

Компьютерное построение трехмерных выпуклых тел произвольных форм

Ц. Му^{1,*}, Б. А. КАРГИН^{1,2}, Е. Г. КАБЛУКОВА²

¹Новосибирский государственный университет, 630090, Новосибирск, Россия

²Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, 630090, Новосибирск, Россия

*Контактный автор: Му Цюань, e-mail: mutsyuev@gmail.com

Поступила 29 ноября 2021 г., доработана 12 января 2022 г., принята в печать 19 января 2022 г.

Представлена компьютерная реализация алгоритмов, предназначенных для численного моделирования трехмерных выпуклых тел со случайным числом вершин. Построение выпуклых многогранников является классической проблемой вычислительной геометрии. Интерес к таким моделям возникает в целом ряде задач физики, биологии, медицины. В данной работе модели построения выпуклых тел ориентированы на приложения, связанные с решением задач расчета характеристик рассеяния оптического излучения ледяными кристаллами перистых облаков. Алгоритмы построения выпуклых многогранников были положены в основу программы ConvexHull, предназначенной для моделирования кристаллов произвольных выпуклых форм в трехмерном пространстве. В работе описаны алгоритмы построения и результаты визуализации с помощью библиотеки OpenGL.

Ключевые слова: вычислительная геометрия, выпуклая оболочка, алгоритм направленного ребра, ледяные кристаллы.

Цитирование: Му Ц., Каргин Б.А., Каблукова Е.Г. Компьютерное построение трехмерных выпуклых тел произвольных форм. Вычислительные технологии. 2022; 27(2):54–61. DOI:10.25743/ICT.2022.27.2.005.

Введение

Построение выпуклого многогранника или так называемой выпуклой оболочки конечного множества точек является классической проблемой вычислительной геометрии и широко применяется в различных областях [1]. С алгоритмами и методами для построения выпуклых оболочек в двух- или трехмерном пространстве для различных приложений можно ознакомиться, например, в работах [2–5]. Построение выпуклых оболочек, содержащих заданное или случайное множество точек, применяется в таких прикладных областях, как интеллектуальный анализ данных, географические информационные системы, распознавание образов, искусственный интеллект, обработка изображений и медицинское моделирование. Помимо этого, приложения с использованием выпуклых многогранников распространились на смежные области, такие как поиск пути, компьютерная визуализация, теория игр и т. д. Достаточно интересно, что особый вид приложения с использованием выпуклых оболочек заключается в характеристике пространственной протяженности вспышки эпидемий животных или людей. В этом контексте пространственная протяженность эпидемии оценивается путем построения

выпуклого множества, охватывающего инфицированных животных или людей в заданный момент времени (см. подробнее [3] и библиографию).

В данной работе алгоритм построения выпуклых трехмерных тел произвольных форм используется при исследовании рассеивающих характеристик ледяных кристаллов перистых облаков. Обширную информацию о форме, размерах и ориентации кристаллических частиц в перистых облаках можно найти в монографиях [6, 7]. Ввиду разнообразия указанных характеристик задача рассеяния света крупными неидеальными частицами является весьма сложной. Для частиц относительно больших размеров рассеивающие характеристики исследованы для сферических форм, эллипсоидов или цилиндров. Большое количество работ посвящено изучению рассеивающих свойств ледяных кристаллов в форме идеальных гексагональных призм. Расчеты многих авторов показали, что переход от частиц с идеальными формами к частицам неправильных форм приводит к сильнейшим изменениям рассеивающих свойств кристаллов. Поэтому уже давно предпринимаются попытки построения моделей частиц неправильных форм. Например, в работе [8] описаны модели частиц неправильных форм, полученные с помощью случайных наклонов граней и ребер гексагональных призм в соответствии с заданными распределениями наклонов. В работе [9] предложена модель частиц на основе теории фрактала, конкретнее, кривой Коха. Характеристики моделируемых частиц можно изменять, растягивая или сжимая частицу в каком-либо направлении [10]. В работах [11, 12] для моделирования частиц случайных форм в качестве основы использовались ромбические бипирамидальные формы кристаллов, затем из них путем отсекания от изначальной фигуры случайно расположенными плоскостями моделировались частицы произвольных форм. Все подобные алгоритмы отличаются друг от друга как качеством описания реальных форм кристаллов, так и величиной соответствующих вычислительных затрат.

В настоящей работе предложена новая модель ледяных кристаллов нерегулярной формы, представляющая собой выпуклую оболочку набора случайных точек в трехмерном пространстве. Хотя геометрическая форма таких многогранников не всегда имитирует форму ледяных облачных кристаллов, рассеивающие характеристики, рассчитанные по таким моделям, могут дать некоторое представление о рассеивающих свойствах частиц нерегулярных форм. В разд. 1 представлен алгоритм построения трехмерных выпуклых тел случайной формы, являющихся выпуклыми оболочками случайного набора точек. Результатам моделирования и визуализации построенных выпуклых оболочек, полученных с помощью библиотеки OpenGL, посвящен разд. 2.

1. Алгоритм построения выпуклых тел в трехмерном пространстве

Приведем обозначения, использованные для описания алгоритма. Пусть в трехмерном пространстве задано множество P , состоящее из N точек P_n , с координатами $P_n = (x_n, y_n, z_n)$, $n = 1, 2, \dots, N$. Определим многогранник A с количеством вершин N_V , граней N_F и ребер N_E . Вершины многогранника $P_n \in V \subseteq P$, $n = 1, 2, \dots, N_V$. Обозначим грань многогранника через A_i^k , $i = 1, 2, \dots, N_F$. Символом “ k ” обозначена грань — внешняя в многограннике (в этом случае $k = 1$), она становится внутренней для вновь выбранной вершины многогранника (тогда $k = 0$), это обозначение сохраняется лишь на одном шаге алгоритма — при определении новых граней, далее данная

грань не используется при определении новых вершин и граней и $k = -1$. Для каждой грани A_i многогранника A принадлежащие ей вершины обозначаем как A_{ij}^k , $j = 1, 2, 3$, где i — номер грани (далее A_{ij}^k при отсутствии особых указаний будет записываться в виде A_{ij}).

Для построения выпуклого многогранника использовались инкрементальный алгоритм и алгоритм направленного ребра [2]. Точки, определяющие вершины многогранника, добавляются одна за другой, и таким образом по индукции строится выпуклое тело. Главная идея алгоритма направленного ребра заключается в том, что для каждой грани вершины многогранника должны быть упорядочены и сохранены таким образом, чтобы векторное произведение векторов, направленных от первой ко второй вершине и от первой к третьей вершине, являлось внешней нормалью данной грани.

В алгоритме имеется возможность строить выпуклый многогранник со случайным или заданным числом вершин N_V и граней N_F . В первом случае входными данными служит количество моделируемых точек $N > 3$, во втором — задается интервал, из которого выбираются необходимое число моделируемых точек $[N_0, N_1]$ и количество требуемых вершин N_V или количество требуемых граней N_F конечного выпуклого многогранника. При такой реализации алгоритма может быть весьма полезной классическая формула Эйлера [1], связывающая число вершин N_V , ребер N_E и граней N_F :

$$N_V - N_E + N_F = 2.$$

Опишем алгоритм построения случайного выпуклого многогранника со случайным числом вершин.

Этап 1. Подготовка входных данных. Задается или генерируется число моделируемых точек N ($N > 3$). Согласно некоторому закону распределения в заданном объеме моделируются координаты точек: $P_n = (x_n, y_n, z_n)$, $n = 1, 2, \dots, N$. Для простоты считаем, что координаты точек равномерно распределены в интервале $(-1, 1)$, т. е.

$$x_i = -1 + 2\alpha_i, \quad y_i = -1 + 2\beta_i, \quad z_i = -1 + 2\gamma_i,$$

где $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ — случайные величины, равномерно распределенные на $(0, 1)$.

Этап 2. Построение начального тетраэдра. Построение выпуклой оболочки, содержащей множество точек P , начинается с выбора четырех точек, которые не лежат в одной плоскости. Соединяя выбранные точки, получаем тетраэдр с вершинами P_1, P_2, P_3, P_4 .

Этап 3. Определение граней тетраэдра. Для каждой грани A_i^k тетраэдра вершины P_l, P_s, P_f , $l, s, f \in \{1, 2, 3, 4\}$ должны быть упорядочены в последовательность A_{i1}, A_{i2}, A_{i3} таким образом, чтобы векторное произведение $A_{i1}A_{i2} \times A_{i1}A_{i3}$ являлось внешней нормалью грани A_i^k . В этом случае выполняется соотношение

$$([A_{i1}A_{i2} \times A_{i1}A_{i3}], A_{i1}P_m) < 0,$$

где P_m — четвертая вершина тетраэдра. Эта процедура производится для всех четырех граней тетраэдра. Для всех построенных граней $k = 1$.

Этап 4. Построение новой вершины многогранника P_n . Проверяется, находится ли следующая точка $P_n \in P$ внутри построенного тела: если для всех внешних граней A_i^k многогранника (для них $k = 1$) выполняется соотношение

$$([A_{i1}A_{i2} \times A_{i1}A_{i3}], A_{i1}P_n) < 0, \quad (1)$$

то точка P_n является внутренней. В этом случае она не принадлежит множеству вершин многогранника. Переходим к нахождению следующей точки: $n := n + 1$, $P_n \in P$. Если существуют грани A_i^k , для которых условие (1) не выполнено, то точка P_n располагается за пределами построенного тела и будет новой вершиной $P_n \in V$ многогранника A . Обозначим через Q множество граней A_i^k , для которых на данном этапе точка P_n является внешней. Для всех граней $A_i^k \in Q$ изменяем значение параметра $k : k = 0$.

Этап 5. Определение новых граней и вершин многогранника. Исследуется грань $A_i^k \in Q$. Для граней, имеющих общие вершины с гранью A_i^k , последовательно проверяем значения k . Пусть для соседних граней A_i и A_j значения $k_i = 0$ и $k_j = 1$, тогда соединяем общие вершины P_s, P_q этих граней с точкой P_n , найденной на этапе 4, получаем новую грань с вершинами P_s, P_q, P_n . Для этой грани необходимо произвести процедуру упорядочения вершин (этап 3). Если для двух соседних граней $A_i^k, A_t^k, i, t \in \{1, 2, \dots, N_F^n\}$ значения параметра k равны нулю ($k_i = 0, k_t = 0$), переходим к проверке следующих граней, имеющих с данными гранями общие вершины. Через N_F^n обозначено число граней, построенных на данном этапе моделирования. После окончания процедуры построения новых граней (т.е. исследования всех граней $A_i^k \in Q$) значения k переопределяем на $k_i = -1$ для всех граней $A_i^k \in Q$, теперь они являются внутренними и не используются при определении новых вершин.

Этап 6. Повторяются этапы 4 и 5, пока $n < N$.

При построении выпуклого многогранника с заданным числом вершин или граней этапы 4 и 5 повторяются до тех пор, пока число вершин (граней) не будет равно заданному N_V (N_F). Каждая грань построенного многогранника является треугольной. Путем растяжения (сжатия) полученной фигуры вдоль некоторого направления можно добиться некоторых свойств многогранника, необходимых для имитации ледяных кристаллов. Кроме того, подходящий выбор плотности распределения случайных точек позволит строить случайные многогранники, подобные по форме известным моделям кристаллов ледяных облаков. Этот вопрос будет изучаться в дальнейших исследованиях.

2. Результаты моделирования и визуализации

На основе описанной выше процедуры разработана программа ConvexHull, которая в качестве результата выдает число граней конечной выпуклой оболочки, координаты вершин и упорядоченную последовательность вершин каждой грани, используемую для определения внешней нормали многогранника.

Продemonстрируем работу программы на простейшем примере: пусть заданы четыре точки с номерами 0, 1, 2, 3. В результате работы программы для каждой грани определяются последовательности точек по вышеописанному принципу: 123, 203, 301, 021. На рис. 1 стрелками показано направление обхода вершин для каждой грани (для невиди-

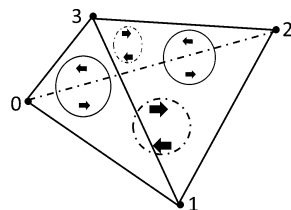


Рис. 1. Пример упорядоченной последовательности вершин на каждой грани

Fig. 1. An example of ordered sequences of vertices at each face

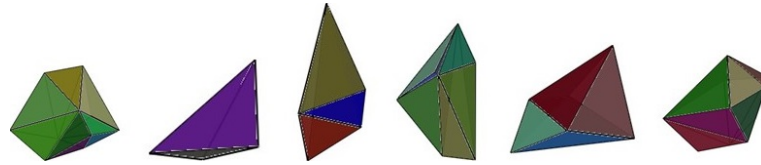


Рис. 2. Вид выпуклых многогранников со случайным числом вершин, генерируемых программой ConvexHull

Fig. 2. Convex polyhedra with a random number of vertices generated by the program ConvexHull

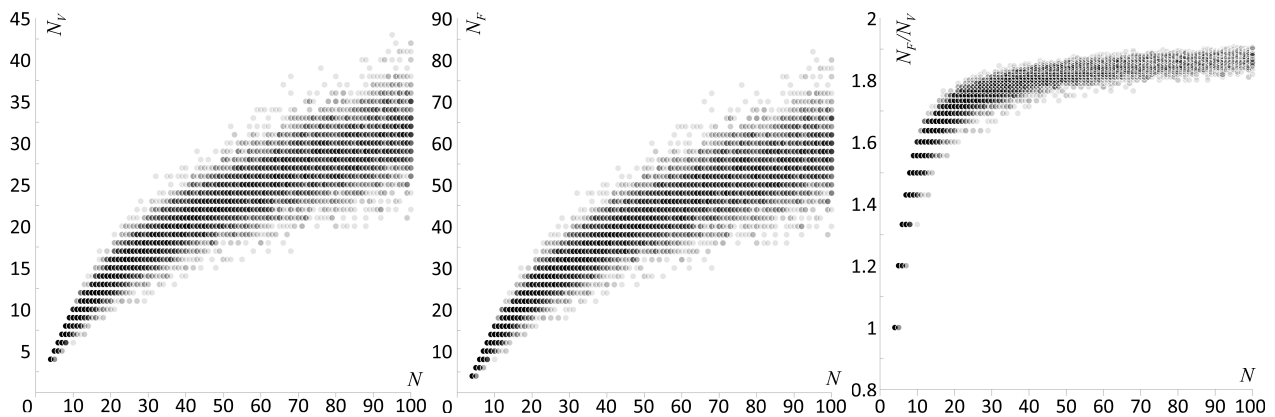


Рис. 3. Результаты статистического анализа соотношений между N , N_V и N_F , полученные с помощью программы ConvexHull

Fig. 3. Results of statistical analysis of the relationships between N , N_V and N_F obtained by the program ConvexHull

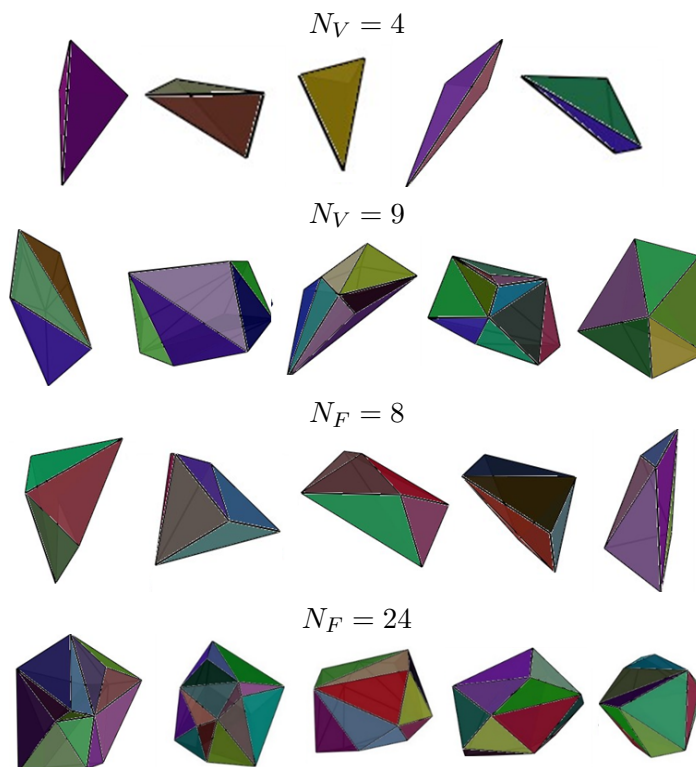


Рис. 4. Результаты построения случайных выпуклых оболочек

Fig. 4. Results of constructing random convex hulls

мых граней направление обхода окружено штрихпунктирной линией, для видимых — непрерывной).

Программа ConvexHull написана на языке C++. В нее добавлена функция визуализации моделируемых ntk с использованием библиотеки OpenGL. Примеры получаемых выпуклых многогранников со случайным количеством вершин или граней представлены на рис. 2.

Для построения многогранника случайной формы с заданным количеством вершин N_V или граней N_F в качестве начальных данных задаются интервал, в котором находится число моделируемых начальных точек N , и значения N_V или N_F . Для определения возможных соотношений между значениями N , N_V и N_F в данной работе проводились тестовые расчеты. На рис. 3 представлены зависимости значений N_F и N_V от числа моделируемых точек N для $N \in [4, 100]$. Для каждого такого N проведена серия из ста независимых тестовых расчетов. На рисунке более темный цвет соответствует большей частоте появления многогранников с соответствующими N , N_V или N_F . На основе полученной информации заданы подходящие значения N для требуемых N_V и N_F . На рис. 4 представлены некоторые примеры результатов построения выпуклых оболочек с заданными значениями N_V и N_F .

Заключение

Предложена новая модель построения трехмерных выпуклых тел, основанная на алгоритме направленного ребра. Модели выпуклых тел используются при исследовании процессов рассеяния оптического излучения кристаллическими частицами перистых облаков. Описан алгоритм построения выпуклой оболочки, содержащей случайно смоделированное или заданное множество точек. Разработанная программа ConvexHull позволяет получить упорядоченные последовательности вершин для каждой внешней грани многогранника, которые удобно использовать при исследовании свойств рассеяния излучения несферическими крупными частицами методом трассировки лучей. Визуализация моделируемых выпуклых многогранников с различным числом вершин и граней осуществляется с использованием библиотеки OpenGL. Эта программа не исчерпывает свои возможности задачами атмосферной оптики [6, 7, 12]. Она может быть применена в других приложениях, где требуется построение выпуклых тел в трехмерном пространстве.

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке CSC (China Scholarship Council) и в рамках проекта госзадания ИВМиМГ СО РАН № 0251-2021-0002.

Список литературы

- [1] Препарата Ф., Шеймос М. Вычислительная геометрия: введение. М.: Мир; 1989: 478.
- [2] De Berg M., van Krefeld M., Overmars M., Schwarzkopf O. Computational geometry algorithms and applications. 3rd rev. ed. Springer-Verlag; 2008: 386.
- [3] Jayaram M.A., Fleyeh H. Convex hulls in image processing: a scoping review. American Journal of Intelligent Systems. 2016; 6(2):48–58.
- [4] Chadnov R.V., Skvortsov A.V. Convex hull algorithms review. Proceedings of the 8th Russian-Korean International Symposium on Science and Technology. IEEE; 2004; (2):112–115.

- [5] **Pichardie D., Bertot Y.** Formalizing convex hull algorithms. International Conference on Theorem Proving in Higher Order Logics. Berlin, Heidelberg: Springer; 2001: 346–361.
- [6] **Mishchenko M.I., Hovenier J.W., Travis L.D.** Light scattering by nonspherical particles: theory, measurements and geophysical applications. San Diego: Academic Press; 1999: 690.
- [7] **Liou K.N.** An introduction to atmospheric radiation. San Diego: Academic Press; 2002: 569.
- [8] **Liu C., Panetta R., Yang P.** The effective equivalence of geometric irregularity and surface roughness in determining particle single-scattering properties. *Optics Express*. 2014; 22(19):23620–23627.
- [9] **Macke A., Mueller J., Raschke E.** Single scattering properties of atmospheric ice crystals. *Journal of the Atmospheric Sciences*. 1996; 53(19):2813–2825.
- [10] **Liu C., Panetta R.L., Yang P., Macke A., Baran A.J.** Modelling the scattering properties of mineral aerosols using concave fractal polyhedra. *Applied Optics*. 2013; 52(4):640–652.
- [11] **Shishko V., Konoshonkin A., Kustova N., Timofeev D., Borovoi A.** Coherent and incoherent backscattering by a single large particle of irregular shape. *Optics Express*. 2019; 27(23):32984–32993.
- [12] **Gasteiger J., Wiegner M., Groß S., Freudenthaler V., Toledano C., Tesche V., Kandler K.** Modelling lidar-relevant optical properties of complex mineral dust aerosols. *Tellus B: Chemical and Physical Meteorology*. 2011; 63(4):725–741.

Computer-aided construction of three-dimensional convex bodies of arbitrary shapes

MU, QUAN^{1,*}, KARGIN, BORIS A.^{1,2}, KABLUKOVA, EVGENIYA G.²

¹Novosibirsk State University, 630090, Novosibirsk, Russia

²The Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics SB RAS, 630090, Novosibirsk, Russia

*Corresponding author: Mu, Quan, e-mail: mutsyuev@gmail.com

Received November 29, 2021, revised January 12, 2022, accepted January 19, 2022.

Abstract

Cirrus clouds consist of ice crystals of various shapes, sizes, and orientations. In the numerical study of the radiation characteristics of cirrus clouds, simplified crystal forms like regular polyhedra (for example, prisms with hexagonal bases) are often used. To study the optical properties of irregularly shaped ice crystals, a number of authors of the previously constructed models in which, for example, a part of the crystal is cut off by a random plane, or the angle between some crystal faces changes randomly. In this paper, it is proposed to use the convex hull of randomly generated or user-specified points in three-dimensional space as a model for irregularly shaped ice crystals. A method for modeling three-dimensional convex polyhedra with a random arrangement of vertices is presented, which is based on the incremental and the directed edges algorithms. Each face of the modeled convex polyhedron is triangular. By stretching and squeezing, as well as an appropriate choice of the distribution function of random points in space, the resulting polyhedra can simulate the irregular shapes of ice cloud crystals. As a result of the algorithm execution, the number of vertices, their coordinates are saved, and for each face of the polyhedron, the sequence of vertices

is ordered to make their vector product corresponds to the right-hand rule and determines the direction of the outer normal. These models of three-dimensional convex bodies of various sizes and irregular shapes are designed to calculate the attenuation coefficients and the scattering phase functions of optical radiation by cloud crystals using the ray tracing method. The paper presents a visualization of crystals modeled according to the given algorithm, and the dependence of the number of vertices and faces of the polyhedron on the number of generated random points. The program code is written in C++ using the OpenGL library.

Keywords: computational geometry, convex hull, algorithm of directed edges, ice crystals.

Citation: Mu Q., Kargin B.A., Kablukova E.G. Computer-aided construction of three-dimensional convex bodies of arbitrary shapes. Computational Technologies. 2022; 27(2):54–61. DOI:10.25743/ICT.2022.27.2.005. (In Russ.)

Acknowledgements. The work is supported by China Scholarship Council and the State Contract with ICM&MG SB RAS No. 0251-2021-0002.

References

1. **Preparata F.P., Shamos M.I.** Computational geometry: an introduction. Springer Science Business Media; 1985: 411.
2. **De Berg M., van Krefeld M., Overmars M., Schwarzkopf O.** Computational geometry algorithms and applications. 3rd rev. ed. Springer-Verlag; 2008: 386.
3. **Jayaram M.A., Fleyeh H.** Convex hulls in image processing: a scoping review. American Journal of Intelligent Systems. 2016; 6(2):48–58.
4. **Chadnov R.V., Skvortsov A.V.** Convex hull algorithms review. Proceedings of the 8th Russian-Korean International Symposium on Science and Technology. IEEE; 2004; (2):112–115.
5. **Pichardie D., Bertot Y.** Formalizing convex hull algorithms. International Conference on Theorem Proving in Higher Order Logics. Berlin, Heidelberg: Springer; 2001: 346–361.
6. **Mishchenko M.I., Hovenier J.W., Travis L.D.** Light scattering by nonspherical particles: theory, measurements and geophysical applications. San Diego: Academic Press; 1999: 690.
7. **Liou K.N.** An introduction to atmospheric radiation. San Diego: Academic Press; 2002: 569.
8. **Liu C., Panetta R., Yang P.** The effective equivalence of geometric irregularity and surface roughness in determining particle single-scattering properties. Optics Express. 2014; 22(19):23620–23627.
9. **Macke A., Mueller J., Raschke E.** Single scattering properties of atmospheric ice crystals. Journal of the Atmospheric Sciences. 1996; 53(19):2813–2825.
10. **Liu C., Panetta R.L., Yang P., Macke A., Baran A.J.** Modelling the scattering properties of mineral aerosols using concave fractal polyhedra. Applied Optics. 2013; 52(4):640–652.
11. **Shishko V., Konoshonkin A., Kustova N., Timofeev D., Borovoi A.** Coherent and incoherent backscattering by a single large particle of irregular shape. Optics Express. 2019; 27(23):32984–32993.
12. **Gasteiger J., Wiegner M., Groß S., Freudenthaler V., Toledano C., Tesche V., Kandler K.** Modelling lidar-relevant optical properties of complex mineral dust aerosols. Tellus B: Chemical and Physical Meteorology. 2011; 63(4):725–741.