

## Спиральная структура траекторий жидких частиц вблизи поверхности вихря\*

А. В. КИСТОВИЧ<sup>1</sup>, Т. О. ЧАПЛИНА<sup>2,3,†</sup>, Е. В. СТЕПАНОВА<sup>3</sup>

<sup>1</sup>ВНИИ физико-технических и радиотехнических измерений, Московская область, Менделеево, Россия

<sup>2</sup>Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Россия

<sup>3</sup>Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия

†Контактный e-mail: [tanya75.06@mail.ru](mailto:tanya75.06@mail.ru)

Экспериментально и аналитически исследованы характеристики вихревого течения со свободной поверхностью, образующегося в результате вращения активаторного диска, расположенного на дне цилиндрического контейнера, заполненного водой. Получены аналитические выражения, показывающие, что траектории жидких частиц вблизи поверхности вихря представляют собой трехмерные спирали, по которым происходит течение от периферии к центру вихря. Показано, что рассчитанные и визуализированные траектории жидких частиц хорошо согласуются между собой и относятся к классу пространственных логарифмических спиралей.

*Ключевые слова:* составной вихрь, волны, спиральная структура, свободная поверхность, граница раздела фаз.

*Библиографическая ссылка:* Кистович А.В., Чаплина Т.О., Степанова Е.В. Спиральная структура траекторий жидких частиц вблизи поверхности вихря // Вычислительные технологии. 2019. Т. 24, № 2. С. 67–77.  
DOI: 10.25743/ICT.2019.24.2.006.

### Введение

Детальное изучение вихревых течений ввиду их обширного распространения в атмосфере и океане — актуальная задача, поскольку данные об их структуре и динамике далеко не полны. Образовавшиеся вихри могут взаимодействовать один с другим, а также с границами раздела различных сред. Взаимодействие вихря с границами раздела сред порождает пограничные течения. Природные вихревые системы, как правило, не сохраняют азимутальную симметрию и состоят из отдельных спиралевидных рукавов [1].

Самыми крупными вихрями на нашей планете являются синоптические — атмосферные циклоны в средних широтах. Характерные поперечные размеры циклонов составляют 1500–2000 км, вихри в открытом океане достигают 100–200 км в поперечнике. Более мелкие вихревые структуры могут развиваться вблизи препятствий (за особенностями рельефа, такими как горы на суше и острова в океане), а также на границе

---

\*Title translation and abstract in English can be found on page 77.

© ИВТ СО РАН, 2019.

раздела сред, например на тропосферных фронтах — границах раздела в нижнем десятикилометровом слое атмосферы, которые отделяют воздушные массы с различными температурой и влажностью воздуха. Необходимо отметить, что вихревые потоки жидкости или газа используются во многих промышленных устройствах (например, в вихревом насосе, автоматической трансмиссии в автомобиле и т. д.).

Систематическое изучение природных вихревых течений осложняется невозможностью контролировать условия их возникновения, поэтому при исследовании вихревых течений наиболее предпочтителен метод лабораторного моделирования, который позволяет получать воспроизводимые результаты, контролировать параметры возникновения и большинство определяющих характеристик на всем протяжении эксперимента.

Теоретические исследования вихревых течений основываются на теории идеальной жидкости в покоящейся [2, 3] и вращающейся [4] средах и априорных предположениях о динамике явления. Большой цикл работ посвящен аналитическому моделированию вихревых течений, изучение которых проводилось численно на основе системы уравнений Навье — Стокса [5–8].

Основные цели данной работы — детальное изучение структуры составного вихревого течения, ограниченного вертикальным цилиндрическим контейнером, получение точных аналитических выражений, характеризующих траекторию жидких частиц вблизи поверхности вихря, и сравнение с экспериментальными результатами.

## 1. Экспериментальная установка, схема течения, его основные элементы и методика исследования

Один из способов изучения вихревых процессов — моделирование их в лабораторных установках с помощью введения маркеров (растворимых примесей) в определенные участки течения. Экспериментальная часть исследований проводилась на установке “Вихревые течения с кручением” (ВТК) ИПМех РАН, представляющей собой резервуар в форме параллелепипеда с вращающимся на дне диском, диаметр которого может изменяться. Вихревое течение ограничено вертикально расположенным цилиндрическим контейнером. Картина течения регистрировалась двумя камерами, оптические оси которых направлены взаимно-перпендикулярно. Схема течения и подробное описание установки приведены в [9]. Предполагалось, что исследуемое вихревое течение жидкости в установке можно представить как суперпозицию двух вихрей: цилиндрического с вертикальной осью и тороидального с круговой осью, при этом в центральной части объема наблюдается опускание жидкости, а по краям — подъем.

Проводившиеся до настоящего момента работы по исследованию составного вихря в цилиндрическом контейнере не включали в себя изучение эффектов, которые могут возникать на свободной поверхности составного вихря ввиду особенностей используемых экспериментальных установок. Тем не менее исследование составного вихря, имеющего свободную поверхность, представляет интерес, поскольку наличие свободной поверхности придает течению сходство с природными вихревыми структурами, большинство из которых визуально проявляет себя на границе раздела фаз жидкости и воздуха. В природе повсеместно наблюдаются вихревые структуры, имеющие визуальное сходство с изучаемыми в рамках данной работы, несмотря на разную природу их образования, что свидетельствует о схожих механизмах формирования некоторых структурных элементов в течениях разных типов.

Свободная поверхность исследуемого течения отличается от плоской, на ней даже при малых скоростях вращения индуктора имеется каверна, форма и глубина которой определяются совместным действием инерционных, гравитационных, центробежных сил. Если каверна не касается активатора, то отклонение поверхности от невозмущенного уровня описывается выражением [10]

$$\zeta = b(1 - \mu f(\tilde{r})), \mu^{-1} = p^2 \left( \frac{3}{2} - 2 \ln p + \frac{2\tilde{r}_c^2}{\tilde{r}_*^4} \left( \frac{\tilde{r}_c I_0(\tilde{r}_c)}{I_1(\tilde{r}_c)} - \frac{\tilde{r}_c^2}{4} - 2 \right) \right),$$

$$f(\tilde{r}) = \left( \frac{2\tilde{r}_c(I_0(\tilde{r}_c) - I_0(\tilde{r}))}{\tilde{r}_*^2 I_1(\tilde{r}_c)} + \frac{\tilde{r}^2 - \tilde{r}_c^2}{\tilde{r}_*^2} \right) \theta(\tilde{r}_c - \tilde{r}) + \left( 2 - \frac{\tilde{r}^2}{\tilde{r}_*^2} \right) \theta(\tilde{r}_* - \tilde{r}) + \frac{\tilde{r}^2}{\tilde{r}_*^2} \theta(\tilde{r} - \tilde{r}_*), \quad (1)$$

где  $\tilde{r} = kr$ ,  $\tilde{r}_c = kr_c$ ,  $\tilde{r}_* = kr_*$ ,  $p = r_*/R_0$ ,  $k^2 = g/\alpha$ ,  $I_n(\tilde{r}_c)$  — модифицированная функция Бесселя  $n$ -го порядка,  $\theta(x)$  — единичная функция Хевисайда.

В формулу (1) входят три параметра:  $b$ ,  $r_c$  и  $r_*$ . Они в общем случае определяются геометрией задачи ( $R_0$ ,  $R$  и  $H$ ), частотой вращения диска, величиной ускорения силы тяжести, вязкостью и коэффициентом поверхностного натяжения, которые вычисляются по экспериментальным данным (в частности, по форме контура вертикального сечения каверны на приводимых фотографиях).

Изучение формы границы раздела фаз вода — воздух в составном вихре в однородной жидкости позволило установить, что при низких частотах вращения диска активатора результаты расчетов по аналитическому выражению для формы свободной поверхности с хорошей точностью совпадают с экспериментальными данными. На рис. 1 показана экспериментально зарегистрированная граница потока с построенными расчетными кривыми для аппроксимации нулевого приближения  $\zeta(r)$ . Незначительная асимметрия линии потока может быть вызвана неравномерностью светового поля и возмущениями (волнами) на свободной поверхности. Однако при увеличении частоты вращения диска экспериментальные и аналитические границы могут различаться из-за сравнительно больших возмущений на поверхности потока, вызванных инерционными и спиральными волнами.

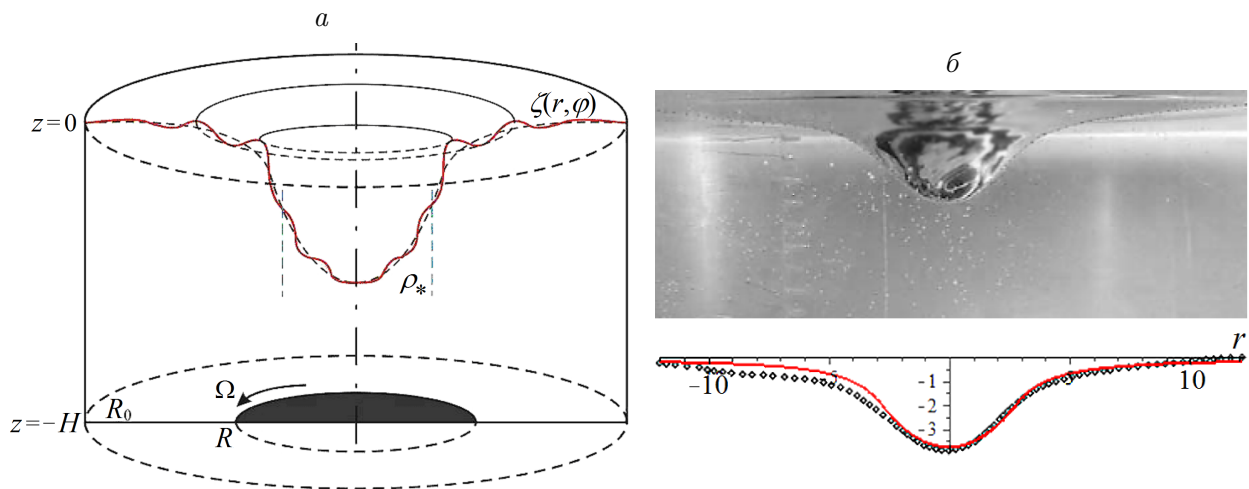


Рис. 1. Схема течения в цилиндрическом контейнере при вращении диска (а) и форма воронки, нормированная на глубину (сверху) и рассчитанная теоретически (б).  $R_0 = 17.4$  см,  $R = 7.5$  см,  $H = 20$  см,  $\Omega = 330$  об./мин

В проведенных опытах глубина воронки монотонно растет по направлению к ее центру, нижняя часть имеет параболическую форму, типичную для твердотельного вращения жидкости. Частицы движутся по сложным траекториям, навитым на поверхности вращения, радиусы которых уменьшаются по направлению к индуктору.

## 2. Спиральная структура траекторий жидких частиц вблизи поверхности вихря

Рассчитанная в работах [10, 11] форма нулевого приближения хорошо согласуется с полученной экспериментально. В то же время визуализация траекторий жидких частиц указывает на то, что в вихревом течении вблизи свободной поверхности присутствует компонента скорости, нормальная к азимутальной компоненте и касательная к поверхности вихря. Для того чтобы учесть этот факт, а также с целью адекватного описания движения жидкости исследование течения вблизи свободной поверхности проводилось в сопутствующей системе координат  $(s, \phi, n)$ , где  $s$  — длина дуги вдоль поверхности нулевого приближения, отсчитываемая от точки наибольшего заглубления поверхности вихря. Координаты точки наибольшего заглубления поверхности вихря в цилиндрической системе задаются значениями  $(0, 0, \zeta(0))$  до точки  $(r, 0, \zeta(r))$ . Поскольку форма нулевого приближения  $\zeta(r)$  известна [10, 11], запишем выражение, определяющее длину дуги:

$$s(r) = \int_0^r \sqrt{1 + \zeta_r'^2} dr. \quad (2)$$

Координата  $\phi$  совпадает с азимутальной координатой исходной цилиндрической системы координат, а координата  $n$  отсчитывается вдоль нормали к поверхности нулевого приближения. Сопутствующая поверхности координатная система (точнее, ее единичные орты) схематически представлена на рис. 2, а. Однозначная связь (2) между координатами  $r$  и  $s$  позволяет рассматривать форму нулевого приближения как известную функцию переменной  $s$ , т. е.  $\zeta = \zeta(s)$ .

Радиус-вектор точки, лежащей на поверхности нулевого приближения, определяется выражением

$$\mathbf{r}_\zeta = R(s) \mathbf{e}_r + \zeta(s) \mathbf{e}_z,$$

где  $R(s)$  — известная функция радиуса точки на поверхности.

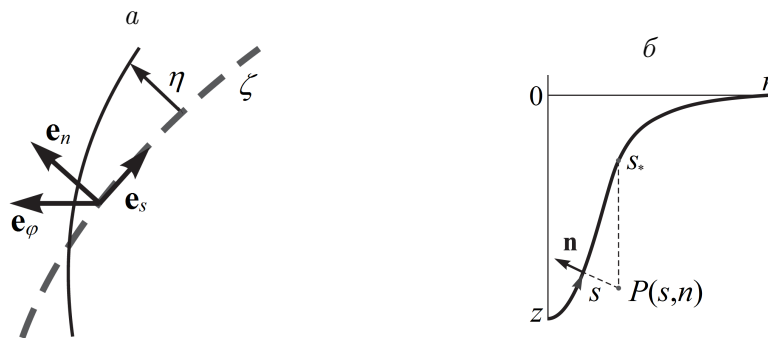


Рис. 2. Системы координат: а — сопутствующая поверхности раздела; б — цилиндрическая для расчета нулевого приближения

Так как форма нулевого приближения является однопараметрической поверхностью вращения, имеет место выражение

$$\mathbf{e}_s = \frac{\partial \mathbf{r}_\zeta}{\partial s} = R' \mathbf{e}_r + \zeta' \mathbf{e}_z,$$

на основании которого из условия  $\mathbf{e}_s \cdot \mathbf{e}_s = 1$  следует

$$R' \equiv \sqrt{1 - \zeta'^2}, \quad (3)$$

причем выбирается положительный знак. Здесь и далее производные функций  $\zeta(s)$  и  $R(s)$  обозначены штрихами.

Если вблизи свободной поверхности задана точка с координатами  $(r, \phi, z)$ , то в системе  $(s, \phi, n)$  ее координаты определяются из соотношений

$$r = R(s) - n \zeta', \quad \phi = \phi, \quad z = \zeta + n R', \quad (4)$$

а связи между ортами рассматриваемых систем задаются выражениями

$$\mathbf{e}_r = R' \mathbf{e}_s - \zeta' \mathbf{e}_n, \quad \mathbf{e}_\phi = \mathbf{e}_\phi, \quad \mathbf{e}_z = \zeta' \mathbf{e}_s + R' \mathbf{e}_n. \quad (5)$$

Соотношения (4) порождают правила дифференцирования произвольной функции  $f$

$$f'_r = \frac{R'}{D(s, n)} f'_s - \zeta' f'_n, \quad f'_\phi = f'_\phi, \quad f'_z = \frac{\zeta'}{D(s, n)} f'_s + R' f'_n, \quad D(s, n) = 1 - \frac{n \zeta''}{\sqrt{1 - \zeta'^2}}. \quad (6)$$

Соотношения (3)–(6) позволяют записать уравнения движения в системе координат  $(s, n, \phi)$  как

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_s}{\partial t} + \frac{v_s}{D} \frac{\partial v_s}{\partial s} + v_n \left( \frac{\partial v_s}{\partial n} + \frac{1}{D} \frac{\partial D}{\partial n} v_s \right) + \frac{v_\phi}{R - n \zeta'} \left( \frac{\partial v_s}{\partial \phi} - R' v_\phi \right) &= -\frac{1}{D} p'_s - g \zeta', \\ \frac{\partial v_\phi}{\partial t} + \frac{v_s}{D} \frac{\partial v_\phi}{\partial s} + v_n \frac{\partial v_\phi}{\partial n} + \frac{v_\phi}{R - n \zeta'} \left( \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + R' v_s - \zeta' v_n \right) &= -\frac{1}{R - n \zeta'} p'_\phi, \\ \frac{\partial v_n}{\partial t} - \frac{1}{D} \frac{\partial D}{\partial n} v_s^2 + \frac{v_s}{D} \frac{\partial v_n}{\partial s} + v_n \frac{\partial v_n}{\partial n} + \frac{v_\phi}{R - n \zeta'} \left( \frac{\partial v_n}{\partial \phi} + \zeta' v_\phi \right) &= -p'_n - g R', \\ \frac{\partial}{\partial s} [(R - n \zeta') v_s] + D \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial}{\partial n} [D (R - n \zeta') v_n] &= 0. \end{aligned}$$

Давление в точке с координатами  $(s, n)$  (угловая зависимость в этой задаче отсутствует) определяется выражением

$$p(s, n) = g [\zeta(s_*) - \zeta(s) - n R'(s)] + p_0 + \tilde{p}(s, n), \quad (7)$$

в котором все составляющие давления нормированы на плотность воды. Первый член в (7) — гидростатическое давление столба воды, находящегося над точкой  $P(s, n)$ , как показано на рис. 2, б. Второй и третий члены — атмосферное давление и давление, обусловленное течением воды соответственно.

Так как, согласно рис. 2, радиальное расстояние от оси цилиндрической системы координат до точек  $P(s, n)$  и  $(s_*, 0)$  одно и то же, справедливо соотношение

$$R(s_*) = R(s) - n \zeta'(s).$$

В цилиндрической системе координат уравнения движения и граничное условие для формы нулевого порядка имеют вид

$$p'_z = -g, \quad p'_r = \frac{v_\phi^2}{r}, \quad p|_{z=\zeta} = p_0,$$

в системе координат  $(s, n, \phi)$  они приобретают форму

$$\begin{aligned} \frac{\zeta'(s)}{D(s, n)} p'_s + R'(s) p'_n &= -g, \\ \frac{R'(s)}{D(s, n)} p'_s - \zeta'(s) p'_n &= \frac{v_\phi^2}{R(s) - n \zeta(s)} \equiv \frac{v_\phi^2}{R(s_*)}, \quad p|_{n=0, s=s_*} = p_0. \end{aligned} \quad (8)$$

Координата  $s_*$  точки на поверхности, соответствующей точке  $P(s, n)$ , является функцией координат  $s$  и  $n$ :

$$\frac{\partial s_*}{\partial s} = \frac{R'(s)D(s, n)}{R'(s_*)}, \quad \frac{\partial s_*}{\partial n} = -\frac{\zeta'(s)}{R'(s_*)}. \quad (9)$$

С помощью (7) и (9) система (8) преобразуется к виду

$$\tilde{p}' = \frac{v_\phi^2}{R(s_*)} - g \frac{\zeta'(s_*)}{R'(s_*)}, \quad \tilde{p}|_{n=0, s=s_*} = \sigma \left( \frac{\zeta'(s_*)}{R(s_*)} + \frac{\zeta''(s_*)}{R'(s_*)} \right).$$

Поскольку

$$\tilde{p}' = \frac{\partial \tilde{p}}{\partial R(s_*)} = \frac{1}{R'(s_*)} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial s_*},$$

использование условия обнуления вязких членов в уравнениях Навье—Стокса приводит к результату

$$p = \int \frac{v_\phi^2(R(s_*))R'(s_*)}{R(s_*)} ds_* - g\zeta(s_*),$$

подстановка которого в граничное условие (8) формирует уравнение

$$\int \frac{v_\phi^2(R(s))R'(s)}{R(s)} ds - g\zeta(s) = \sigma \left( \frac{\zeta'(s)}{R(s)} + \frac{\zeta''(s)}{R'(s)} \right). \quad (10)$$

Для областей центрального (твердотельного) и периферийного течений, которые характеризуются азимутальной скоростью [10, 11] вида

$$\begin{aligned} 1) \quad v_\phi &= \omega r = \omega (R(s) - n \zeta'(s)) = \omega R(s_*), \quad 0 \leq r \leq a, \\ 2) \quad v_\phi &= \frac{\omega a^2}{r} = \frac{\omega a^2}{R(s) - n \zeta'(s)} = \frac{\omega a^2}{R(s_*)}, \quad r \geq a, \end{aligned}$$

уравнение (10) переходит в уравнения

$$\begin{aligned} 1) \quad \frac{\omega^2 R^2(s)}{2} - g\zeta(s) + g\zeta_0 &= \sigma \left( \frac{\zeta'(s)}{R(s)} + \frac{\zeta''(s)}{R'(s)} \right), \\ 2) \quad -\frac{\omega^2 a^4}{2R^2(s)} - g\zeta(s) + g\zeta_0 &= \sigma \left( \frac{\zeta'(s)}{R(s)} + \frac{\zeta''(s)}{R'(s)} \right), \end{aligned} \quad (11)$$

решения которых необходимы для получения явного вида зависимости  $\zeta(s)$ .

Интегрирование (11) определяет форму поверхности нулевого приближения в пренебрежении эффектами поверхностного натяжения, которая описывается уравнением

$$\zeta(s_*) = \zeta_0 + \frac{\omega^2}{2g} [R^2(s_*)\theta(a - R(s_*)) + a^2(2 - a^2/R^2(s_*))\theta(R(s_*) - a)]$$

и эквивалентна результатам [10, 11], представленным в цилиндрической системе координат в том же приближении.

Полученный результат позволяет исследовать структуру поля скорости вблизи свободной поверхности вихря в системе координат  $(s, n, \phi)$ . Условие несжимаемости жидкости удовлетворяется при компонентах скорости, определяемых соотношениями

$$v_s = \frac{\psi'_n}{R - n\zeta'}, \quad v_n = -\frac{\psi'_s}{D(R - n\zeta')},$$

которым в цилиндрической системе координат соответствуют выражения

$$v_r = \frac{(R - n\zeta')'_s \psi'_n - (R - n\zeta')'_n \psi'_s}{D(R - n\zeta')}, \quad v_z = \frac{(\zeta + nR')'_s \psi'_n - (\zeta + nR')'_n \psi'_s}{D(R - n\zeta')}. \quad (12)$$

Удовлетворение кинематическим граничным условиям приводит к их формальной математической формулировке

$$v_n|_{n=0} = 0 \rightarrow \psi'_s|_{n=0} = 0, \quad v_z/v_r|_{n=0} = \frac{\zeta'}{R'},$$

указывающей на то, что вблизи поверхности нулевого приближения поле скорости должно приобретать касательный (к этой поверхности) характер.

Предположим, что характер течения вблизи поверхности таков, что в области твердотельного вращения

$$v_r = A(s)(R - n\zeta'), \quad v_n \sim n, \quad (13)$$

а на периферии вихря (тоже вблизи поверхности)

$$v_r = \frac{B(s)}{R - n\zeta'}, \quad v_n \sim n. \quad (14)$$

Подстановка (13), (14) в (12) и поиск решения полученных уравнений в виде

$$\psi = (R - n\zeta')^m (nR')^k$$

приводят к следующим результатам.

Для области твердотельного вращения

$$\begin{aligned} v_s &= -\tilde{\omega}(R'(R - n\zeta') - 2nR'\zeta'), & v_n &= \tilde{\omega}n \left( 2R'^2 + \frac{R''(R - n\zeta')}{D} \right), \\ v_r &= -\tilde{\omega}(R - n\zeta')R'^2 \frac{1 - n\zeta''/R'^3}{D}, & v_z &= \tilde{\omega} \left( 2nR' - \frac{R'\zeta'(R - n\zeta')}{D} \right), \end{aligned} \quad (15)$$

для периферии

$$\begin{aligned} v_s &= -\frac{\tilde{\omega}R'}{R - n\zeta'}, & v_n &= -\frac{\tilde{\omega}nR''}{D(R - n\zeta')}, \\ v_r &= -\tilde{\omega} \frac{R'^2 + nR''/\zeta'}{D(R - n\zeta')}, & v_z &= -\tilde{\omega} \frac{R'\zeta'}{D(R - n\zeta')}. \end{aligned} \quad (16)$$

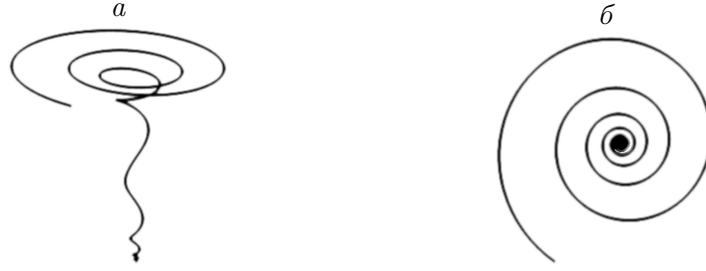


Рис. 3. Траектории жидких частиц вблизи поверхности вихря: *a* — вид сбоку под углом; *б* — вид сверху

В представленных выражениях  $\tilde{\omega}$  — некоторая постоянная величина, имеющая размерность частоты, знак “минус” выбран по причине того, что в экспериментах [10, 11] в приповерхностной области наблюдается движение жидкости к оси вращения и вниз. Соотношения (15), (16) удовлетворяют кинематическим граничным условиям, а также позволяют вычислить траектории жидких частиц вблизи поверхности вихря. Поскольку

$$v_s = \dot{s}, \quad v_\phi = R \dot{\phi}, \quad v_z = \dot{z}, \quad (17)$$

где точка сверху означает дифференцирование по времени, интегрирование (17) с учетом (15), (16) приводит к следующему результату.

В области твердотельного вращения

$$R = R_1 e^{-\varepsilon(\phi-\phi_1)}, \quad z = z_1 - \frac{\omega^2 R_1^2}{2g} (1 - e^{-2\varepsilon(\phi-\phi_1)}), \quad (18)$$

в области периферии

$$R = R_2 e^{-\varepsilon(\phi-\phi_2)}, \quad z = z_2 - \frac{\omega^2 a^4}{2g R_2^2} e^{2\varepsilon(\phi-\phi_2)}. \quad (19)$$

Здесь  $\varepsilon = \tilde{\omega}/\omega$  (согласно экспериментальным данным  $\varepsilon \ll 1$ ), а  $R_i, z_i, \phi_i$  — постоянные интегрирования (17) в соответствующих областях вихревого течения. Сшивка траекторий при  $R = a$  (на границе твердотельной и периферийной областей) связывает между собой эти постоянные величины.

Расчеты, проведенные по формулам (18), (19), показывают, что жидкие частицы вблизи поверхности движутся по спирали от периферии к центру течения (рис. 3).

### 3. Сравнение результатов теоретических и экспериментальных исследований поведения жидких частиц на поверхности вихря

При различных условиях эксперимента на установке ВТК свободная поверхность жидкости имеет различную форму. Свободная поверхность жидкости в рабочей области установки состоит из двух частей: вблизи оси вращения изменение уровня жидкости  $\sim r^2$ ; далее на расстоянии от центра  $\sim 1/r^2$  ( $r$  — расстояние от центральной оси цилиндрического контейнера до точки наблюдения) [12].

В ходе серии экспериментов были визуализированы волны на свободной поверхности составного вихря. Установлено, что положение волн относительно лабораторной системы координат и друг друга, а также их количество не изменились с течением времени в определенном диапазоне параметров. Волны имеют острый гребень и пологую



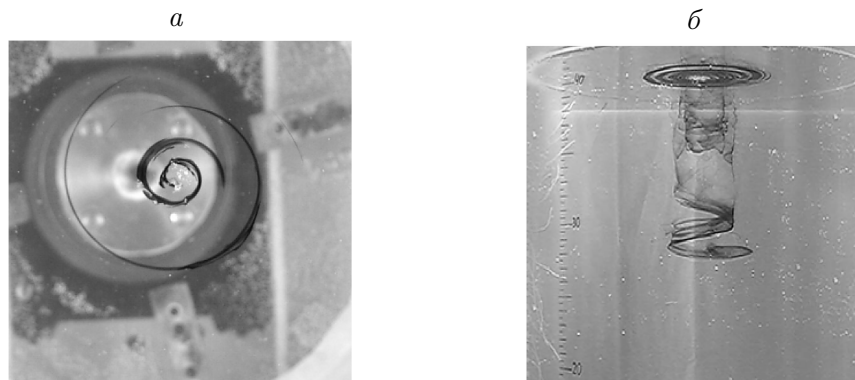


Рис. 4. Перенос растворенного маркера на поверхности и в толще жидкости ( $H = 20$  см,  $R = 5.0$  см,  $\Omega = 180$  об./мин): *a* — вид сверху,  $t = 7$  с; *б* — вид сбоку,  $t = 27$  с

широкую впадину (ширина волны превышает ширину гребня). Необходимо отметить возникающее расщепление основных гребней волн при увеличении частоты вращения индуктора.

Проведенные эксперименты с внесением в воду растворимых примесей (чернил, уранила) показали, что вдоль свободной поверхности жидкие частицы движутся по спиральным траекториям (рис. 3), в то же время перенос жидких частиц в толщу жидкости происходит по винтовым нисходящим траекториям, радиус которых слабо изменяется вдоль вертикали.

Как видно из рис. 4, расстояние между рукавами спиралей растет с удалением от центра. Это означает, что наблюдаемые спирали относятся к логарифмическому типу (у спирали Архимеда расстояние между рукавами неизменно) в полном соответствии с теоретическими результатами (18), (19).

Таким образом, экспериментальное и теоретическое исследования описанного вихревого течения показали, что траектории движущихся жидких частиц вблизи поверхности воды представляют собой пространственные спирали, по которым эти частицы движутся от периферии к центру вихря.

Хорошее совпадение формы свободной поверхности, описываемой аналитическими соотношениями, с формами, наблюдаемыми в экспериментах при различных параметрах вихревого течения, указывает на возможность применения полученного в работе теоретического описания течения данного вида для расчета формы свободной поверхности.

**Благодарности.** Работа выполнена на установках УНУ ИПМех РАН при частичной финансовой поддержке РФФИ (проект № 18-01-00116).

## Список литературы / References

- [1] Наливкин Д.В. Ураганы, бури и смерчи. Л.: Наука, 1969. 487 с.  
Nalivkin, D.V. Hurricanes, storms, and tornadoes. Leningrad: Nauka, 1969. 487 p. (In Russ.)
- [2] Милн-Томсон Л.М. Теоретическая гидродинамика. М.: Мир, 1964. 655 с.  
Milne-Thomson, L.M. Theoretical hydrodynamics. London: Macmillan & Co. Ltd, 1962. 686 p.

- [3] **Кошель К.В., Пранц С.В.** Хаотическая адвекция в океане. Ижевск: РХД, 2008. 364 с.  
**Koshel, K.V., Prants, S.V.** Chaotic advection in an ocean. Izhevsk: RKHD, 2008. 364 p.  
(In Russ.)
- [4] **Резник Г.М.** Динамика локализованных вихрей на бета-плоскости // Физика атмосферы и океана. 2010. Т. 46, № 6. С. 846–860.  
**Reznik, G.M.** Dynamics of localized vortices on the beta plane // *Izvestiya. Atmospheric and Oceanic Physics*. 2010. Vol. 46, No. 6. P. 784–797.
- [5] **Ушаков К.В.** Явные разностные схемы с переменными шагами по времени в задаче вихреразрешающего моделирования течения несжимаемой жидкости над шероховатой поверхностью // Вычисл. технологии. 2006. Т. 11. Спецвыпуск: ENVIROMIS-2006, ч. 2. С. 17–23.  
**Ushakov, K.V.** Explicit difference schemes with variable time steps in large-eddy simulation of an incompressible fluid flow over a rough surface // *Comput. Technologies*. 2006. Vol. 11. Special issue ENVIROMIS-2006, pt 2. P. 17–23. (In Russ.)
- [6] **Григорьев Ю.Н.** Метод вихрей-в-ячейках для плоских сжимаемых течений // Вычисл. технологии. 2004. Т. 9, № 5. С. 41–53.  
**Grigoryev, Yu.N.** Vortex-in-cell method for two-dimensional compressible flows // *Comput. Technologies*. 2004. Vol. 9, No. 5. P. 41–53. (In Russ.)
- [7] **Ахметов В.К., Шкадов В.Я.** Численное моделирование вязких вихревых течений для технических приложений. М.: Изд-во Ассоциации строительных вузов, 2009. 176 с.  
**Akhmetov, V.K., Shkadov, V.Ya.** Numerical simulation of viscous vortex flows for technical applications. Moscow: Izd-vo Assotsiatsii Stroitel'nykh Vuzov, 2009. 176 p.
- [8] **Roesner, K.G.** A computer-algebraic investigation of an oscillating boundary layer // *Comput. Technologies*. 2015. Vol. 20, No. 1. P. 11–24.
- [9] **Чаплина Т.О., Степанова Е.В.** Вихревые течения с кручением. Лабораторное моделирование // Процессы в геосредах. 2015. № 1. С. 96–105.  
**Chaplina, T.O., Stepanova, E.V.** Vortex flows with torsion. Laboratory modelling // *Protsessy v Geosredakh*. 2015. No. 1. P. 96–105. (In Russ.)
- [10] **Kistovich, A.V., Chaplina, T.O., Stepanova, E.V.** Vortex flow with free surface: comparison of analytical solutions with experimentally observed liquid particles trajectories // *Intern. J. of Fluid Mech. Res.* 2017. Vol. 44, No. 3. P. 215–227.
- [11] **Чаплина Т.О., Кистович А.В., Степанова Е.В.** Теоретические и экспериментальные исследования границ раздела двух несмешивающихся жидкостей в вихревом течении со свободной поверхностью // Вестн. МГУ. Сер. 3: Физика. Астрономия. 2016. № 4. С. 99–105.  
**Chaplina, T.O., Kistovich, A.V., Stepanova, E.V.** Theoretical and experimental studies of the boundaries between two immiscible liquids in a vortex flow with a free surface // *Moscow Univ. Phys. Bulletin*. 2016. Vol. 71, No. 4. P. 447–453.
- [12] **Чашечкин Ю.Д., Кистович А.В.** Деформация свободной поверхности жидкости в цилиндрическом сосуде примыкающим составным вихрем // Докл. Акад. наук. 2010. Т. 432, № 1. С. 50–54.  
**Chashechkin, Yu.D., Kistovich, A.V.** Deformation of the free surface of a fluid in a cylindrical container by the attached compound vortex // *Dokl. Physics*. 2010. Vol. 55, No. 5. P. 233–237.

**Spiral structure of the liquid particles trajectories near free surface of the vortex**

KISTOVICH, ANATOLIY V.<sup>1</sup>, CHAPLINA, TATYANA O.<sup>2,3,\*</sup>,  
STEPANOVA, EVGENIYA V.<sup>3</sup>

<sup>1</sup>All-Russian Research Institute of Physical, Technical and Radioengineering Measurements, Moscow region, Mendeleevo, 141570, Russia

<sup>2</sup>Lomonosov Moscow State University, Moscow, 119991, Russia

<sup>3</sup>A.Yu. Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the RAS, Moscow, 119526, Russia

\*Corresponding author: Chaplina, Tatyana O., e-mail: [tanya75.06@mail.ru](mailto:tanya75.06@mail.ru)

The work is aimed to compare results of analytical and experimental modeling of vortex fluid flow. The compound flow of liquid (water) occurs in a vertical cylindrical container without upper endwall under the action of the disk rotating at the bottom endwall. The two main components of the emerging flow are the toroidal vortex and the vortex with vertical axis. The equations are written in the cylindrical coordinate system dictated by the geometry of the problem. On the basis of the existing analytical expression, which describes the free surface form of the compound vortex in the zero approximation, an approach is developed to describe the trajectories of individual “liquid particles”.

The obtained result allows to explore the velocity field structure near the free surface. The obtained expressions indicate that the velocity field near free surface becomes more pronounced in the tangent direction. This result is confirmed in the experimental studies of the compound vortex flow. The analytical forms of liquid particle trajectories near and on the free surface of the compound vortex are obtained. The general particle movement is from the container sidewall along the free surface to its center and further down the spiral-helical line. The images of the visualized particles trajectories both on the free surface (logarithmic spiral) and in the liquid depth are obtained in experiments and testify in favor of the implemented approach to the construction of analytical solution of the liquid particle motion for the vortex flow of the mentioned type. The correspondence of the calculated free surface forms obtained with the help of analytical expressions and those observed in the experiments with different parameters of the vortex flow shows that the developed approach to the problem can be based on a simplified description.

*Keywords:* compound vortex, waves, spiral structure, free surface, phase boundary.

*Cite:* Kistovich, A.V., Chaplina, T.O., Stepanova, E.V. Spiral structure of the liquid particles trajectories near free surface of the vortex // Computational Technologies. 2019. Vol. 24, No. 2. P. 67–77. (In Russ.) DOI: 10.25743/ICT.2019.24.2.006.

**Acknowledgements.** This research was performed at Unique Scientific Installations Complex of the IPMech RAS and partly supported by RFBR (grant No. 18-01-00116).

*Received November 21, 2018*