

## К расчету упругопластической деформации твердого тела многомерным узловым методом характеристик

В. С. СУРОВ

Южно-Уральский государственный университет (НИУ), 454080, Челябинск, Россия

Контактный автор: Суров Виктор Сергеевич, e-mail: [surovvictor@gmail.com](mailto:surovvictor@gmail.com)

Поступила 5 апреля 2021 г., доработана 23 июня 2021 г., принята в печать 28 июня 2021 г.

Описан многомерный узловый метод характеристик, предназначенный для численного расчета упругопластической деформации твердого тела в рамках модели Прандтля–Рейса с уравнением состояния небаротропного типа. В качестве критерия перехода из упругого в пластическое состояние применялось условие текучести Мизеса. Рассмотренный численный метод базируется на координатном расщеплении исходной системы уравнений на ряд одномерных подсистем с последующим их интегрированием с помощью одномерного узлового метода характеристик. Метод использован для расчета ряда одно- и двумерных модельных задач.

*Ключевые слова:* упругопластическая деформация твердого тела, модель Прандтля–Рейса, многомерный узловый метод характеристик.

*Цитирование:* Суров В.С. К расчету упругопластической деформации твердого тела многомерным узловым методом характеристик. Вычислительные технологии. 2021; 26(4):39–52. DOI:10.25743/ICT.2021.26.4.005.

### Введение

Метод характеристик (МХ) широко используется в вычислительной практике при численном решении задач, описываемых гиперболическими системами уравнений. Суть МХ состоит в переходе от дифференциальных уравнений в частных производных к обыкновенным дифференциальным уравнениям, которые записываются вдоль характеристических направлений [1]. В литературе известны различные варианты метода характеристик, используемые в случае, когда число независимых переменных равно двум. Это классический МХ, основанный на процедуре Массо [2], сеточно-характеристический метод (СХМ) [3, 4], узловый метод характеристик (УМХ) [5–7]. В узловом методе характеристик, в отличие от варианта СХМ из [4], ударные скачки и контактные разрывы в вычислениях специально не выделяются. Если же число независимых переменных в системе уравнений больше двух, то применение МХ существенно усложняется. Общий алгоритм метода характеристик для этого случая описан в монографии [8], а его практическое использование приведено, например, в работе [9]. Заметим, что этот подход ввиду сложности реализации не получил широкого распространения. Другие схемы многомерного МХ приведены в [3].

В настоящей работе используется иной вариант многомерного метода характеристик, основанный на расщеплении исходной системы уравнений по пространственным

переменным на ряд одномерных подсистем с последующим их интегрированием с помощью УМХ. Использованный способ расщепления по направлениям аналогичен подходу, описанному в [10]. Отметим также, что ранее многомерный узловый метод характеристик (МУМХ) применялся автором в расчетах течений гетерогенных смесей [11–13].

## 1. Модель твердого тела

Уравнения, описывающие упругопластическую деформацию твердого тела, имеют вид

$$\begin{aligned} \rho_{,t} + (\rho u_i)_{,x_i} &= 0, \\ (\rho u_i)_{,t} + (\rho u_i u_j - \sigma_{ij})_{,x_j} &= 0, \quad (\rho e)_{,t} + (\rho u_j e - u_i \sigma_{ij})_{,x_j} = 0, \\ s_{ij,t} + u_k s_{ij,x_k} - s_{ik} \omega_{jk} - s_{jk} \omega_{ik} + \lambda s_{ij} &= 2\mu \left( e_{ij} - \frac{1}{3} e_{kk} \delta_{ij} \right), \\ \omega_{ij} &= \frac{1}{2} (u_{i,x_j} - u_{j,x_i}), \quad e_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,x_j} + u_{j,x_i}). \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь  $u_i$  — компоненты вектора скорости;  $\rho$  — плотность;  $\varepsilon$ ,  $\varepsilon_e$  и  $e = \varepsilon + \varepsilon_e + \frac{1}{2} u_i u_i$  — удельные внутренняя, упругая и полная энергии среды;  $\sigma_{ij}$  — тензор напряжений,  $\sigma_{ij} = s_{ij} - p \delta_{ij}$ ;  $p$  — гидродинамическое давление;  $s_{ij}$  — девиатор тензора напряжений;  $\delta_{ij}$  — дельта Кронекера;  $e_{ij}$  — тензор скоростей деформации;  $\mu$  — модуль сдвига. Индекс после запятой означает дифференцирование по соответствующей переменной.

В [14] приведено выражение для упругой составляющей энергии твердого тела  $\rho \varepsilon_e = \frac{1}{4\mu} s_{ij} s_{ij}$ . Отметим также, что в работах [15–19] вклад  $\varepsilon_e$  в полную энергию среды не учитывался, т. е. полагалось  $\varepsilon_e = 0$ . Параметр  $\lambda$  характеризует суммарную работу пластических деформаций и вычисляется по формуле  $\lambda = \frac{3s_{ij}s_{ij}}{2\sigma_s^2}$ . В качестве критерия перехода из упругого состояния в пластическое использовалось условие текучести Мизеса, согласно которому, если имеет место неравенство  $s_{ij}s_{ij} \geq \frac{2}{3}\sigma_s^2$ , где  $\sigma_s$  — предел текучести при одноосном растяжении-сжатии, то компоненты девиатора тензора напряжений корректируются “посадкой” на поверхность текучести — делением на  $\sqrt{\lambda}$  [18].

Для упрощения изложения ограничимся двумерным случаем. Перепишем систему (1) в квазилинейной форме, при этом вместо индексных выражений воспользуемся координатными обозначениями:

$$\begin{aligned} \frac{D\rho}{Dt} + \rho \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) &= 0, \\ \frac{Du}{Dt} + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial(p - s_{xx})}{\partial x} - \frac{\partial s_{xy}}{\partial y} \right) &= 0, \quad \frac{Dv}{Dt} + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial(p - s_{yy})}{\partial y} - \frac{\partial s_{xy}}{\partial x} \right) = 0, \\ \rho \frac{D\varepsilon}{Dt} + \rho \frac{D\varepsilon_e}{Dt} - (s_{xx} - p) \frac{\partial u}{\partial x} - (s_{yy} - p) \frac{\partial v}{\partial y} - s_{xy} \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) &= 0, \\ \frac{Ds_{xx}}{Dt} - 2s_{xy} \left( \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) - \frac{2}{3}\mu \left( 2\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) &= -\lambda s_{xx}, \\ \frac{Ds_{xy}}{Dt} + (s_{xx} - s_{yy}) \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) - \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) &= -\lambda s_{xy}, \\ \frac{Ds_{yy}}{Dt} - 2s_{xy} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) - \frac{2}{3}\mu \left( 2\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} \right) &= -\lambda s_{yy}, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y}$ . Учитывая соотношение для удельной внутренней энергии, в общем случае имеющее вид  $\varepsilon = \varepsilon(p, \rho)$ , получим

$$\frac{D\varepsilon}{Dt} = \frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho} \frac{D\rho}{Dt} + \frac{\partial\varepsilon}{\partial p} \frac{Dp}{Dt} = \frac{\partial\varepsilon}{\partial p} \frac{Dp}{Dt} - \rho \frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right).$$

Из выражения для упругой составляющей энергии имеем

$$\rho \frac{D\varepsilon_e}{Dt} = \frac{1}{2\mu} \left( s_{xx} \frac{Ds_{xx}}{Dt} + 2s_{xy} \frac{Ds_{xy}}{Dt} + s_{yy} \frac{Ds_{yy}}{Dt} \right) - \rho\varepsilon_e \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right).$$

С учетом приведенных выше соотношений уравнение закона сохранения энергии примет вид

$$\frac{Dp}{Dt} + \rho c^2 \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = \Pi, \quad (3)$$

где

$$c = \sqrt{\left( \frac{p}{\rho} - \rho \frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho} - \varepsilon_e \right) B}, \quad B = \left( \rho \frac{\partial\varepsilon}{\partial p} \right)^{-1},$$

$$\Pi = \left[ \frac{s_{xx} + s_{yy}}{3} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{2s_{xy}(s_{yy} - s_{xx})}{\mu} \left( \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{2(s_{xx} - s_{yy})}{3} \frac{\partial v}{\partial y} + 2\lambda\rho\varepsilon_e \right] B.$$

Систему (2) с учетом (3) перепишем в векторно-матричной форме

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + A_x \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} + A_y \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial y} = \mathbf{H}, \quad (4)$$

где

$$\mathbf{U} = (\rho, u, v, p, s_{xx}, s_{xy}, s_{yy})^\top, \quad \mathbf{H} = -\lambda(0, 0, 0, -2\rho\varepsilon_e B, s_{xx}, s_{xy}, s_{yy})^\top,$$

$$A_x = \begin{pmatrix} u & \rho & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u & 0 & \frac{1}{\rho} & -\frac{1}{\rho} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u & 0 & 0 & -\frac{1}{\rho} & 0 \\ 0 & \rho c^2 - \frac{(s_{xx} + s_{yy})B}{3} & -\frac{2s_{xy}(s_{yy} - s_{xx})B}{\mu} & u & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{4}{3}\mu & 2s_{xy} & 0 & u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_{xx} - s_{yy} - \mu & 0 & 0 & u & 0 \\ 0 & \frac{2}{3}\mu & -2s_{xy} & 0 & 0 & 0 & u \end{pmatrix},$$

$$A_y = \begin{pmatrix} v & \rho & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & v & 0 & \frac{1}{\rho} & -\frac{1}{\rho} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & v & 0 & 0 & -\frac{1}{\rho} & 0 \\ 0 & \frac{2s_{xy}(s_{yy} - s_{xx})B}{\mu} & \rho c^2 + \frac{2(2s_{xx} - s_{yy})B}{3} & v & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2s_{xy} & \frac{2}{3}\mu & 0 & v & 0 & 0 \\ 0 & s_{yy} - s_{xx} - \mu & 0 & 0 & 0 & v & 0 \\ 0 & 2s_{xy} & -\frac{4}{3}\mu & 0 & 0 & 0 & v \end{pmatrix}.$$

Символом  $\top$  обозначен оператор транспонирования. Собственные значения матриц  $A_x$  и  $A_y$  следующие:

$$\begin{aligned} u - c_{1x}, & \quad u - c_{2x}, & u, & \quad u, & u, & \quad u + c_{2x}, & u + c_{1x}, \\ v - c_{1y}, & \quad v - c_{2y}, & v, & \quad v, & v, & \quad v + c_{2y}, & v + c_{1y}, \end{aligned} \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned} c_{1x} &= \sqrt{c^2 + \frac{1}{3\rho} [4\mu - (s_{xx} + s_{yy}) B]}, & c_{2x} &= \sqrt{\frac{1}{\rho} (\mu + s_{yy} - s_{xx})}, \\ c_{1y} &= \sqrt{c^2 + \frac{2}{3\rho} [2\mu + (s_{xx} - s_{yy}) B]}, & c_{2y} &= \sqrt{\frac{1}{\rho} (\mu + s_{xx} - s_{yy})}. \end{aligned}$$

Таким образом, в твердом теле имеются две скорости звука: первая  $c_1$  — упругая и вторая  $c_2$  — сдвиговая. Собственные векторы, соответствующие собственным значениям матриц  $A_x$  и  $A_y$ , — линейно независимы, поэтому рассматриваемая система уравнений (2) относится к гиперболическому типу [20].

## 2. Многомерный узловый метод характеристик

Опишем процедуру МУМХ применительно к системе уравнений (2). Для малого временного интервала, а именно шага интегрирования по времени, изменения параметров за этот промежуток времени можно найти, суммируя локальные изменения, которые происходят по отдельным координатным направлениям. Иными словами, для нахождения приближенного решения системы (2) за указанный промежуток времени сначала решается подсистема

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial (p - s_{xx})}{\partial x} &= 0, & \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial s_{xy}}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial p}{\partial t} + u \frac{\partial p}{\partial x} + \left( \rho c^2 - \frac{s_{xx} - s_{yy}}{3} B \right) \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2s_{xy}(s_{yy} - s_{xx})B}{\mu} \frac{\partial v}{\partial x} &= 2\lambda\rho\varepsilon_e B, \\ \frac{\partial s_{xx}}{\partial t} + u \frac{\partial s_{xx}}{\partial x} - \frac{4}{3}\mu \frac{\partial u}{\partial x} + 2s_{xy} \frac{\partial v}{\partial x} &= -\lambda s_{xx}, & \frac{\partial s_{xy}}{\partial t} + u \frac{\partial s_{xy}}{\partial x} - \rho c_{2x}^2 \frac{\partial v}{\partial x} &= -\lambda s_{xy}, \\ \frac{\partial s_{yy}}{\partial t} + u \frac{\partial s_{yy}}{\partial x} + \frac{2}{3}\mu \frac{\partial u}{\partial x} - 2s_{xy} \frac{\partial v}{\partial x} &= -\lambda s_{yy}, \end{aligned} \quad (6)$$

получающаяся из исходной системы, в которой оставлены слагаемые, изменяющие параметры деформации только в направлении оси  $Ox$ . Затем, после интегрирования (6), базирясь на новом распределении определяющих переменных, решаем подсистему

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} + \rho \frac{\partial v}{\partial y} &= 0, & \frac{\partial u}{\partial t} + v \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial s_{xx}}{\partial y} &= 0, & \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial (p - s_{xy})}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial p}{\partial t} + u \frac{\partial p}{\partial y} + \left( \rho c^2 - \frac{2(s_{xx} - s_{yy})B}{3} \right) \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2s_{xy}(s_{yy} - s_{xx})B}{\mu} \frac{\partial u}{\partial y} &= 2\lambda\rho\varepsilon_e B, \\ \frac{\partial s_{xx}}{\partial t} + v \frac{\partial s_{xx}}{\partial y} + \frac{2}{3}\mu \frac{\partial v}{\partial y} - 2s_{xy} \frac{\partial u}{\partial y} &= -\lambda s_{xx}, & \frac{\partial s_{xy}}{\partial t} + v \frac{\partial s_{xy}}{\partial y} - \rho c_{2y}^2 \frac{\partial u}{\partial y} &= -\lambda s_{xy}, \\ \frac{\partial s_{yy}}{\partial t} + v \frac{\partial s_{yy}}{\partial y} - \frac{4}{3}\mu \frac{\partial v}{\partial y} + 2s_{xy} \frac{\partial u}{\partial y} &= -\lambda s_{yy}, \end{aligned} \quad (7)$$

в которой учитываются изменения только вдоль координатного направления  $Oy$ .

Соотношения совместности вдоль характеристических направлений  $dx/dt = u \pm c_{1x}$ ,  $dx/dt = u \pm c_{2x}$  для системы (6) выводятся из уравнения

$$\begin{vmatrix} \frac{dx}{dt} - u & -\rho & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{1x} \\ 0 & \frac{dx}{dt} - u & 0 & -\frac{1}{\rho} & \frac{1}{\rho} & 0 & A_{2x} \\ 0 & 0 & \frac{dx}{dt} - u & 0 & 0 & \frac{1}{\rho} & A_{3x} \\ 0 & \frac{(s_{xx} + s_{yy})B}{3} - \rho c^2 & \frac{2s_{xy}(s_{yy} - s_{xx})B}{\mu} & \frac{dx}{dt} - u & 0 & 0 & A_{4x} \\ 0 & \frac{4}{3}\mu & -2s_{xy} & 0 & \frac{dx}{dt} - u & 0 & A_{5x} \\ 0 & 0 & \rho c_{2x}^2 & 0 & 0 & \frac{dx}{dt} - u & A_{6x} \\ 0 & -\frac{2}{3}\mu & 2s_{xy} & 0 & 0 & 0 & A_{7x} \end{vmatrix} = 0,$$

где

$$\begin{aligned} A_{1x} &= -u \frac{d\rho}{dt} - \rho \frac{du}{dt}, & A_{2x} &= -u \frac{du}{dt} - \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dt} + \frac{1}{\rho} \frac{ds_{xx}}{dt}, & A_{3x} &= -u \frac{dv}{dt} + \frac{1}{\rho} \frac{ds_{xy}}{dt}, \\ A_{4x} &= - \left( \rho c^2 - \frac{s_{xx} + s_{yy}}{3} B \right) \frac{du}{dt} + \frac{2s_{xy}(s_{yy} - s_{xx})B}{\mu} \frac{dv}{dt} - u \frac{dp}{dt} + 2\lambda\rho\varepsilon_e B, \\ A_{5x} &= -\lambda s_{xx} + \frac{4}{3}\mu \frac{du}{dt} - 2s_{xy} \frac{dv}{dt} - u \frac{ds_{xx}}{dt}, & A_{6x} &= -\lambda s_{xy} + \rho c_{2x}^2 \frac{dv}{dt} - u \frac{ds_{xy}}{dt}, \\ A_{7x} &= -\lambda s_{yy} - \frac{2}{3}\mu \frac{du}{dt} + 2s_{xy} \frac{dv}{dt} - u \frac{ds_{yy}}{dt}. \end{aligned}$$

Раскрывая определитель, получим выражения, справедливые соответственно вдоль характеристических направлений  $dx/dt = u \pm c_{1x}$ ,  $dx/dt = u \pm c_{2x}$ :

$$\begin{aligned} \rho c_{1x} A_{2x} \pm A_{4x} \mp A_{5x} - \frac{2s_{xy}[\mu + (s_{xx} - s_{yy})B]}{\mu\rho(c_{1x}^2 - c_{2x}^2)} (\rho c_{1x} A_{3x} \mp A_{6x}) &= 0, \\ \rho c_{2x} A_{3x} \mp A_{6x} &= 0. \end{aligned} \quad (8)$$

На траекторной характеристике  $dx/dt = u$  выполняются равенства

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dt} + \left[ \frac{B}{3\rho}(s_{xx} - s_{yy}) - c^2 \right] \frac{d\rho}{dt} + \frac{2s_{xy}(s_{yy} - s_{xx})B}{\mu\rho c_{2x}^2} \left( \frac{ds_{xy}}{dt} + \lambda s_{xy} \right) &= 2\lambda\rho\varepsilon_e B, \\ \frac{ds_{xx}}{dt} + \frac{4}{3} \frac{\mu}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \frac{2s_{xy}}{\rho c_{2x}^2} \left( \frac{ds_{xy}}{dt} + \lambda s_{xy} \right) &= -\lambda s_{xx}, \\ \frac{ds_{yy}}{dt} - \frac{2}{3} \frac{\mu}{\rho} \frac{d\rho}{dt} - \frac{2s_{xy}}{\rho c_{2x}^2} \left( \frac{ds_{xy}}{dt} + \lambda s_{xy} \right) &= -\lambda s_{yy}, \end{aligned} \quad (9)$$

которые непосредственно следуют из подсистемы (6).

Аналогично выводятся характеристические соотношения, справедливые соответственно вдоль характеристических направлений  $dy/dt = v \pm c_{1y}$ ,  $dy/dt = v \pm c_{2y}$ , которые имеют вид

$$\begin{aligned} \rho c_{1y} A_{3y} \pm A_{4y} \mp \left[ 1 + \frac{B}{\mu} \left( \frac{3}{2} s_{xx} - s_{yy} \right) \right] A_{7y} - \frac{s_{xy}(2\mu + s_{xx}B)}{\mu\rho(c_{1y}^2 - c_{2y}^2)} (\rho c_{1y} A_{2y} \mp A_{6y}) &= 0, \\ \rho c_{2y} A_{2y} \mp A_{6y} &= 0, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} A_{2y} &= -v \frac{du}{dt} + \frac{1}{\rho} \frac{ds_{xy}}{dt}, & A_{3y} &= -v \frac{dv}{dt} - \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dt} + \frac{1}{\rho} \frac{ds_{yy}}{dt}, \\ A_{4y} &= \frac{2s_{xy}(s_{yy} - s_{xx})B}{\mu} \frac{du}{dt} - \left( \rho c^2 - \frac{2(2s_{xx} - s_{yy})B}{3} \right) \frac{dv}{dt} - v \frac{dp}{dt} + 2\lambda\rho\varepsilon_e B, \\ A_{6y} &= -\lambda s_{xy} + \rho c_{2y}^2 \frac{du}{dt} - v \frac{ds_{xy}}{dt}, & A_{7y} &= -\lambda s_{yy} + \frac{4}{3}\mu \frac{dv}{dt} - 2s_{xy} \frac{du}{dt} - v \frac{ds_{yy}}{dt}. \end{aligned}$$

Вдоль траекторной характеристики  $dy/dt = v$  выполняются равенства

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dt} + \left[ \frac{B}{3\rho}(2s_{xx} - s_{yy}) - c^2 \right] \frac{d\rho}{dt} - \frac{2s_{xy}(s_{yy} - s_{xx})B}{\mu\rho c_{2y}^2} \left( \frac{ds_{xy}}{dt} + \lambda s_{xy} \right) &= 2\lambda\rho\varepsilon_e B, \\ \frac{ds_{xx}}{dt} - \frac{2}{3} \frac{\mu}{\rho} \frac{d\rho}{dt} - \frac{2s_{xy}}{\rho c_{2y}^2} \left( \frac{ds_{xy}}{dt} + \lambda s_{xy} \right) &= -\lambda s_{xx}, \\ \frac{ds_{yy}}{dt} + \frac{4}{3} \frac{\mu}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \frac{2s_{xy}}{\rho c_{2y}^2} \left( \frac{ds_{xy}}{dt} + \lambda s_{xy} \right) &= -\lambda s_{yy}, \end{aligned}$$

которые следуют из подсистемы (7).

Для двумерного варианта МУМХ процесс вычислений при переходе с  $t^n$ -го временного шага на  $t^{n+1}$ -й состоит из двух тактов — на первом узлы расчетной области перебираются вдоль оси  $Ox$  и в них по процедуре одномерного УМХ [12] определяются промежуточные значения  $(\tilde{\rho}, \tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{p}, \tilde{s}_{xx}, \tilde{s}_{xy}, \tilde{s}_{yy})^{n+1}$ . На втором такте определяются окончательные величины  $(\rho, u, v, p, s_{xx}, s_{xy}, s_{yy})^{n+1}$  путем применения процедуры УМХ в направлении оси  $Oy$  на основе данных первого такта.

Опишем процедуру одномерного УМХ, например, для первого промежуточного такта. Второй такт проводится аналогично. Для решения поставленной задачи достаточно определить значения искомых параметров в узле  $(x_k, t^{n+1})$  по известным значениям этих величин в узлах, находящихся на  $n$ -м временном слое. Используется следующий итерационный процесс. Предполагается, что на “нулевой” итерации ( $\nu = 0$ ) искомые переменные в точке  $(x_k, t^{n+1})$  совпадают с их значениями в точке  $(x_k, t^n)$ . В этом случае характеристические направления  $dx/dt = u$ ,  $dx/dt = u \pm c_{1x}$ ,  $dx/dt = u \pm c_{2x}$  аппроксимируются выражениями

$$\begin{aligned} x_k - x_C^\nu &= u^\nu \Delta t, & x_k - x_{L_1}^\nu &= (u^\nu + c_{1x}^\nu) \Delta t, & x_k - x_{R_1}^\nu &= (u^\nu - c_{1x}^\nu) \Delta t, \\ x_k - x_{L_2}^\nu &= (u^\nu + c_{2x}^\nu) \Delta t, & x_k - x_{R_2}^\nu &= (u^\nu - c_{2x}^\nu) \Delta t, \end{aligned}$$

где  $\Delta t = t^{n+1} - t^n$ ,  $\nu$  — номер итерации. Точки пересечения полученных характеристических направлений с прямой  $t = t^n$  (рис. 1) определяются соотношениями

$$\begin{aligned} x_{L_1}^\nu &= x_k - (u^\nu + c_{1x}^\nu) \Delta t, & x_{L_2}^\nu &= x_k - (u^\nu + c_{2x}^\nu) \Delta t, & x_C^\nu &= x_k - u^\nu \Delta t, \\ x_{R_2}^\nu &= x_k - (u^\nu - c_{2x}^\nu) \Delta t, & x_{R_1}^\nu &= x_k - (u^\nu - c_{1x}^\nu) \Delta t. \end{aligned} \quad (10)$$

Параметры  $(\tilde{\rho}, \tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{p}, \tilde{s}_{xx}, \tilde{s}_{xy}, \tilde{s}_{yy})^{(0)}$  в найденных точках  $(x_{L_1}, x_{L_2}, x_C, x_{R_2}, x_{R_1})^{(0)}$  находятся интерполяцией по их известным значениям в узлах  $(x_{k-1}, x_k, x_{k+1})$ . Перепишем соотношения (8), (9) в конечно-разностном виде

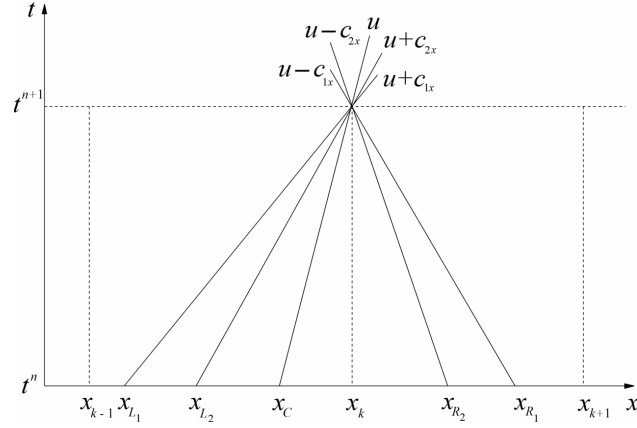


Рис. 1. Расчетная схема для узлового метода характеристик

Fig. 1. Calculation scheme for UM

$$\begin{aligned}
 & a_{2L_1}^\nu [\tilde{u}^{\nu+1}(x_k, t^{n+1}) - \tilde{u}^\nu(x_{L_1}, t^n)] + a_{3L_1}^\nu [\tilde{v}^{\nu+1}(x_k, t^{n+1}) - \tilde{v}^\nu(x_{L_1}, t^n)] + \\
 & + a_{4L_1}^\nu [\tilde{p}^{\nu+1}(x_k, t^{n+1}) - \tilde{p}^\nu(x_{L_1}, t^n)] + a_{5L_1}^\nu [\tilde{s}_{xx}^{\nu+1}(x_k, t^{n+1}) - \tilde{s}_{xx}^\nu(x_{L_1}, t^n)] + \\
 & + a_{6L_1}^\nu [\tilde{s}_{xy}^{\nu+1}(x_k, t^{n+1}) - \tilde{s}_{xy}^\nu(x_{L_1}, t^n)] = \Omega_{L_1}^\nu, \\
 & a_{3L_2}^\nu [\tilde{v}^{\nu+1}(x_k, t^{n+1}) - \tilde{v}^\nu(x_{L_2}, t^n)] + a_{6L_2}^\nu [\tilde{s}_{xy}^{\nu+1}(x_k, t^{n+1}) - \tilde{s}_{xy}^\nu(x_{L_2}, t^n)] = \Omega_{L_2}^\nu, \\
 & a_{1C_1}^\nu [\tilde{\rho}^{\nu+1}(x_k, t^{n+1}) - \tilde{\rho}^\nu(x_C, t^n)] + \tilde{p}^{\nu+1}(x_k, t^{n+1}) - \tilde{p}^\nu(x_C, t^n) + \\
 & + a_{6C_1}^\nu [\tilde{s}_{xy}^{\nu+1}(x_k, t^{n+1}) - \tilde{s}_{xy}^\nu(x_C, t^n)] = \Omega_{C_1}^\nu, \\
 & a_{1C_2}^\nu [\tilde{\rho}^{\nu+1}(x_k, t^{n+1}) - \tilde{\rho}^\nu(x_C, t^n)] + \tilde{s}_{xx}^{\nu+1}(x_k, t^{n+1}) - \tilde{s}_{xx}^\nu(x_C, t^n) + \\
 & + a_{6C_2}^\nu [\tilde{s}_{xy}^{\nu+1}(x_k, t^{n+1}) - \tilde{s}_{xy}^\nu(x_C, t^n)] = \Omega_{C_2}^\nu, \\
 & a_{1C_3}^\nu [\tilde{\rho}^{\nu+1}(x_k, t^{n+1}) - \tilde{\rho}^\nu(x_C, t^n)] + a_{6C_3}^\nu [\tilde{s}_{xy}^{\nu+1}(x_k, t^{n+1}) - \tilde{s}_{xy}^\nu(x_C, t^n)] + \\
 & + \tilde{s}_{yy}^{\nu+1}(x_k, t^{n+1}) - \tilde{s}_{yy}^\nu(x_C, t^n) = \Omega_{C_3}^\nu, \\
 & a_{3R_2}^\nu [\tilde{v}^{\nu+1}(x_k, t^{n+1}) - \tilde{v}^\nu(x_{R_2}, t^n)] + a_{6R_2}^\nu [\tilde{s}_{xy}^{\nu+1}(x_k, t^{n+1}) - \tilde{s}_{xy}^\nu(x_{R_2}, t^n)] = \Omega_{R_2}^\nu, \\
 & a_{2R_1}^\nu [\tilde{u}^{\nu+1}(x_k, t^{n+1}) - \tilde{u}^\nu(x_{R_1}, t^n)] + a_{3R_1}^\nu [\tilde{v}^{\nu+1}(x_k, t^{n+1}) - \tilde{v}^\nu(x_{R_1}, t^n)] + \\
 & + a_{4R_1}^\nu [\tilde{p}^{\nu+1}(x_k, t^{n+1}) - \tilde{p}^\nu(x_{R_1}, t^n)] + a_{5R_1}^\nu [\tilde{s}_{xx}^{\nu+1}(x_k, t^{n+1}) - \tilde{s}_{xx}^\nu(x_{R_1}, t^n)] + \\
 & + a_{6R_1}^\nu [\tilde{s}_{xy}^{\nu+1}(x_k, t^{n+1}) - \tilde{s}_{xy}^\nu(x_{R_1}, t^n)] = \Omega_{R_1}^\nu,
 \end{aligned} \tag{11}$$

где

$$\begin{aligned}
 & a_{2L_1}^\nu = -\rho c_{1x}(u + c_{1x}), \quad a_{4L_1}^\nu = -(u + c_{1x}), \quad a_{5L_1}^\nu = u + c_{1x}, \\
 & a_{3L_1}^\nu = \frac{2s_{xy} [c_{1x}^2 [\mu + (s_{yy} - s_{xx})B] + uc_{1x} [\mu + (s_{xx} - s_{yy})B] + 2c_{2x}^2 (s_{xx} - s_{yy})B]}{\mu(c_{1x}^2 - c_{2x}^2)}, \\
 & a_{6L_1}^\nu = -\frac{2s_{xx}(u + c_{1x})[\mu + (s_{xx} - s_{yy})B]}{\mu\rho(c_{1x}^2 - c_{2x}^2)}, \\
 & \Omega_{L_1}^\nu = -\lambda \left[ s_{xx} + 2\rho\varepsilon_e B - \frac{2s_{xy}^2 [\mu + (s_{xx} - s_{yy})B]}{\mu\rho(c_{1x}^2 - c_{2x}^2)} \right] \Delta t, \\
 & a_{3L_2}^\nu = -\rho c_{2x}(u + c_{2x}), \quad a_{6L_2}^\nu = u + c_{2x}, \quad \Omega_{L_2}^\nu = -\lambda s_{xy} \Delta t, \\
 & a_{1C_1}^\nu = \frac{(s_{xx} - s_{yy})B}{3\rho} - c^2, \quad a_{6C_1}^\nu = -\frac{2s_{xy}(s_{yy} - s_{xx})B}{\mu\rho c_{2x}^2},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Omega_{C_1}^\nu &= 2\lambda B \left[ \rho \varepsilon_e - \frac{2s_{xy}^2(s_{yy} - s_{xx})}{\mu \rho c_{2x}^2} \right] \Delta t, & a_{1C_2}^\nu &= \frac{4\mu}{3\rho}, & a_{6C_2}^\nu &= \frac{2s_{xy}}{\rho c_{2x}^2}, \\
\Omega_{C_2}^\nu &= -\lambda \left( s_{xx} + \frac{2s_{xy}^2}{\rho c_{2x}^2} \right) \Delta t, & a_{1C_3}^\nu &= -\frac{2\mu}{3\rho}, & a_{6C_3}^\nu &= -\frac{2s_{xy}}{\rho c_{2x}^2}, \\
\Omega_{C_3}^\nu &= -\lambda \left( s_{yy} - \frac{2s_{xy}^2}{\rho c_{2x}^2} \right) \Delta t, & a_{3R_2}^\nu &= -\rho c_{2x}(u - c_{2x}), & a_{6R_2}^\nu &= -(u - c_{2x}), \\
\Omega_{R_2}^\nu &= \lambda s_{xy} \Delta t, & a_{2R_1}^\nu &= -\rho c_{1x}(u - c_{1x}), & a_{4R_1}^\nu &= u - c_{1x}, & a_{5R_1}^\nu &= -(u - c_{1x}), \\
a_{3R_1}^\nu &= \frac{2s_{xy} [c_{1x}^2 [(s_{yy} - s_{xx})B - \mu] + uc_{1x} [\mu + (s_{xx} - s_{yy})B] - 2c_{2x}^2 (s_{xx} - s_{yy})B]}{\mu (c_{1x}^2 - c_{2x}^2)}, \\
a_{6R_1}^\nu &= \frac{2s_{xx}(u - c_{1x}) [\mu + (s_{xx} - s_{yy})B]}{\mu \rho (c_{1x}^2 - c_{2x}^2)}, \\
\Omega_{R_1}^\nu &= \lambda \left( s_{xx} + 2\rho \varepsilon_e B - \frac{2s_{xy}^2 [\mu + (s_{xx} - s_{yy})B]}{\mu \rho (c_{1x}^2 - c_{2x}^2)} \right) \Delta t.
\end{aligned}$$

Решая систему (11) при  $\nu = 0$  относительно переменных  $(\tilde{\rho}, \tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{p}, \tilde{s}_{xx}, \tilde{s}_{xy}, \tilde{s}_{yy})^{(1)}$ , найдем уточненные значения искомым функций в точке  $(x_k, t^{n+1})$ . Затем по этим данным из выражений (10) вычисляются новые координаты  $(x_{L_1}, x_{L_2}, x_C, x_{R_2}, x_{R_1})^{(1)}$ , которые, в свою очередь, используются для определения  $(\tilde{\rho}, \tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{p}, \tilde{s}_{xx}, \tilde{s}_{xy}, \tilde{s}_{yy})^{(2)}$  из (11), где необходимо положить  $\nu = 1$ . Описанный итерационный процесс продолжается вплоть до сходимости (при невязке  $10^{-7}$  требуется, как правило, 5–7 итераций).

Аналогичные соотношения справедливы и вдоль оси  $Oy$ .

### 3. Результаты численного моделирования

При апробации описанного выше МУМХ применялось двучленное уравнение состояния

$$\varepsilon = \frac{p - c_0^2(\rho - \rho_0)}{\rho(\gamma - 1)}, \quad (12)$$

ранее использованное автором при исследовании в гидродинамическом приближении “косого” соударения металлических пластин [21], где для алюминия константы в уравнении (12) полагались следующими:  $c_0 = 5500$  м/с,  $\rho_0 = 2710$  кг/м<sup>3</sup>,  $\gamma = 3.099$  [22], которые выбирались из условия наилучшей аппроксимации имеющихся в литературе экспериментальных данных. Предел текучести  $\sigma_s$  для алюминия принимался равным 0.29 ГПа, а модуль сдвига  $\mu = 27.6$  ГПа. Для используемого уравнения состояния твердого тела выражение для гидродинамической скорости звука имеет вид

$$c = \sqrt{\frac{\gamma(p + p_*)}{\rho}},$$

где

$$p_* = \frac{1}{\gamma} [\rho_0 c_0^2 - \rho \varepsilon_e (\gamma - 1)].$$

В качестве первой задачи рассмотрим взаимодействие алюминиевого образца с жесткой преградой, расположенной в начале координатной системы ( $x = 0$ ) в одномерной постановке. На левой границе ставилось граничное условие для жесткой стенки  $u|_{x=0} = 0$ ,



а правая граница при  $x = 0.1$  м полагалась свободной, через которую материал ударника может свободно втекать или вытекать (длина ударника превосходит размеры расчетной области). Начальные параметры при  $t = 0$  в задаче следующие: плотность  $\rho = \rho_0$ , скорость  $u = u_0$ , давление  $p_0 = 0$ , компоненты девиатора тензора напряжений  $(s_{ij})_0 = 0$ . Для этой задачи известны режимы отраженной от стенки волны, описанные в [19]: в интервале скорости от  $-991$  до  $-34$  м/с реализуется двухволновой режим отражения с упругим предвестником; вне этого скоростного интервала имеют место одноволновые режимы отражения с упругой и пластической волнами.

На рис. 2 представлены данные по давлению  $p(x)$ , полученные к моменту времени  $t = 6$  мкс для характерных скоростей удара из приведенных выше подобластей:  $u_0 = -10, -200, -1000$  м/с. В расчетах использовалась равномерная сетка, состоящая из 3000 узлов. Вычисления проводились при постоянном шаге по времени  $\Delta t = 6 \cdot 10^{-9}$  с многомерным узловым методом характеристик и гибридным методом Годунова (ГМГ) [23]. Расчеты с применением ГМГ выполнялись в рамках модели, в которой полагалось  $\varepsilon_e = 0$ . Как видно из рис. 2, некоторые расхождения наблюдаются при высокой скорости удара, которые возрастают с увеличением скорости взаимодействия.

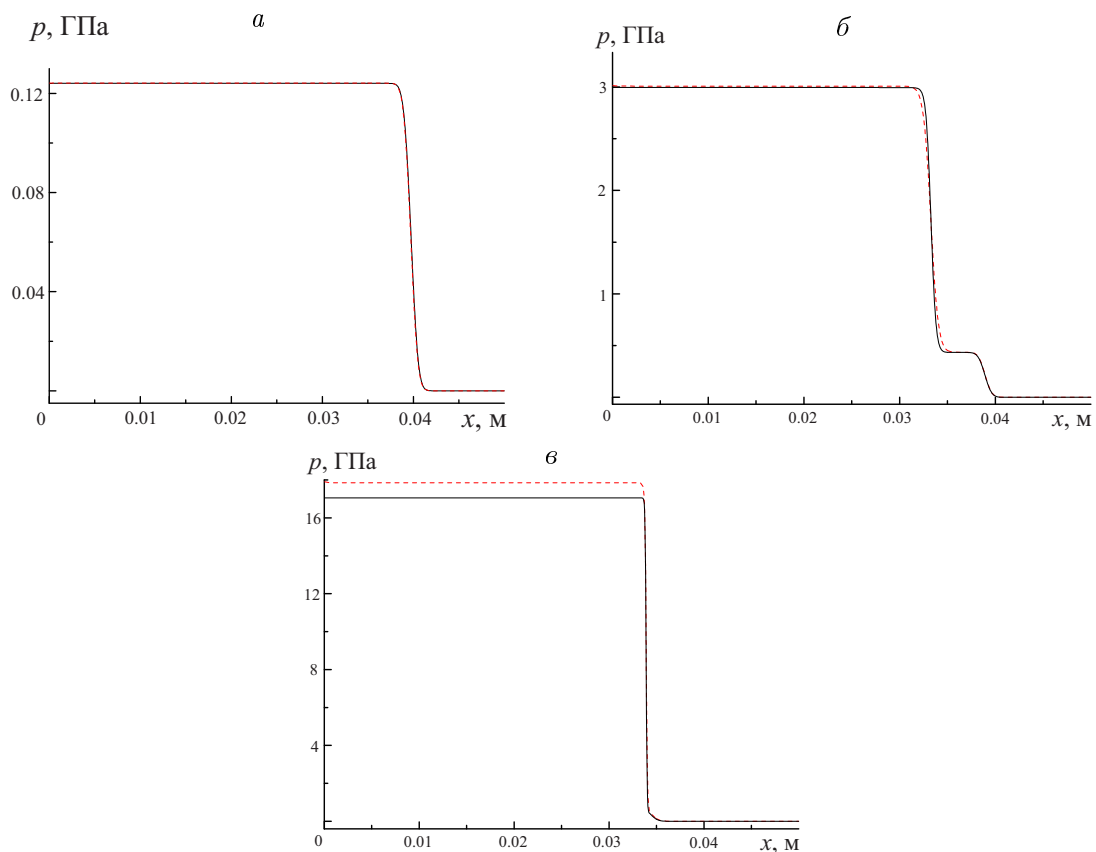


Рис. 2. Распределение давлений к моменту времени  $t = 6$  мкс при взаимодействии алюминиевого ударника с жесткой преградой, полученное с использованием МУМХ (сплошные кривые) и гибридного метода Годунова (штриховые): скорость ударника  $u_0 = -10, -200, -1000$  м/с ( $a$ – $v$  соответственно)

Fig. 2. Pressure distributions,  $t = 6 \mu\text{s}$  upon the interaction of the aluminum striker with speeds:  $u_0 = -10, -200, -1000$  m/s ( $a$ – $v$  respectively) with a hard barrier, obtained using MUMX (continuous curves) and GMG (dashed ones)

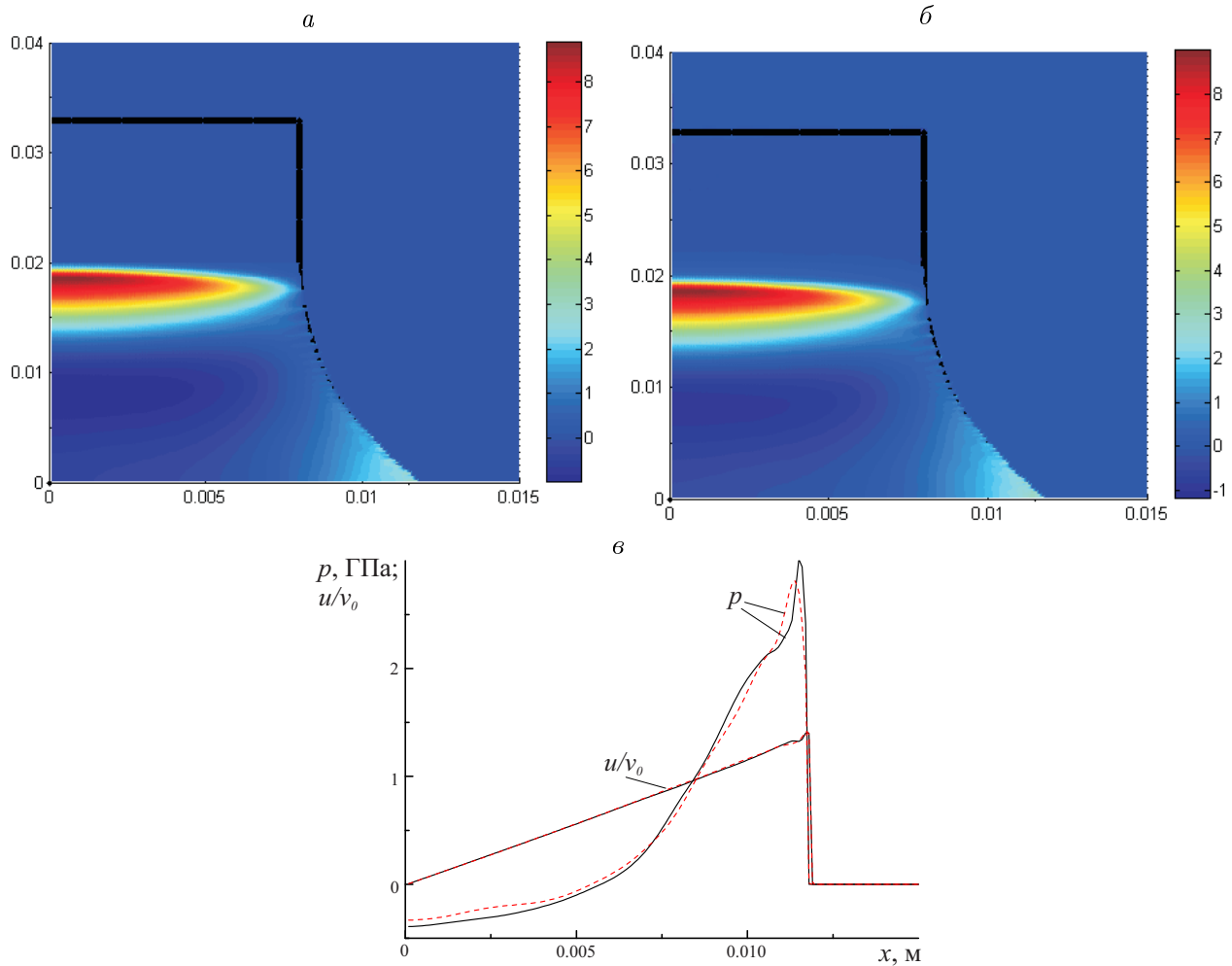


Рис. 3. Распределение давления при ударе алюминиевого ударника о жесткую преграду при учете  $\varepsilon_e$  (а) и без него (б). Зависимости давления и скорости растекания у преграды (в). Сплошными кривыми отмечены зависимости с учетом  $\varepsilon_e$   
 Fig. 3. Pressure distribution (GPa) upon the impact of the aluminium hammer and the rigid barrier. Calculation that takes into account  $\varepsilon_e$  (a) and does not account for it (b). Pressure and flow rate profiles at the barrier (c). Solid curves indicate constraints that accounts for  $\varepsilon_e$

Для иллюстрации двумерного расчета рассмотрена задача о взаимодействии алюминиевого ударника размером  $0.8 \times 4$  см с жесткой преградой (скорость взаимодействия  $v_0 = -1000$  м/с). Вычисления проводились на прямоугольной сетке из  $150 \times 400$  ячеек с постоянным шагом по времени  $\Delta t = 7 \cdot 10^{-9}$  с. Начальные и граничные условия те же, что и в предыдущей задаче. Давление вне ударника полагалось равным нулю. Для локализации контактной границы использовался метод маркеров [24].

На рис. 3, а, б представлено распределение гидродинамического давления, а также приведены зависимости  $p(x)$  и скорости растекания  $u(x)/|v_0|$  (рис. 3, в) у преграды на момент времени  $t = 0.35$  мкс, полученные с использованием МУМХ. В моделях учитывался вклад потенциальной энергии упругого сжатия в полную энергию среды и без него (для этого случая, как и в одномерных задачах, вычисления проводились с использованием ГМГ). Как видно из представленных расчетов, при относительно небольшой скорости удара учет  $\varepsilon_e$  не вносит существенной разницы по сравнению с базовой моделью, в которой  $\varepsilon_e$  полагалась равной нулю.

## Заключение

Описан многомерный узловый метод характеристик, предназначенный для численного расчета упругопластической деформации твердого тела в рамках модели Прандтля–Рейса с уравнением состояния небаротропного типа. В качестве критерия перехода из упругого в пластическое состояние использовалось условие текучести Мизеса. Рассмотренный численный метод базируется на координатном расщеплении исходной системы уравнений на ряд одномерных подсистем с последующим их интегрированием с помощью одномерного узлового метода характеристик. С использованием предложенного метода рассчитан ряд одно- и двумерных модельных задач. Результаты расчетов, полученные с использованием МУМХ, сопоставлялись с данными, рассчитанными с помощью гибридного метода Годунова в рамках модели, в которой не учитывался вклад потенциальной энергии упругого сжатия в полную энергию среды. Отмечены некоторые расхождения в результатах вычислений, имеющие место при высоких скоростях взаимодействия алюминиевого ударника с преградой, превышающих 500 м/с, которые связаны с неучетом потенциальной энергии упругого сжатия твердого тела в оригинальной модели Прандтля–Рейса.

## Список литературы

- [1] **Русанов В.В.** Характеристики общих уравнений газовой динамики. Журнал вычислительной математики и математической физики. 1963; 3(3):508–527.
- [2] **Березин И.С., Жидков Н.П.** Методы вычислений. Т. 2. М.: Физматгиз; 1962: 640.
- [3] **Магомедов К.М., Холодов А.С.** Сеточно-характеристические численные методы. М.: Наука; 1988: 290.
- [4] **Гидаспов В.Ю., Северина Н.С.** Численное моделирование тонкой структуры цилиндрической детонационной волны в водородно-воздушной горючей смеси. Теплофизика высокой температуры. 2015; 53(4):556–560.
- [5] **Суров В.С.** Узловой метод характеристик в многожидкостной гидродинамике. Инженерно-физический журнал. 2013; 86(5):1080–1087.
- [6] **Суров В.С., Березанский И.В.** К расчету течений односкоростной вязкой теплопроводной смеси узловым методом характеристик. Вычислительные технологии. 2014; 19(4):107–116.
- [7] **Суров В.С.** Модель вскипающей жидкости. Вычислительные технологии. 2020; 25(1):39–48. DOI:10.25743/ICT.2020.25.1.003.
- [8] **Sauer R.** Nichtstationare probleme der gasdynamik. Springer Verlag. Berlin. Heidelberg. New York; 1966: 193.
- [9] **Sauerwein H.** Numerical calculations of multidimensional and unsteady flows by the method of characteristics. Journal of Computational Physics. 1967; (1):406–432.
- [10] **Nakamura T., Tanaka R., Yabe T., Takizawa K.** Exactly conservative semilagrangian scheme for multi-dimensional hyperbolic equations with directional splitting technique. Journal of Computational Physics. 2001; (174):171–207.
- [11] **Суров В.С.** Гетерогенные среды. Гиперболические модели и методы расчета. Материалы XXI Международной конференции по вычислительной механике и современным прикладным программным системам. М.: МАИ; 2019: 350–352.
- [12] **Суров В.С.** К расчету течений гетерогенных сред в поле массовых сил. Инженерно-физический журнал. 2020; 93(4):911–917.

- [13] **Суров В.С.** Многомерный узловый метод характеристик для гиперболических систем. Компьютерные исследования и моделирование. 2021; 13(1):19–32. DOI:10.20537/2076-7633-2021-13-1-19-32.
- [14] **Rodriguez M., Johnsen E.** A high-order accurate five-equations compressible multiphase approach for viscoelastic fluids and solids with relaxation and elasticity. Journal of Computational Physics. 2019; (379):70–90.
- [15] **Фомин В.М.** Высокоскоростное взаимодействие тел. Новосибирск: Издательство СО РАН; 1999: 600.
- [16] **Udaykumar H.S., Tran L., Belk D.M., Vanden K.J.** An Eulerian method for computation of multimaterial impact with ENO shock-capturing and sharp interfaces. Journal of Computational Physics. 2003; (186):136–177.
- [17] **Ченг В., Тонгуи Я., Ван Л., Ли Т., Абузьяров М.Х., Кочетков А.В.** Моделирование упругопластического деформирования элементов пространственных конструкций при импульсном взаимодействии с жидкостью на основе метода Годунова повышенной точности. Проблемы прочности и пластичности. 2019; 81(4):489–500.
- [18] **Wilkins M.L.** Calculation of elastic-plastic flow. Methods in Computational Physics. N.Y.: Academic Press; 1964; (3):211–263.
- [19] **Меньшов И.С., Мищенко А.В., Сережкин А.А.** Численное моделирование упругопластических течений методом Годунова на подвижных эйлеровых сетках. Математическое моделирование. 2013; 25(8):89–108.
- [20] **Куликовский А.Г., Погорелов Н.В., Семенов А.Ю.** Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. М.: Физматлит; 2012: 607.
- [21] **Суров В.С.** Косое соударение металлических пластин. Физика горения и взрыва. 1988; 24(6):115–120.
- [22] **Суров В.С.** Моделирование высокоскоростного взаимодействия капель (струй) жидкости с преградами, воздушными ударными волнами / Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Новосибирск: ИТПМ СО РАН; 1993: 160.
- [23] **Суров В.С.** Об одном варианте метода Годунова для расчета упругопластической деформации среды. Вычислительная механика сплошных сред. 2021; 14(1):30–39. DOI:10.7242/1999-6691/2021.14.1.3.
- [24] **Суров В.С.** Взаимодействие ударных волн с каплями пузырьковой жидкости. Журнал технической физики. 2001; 71(6):17–22.

**Calculation of the elasticplastic deformation of a solid body by multidimensional nodal method of characteristics**

SUROV VICTOR S.\*

South Ural State University (NRU), 454080, Chelyabinsk, Russia

\*Corresponding author: Surov Victor S., e-mail: [surovvictor@gmail.com](mailto:surovvictor@gmail.com)

Received April 5, 2021, revised June 23, 2021, accepted June 28, 2021.

### Abstract

A multidimensional nodal method of characteristics is described. The method is designed to numerically calculate the elastoplastic deformation of a solid body within the Prandtl–Reis model with the non-barotropic state equation. The Mises flow condition was used as a criterion for the transition from an elastic to a plastic state. The considered numerical method is based on the coordinate splitting of the original system of equations into a number of one-dimensional subsystems. Then the resulting equations were integrated using a one-dimensional nodal method of characteristics. The proposed method allows calculating a number of one- and two-dimensional model problems. The results of calculations that employ the multidimensional node method of characteristics were compared with data calculated using the Godunov hybrid method in the framework of a model that did not take into account the contribution of potential elastic compression energy to the total energy of the medium. There are some discrepancies in the calculation results that occur at high speeds of interaction of the aluminum striker with the barrier, exceeding 500 m/s, which are associated with omission of the potential energy due to the elastic compression of the solid within the original Prandtl–Reis model.

*Keywords:* elastoplastic deformation of solid body, Prandtl–Reis model, multidimensional nodal method of characteristics.

*Citation:* Surov V.S. Calculation of the elasticplastic deformation of a solid body by multidimensional nodal method of characteristics. Computational Technologies. 2021; 26(4):39–52. DOI:10.25743/ICT.2021.26.4.005. (In Russ.)

### References

1. **Rusanov V.V.** The characteristics of the general equations of gas dynamics. USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics. 1963; 3(3):674–698
2. **Berezin I.C., Jidkov N.P.** Metody vychisleniy. [Calculation methods]. Vol. 2. Moscow: Fizmatgiz; 1962: 640. (In Russ.)
3. **Magomedov K.M., Kholodov A.S.** Setochno-kharakteristicheskie chislennye metody [Grid-characteristic numerical methods]. Moscow: Nauka; 1988: 290. (In Russ.)
4. **Gidasov V.Yu., Severina N.C.** Numerical simulation of the fine structure of a cylindrical detonation wave in a hydrogen–air combustible mixture. High Temperature. 2015; 53(4):526–530.
5. **Surov V.S.** Nodal method of characteristics in multifluid hydrodynamics. Journal of Engineering Physics and Thermophysics. 2013; (86):1151–1159. DOI:10.1007/s10891-013-0937-5.
6. **Surov V.S., Berezansky I.V.** The calculation of the flow of single-speed viscous and heat mixture by using the nodular method of characteristics. Computational Technologies. 2014; 19(4):107–116. (In Russ.)
7. **Surov V.S.** Boiling liquid model. Computational Technologies. 2020; 25(1):39–48. DOI:10.25743/ICT.2020.25.1.003. (In Russ.)
8. **Sauer R.** Nichtstationare probleme der gasdynamik. Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York; 1966: 193.
9. **Sauerwein H.** Numerical calculations of multidimensional and unsteady flows by the method of characteristics. Journal of Computational Physics. 1967; (1):406–432.
10. **Nakamura T., Tanaka R., Yabe T., Takizawa K.** Exactly conservative semilagrangian scheme for multi-dimensional hyperbolic equations with directional splitting technique. Journal of Computational Physics. 2001; (174):171–207.
11. **Surov V.S.** Heterogeneous medium. Hyperbolic models and calculation methods. Proceedings of the XXI International Conference on Computational Mechanics and Modern Applied Software Systems. Moscow: MAI; 2019: 350–352. (In Russ.)
12. **Surov V.S.** On calculation of flows of heterogeneous media in a body-force field. Journal of Engineering Physics and Thermophysics. 2020; 93(4):878–884. DOI:10.1007/s10891-020-02190-9.
13. **Surov V.S.** Multidimensional nodal method of characteristics for hyperbolic systems. Computer Research and Modeling. 2021; 13(1):19–32. (In Russ.)
14. **Rodriguez M., Johnsen E.** A high-order accurate five-equations compressible multiphase approach for viscoelastic fluids and solids with relaxation and elasticity. Journal of Computational Physics. 2019; (379):70–90.

15. **Fomin V.M.** Vysokoskorostnoe vzaimodeystvie tel [High-speed interaction of bodies]. Novosibirsk: Izdatel'stvo SO RAN; 1999: 600. (In Russ.)
16. **Udaykumar H.S., Tran L., Belk D.M., Vanden K.J.** An Eulerian method for computation of multimaterial impact with ENO shock-capturing and sharp interfaces. *Journal of Computational Physics*. 2003; (186):136–177.
17. **Cheng W., Tonghui Y., Wan L., Li T., Abuziarov M.Kh., Kochetkov A.V.** Modeling of elastic-plastic deformation of elements of spatial structures during pulse interaction with fluid based on the Godunov's method of increased accuracy. *Problems of Strength and Plasticity*. 2019; 81(4):489–500. (In Russ.)
18. **Wilkins M.L.** Calculation of elastic-plastic flow. *Methods in Computational Physics*. N.Y.: Academic Press; 1964; (3):211–263.
19. **Menshov I.S., Mischenko A.B., Serejkin A.A.** Numerical modeling elasto-plastic flows by using a Godunov method with moving Eulerian grids. *Mathematical Models and Computer Simulations*. 2014; 6(2):127–141.
20. **Kulikovskiy A.G., Pogorelov N.V., Semenov A.Yu.** Matematicheskie voprosy chislennogo resheniya giperbolicheskikh sistem uravneniy [Mathematical problems in numerical solution of hyperbolic systems of equations]. Moscow: Fizmatlit; 2012: 607. (In Russ.)
21. **Surov V.S.** Oblique impact of metal plates. *Combustion, Explosion and Shock Waves*. 1988; (24):747–752. DOI:10.1007/BF00740423.
22. **Surov V.S.** Modelirovanie vysokoskorostnogo vzaimodeystviya kapel' (struy) zhidkosti s pregradami, vozdushnymi udarnymi volnami [Modeling of high-speed interaction of liquid droplets (jets) with obstacles, air shock waves]. PhD Thesis. Novosibirsk: ITPM SO RAN; 1993: 160. (In Russ.)
23. **Surov V.S.** On one version of the Godunov method for calculating elastoplastic deformations of a medium. *Computational Continuum Mechanics*. 2021; 14(1):30–39. DOI:10.7242/1999-6691/2021.14.1.3. (In Russ.)
24. **Surov V.S.** Interaction of shock waves with bubble-liquid drops. *Technical Physics*. 2001; (46):662–667. DOI:10.1134/1.1379630.