $c\rho = 2.25 \cdot 10^6 \text{ Дж}/(\text{м}^3 \cdot \text{К})$, $l_1 = 0.1 \text{ м}$, $l_2 = 0.06 \text{ м}$. Экспериментальные значения температур вычислялись по этим данным при решении задачи (1)–(4) в точках $x_i = \{0.01; 0.05; 0.09\}$, $y_j = \{0.004; 0.012; 0.02\}$ в моменты времени $t^k = 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100 \text{ с}$.

Температурный интервал разбивался на три элемента ($M = 4$): $T_m = \{600; 900; 1100; 1400\}$, $m = \overline{1, 4}$. Таким образом, определялись 12 искомым параметров: $\lambda_{11}^m, \lambda_{22}^m, \lambda_{12}^m$, $m = \overline{1, 4}$. В таблице приведены итерационные процессы по восстановлению коэффициентов $\lambda_{11}^1, \lambda_{22}^1, \lambda_{12}^1, \lambda_{11}^3, \lambda_{22}^3, \lambda_{12}^3$ без погрешностей в экспериментальных данных $\tilde{T}_{i,k}$ и с добавленной абсолютной погрешностью в интервале $|\Delta\tilde{T}_{i,k}| \leq 5$ с равномерным распределением. Видно, что в обоих случаях функционал стремится к стационарному значению. Начальные величины искомым параметров значительно (в 2–3 раза) отличаются от искомым, и тем не менее итерационный процесс сходится с приемлемой скоростью (за шесть — семь итераций), причём параметры на нулевой итерации выбраны из предположения, что материал исследуемой пластины является изотропным с теплопроводностью $\lambda = 2 \text{ Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})$.

На рис. 2 приведены графики нелинейных коэффициентов тензора теплопроводности, восстановленные по экспериментальным значениям без погрешности (кривая 2),

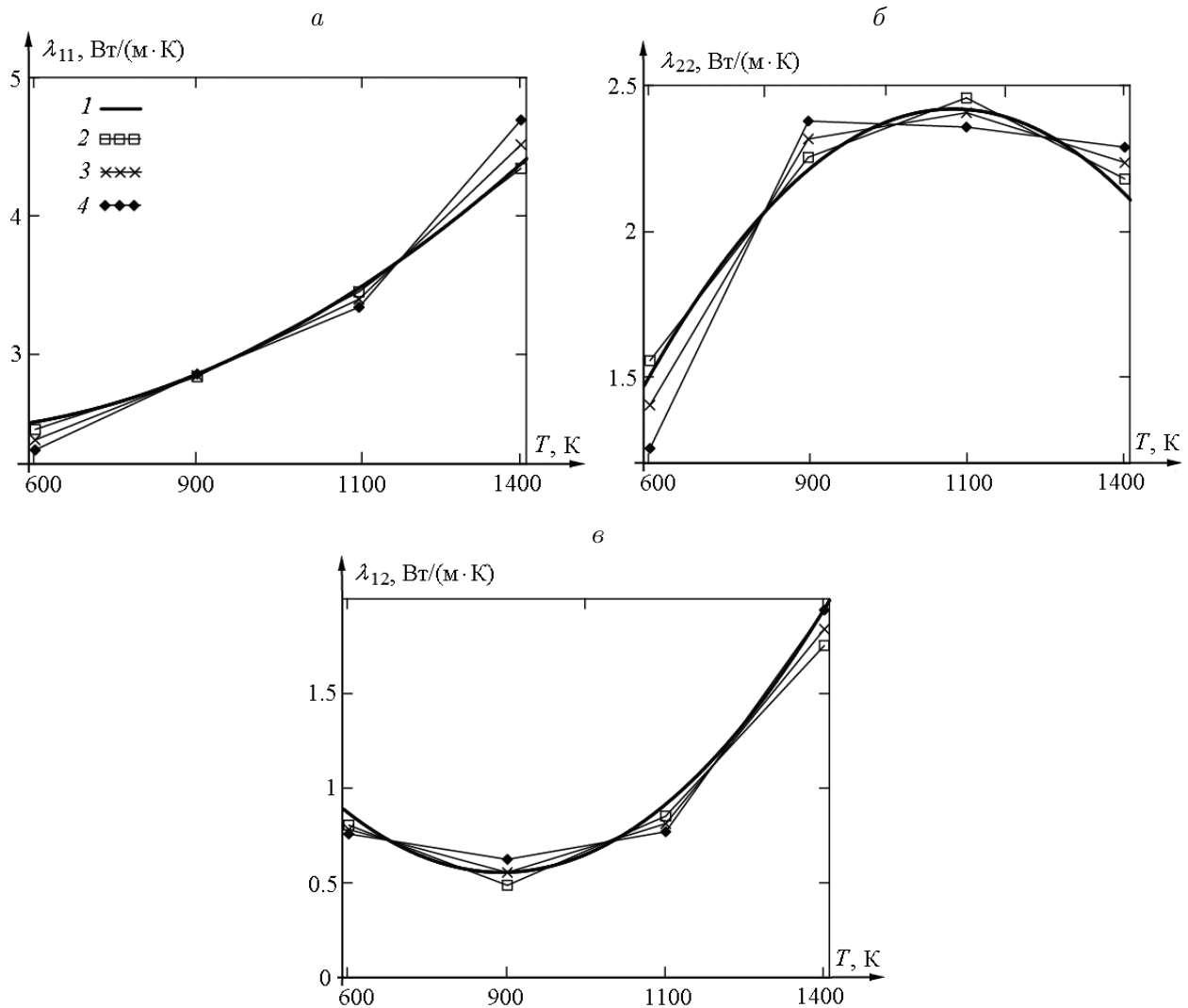


Рис. 2. Восстановленные компоненты $\lambda_{11}(T)$ (а), $\lambda_{22}(T)$ (б), $\lambda_{12}(T)$ (в) тензора теплопроводности при наличии погрешностей в определении экспериментальных значений $\tilde{T}_{i,k}$

с учётом погрешностей в экспериментальных значениях температур $\tilde{T}_{i,k}$ (кривая 3 — $\Delta\tilde{T}_{i,k} \in [-5\text{ K}; 5\text{ K}]$, кривая 4 — $\Delta\tilde{T}_{i,k} \in [-10\text{ K}; 10\text{ K}]$) и нелинейных коэффициентов, заложенных в экспериментальные значения $\tilde{T}_{i,j}^k$ (кривая 1). Из рисунков видно, что несмотря на добавленную погрешность в экспериментальные данные восстановленные компоненты тензора теплопроводности достаточно точно аппроксимируют кривые, соответствующие нелинейным коэффициентам, заложенным в экспериментальные значения $\tilde{T}_{i,j}^k$.

Выводы

В работе предложен универсальный алгоритм численного решения обратной коэффициентной задачи теплопереноса в композиционных анизотропных материалах, не зависящий от природы и величин входных данных, которые могут быть изменены в соответствии с физическим экспериментом. Методология основана на методе параметрической

идентификации, неявном методе градиентного спуска и на новом экономичном абсолютно устойчивом методе переменных направлений с экстраполяцией численного решения задач теплопереноса, содержащих смешанные производные.

Впервые получены результаты численных экспериментов по восстановлению компонентов тензора теплопроводности углерод-углеродных композиционных теплозащитных материалов, зависящих от температуры. Показана быстрая сходимость итерационного процесса к точным значениям нелинейных компонентов тензора теплопроводности, заложенным в экспериментальные значения температур, включая случаи наличия в них погрешностей.

Список литературы

- [1] Алифанов О.М. Идентификация процессов теплообмена летательных аппаратов (введение в теорию обратных задач теплообмена). М.: Машиностроение, 1979. 216 с.
- [2] Бек Дж., Блакуэлл Б., Сент-Клэр Ч., мл. Некорректные обратные задачи теплопроводности: Пер. с англ. М.: Мир, 1989. 312 с.
- [3] Самарский А.А., Вабищевич П.Н. Численные методы решения обратных задач математической физики. М.: Изд-во ЛКИ, 2009. 480 с.
- [4] Кузнецова Е.Л. Восстановление характеристик тензора теплопроводности на основе аналитического решения задачи теплопереноса в анизотропном полупространстве // Теплофизика высоких температур. 2011. Т. 49, № 6. С. 1–8.
- [5] Формалёв В.Ф. Тепломассоперенос в анизотропных телах. Обзор // Там же. 2001. Т. 39, № 5. С. 810–832.
- [6] Криксин Ю., Плющев С.Н., Самарская Е.А., Тишкин В.Ф. Обратная задача восстановления источника для уравнения конвективной диффузии // Математическое моделирование. 1995. Т. 7, № 11. С. 95–108.
- [7] Формалёв В.Ф., Ревизников Д.Л. Численные методы. М.: Физматлит, 2004. 400 с.
- [8] Формалёв В.Ф., Колесник С.А., Чипашвилли А.А. Численное моделирование теплопереноса в анизотропных телах с разрывными характеристиками // Там же. 2004. Т. 16, № 5. С. 94–102.
- [9] Тихонов А.Н., Леонов А.С., Ягола А.Г. Нелинейные некорректные задачи. М.: Наука, 1995.

*Поступила в редакцию 14 августа 2012 г.,
с доработки — 28 декабря 2012 г.*