

## Стабилизационный численный метод решения задачи типа Озеена с особенностью

А. В. РУКАВИШНИКОВ

Хабаровское отделение Института прикладной математики ДВО РАН, Россия

Контактный e-mail: 78321a@mail.ru

На основе метода декомпозиции области построен стабилизационный неконформный метод конечных элементов для решения задачи типа Озеена. Для конвективно доминирующих течений с разрывным коэффициентом вязкости определена шкала оптимального выбора стабилизирующего параметра. Результаты численных экспериментов согласуются с теоретической оценкой сходимости.

*Ключевые слова:* метод декомпозиции области, задача типа Озеена, стабилизационный метод конечных элементов, разрывные коэффициенты.

### Введение

На основе метода декомпозиции области рассмотрена задача типа Озеена с особенностью, полученная в результате дискретизации по времени и линеаризации течения вязкой жидкости в формулировке несжимаемых уравнений Навье — Стокса. Особенность задачи вызвана разрывностью коэффициентов, которые кусочно-постоянны, и наличием криволинейного (незамкнутого, без самопересечений) интерфейса  $\Gamma$  между подобластями, концы которого принадлежат границе исходной области  $\Omega$ . Вариационную постановку задачи определяем отдельно в подобластях  $\Omega_i$ , а согласование решения на  $\Gamma$  проводим с помощью условий слабой непрерывности. Поскольку граница между  $\Omega_i$  представляет собой кривую, разбиение  $\Omega_{ih}$  каждой  $\Omega_i$  на конечные элементы производим так, чтобы  $\Gamma$  была проинтерполирована кусочно-линейным образом. Приближенное обобщенное решение задачи определяем независимо на  $\Omega_{ih}$  в сочетании с мортарными его склейками на  $\Gamma$ .

Метод декомпозиции области в сочетании с мортарными склейками решения на общей границе может быть весьма эффективным в процессе решения дифференциальных задач (см, например, [1]). Метод мортарных элементов впервые представлен в [2] для решения уравнения Пуассона. Оценки скорости сходимости для задач эллиптического типа с прямолинейной и криволинейной общей границей представлены в [1–5]. Для задач седлового типа различными способами был изучен [6, 7] и численно реализован [8] случай прямолинейного интерфейса между подобластями, а в [9, 10] получены теоретические оценки скорости сходимости приближенного решения задачи к точному в различных нормах сеточных пространств для случая гладкого криволинейного интерфейса.

В настоящей статье на основании построенного итерационного алгоритма с предобуславливанием матрицы системы проведена серия численных экспериментов для модельных задач. Особое внимание уделено конвективно доминирующим течениям, т. е. случаю малого (разрывного) коэффициента вязкости. Для этого в приближенную вариационную постановку задачи внесена необходимая стабилизирующая добавка.

Результаты численных экспериментов модельных задач показали следующее:

1) погрешность решения вектор-функции и давления в нормах сеточных пространств убывает пропорционально первой степени  $h$ , т. е. является величиной порядка  $\mathcal{O}(h)$ , что согласуется с теоретической оценкой работы [9];

2) предложенный метод эффективен для различных (в том числе и малых) разрывных коэффициентов вязкости;

3) использование стабилизирующей добавки в (7) с параметром  $\epsilon_K = \mathcal{O}(1)$  всегда дает преимущество перед случаем  $\epsilon_K = 0$  для конвективно доминирующих течений.

Работа состоит из пяти разделов. В разд. 1 представлена классическая постановка задачи типа Озеена, основанная на методе декомпозиции области. В разд. 2 введены необходимые пространства обобщенных функций и определена вариационная постановка задачи. Схема стабилизационного неконформного метода конечных элементов представлена в разд. 3. Следующий раздел посвящен построению итерационного метода решения полученной системы линейных алгебраических уравнений с различными предобуславливателями матрицы системы. В разд. 5 приведены результаты численных экспериментов модельных задач. Определена шкала оптимального выбора множителя стабилизирующей добавки.

## 1. Постановка задачи

Пусть  $\Omega \subset \mathbf{R}^2 = \{\bar{\mathbf{x}} : \bar{\mathbf{x}} = (x_1, x_2)\}$  — выпуклая многоугольная область с границей  $\partial\Omega$  ( $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$ ), представляющая собой объединение односвязных подобластей  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  таких, что  $\bar{\Omega}_1 \cup \bar{\Omega}_2 = \bar{\Omega}$ ,  $\bar{\Omega}_1 \cap \bar{\Omega}_2 = \bar{\Gamma}$ , где  $\Gamma$  — достаточно гладкая (незамкнутая, без самопересечений) кривая, концы которой принадлежат  $\partial\Omega$ .

Через  $z_k$  обозначим функцию, совпадающую в  $\Omega_k$  с определенной в  $\Omega$  функцией  $z$  ( $z_k = z|_{\Omega_k}$ ),  $k = 1, 2$ , тогда  $[z]$  — скачок функции  $z$  на  $\Gamma$ :  $[z] = z_1|_{\Gamma \cap \bar{\Omega}_1} - z_2|_{\Gamma \cap \bar{\Omega}_2}$ , где  $z_1|_{\Gamma \cap \bar{\Omega}_1}$  и  $z_2|_{\Gamma \cap \bar{\Omega}_2}$  — соответствующие следы функций  $z_1$  и  $z_2$  на  $\Gamma$ . Аналогично вводятся обозначения и определения для вектор-функций.

Задача типа Озеена состоит в том, чтобы найти вектор скоростей  $\mathbf{u} = (u^1, u^2)$  и скалярную функцию давления  $P$ , удовлетворяющие следующей системе уравнений, граничным условиям и условиям на  $\Gamma$ :

$$\alpha \varrho \mathbf{u}_k - \operatorname{div} \sigma(\mathbf{u}_k, P_k) + \varrho (g_k \times \mathbf{u}_k) = \mathbf{F}_k, \quad \operatorname{div} \mathbf{u}_k = 0 \quad \text{в } \Omega_k, \quad (1)$$

$$\mathbf{u}_k = \mathbf{0} \quad \text{на } \partial\Omega \cap \partial\Omega_k, \quad (2)$$

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2, \quad \sigma(\mathbf{u}_1, P_1) \cdot \mathbf{n}_1 = \sigma(\mathbf{u}_2, P_2) \cdot \mathbf{n}_1 + \mathbf{G} \quad \text{на } \Gamma, \quad (3)$$

где  $\mathbf{F}_k = (F_k^1, F_k^2)$ ,  $g_k$  — заданные функции в  $\Omega_k$  и  $\mathbf{G}$  — на  $\Gamma$ , используемая для описания эффекта поверхностного натяжения;  $\mathbf{n}_k$  — внешняя нормаль к  $\Gamma$  относительно  $\Omega_k$  и  $(\mathbf{n}_k)^j$  — ее  $j$ -я компонента. Положительные коэффициенты вязкости  $\mu$  и плотности  $\varrho$  в (1) кусочно-постоянны:

$$\mu = \begin{cases} \mu_1, & \bar{\mathbf{x}} \in \Omega_1, \\ \mu_2, & \bar{\mathbf{x}} \in \Omega_2, \end{cases} \quad \varrho = \begin{cases} \varrho_1, & \bar{\mathbf{x}} \in \Omega_1, \\ \varrho_2, & \bar{\mathbf{x}} \in \Omega_2, \end{cases} \quad g_k \times \mathbf{u}_k = \begin{pmatrix} -g_k u_k^2 \\ g_k u_k^1 \end{pmatrix}, \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

Тензор напряжений

$$\sigma(\mathbf{u}_k, P_k) = \{\sigma_{ij}(\mathbf{u}_k, P_k)\}_{i,j=1,2} = \{2\mu_k \varepsilon_{ij}(\mathbf{u}_k) - \delta_{ij} P_k\}_{i,j=1,2},$$

тензор деформаций

$$\varepsilon(\mathbf{u}_k) = \{\varepsilon_{ij}(\mathbf{u}_k)\}_{i,j=1,2} = \left\{ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_k^j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_k^i}{\partial x_j} \right) \right\}_{i,j=1,2},$$

$\alpha$  — положительное число.

## 2. Определение обобщенного решения задачи

Для того чтобы определить обобщенное решение задачи (1)–(3), нам понадобится ввести необходимые функциональные пространства:

$$\mathbf{H}_*^m(\Omega) = \{\mathbf{v} : v^l \in H_*^m(\Omega)\}, \quad \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{m},\Omega}^* = \left( \sum_{l=1}^2 (\|v^l\|_{m,\Omega}^*)^2 \right)^{1/2} = \left( \sum_{k=1}^2 \|\mathbf{v}_k\|_{\mathbf{m},\Omega_k}^2 \right)^{1/2},$$

$$H_{00}^{1/2}(\Gamma) = \{\rho \in H^{1/2}(\Gamma) : \bar{\rho} \in H^{1/2}(\partial\Omega_k)\}, \quad \bar{\rho} = \begin{cases} \rho, & \text{на } \Gamma, \\ 0, & \text{на } \partial\Omega_k \setminus \Gamma, \end{cases}$$

$$\|\rho\|_{H_{00}^{1/2}(\Gamma)} = \inf_{\substack{z \in H^1(\Omega_k), \\ z|_{\Gamma} = \rho, \\ z|_{\partial\Omega_k \setminus \Gamma} = 0}} \|z\|_{1,\Omega_k},$$

$$\mathbf{H}_{00}^{1/2}(\Gamma) = \{\boldsymbol{\rho} = (\rho^1, \rho^2) : \rho^l \in H_{00}^{1/2}(\Gamma)\}, \quad \|\boldsymbol{\rho}\|_{\mathbf{H}_{00}^{1/2}(\Gamma)} = \left( \sum_{l=1}^2 \|\rho^l\|_{H_{00}^{1/2}(\Gamma)}^2 \right)^{1/2},$$

$$\mathbf{V}(\Omega) = \{\mathbf{v} \in \mathbf{H}_*^1(\Omega) : [\mathbf{v}] \in \mathbf{H}_{00}^{1/2}(\Gamma), \mathbf{v} = 0 \text{ на } \partial\Omega\},$$

$$\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{V}(\Omega)} = \left( \sum_{k=1}^2 \|\mathbf{v}_k\|_{1,\Omega_k}^2 + \|[\mathbf{v}]\|_{\mathbf{H}_{00}^{1/2}(\Gamma)}^2 \right)^{1/2},$$

$M(\Gamma)$  — сопряженное пространство к  $\mathbf{H}_{00}^{1/2}(\Gamma)$ ,

$$\|\boldsymbol{\nu}\|_{M(\Gamma)} = \sup_{\boldsymbol{\mu} \in \mathbf{H}_{00}^{1/2}(\Gamma)} \frac{\int_{\Gamma} \boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\mu} d\Gamma}{\|\boldsymbol{\mu}\|_{\mathbf{H}_{00}^{1/2}(\Gamma)}}, \quad \mathbf{Y}(\Omega) = \left\{ \mathbf{v} \in \mathbf{V}(\Omega) : \int_{\Gamma} \chi[\mathbf{v}] \cdot \boldsymbol{\nu} d\Gamma = 0 \quad \forall \boldsymbol{\nu} \in M(\Gamma) \right\}$$

с нормой  $\mathbf{V}(\Omega)$ . Здесь  $(\chi \in C^1(\Gamma))$  — весовая функция,  $\chi = \frac{1}{\det(\gamma' \circ \gamma^{-1})}$ , где  $\gamma$  — параметризация  $\Gamma$  такая, что  $\gamma \in C^2(\hat{I}, \mathbf{R}^2)$ ,  $|\gamma(y_1) - \gamma(y_2)| \succeq |y_1 - y_2| \quad \forall y_1, y_2 \in \hat{I} = [0, 1]$ ;

$X(\Omega) = \{q : q_k = q|_{\Omega_k} \in L_2(\Omega_k)\}$  с нормой  $\|q\|_{X(\Omega)} = \left( \sum_{k=1}^2 \|q_k\|_{0,\Omega_k}^2 \right)^{1/2}$ .

Здесь и в дальнейшем используем обозначение  $A \succeq B$  ( $A \preceq B$ ), если существует постоянная  $C > 0$ , такая что  $A \geq CB$  ( $A \leq CB$ ), и  $A \cong B$ , если одновременно  $A \succeq B$  и  $A \preceq B$ . Пусть  $F_k^j \in L_2(\Omega_k)$  и  $g_k \in L_2(\Omega_k)$  являются липшиц-непрерывными функциями,  $j, k = 1, 2$ , и  $\mathbf{G} \in M(\Gamma)$ .

Определим обобщенное решение задачи (1)–(3) как решение вариационной задачи: найти тройку  $(\mathbf{u}, P, \boldsymbol{\lambda}) \in \mathbf{V}(\Omega) \times X(\Omega) \times M(\Gamma)$  такую, что для любых  $(\boldsymbol{\varphi}, q, \boldsymbol{\nu}) \in \mathbf{V}(\Omega) \times X(\Omega) \times M(\Gamma)$  выполнены равенства

$$a(\mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi}) + b(\boldsymbol{\varphi}, P) + d(\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\lambda}) = l(\boldsymbol{\varphi}), \quad b(\mathbf{u}, q) = 0, \quad d(\mathbf{u}, \boldsymbol{\nu}) = 0, \quad (4)$$

$$l(\boldsymbol{\varphi}) = \sum_{k=1}^2 l_k(\boldsymbol{\varphi}), \quad l_1(\boldsymbol{\varphi}) = \int_{\Omega_1} \mathbf{F}_1 \cdot \boldsymbol{\varphi}_1 d\bar{\mathbf{x}} + \int_{\Gamma} \mathbf{G} \cdot \boldsymbol{\varphi}_1|_{\Gamma \cap \bar{\Omega}_1} d\Gamma, \quad l_2(\boldsymbol{\varphi}) = \int_{\Omega_2} \mathbf{F}_2 \cdot \boldsymbol{\varphi}_2 d\bar{\mathbf{x}},$$

$$b(\boldsymbol{\varphi}, P) = \sum_{k=1}^2 b_k(\boldsymbol{\varphi}, P), \quad b_k(\boldsymbol{\varphi}, P) = - \int_{\Omega_k} \operatorname{div} \boldsymbol{\varphi}_k P_k d\bar{\mathbf{x}}, \quad a(\mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi}) = \sum_{k=1}^2 a_k(\mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi}),$$

$$a_k(\mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi}) = \int_{\Omega_k} (\alpha \varrho_k \mathbf{u}_k \cdot \boldsymbol{\varphi}_k + 2 \mu_k \varepsilon(\mathbf{u}_k) : \varepsilon(\boldsymbol{\varphi}_k) - \varrho_k (\mathbf{u}_k \cdot (g_k \times \boldsymbol{\varphi}_k))) d\bar{\mathbf{x}},$$

$$d(\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\lambda}) = \sum_{k=1}^2 d_k(\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\lambda}), \quad d_k(\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\lambda}) = \int_{\Gamma} (-1)^{k+1} \chi \boldsymbol{\lambda} \cdot \boldsymbol{\varphi}_k|_{\Gamma \cap \bar{\Omega}_k} d\Gamma.$$

Для согласования решения на  $\Gamma$  в (4) использованы условия

$$\int_{\Gamma} \chi (u_1 - u_2)^i \nu^i d\Gamma = 0 \quad \forall \boldsymbol{\nu} \in M(\Gamma),$$

$$\int_{\Gamma} (\sigma_{ij}(\mathbf{u}_1, P_1)(n_1)^j - G^i + \sigma_{ij}(\mathbf{u}_2, P_2)(n_2)^j) \nu^i d\Gamma = 0 \quad \forall \boldsymbol{\nu} \in \mathbf{H}_{00}^{1/2}(\Gamma), \quad (5)$$

где  $(n_2)^j = -(n_1)^j$  и  $(n_k)^j$  —  $j$ -я компонента внешней нормали  $\mathbf{n}_k$  к  $\Gamma$  относительно  $\Omega_k$ ,  $k = 1, 2$ .

Для замыкания с помощью (5) полученных в  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  уравнений в (4) введена вспомогательная вектор-функция  $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda^1, \lambda^2)$  такая, что

$$\int_{\Gamma} \lambda^i w^i d\Gamma = \int_{\Gamma} \frac{1}{\chi} (\sigma_{ij}(\mathbf{u}_2, P_2)(n_2)^j) w^i d\Gamma, \quad \mathbf{w} \in \mathbf{H}_{00}^{1/2}(\Gamma). \quad (6)$$

### 3. Схема метода конечных элементов

Выполним триангуляцию  $\Upsilon_h$  области  $\Omega$ . Для каждой  $\Omega_j$  имеем квазиравномерное [12] разбиение  $\Omega_{jh}$  на треугольники со сторонами порядка  $h_j$ , которые обозначим через  $K$  и назовем конечными элементами. Их совокупность обозначим через  $\Upsilon_h^{(j)}$ . Разбиение  $\Omega_{jh} = \bigcup_{K \in \Upsilon_h^{(j)}} K$  аппроксимирует подобласть  $\Omega_j$  так, что  $\partial\Omega_{jh}$  является кусочно-линейной интерполяцией  $\partial\Omega_j$ . При этом концы  $\Gamma$  — узлы интерполяции.

Таким образом, для  $\Gamma$  построены две кусочно-линейные интерполяции —  $\Gamma_{1h}$  и  $\Gamma_{2h}$ , которые являются частями  $\partial\Omega_{1h}$  и  $\partial\Omega_{2h}$  соответственно. Так как  $\Gamma_{jh}$  кусочно-линейны, параметризуем их с помощью непрерывных кусочно-линейных функций  $\gamma_h^j : \hat{I} \rightarrow \mathbf{R}^2$ ,  $\hat{I} = [a, b]$  и при этом  $\gamma_h^1(a) = \gamma_h^2(a)$ ,  $\gamma_h^1(b) = \gamma_h^2(b)$ . В качестве узлов аппроксимации для компонент вектора скоростей выберем вершины и середины сторон  $K$ , а в качестве узлов аппроксимации для функции давления — вершины элемента  $K$ . Множества вершин и середин сторон на  $K$ , принадлежащих  $\Gamma_{1h}$ , обозначим через  $\mathcal{N}$  и  $\mathcal{L}$  соответственно. Определим множества

$$\hat{\mathcal{N}} = \{y \in \hat{I} : \gamma_h^1(y) = r, r \in \mathcal{N} \text{ на } \Gamma_h \equiv \Gamma_{1h}\},$$

$$\hat{\mathcal{L}} = \{y \in \hat{I} : \gamma_h^1(y) = r, r \in \mathcal{L} \text{ на } \Gamma_h\}.$$

Поскольку  $\Upsilon_h^{(1)}$  — регулярная по построению, а параметризация  $\gamma$  кривой  $\Gamma$  удовлетворяет свойству инъективности, узлы  $\hat{\mathcal{N}}$  образуют регулярную сетку на  $\hat{I}$ . Обозначим через  $\Omega_h$  разбиение

$$\Omega : \Omega_h = \Omega_{1h} \cup \Omega_{2h} = \left( \bigcup_{K \in \Upsilon_h^{(1)}} K \right) \cup \left( \bigcup_{K \in \Upsilon_h^{(2)}} K \right) = \bigcup_{K \in \Upsilon_h} K.$$

При этом параметр  $h$  таков, что  $h \cong h_1 \cong h_2$ .

Далее, в качестве конечно-элементной пары на  $\Omega_{jh}$  возьмем пару Тейлор — Худ первого порядка [11]. Обозначим через  $V_h^{(j)}(\Omega_{jh})$  пространство для компонент вектор-функции скорости и  $X_h^{(j)}(\Omega_{jh})$  — для скалярной функции давления.

Обозначим через  $\hat{M}_h$  пространство лагранжевых множителей на  $\hat{I}$ , построенное на сетке с узлами из  $\hat{\mathcal{N}}$ , такое, что для любой  $\hat{\omega}_h \in \hat{M}_h$  выполнены условия:  $\hat{\omega}_h$  — непрерывная функция пространства  $L_2$ ;  $\hat{\omega}_h$  квадратична на каждом внутреннем и линейна на концевых отрезках разбиения  $\hat{I}$  (вспомогательный узел на внутреннем элементе разбиения  $\hat{I}$  совпадает с узлом из  $\hat{\mathcal{L}}$ ).

Таким образом, на  $\Gamma_h$  определим пространство  $M_h$ :  $M_h = \hat{M}_h \circ \gamma^{-1}$ . Сеточное решение  $\lambda_{jh}^m \in M_h$ ,  $m, j = 1, 2$ , ищем естественным образом — в виде линейной комбинации произведений коэффициентов на базисные функции  $M_h$ . Как и в [13], полагаем  $\lambda_{1h}^m = \lambda_{2h}^m = -\lambda_{2h}^m$ , где  $\lambda_h = (\lambda_h^1, \lambda_h^2)$  — сеточный аналог функции  $\lambda$ , определенной в (6).

Определим конечно-элементные пространства с нормами на  $\Omega_h$  и  $\Gamma_h$ :

$$\mathbf{V}_h(\Omega_h) = \{\mathbf{v}_h : v_{jh}^m \in V_h^{(j)}(\Omega_{jh})\}, \quad \|\mathbf{v}_h\|_{\mathbf{v}_h} = \left( \|\mathbf{v}_h\|_{1, \Omega_h}^2 + \|[v_h]_h\|_{\frac{1}{2}, h, \Gamma}^2 \right)^{1/2},$$

где

$$\|\mathbf{v}_h\|_{1, \Omega_h} = \left( \sum_{m, j=1}^2 \sum_{K \in \Upsilon_h^{(j)}} \|v_{jh}^m|_K\|_{1, K}^2 \right)^{1/2}, \quad \|[v_h]_h\|_{\frac{1}{2}, h, \Gamma} = h^{-\frac{1}{2}} \left( \sum_{m=1}^2 \|[v_h^m]_h\|_{0, \Gamma}^2 \right)^{1/2},$$

$[v_h^m]_h$  — дискретный скачок функции  $v_h^m$  на  $\Gamma$ :

$$[v_h^m]_h = v_{1h}^m|_{\Gamma} - v_{2h}^m|_{\Gamma}, \quad v_{ih}^m|_{\Gamma} = v_{ih}^m \circ \gamma_h^i \circ \gamma^{-1}, \quad i, m = 1, 2,$$

$$X_h(\Omega_h) = \{q_h : q_{jh} \in X_h^{(j)}(\Omega_{jh})\}, \quad \|q_h\|_{X_h} = \left( \sum_{j=1}^2 \sum_{K \in \Upsilon_h^{(j)}} \|q_{jh}|_K\|_{0,K}^2 \right)^{1/2},$$

$$M_h(\Gamma_h) = \{\boldsymbol{\nu}_h : \nu_h^m \in M_h(\Gamma_h), m = 1, 2\}, \quad \|\boldsymbol{\nu}_h\|_{-\frac{1}{2},h,\Gamma} = h^{1/2} \|\boldsymbol{\nu}_h\|_{0,\Gamma},$$

$$\mathbf{Y}_h(\Omega_h) = \left\{ \boldsymbol{\omega}_h \in \mathbf{V}_h : \int_{\Gamma} \chi[\boldsymbol{\omega}_h]_h \cdot \boldsymbol{\nu}_h d\Gamma = 0 \quad \forall \boldsymbol{\nu}_h \in M_h \right\}$$

с нормой  $\mathbf{V}_h(\Omega_h)$ .

Приближенным решением задачи (1)–(3) по методу конечных элементов будем называть тройку  $(\mathbf{u}_h, P_h, \boldsymbol{\lambda}_h) \in \mathbf{V}_h \times X_h \times M_h$ , удовлетворяющую для любых  $(\boldsymbol{\varphi}_h, q_h, \boldsymbol{\nu}_h) \in \mathbf{V}_h \times X_h \times M_h$  системе уравнений

$$\begin{aligned} \tilde{a}_h(\mathbf{u}_h, \boldsymbol{\varphi}_h) + b_h(\boldsymbol{\varphi}_h, P_h) + d_h(\boldsymbol{\varphi}_h, \boldsymbol{\lambda}_h) &= l_h(\boldsymbol{\varphi}_h), \\ b_h(\mathbf{u}_h, q_h) &= 0, \quad d_h(\mathbf{u}_h, \boldsymbol{\nu}_h) = 0, \end{aligned} \quad (7)$$

$$l_h(\boldsymbol{\varphi}_h) = \sum_{i=1}^2 l_{ih}(\boldsymbol{\varphi}_h), \quad l_{1h}(\boldsymbol{\varphi}_h) = \int_{\Omega_{1h}} \bar{\mathbf{F}}_1 \cdot \boldsymbol{\varphi}_{1h} d\bar{\mathbf{x}} + \int_{\Gamma} \mathbf{G} \cdot \boldsymbol{\varphi}_{1h}|_{\Gamma} d\Gamma, \quad l_{2h}(\boldsymbol{\varphi}_h) = \int_{\Omega_{2h}} \bar{\mathbf{F}}_2 \cdot \boldsymbol{\varphi}_{2h} d\bar{\mathbf{x}},$$

$$\tilde{a}_h(\mathbf{u}_h, \boldsymbol{\varphi}_h) = a_h(\mathbf{u}_h, \boldsymbol{\varphi}_h) + \sum_{i=1}^2 \sum_{K \in \Upsilon_h^{(i)}} \int_K \epsilon_K \operatorname{div} \mathbf{u}_{ih} \operatorname{div} \boldsymbol{\varphi}_{ih} dK, \quad a_h(\mathbf{u}_h, \boldsymbol{\varphi}_h) = \sum_{i=1}^2 a_{ih}(\mathbf{u}_h, \boldsymbol{\varphi}_h),$$

$$a_{ih}(\mathbf{u}_h, \boldsymbol{\varphi}_h) = \sum_{K \in \Upsilon_h^{(i)}} \int_K \left( \alpha \varrho_i \mathbf{u}_{ih} \cdot \boldsymbol{\varphi}_{ih} + 2\mu_i \varepsilon(\mathbf{u}_{ih}) : \varepsilon(\boldsymbol{\varphi}_{ih}) - \varrho_i (\mathbf{u}_{ih} \cdot (\bar{\mathbf{g}}_i \times \boldsymbol{\varphi}_{ih})) \right) dK,$$

$$b_h(\mathbf{u}_h, q_h) = \sum_{i=1}^2 b_{ih}(\mathbf{u}_h, q_h), \quad b_{ih}(\mathbf{u}_h, q_h) = - \sum_{K \in \Upsilon_h^{(i)}} \int_K q_{ih} \operatorname{div} \mathbf{u}_{ih} dK,$$

$$d_h(\mathbf{u}_h, \boldsymbol{\nu}_h) = \sum_{i=1}^2 d_{ih}(\mathbf{u}_h, \boldsymbol{\nu}_h) = \int_{\Gamma} \chi[\mathbf{u}_h]_h \cdot \boldsymbol{\nu}_h d\Gamma.$$

Здесь  $\bar{\mathbf{g}}_i$  и  $\bar{\mathbf{F}}_i = (\bar{F}_i^1, \bar{F}_i^2)$  — липшиц-непрерывные функции на  $\Omega_i \cup \Omega_{ih}$  такие, что  $\bar{\mathbf{g}}_i = \mathbf{g}_i$ ,  $\bar{\mathbf{F}}_i = \mathbf{F}_i$  в  $\Omega_i \cap \Omega_{ih}$  и

$$\|\bar{\mathbf{g}}_i\|_{W_{\infty}^1(\Omega_i \cup \Omega_{ih})} \leq C_{g_i}, \quad \|\bar{F}_i^j\|_{W_{\infty}^1(\Omega_i \cup \Omega_{ih})} \leq C_{F_i^j}.$$

**Комментарий 1.** Внесенная в билинейную форму  $\tilde{a}_h(\cdot, \cdot)$  стабилизационная добавка

$$\sum_{i=1}^2 \sum_{K \in \Upsilon_h^{(i)}} \int_K \epsilon_K \operatorname{div} \mathbf{u}_{ih} \operatorname{div} \boldsymbol{\varphi}_{ih} dK,$$

модифицирующая исходную билинейную форму  $a_h(\cdot, \cdot)$  работ [9, 10], является полезной и необходимой даже в случае выполнения inf-sup-условия устойчивости конечно-элементной пары [14].

**Комментарий 2.** В разд. 5 (пример 3) проведем серию экспериментов для интерфейсной задачи (1)–(3) с разрывными множителями и определим шкалу оптимального выбора множителя  $\epsilon_K$  стабилизирующей добавки в (7). Численные эксперименты покажут, что внесенная добавка незаменима в случае конвективно доминирующих течений жидкости с переменными вязкостью и плотностью.

Известно (см., например, [15]), что любую функцию  $z_i \in H^k(\Omega_i)$  можно продолжить на  $\mathbf{R}^2$  с сохранением класса  $H^k$ , т. е. существует оператор

$$E_i^k : H^k(\Omega_i) \rightarrow H^k(\mathbf{R}^2), \quad E_i^k z_i = z_i \text{ в } \Omega_i, \quad \|E_i^k z_i\|_{k, \mathbf{R}^2} \leq \|z_i\|_{k, \Omega_i}. \quad (8)$$

Пусть задана  $z \in H_*^k(\Omega)$ . Будем говорить, что  $E^k$  действует на  $z$ , и записывать как  $E^k z$ , если на каждое сужение  $z_i = z|_{\Omega_i} \in H^k(\Omega_i)$  действует оператор  $E_i^k$  так, как определено в (8). Если  $q \in H_*^1(\Omega)$  и  $q_h \in X_h$ , то

$$\|E^1 q - q_h\|_{X_h}^2 := \sum_{i=1}^2 \|E_i^1 q_i - q_{ih}\|_{0, \Omega_{ih}}^2,$$

а если  $\mathbf{w} \in \mathbf{H}_*^2(\Omega)$  и  $\mathbf{w}_h \in \mathbf{V}_h$ , то

$$\|\mathbf{E}^2 \mathbf{w} - \mathbf{w}_h\|_{\mathbf{V}_h}^2 := \sum_{i=1}^2 \|\mathbf{E}_i^2 \mathbf{w}_i - \mathbf{w}_{ih}\|_{1, \Omega_{ih}}^2 + \|[\mathbf{E}^2 \mathbf{w} - \mathbf{w}_h]_h\|_{\frac{1}{2}, h, \Gamma}^2.$$

Кроме того, билинейные формы  $\tilde{a}_h(\cdot, \cdot)$  и  $a_h(\cdot, \cdot)$  таковы, что

$$\tilde{a}_h(\mathbf{w}_h, \mathbf{v}_h) \cong a_h(\mathbf{w}_h, \mathbf{v}_h) \quad \forall \mathbf{w}_h, \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h,$$

тогда, в точности повторяя рассуждения работы [9], доказываем следующую теорему.

**Теорема.** Пусть компоненты  $\mathbf{u}$ ,  $P$  решения задачи (1)–(3) удовлетворяют системе (4) и  $\mathbf{u} \in \mathbf{Y}(\Omega) \cap \mathbf{H}_*^2(\Omega)$ ,  $P \in X(\Omega) \cap H_*^1(\Omega)$ . Пусть компоненты  $\mathbf{u}_h, P_h$  приближенного решения удовлетворяют системе (7) и  $\mathbf{u}_h \in \mathbf{Y}_h, P_h \in X_h$ . Тогда имеет место оценка

$$\|\mathbf{E}^2 \mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{\mathbf{V}_h} + \|E^1 P - P_h\|_{X_h} \leq h (\|\mathbf{u}\|_{2, \Omega}^* + \|P\|_{1, \Omega}^*). \quad (9)$$

#### 4. Построение итерационного процесса

Конечно-элементная задача (7) порождает СЛАУ с седловой точкой вида

$$\begin{bmatrix} A & C \\ C^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \zeta \\ \eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega \\ \mathbf{z} \end{bmatrix}, \quad (10)$$

$$A = \begin{bmatrix} A_{1h} & 0 \\ 0 & A_{2h} \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} B_{1h} & 0 & D_{1h} \\ 0 & B_{2h} & D_{2h} \end{bmatrix}, \quad \zeta = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{1h} \\ \mathbf{u}_{2h} \end{bmatrix},$$

$$\eta = \begin{bmatrix} P_{1h} \\ P_{2h} \\ \lambda_h \end{bmatrix}, \quad \omega = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{1h} \\ \mathbf{F}_{2h} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{z} = \mathbf{0}. \quad (11)$$

В нашем случае  $A$  — несимметричная положительно определенная квадратная матрица, а  $C$  — прямоугольная (неквадратная) матрица. Ненулевые компоненты матрицы  $D_{kh}$  ( $k = 1, 2$ ) присутствуют только в тех строках, которые соответствуют уравнениям в узлах на  $\Gamma$ .

Для нахождения решения системы (10), (11) построим сходящийся итерационный процесс [16]. Для этого выполним следующие действия:

- 1) выберем произвольные начальные приближения  $\boldsymbol{\eta}^0$  и  $\boldsymbol{\zeta}^0$  для (10);
- 2) проведем итерации  $k = 0, 1, 2, \dots$ , далее п. 3 и п. 4, пока не будет выполнено условие останова;

- 3) найдем вектор  $\boldsymbol{\zeta}^{k+1} = \boldsymbol{\zeta}^k + \hat{A}^{-1}(\boldsymbol{\omega} - A\boldsymbol{\zeta}^k - C\boldsymbol{\eta}^k)$ ;

- 4) вычислим вектор  $\boldsymbol{\eta}^{k+1} = \boldsymbol{\eta}^k + \hat{S}^{-1}(C^T \boldsymbol{\zeta}^{k+1} - \mathbf{z})$ .

Здесь  $\hat{A}$  и  $\hat{S}$  — переобуславливающие матрицы для матриц  $A$  и  $S = C^T A^{-1} C$  соответственно.

Для построения переобуславливающей матрицы  $\hat{A}$  используем неполное  $LU$  разложение матрицы  $A$  —  $ILLU(0)$  [17], т.е.  $\hat{A} = \hat{L}\hat{U}$ , где  $\hat{L}$  и  $\hat{U}$  — нижняя и верхняя треугольные матрицы соответственно. Матрица  $\hat{A}$  имеет вид

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} \hat{L}_{1h} & 0 \\ 0 & \hat{L}_{2h} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{U}_{1h} & 0 \\ 0 & \hat{U}_{2h} \end{bmatrix}.$$

На каждой итерации в п. 3 решаем задачу  $A\mathbf{q} = \boldsymbol{\chi}$  с левым переобуславливателем  $\hat{A}$ . Для этого используем обобщенный метод минимальных невязок GMRES( $m$ ) [17]. Метод аппроксимирует решение с помощью разложения вектора в  $m$ -мерном подпространстве Крылова с минимальной невязкой. Пусть  $\mathbf{r}_0 = \hat{A}^{-1}(\boldsymbol{\chi} - A\mathbf{q})$ , тогда процедура Арнольди образует ортогональный базис в  $m$ -мерном подпространстве Крылова  $\text{Span}\{\mathbf{r}_0, \hat{A}^{-1}A\mathbf{r}_0, (\hat{A}^{-1}A)^{m-1}\mathbf{r}_0\}$ .

Процесс построения переобуславливающей матрицы  $\hat{S}$  к  $S$  и как следствие решение с ней в п. 4 несколько сложнее. Построим две различные вспомогательные матрицы  $\tilde{S}_1$  и  $\tilde{S}_2$  для  $\hat{S}$ . Используем первую из них в тестовых примерах 1 и 2, а вторую — в серии экспериментов примера 3 (см. разд. 5). На каждой итерации в п. 4 находим вектор  $\boldsymbol{\psi}^* := \hat{S}^{-1}\boldsymbol{\theta}$  как решение внутренней итерационной процедуры:

- 1)  $\boldsymbol{\phi}^0 = \mathbf{0}$ ;
- 2)  $\boldsymbol{\phi}^l = \boldsymbol{\phi}^{l-1} + \bar{S}_n^{-1}(\boldsymbol{\theta} - \tilde{S}_n \boldsymbol{\phi}^{l-1})$ ,  $l = 1, \dots, L$ ;
- 3)  $\boldsymbol{\psi}^* = \boldsymbol{\phi}^L$ .

(12)

В наших экспериментах используем перезапускающийся GMRES( $m$ )-метод:

$$\text{Span}\{\bar{\mathbf{r}}, \bar{S}_n^{-1}\tilde{S}_n \bar{\mathbf{r}}, \dots, (\bar{S}_n^{-1}\tilde{S}_n)^{m-1}\bar{\mathbf{r}}\}, \quad \bar{\mathbf{r}} = \bar{S}_n^{-1}(\boldsymbol{\theta} - \tilde{S}_n \boldsymbol{\phi}^{l-1}), \quad m = 10.$$

Построим вспомогательную матрицу  $\tilde{S}_1$  для  $\hat{S} : \tilde{S}_1 = \tilde{Y}^T \cdot \tilde{X}$  такую, что  $C^T \hat{A}^{-1} C = ((\hat{U}^T)^{-1} C)^T \cdot (\hat{L}^{-1} C)$ . Алгоритм построения матриц  $\tilde{X}$  и  $\tilde{Y}$  основан на row-oriented Level- $\bar{p}$ -процедуре [18] с уровнем заполнения, равным  $\bar{p}$ . В работе [18] показано, что если при построении переобуславливателя к  $A$  выбран алгоритм с уровнем  $\bar{q}$  (в частности,  $\bar{q} = 0$  —  $ILLU(0)$ ), то при построении переобуславливателя к  $S$  необходимо выбирать алгоритм с уровнем заполнения, равным  $2\bar{q} + 1$ . В качестве  $\tilde{S}_1$  в (12) мы взяли единичную матрицу.



Построим вспомогательную матрицу  $\tilde{S}_2$  для  $\hat{S}$ :

$$\begin{bmatrix} M_{\mu,\epsilon}^1 & 0 & 0 \\ 0 & M_{\mu,\epsilon}^2 & 0 \\ 0 & 0 & M_\Gamma \end{bmatrix},$$

где  $M_{\mu,\epsilon}^k = \frac{1}{\mu_k + \epsilon_K} M_P^k$ ,  $M_P^k$  — матрица масс пространства давления на  $\Omega_{kh}$  и  $M_\Gamma$  — матрица масс конечных элементов первого порядка на сетке с узлами  $\hat{\mathcal{N}}$  на  $\hat{I}$ . Далее определим диагональную матрицу  $\bar{S}_2$  в (12):

$$\begin{bmatrix} \bar{M}_{\mu,\epsilon}^1 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{M}_{\mu,\epsilon}^2 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{M}_\Gamma \end{bmatrix},$$

где  $(\bar{M}_\Gamma)_{ii} = \sum_j (M_\Gamma)_{ij}$  и  $(\bar{M}_{\mu,\epsilon}^k)_{ii} = \sum_j (M_{\mu,\epsilon}^k)_{ij}$ . Известно [19], что диагональные матрицы являются хорошими переобусловливателями для соответствующих им матрицам масс.

## 5. Результаты численных экспериментов

Представим результаты численных экспериментов предложенного метода для задачи (1)–(3). В первом примере выберем решение модельной задачи (1)–(3) так, чтобы на  $\Gamma$  вектор-функция скорости  $\mathbf{u}$  была непрерывна, а функция давления  $P$  и производные вектор-функции скорости  $\mathbf{u}$  терпели разрыв. Такая ситуация, во-первых, имеет место на практике в силу влияния поверхностного натяжения, а во-вторых, мы это предполагаем в теореме ( $\mathbf{u} \notin \mathbf{H}^2(\Omega)$  и  $P \notin H^1(\Omega)$ ). Во втором и третьем примерах рассматриваем модельную задачу (1)–(3) с малым (разрывным) коэффициентом вязкости  $\mu$ . Во втором примере полагаем, что параметр  $\epsilon_K$  в стабилизирующей добавке билинейной формы  $\tilde{a}_h(\cdot, \cdot)$  в (7) является глобальной константой, равной 0.1. Для примеров 1 и 2 в таблицах приводим величины погрешностей решения в различных сеточных нормах для различных конфигураций интерфейса  $\Gamma$ . В примере 3 проведем серию численных экспериментов для различных значений параметров  $\epsilon_K$  и  $\mu$ , определим шкалу оптимального выбора параметра  $\epsilon_K$ .

Пусть  $\bar{\Omega} = [-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi]$ . Зададим интерфейс  $\Gamma$ :

$$\begin{cases} x_1 = d \sin r(s), & d > 0, \\ x_2 = s, & s \in [-\pi, \pi]. \end{cases}$$

Здесь  $r(s)$  — известная функция,  $g = b \operatorname{rot} \mathbf{u}$ . Подобласть  $\Omega_1$  лежит левее  $\Gamma$ , а  $\Omega_2$  — правее. Поскольку функция  $P$  в (1) определяется с точностью до константы, для ее однозначности необходимо выписать дополнительное условие  $\int_{\Omega_k} P_k(\bar{\mathbf{x}}) d\bar{\mathbf{x}} = 0$ ,  $k = 1, 2$ .

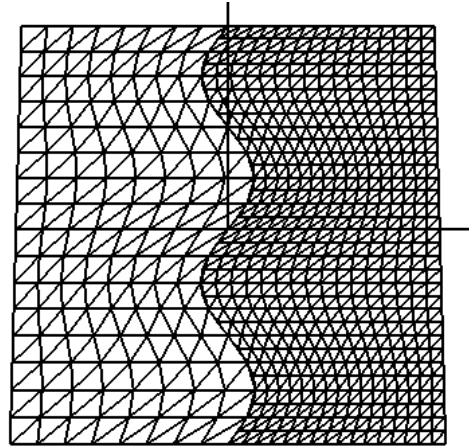


Рис. 1. Триангуляция  $\Upsilon_h^{(j)}$  подобласти  $\Omega_j$  ( $j = 1, 2$ ), где  $r(s) = 2s$ ,  $d = 0.1$

Обозначим через  $N_{x_1}^{(j)}$  и  $N_{x_2}^{(j)}$  количество отрезков разбиения  $\Omega_j$  по осям  $Ox_1$  и  $Ox_2$  соответственно. Шаг  $h_{x_2}^{(j)}$  по направлению  $Ox_2$  равен  $2\pi/N_{x_2}^{(j)}$ . Для каждого  $(x_2)_k^{(j)} = kh_{x_2}^{(j)}$ ,  $k = 0, \dots, N_{x_2}^{(j)}$ , зададим свой равномерный шаг разбиения  $\Omega_j$  по направлению оси  $Ox_1$ . Пусть  $h$  равен  $h_{x_1}^{(1)}$ . Рассмотрим случай  $N_{x_2}^{(j)} = 2N_{x_1}^{(j)}$ ,  $N_{x_1}^{(2)} = 2N_{x_1}^{(1)}$  (рис. 1).

**Пример 1.** В качестве решения задачи (1)–(3) возьмем

$$u^1(\bar{x}) = \begin{cases} \frac{3}{2} \left( x_1 - d \sin \left( \frac{3}{2}(x_2 - \pi) \right) \cos \left( \frac{3}{2}(x_2 - \pi) \right) \right), & \bar{x} \in \Omega_1, \\ \frac{3}{2}c \left( x_1 - d \sin \left( \frac{3}{2}(x_2 - \pi) \right) \cos \left( \frac{3}{2}(x_2 - \pi) \right) \right), & \bar{x} \in \Omega_2, \end{cases}$$

$$u^2(\bar{x}) = \begin{cases} \left( x_1 - d \sin \left( \frac{3}{2}(x_2 - \pi) \right) \right), & \bar{x} \in \Omega_1, \\ c \left( x_1 - d \sin \left( \frac{3}{2}(x_2 - \pi) \right) \right), & \bar{x} \in \Omega_2, \end{cases} \quad P(\bar{x}) = \begin{cases} \sin x_1 \sin x_2, & \bar{x} \in \Omega_1, \\ c \sin x_1 \sin x_2, & \bar{x} \in \Omega_2. \end{cases}$$

В численных экспериментах положим

$$\varrho = \begin{cases} 1, & \bar{x} \in \Omega_1, \\ 5, & \bar{x} \in \Omega_2, \end{cases} \quad \mu = \begin{cases} 1, & \bar{x} \in \Omega_1, \\ 3, & \bar{x} \in \Omega_2, \end{cases} \quad b = 0.995, \quad c = \frac{1}{3}, \quad \alpha = 1, \quad r(s) = \frac{3}{2}(s - \pi).$$

Т а б л и ц а 1. Величины погрешностей для примера 1

$N_{x_1}^{(2)}$	$d$	96	128	160	192
$\ \mathbf{E}^2\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\ _{\mathbf{V}_h}$	0.2	2.4980e-3	1.8791e-3	1.5032e-3	1.2503e-3
$\ E^1P - P_h\ _{X_h}$	0.2	2.7268e-3	2.0521e-3	1.6451e-3	1.3639e-3
$\ \mathbf{E}^2\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\ _{\mathbf{V}_h}$	0.4	3.9778e-3	3.0012e-3	2.3941e-3	1.9901e-3
$\ E^1P - P_h\ _{X_h}$	0.4	2.8997e-3	2.1791e-3	1.7502e-3	1.4476e-3

Пусть параметр  $\epsilon_K$  равен нулю на каждом  $K \in \Upsilon_h$ . В табл. 1 представлены величины погрешностей в нормах пространств  $\mathbf{V}_h$  и  $X_h$ . Разность между точным и конечно-элементным решениями компонент вектора скоростей в пространстве  $C(\bar{\Omega}_h)$  представлена на рис. 2.

**Пример 2.** В качестве решения задачи (1)–(3) возьмем

$$u^1(\mathbf{x}) = -\cos^2\left(\frac{3}{2}x_1\right)\sin(3x_2), \quad u^2(\mathbf{x}) = \sin(3x_1)\cos^2\left(\frac{3}{2}x_2\right),$$

$$P(\mathbf{x}) = \sin(x_1)\sin(x_2), \quad \mathbf{x} \in \Omega.$$

$$\text{Let } \varrho = \begin{cases} 0.5, & \mathbf{x} \in \Omega_1, \\ 1, & \mathbf{x} \in \Omega_2, \end{cases} \quad \mu = \begin{cases} 0.005, & \mathbf{x} \in \Omega_1, \\ 0.0001, & \mathbf{x} \in \Omega_2, \end{cases} \quad b = 0.99, \quad \alpha = 1, \quad r(s) = s$$

и параметр  $\epsilon_K = 0.1$  на каждом  $K \in \Xi_h$ . В табл. 2 представлены погрешности вычислений для различных параметров  $d$  и чисел  $N_{x_1}^{(2)}$ . На рис. 3 показаны разности между точным и приближенным решениями вектора скоростей в пространстве  $C(\bar{\Omega}_h)$ .

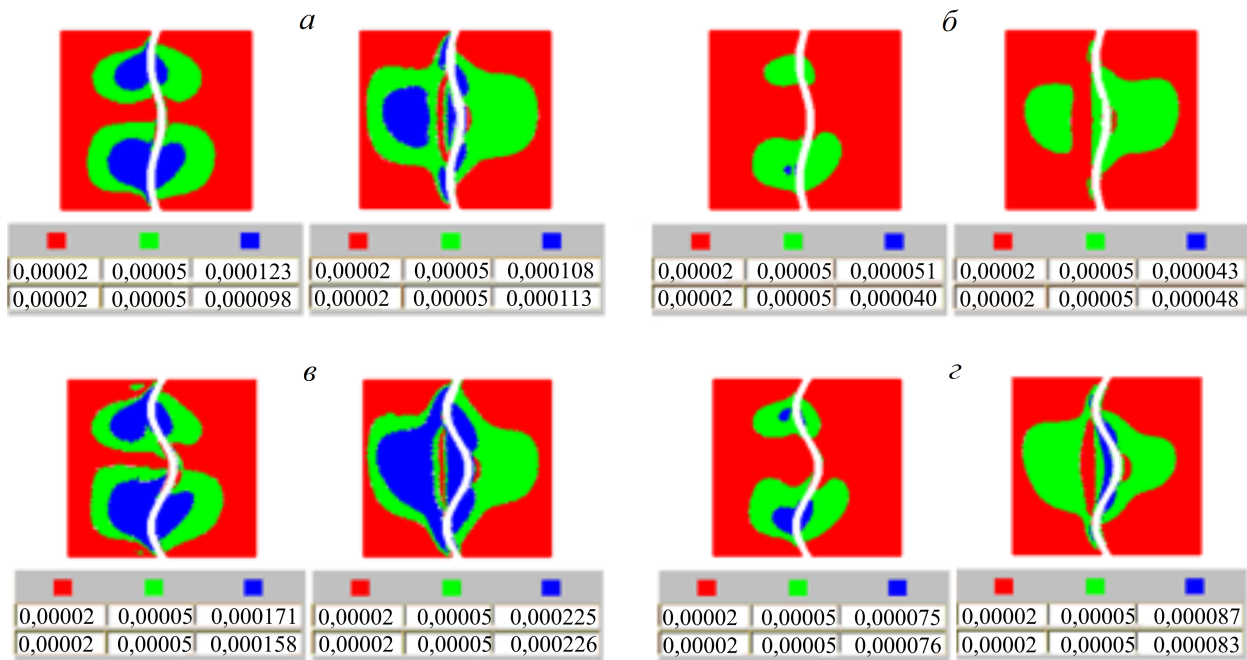


Рис. 2. Погрешность для компонент вектора скоростей в  $C(\bar{\Omega}_h)$ ,  $d = 0.2$  (а, б) и  $d = 0.4$  (в, г);  $N_{x_1}^{(2)} = 96$  (а, в) и  $N_{x_1}^{(2)} = 192$  (б, г) (пример 1)

Т а б л и ц а 2. Величины погрешностей для примера 2

$N_{x_1}^{(2)}$	$d$	128	160	192	256	320
$\ \mathbf{E}^2\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\ _{\mathbf{V}_h}$	0.2	7.531e-2	6.022e-2	5.013e-2	3.772e-2	3.008e-2
$\ E^1P - P_h\ _{X_h}$	0.2	4.099e-3	3.261e-3	2.718e-3	2.041e-3	1.625e-3
$\ \mathbf{E}^2\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\ _{\mathbf{V}_h}$	0.4	1.049e-1	8.372e-2	6.973e-2	5.240e-2	4.184e-2
$\ E^1P - P_h\ _{X_h}$	0.4	3.555e-3	2.839e-3	2.361e-3	1.772e-3	1.415e-3

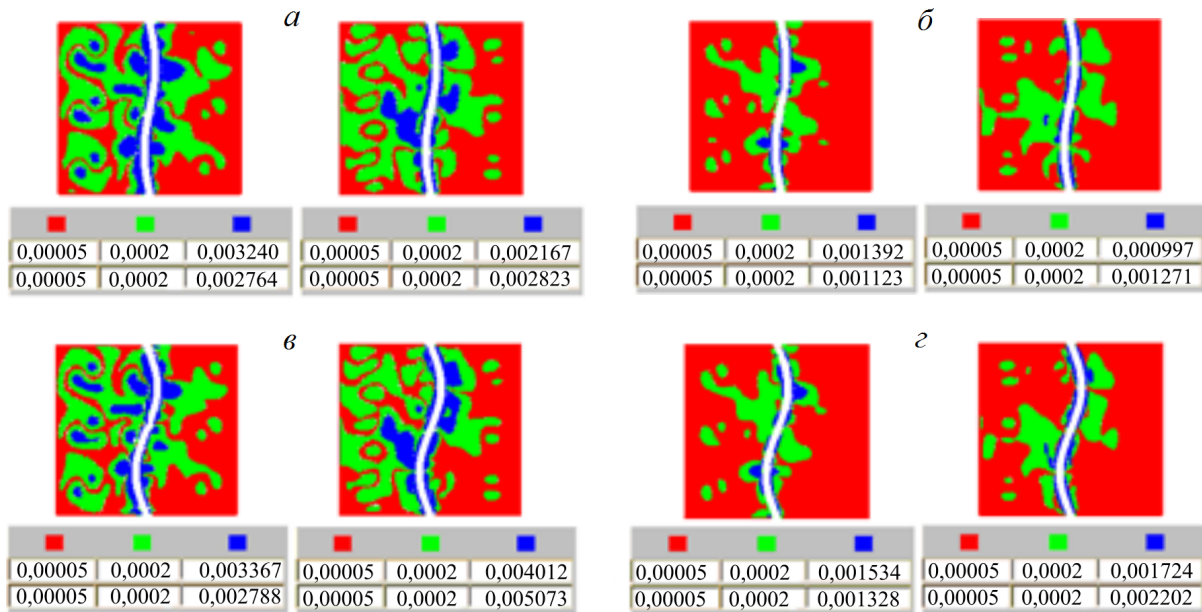


Рис. 3. Погрешность для компонент вектора скоростей в пространстве  $C(\bar{\Omega}_h)$  при  $d = 0.2$  (а, б) и  $d = 0.4$  (в, г);  $N_{x_1}^{(2)} = 96$  (а, в) и  $N_{x_1}^{(2)} = 192$  (б, г) (пример 2)

**Пример 3.** В качестве решения задачи (1)–(3) возьмем

$$u^1(\mathbf{x}) = d(x_1 - dx_2 \sin(x_2))(\sin(x_2) + x_2 \cos(x_2)), \quad u^2(\mathbf{x}) = x_1 - dx_2 \sin(x_2),$$

$$P(\mathbf{x}) = \sin(x_1) \sin(x_2), \quad \mathbf{x} \in \Omega,$$

$$\text{Let } \varrho = \begin{cases} 1, & \mathbf{x} \in \Omega_1, \\ 0.5, & \mathbf{x} \in \Omega_2, \end{cases} \quad \mu = \begin{cases} m, & \mathbf{x} \in \Omega_1, \\ 0.5m, & \mathbf{x} \in \Omega_2, \end{cases} \quad b = 0.995, \quad \alpha = 1, \quad r(s) = s.$$

На рис. 4 продемонстрированы величины погрешностей вектора скоростей в норме пространства  $\mathbf{V}_h$  для разных чисел  $N_{x_1}^{(2)}$ , параметров  $d$ ,  $m$  и  $\epsilon_K$ .

Априори мы не знаем правило, по которому выбирается оптимальное значение  $\epsilon_K$  для данной задачи. Это типичная ситуация для любого стабилизирующего параметра. Результаты численных экспериментов для конвективно доминирующих течений (рис. 4) показывают, что произвольно выбранное значение параметра  $\epsilon_K \in [0.01; 1]$  приводит к хорошему с точки зрения сходимости результату, в отличие от случая без стабилизации, т. е. когда  $\epsilon_K$  равен нулю.

## Заключение

Предложен и реализован стабилизационный численный метод решения задачи типа Озеена в вихревой форме на декомпозиционной области с криволинейным интерфейсом между подобластями. Результаты численных экспериментов модельных задач показали следующее:

1) погрешность решения вектор-функции скорости в норме пространства  $\mathbf{V}_h$  и давления в норме пространства  $X_h$  убывает пропорционально первой степени  $h$  при всех значениях параметра  $d$ , т. е. является величиной порядка  $\mathcal{O}(h)$ , что согласуется с теоретической оценкой работы [9] (см. приведенную в работе теорему);

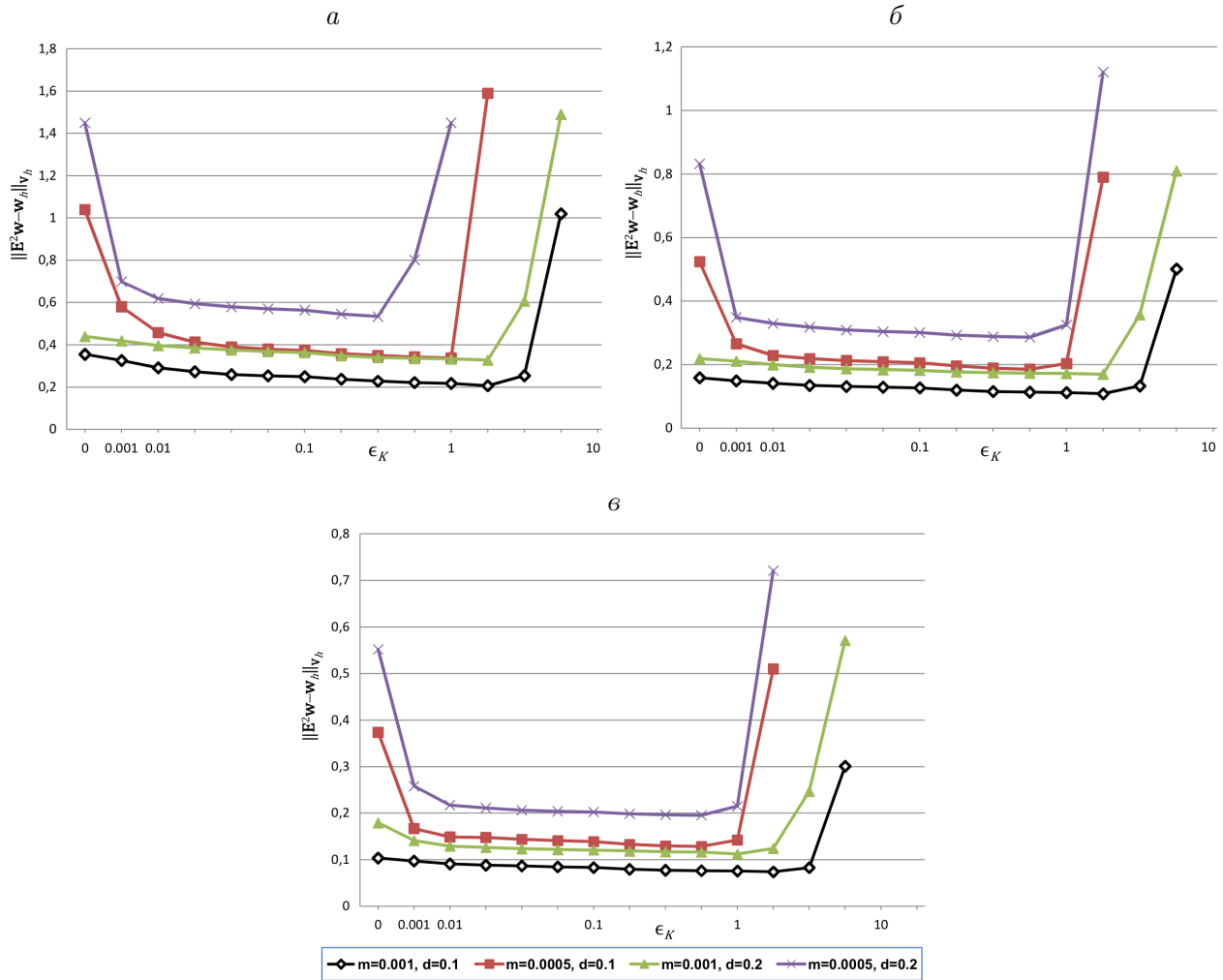


Рис. 4. Величины погрешностей вектора скоростей в норме пространства  $\mathbf{V}_h$  для различных параметров  $d$  и  $m$  (пример 3):  $a - N_{x_1}^{(2)} = 64$ ;  $б - N_{x_1}^{(2)} = 128$ ;  $в - N_{x_1}^{(2)} = 192$

2) предложенный метод эффективен для различных (в том числе и малых) разрывных коэффициентов вязкости;

3) использование стабилизирующей добавки в (7) с параметром  $\epsilon_K = \mathcal{O}(1)$  всегда дает преимущество перед случаем  $\epsilon_K = 0$  для конвективно доминирующих течений.

Автором рассматривались и другие тестовые примеры, в частности модельные задачи с различными полиномиальными решениями. Результаты их численных экспериментов имеют аналогичную картину поведения погрешности приближенного решения и согласуются с априорной оценкой (9) теоремы.

## Список литературы / References

- [1] Braess, D., Dahmen, W., Wieners, C. A multigrid algorithm for the mortar finite element methods // SIAM J. Numer. Anal. 1999. Vol. 37, No. 1. P. 48–69.
- [2] Bernardi, C., Maday, Y., Patera, A. A new nonconforming approach to domain decomposition: The mortar element method // Nonlinear Partial Differential Equations and their Applications. Paris: Pitman, 1994. P. 13–51.

- [3] **Wohlmuth, B.** Hierarchical a posteriori error estimators for mortar finite element methods with Lagrange multipliers // *SIAM J. Numer. Anal.* 1999. Vol. 36, No. 5. P. 1636–1658.
- [4] **Flemisch, B., Melenk, J.M., Wohlmuth, B.** Mortar methods with curved interfaces // *Appl. Numer. Mathematics.* 2005. Vol. 54. P. 339–361.
- [5] **Huang, J., Zou, J.** A mortar element method for elliptic problems with discontinuous coefficients // *IMA J. of Numer. Anal.* 2002. Vol. 22. P. 549–576.
- [6] **Рукавишников А.В., Рукавишников В.А.** Неконформный метод конечных элементов для задачи Стокса с разрывным коэффициентом // *Сиб. журн. индустр. математики.* 2007. Т. 10, № 4. С. 104–117.  
**Rukavishnikov, A.V., Rukavishnikov, V.A.** On the nonconformal finite element method for the Stokes problem with a discontinuous coefficient // *J. of Appl. and Indus. Mathematics.* 2007. Vol. 10, No. 4. P. 104–117. (In Russ.)
- [7] **Ben Belgacem, F.** The mixed mortar finite element method for the incompressible Stokes problem: convergence analysis // *SIAM J. Numer. Anal.* 2000. Vol. 37, No. 4. P. 1085–1100.
- [8] **Рукавишников А.В.** О построении численного метода для задачи Стокса с разрывным коэффициентом вязкости // *Вычисл. технологии.* 2009. Т. 14, № 2. С. 110–123.  
**Rukavishnikov, A.V.** On construction of a numerical method for the Stokes problem with a discontinuous coefficient of viscosity // *Comput. Technologies.* 2009. Vol. 14, No. 2. P. 110–123. (In Russ.)
- [9] **Рукавишников А.В.** Неконформный метод конечных элементов для одной задачи гидродинамики с криволинейным интерфейсом // *Журн. вычисл. математики и матем. физики.* 2012. Т. 52, № 6. С. 1072–1094.  
**Rukavishnikov, A.V.** Nonconformal finite element method for a fluid dynamics problem with a curved interface // *Zhurn. Vychisl. Matematiki i Matem. Fiziki.* 2012. Vol. 52, No. 6. P. 1072–1094. (In Russ.)
- [10] **Рукавишников А.В.** Метод декомпозиции области и численный анализ для одной задачи гидродинамики // *Журн. вычисл. математики и матем. физики.* 2014. Т. 54, № 9. С. 1515–1536.  
**Rukavishnikov, A.V.** Domain decomposition method and numerical analysis of a fluid dynamics problem // *Comput. Mathematics and Mathematical Physics.* 2014. Vol. 54, No. 9. P. 1459–1480.
- [11] **Brezzi, F., Fortin, M.** *Mixed and hybrid finite element methods.* New-York: Springer-Verlag, 1991. 362 p.
- [12] **Сьярле Ф.** *Метод конечных элементов для эллиптических задач.* М.: Мир, 1980. 512 с.  
**Ciarlet, P.** *The finite element method for elliptic problems.* Amsterdam: North-Holland, 1978. 530 p.
- [13] **Kuznetsov, Yu. A.** Efficient iterative solvers for elliptic finite element problems on nonmatching grids // *Russ. J. Numer. Anal. and Math. Modelling.* 1995. Vol. 10. P. 187–211.
- [14] **Olshanskii, M.A., Reusken, A.** Grad-div stabilization for Stokes equations // *Math. of Comput.* 2004. Vol. 73. P. 1699–1718.
- [15] **Grisvard, P.** *Elliptic problems in nonsmooth domains.* Boston: Pitman, 1985. 410 p.
- [16] **Bramble, J.H., Pasciak, J.E., Vassilev, A.T.** Analysis of the inexact Uzawa algorithm for saddle point problems // *SIAM J. Numer. Anal.* 1997. Vol. 34. P. 1072–1092.
- [17] **Saad, Y.** *Iterative methods for sparse linear systems.* New Jersey: PWS Publ. Co., 1996. 417 p.

- [18] Little, L., Saad, Y., Smoch, L. Block LU preconditioners for symmetric and nonsymmetric saddle point problems // SIAM J. Sci. Comput. 2003. Vol. 25. P. 729–748.
- [19] Olshanskii, M.A., Reusken, A. Analysis of a Stokes interface problem // Numer. Mathematik. 2006. Vol. 103. P. 129–149.

*Поступила в редакцию 3 мая 2017 г.,  
с доработки — 6 июня 2017 г.*

### **Stabilized numerical method for solving the Oseen type problem with a singularity**

RUKAVISHNIKOV, ALEXEY V.

Institute of Applied Mathematics FEB RAS, Khabarovsk, 680000, Russia  
Corresponding author: Rukavishnikov, Alexey V., e-mail: 78321a@mail.ru

**Purpose.** To construct modified approximation approach using the finite element method and to perform numerical analysis for a two dimensional problem on the flow of a viscous inhomogeneous fluids — the Oseen type problem, that is obtained by sampling in time and linearizing the incompressible Navier—Stokes equations. To consider the convection dominated flow case.

**Methodology.** Based on the domain decomposition method with a smooth curvilinear boundary between subdomains, a stabilization nonconformal finite element method is constructed that satisfies the inf-sup-stability condition. To solve the resulting system of linear algebraic equations, an iterative process is considered that uses the decomposition of the vector in the Krylov subspace with minimal inviscidity, with a block preconditioning of the matrix.

**Findings.** The results of the numerical experiments demonstrate the robustness of the considered method for different (even small) discontinuous values of viscosity. The differences between finite element and exact solutions for the velocity field and pressure in the norms of the grid spaces decrease as  $\mathcal{O}(h)$  for each curvilinear interface, that agrees with the theoretical estimate which is proved by the author.

**Originality/value.** Using the stabilized finite element method is often good and better then the classical finite element method for convection dominated flows with discontinuous viscosity and density.

*Keywords:* domain decomposition method, Oseen type problem, stabilized finite element method, discontinuous coefficients.

*Received 3 May 2017  
Received in revised form 6 June 2017*