Вычислительные технологии, 2025, том 30, № 4, с. 108–118. © ФИЦ ИВТ, 2025
Computational Technologies, 2025, vol. 30, no. 4, pp. 108–118. © FRC ICT, 2025
ISSN 1560-7534
eISSN 2313-691X

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

DOI:10.25743/ICT.2025.30.4.010

Повышение точности разностной схемы Кранка – Николсон коррекцией правой части разностными производными от исходного решения

В. В. Шайдуров*, Л. В. Гилева, Р. А. Голубев
Институт вычислительного моделирования СО РАН, 660036, Красноярск, Россия
*Контактный автор: Шайдуров Владимир Викторович, e-mail: shaidurov04@mail.ru
Поступила 21 мая 2025 г., доработана 18 июня 2025 г., принята в печать 24 июня 2025 г.

Статья представляет собой изложение метода повышения точности исходной разностной схемы Кранка – Николсон для одномерного по пространству уравнения теплопроводности. Повышение точности со второго до четвертого порядка по временному шагу осуществляется коррекцией правой части без изменения оператора сеточной задачи и его первого дифференциального приближения. Коррекция проводится добавлением разностной производной третьего порядка по времени от исходного решения второго порядка точности. Проведено теоретическое обоснование повышения точности и представлен подтверждающий вычислительный эксперимент.

Ключевые слова: погрешность аппроксимации, коррекция разностной схемы.

Цитирование: Шайдуров В.В., Гилева Л.В., Голубев Р.А. Повышение точности разностной схемы Кранка – Николсон коррекцией правой части разностными производными от исходного решения. 2025; 30(4):108–118. DOI:10.25743/ICT.2025.30.4.010.

Введение

Изучение главных членов погрешности аппроксимации разностных схем играет довольно важную роль. Во-первых, для устойчивых разностных схем величина главных членов погрешности определяет порядок сходимости ее сеточного решения. Во-вторых, в совокупности с аппроксимируемым уравнением они образуют так называемое первое дифференциальное приближение [1, 2], которое на дифференциальном уровне методически подсказывает свойства разностной схемы.

В этой работе для повышения точности численного решения мы не будем менять оператор разностной схемы, оставляя в неизменном виде также первое дифференциальное приближение. А повышение точности аппроксимации сделаем за счет поправки в правую часть, компенсирующей вклад одного из главных членов погрешности. Эта поправка вычисляется с использованием уже найденного сеточного решения исходной разностной схемы более низкого порядка сходимости. Несмотря на то, что используемое решение исходной разностной схемы сходится только со вторым порядком точности по времени, решение схемы с подправленной правой частью сходится уже с четвертым порядком точности по времени. Этот эффект обоснован теоретически и подтвержден вычислительным экспериментом.

Для обыкновенных дифференциальных уравнений применение этого приема описано в коллективной монографии под редакцией К. Бомера и Х.Й. Штеттера [3], а также использовано в работе В.В. Шайдурова и А.Е. Новикова [4] для систем таких уравнений. Для уравнений в частных производных применение ограничилось разностными схемами для уравнения Пуассона [5, 6].

В нашей предшествующей работе [7] этот прием был обоснован для уравнения параболического типа, когда для разностной схемы с первым порядком аппроксимации по времени представлена поправка правой части с использованием найденного сеточного решения. С учетом этой поправки обоснован второй порядок сходимости по времени на той же разностной сетке по времени и пространству.

1. Схема Кранка – Николсон

Рассмотрим одномерное уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \sigma \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(t,x) \quad \forall\ (t,x) \in (0,T] \times (0,1) \tag{1}$$

с начальным и краевыми условиями

$$u(0,x) = u_0(x), \quad x \in [0,1], \tag{2}$$

$$u(t,0) = u(t,1) = 0, \quad t \in [0,T]. \tag{3}$$

Здесь $\sigma = \text{const} > 0$, а $f(t,x)$ — достаточно гладкая функция. Кроме того, функция $u_0(x)$ также является достаточно гладкой и обращается в нуль на концах отрезка $[0,1]$ для выполнения условий согласования с (3). Предполагаем, что выполняются условия, обеспечивающие непрерывность производных решения [8]. Таким образом, в дальнейших выкладках будем считать, что $u(t,x)$ — достаточно гладкая функция.

Для построения разностной схемы введем равномерные сетки по времени и пространству $\omega_\tau = \{t_k = k\tau, k = 0,\ldots,M\}$ и $\omega_h = \{x_i = ih, i = 0,\ldots,N\}$ с шагами $\tau = T/M$ и $h = 1/N$ с целыми M и N. Для формирования исходной разностной задачи используем схему Кранка – Николсон

$$\frac{y_i^k - y_i^{k-1}}{\tau} + \frac{\sigma}{2}\left(\frac{-y_{i-1}^k + 2y_i^k - y_{i+1}^k}{h^2} + \frac{-y_{i-1}^{k-1} + 2y_i^{k-1} - y_{i+1}^{k-1}}{h^2}\right) = f_i^{k-1/2},$$

$$k = 1,\ldots,M, \quad i = 1,\ldots,N-1, \tag{4}$$

$$y_i^0 = u_0 \quad (x_i), \quad i = 0,\ldots,N, \tag{5}$$

$$y_0^k = y_N^k = 0, \quad k = 0,\ldots,M, \tag{6}$$

где $y_i^k = y(t_k, x_i)$ — значение сеточной функции y, определенной на сетке $\omega_\tau \times \omega_h$, $f_i^{k-1/2} = f(t_{k-1/2}, x_i)$, $t_{k-1/2} = t_k - \tau/2$.

В сеточно-операторной форме эта схема имеет вид

$$\left(\frac{1}{\tau}I + \frac{\sigma}{2}A\right)Y^k = \left(\frac{1}{\tau}I - \frac{\sigma}{2}A\right)Y^{k-1} + F^{k-1/2}, \tag{7}$$

где I — единичная матрица, $Y^k = (y_1^k,\ldots,y_{N-1}^k)^T$, $F^{k-1/2} = (f_1^{k-1/2},\ldots,f_{N-1}^{k-1/2})^T$, A — трехдиагональная матрица следующего вида:

$$A = \frac{1}{h^2}\begin{pmatrix} 2 & -1 & & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & \\ & \cdot & \cdot & \cdot & & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & -1 & 2 \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Для произвольной сеточной функции p, заданной на ω_h и обращающейся в нуль на концах отрезка $[0,1]$, введем дискретную норму — сеточный аналог нормы пространства $L_2(0,1)$:

$$||p||_2 = \left(\sum_{i=1}^{N-1}(p_i)^2 h\right)^{1/2}. \tag{9}$$

Решение сеточной задачи (4)–(6) удовлетворяет оценке [9]

$$||y^k||_2 \le ||y^0||_2 + c_1 \max_{0\le j\le M} ||f^{j-1/2}||_2, \quad k=1,\dots,M, \tag{10}$$

с константой c_1, не зависящей от τ и h.

2. Вспомогательная разностная задача

Введем сеточную функцию

$$v_i^k = \frac{y_i^{k-1} - 2y_i^k + y_i^{k+1}}{\tau^2}, \quad i=1,\dots,N-1, \quad k=1,\dots,M. \tag{11}$$

Комбинируя уравнение (4) на соседних временных слоях t_{k+1}, t_k и t_{k-1}, получаем для нее соотношение

$$\frac{v_i^k - v_i^{k-1}}{\tau} + \frac{\sigma}{2}\left(\frac{-v_{i-1}^k + 2v_i^k - v_{i+1}^k}{h^2} + \frac{-v_{i-1}^{k-1} + 2v_i^{k-1} - v_{i+1}^{k-1}}{h^2}\right) =$$
$$= \frac{f_i^{k+1/2} - 2f_i^{k-1/2} + f_i^{k-3/2}}{\tau^2}, \quad i=1,\dots,N-1. \tag{12}$$

Из (6) очевидным образом следуют краевые условия

$$v_0^k = v_N^k = 0, \quad k=1,\dots,M. \tag{13}$$

Дополним их начальным условием

$$v_i^0 = \frac{\partial^2 u(t_0,x_i)}{\partial t^2}, \quad i=0,\dots,N. \tag{14}$$

Таким образом, мы определили сеточную функцию v как решение задачи (12)–(14).

Лемма 1. *Для решения разностной задачи* (12)–(14) *справедливо разложение*

$$v_i^k = \frac{\partial^2 u(t_k,x_i)}{\partial t^2} + \tau^2 z(t_k,x_i) + \tau^4 \xi_{k,i}^1 + h^2 \eta_{k,i}^1, \quad (t_k,x_i)\in\omega_\tau\times\omega_h, \tag{15}$$

где функция u — решение задачи (1)–(3)*; z — гладкая функция, не зависящая от τ и h; а сеточные функции ξ_k^1 и η_k^1 ограничены:*

$$||\xi_k^1||_2 \le c_2, \quad ||\eta_k^1||_2 \le c_3, \quad k=1,\dots,M. \tag{16}$$

Доказательство. Определим функцию $z(t,x)$ как решение задачи

$$\frac{\partial z(t,x)}{\partial t} - \sigma \frac{\partial^2 z(t,x)}{\partial x^2} = -\frac{1}{24}\frac{\partial^5 u(t,x)}{\partial t^5} + \frac{\sigma}{8}\frac{\partial^6 u(t,x)}{\partial t^4 \partial x^2} \quad \forall\ (t,x) \in (0,T] \times (0,1), \tag{17}$$

$$z(0,x) = 0, \quad x \in [0,1], \tag{18}$$

$$z(t,0) = z(t,1) = 0, \quad t \in [0,T]. \tag{19}$$

Поскольку функции v, $\partial^2 u/\partial t^2$ и z однозначно определены в узлах сетки, в равенстве (15) осталось оценить сеточные функции ξ^1 и η^1. Для этого подставим разложение (15) в (12) и к каждому слагаемому в (12) применим формулу Тейлора в окрестности точки $(t_{k-1/2}, x_i)$. В результате получим

$$\frac{v_i^k - v_i^{k-1}}{\tau} = \frac{\partial^3 u(t_{k-1/2},x_i)}{\partial t^3} + \frac{\tau^2}{24}\frac{\partial^5 u(t_{k-1/2},x_i)}{\partial t^5} + \tau^4 \mu^1_{k,i} +$$
$$+\tau^2\left(\frac{\partial z(t_{k-1/2},x_i)}{\partial t} + \tau^2\mu^2_{k,i}\right) + \tau^4\frac{\xi^1_{k,i}-\xi^1_{k-1,i}}{\tau} + h^2\frac{\eta^1_{k,i}-\eta^1_{k-1,i}}{\tau},$$

$$\frac{\sigma}{2}\left(\frac{-v^k_{i-1}+2v^k_i-v^k_{i+1}}{h^2} + \frac{-v^{k-1}_{i-1}+2v^{k-1}_i-v^{k-1}_{i+1}}{h^2}\right) =$$
$$= \sigma\left(-\frac{\partial^4 u(t_{k-1/2},x_i)}{\partial t^2 \partial x^2} - \frac{\tau^2}{8}\frac{\partial^6 u(t_{k-1/2},x_i)}{\partial t^4 \partial x^2} + \tau^4\mu^3_{k,i} + h^2\rho^1_{k,i}\right) +$$
$$+\tau^2\sigma\left(-\frac{\partial^2 z(t_{k-1/2},x_i)}{\partial x^2} + \tau^2\mu^4_{k,i} + h^2\rho^2_{k,i}\right) +$$
$$+\tau^4\frac{\sigma}{2}\left(\frac{-\xi^1_{k,i-1}+2\xi^1_{k,i}-\xi^1_{k,i+1}}{h^2} + \frac{-\xi^1_{k-1,i-1}+2\xi^1_{k-1,i}-\xi^1_{k-1,i+1}}{h^2}\right) +$$
$$+h^2\frac{\sigma}{2}\left(\frac{-\eta^1_{k,i-1}+2\eta^1_{k,i}-\eta^1_{k,i+1}}{h^2} + \frac{-\eta^1_{k-1,i-1}+2\eta^1_{k-1,i}-\eta^1_{k-1,i+1}}{h^2}\right),$$

$$\frac{f_i^{k+1/2} - 2f_i^{k-1/2} + f_i^{k-3/2}}{\tau^2} = \frac{\partial^2 f(t_{k-1/2},x_i)}{\partial t^2} + \frac{\tau^2}{12}\frac{\partial^4 f(t_{k-1/2},x_i)}{\partial t^4} + \tau^4\mu^5_{k,i}.$$

Здесь и далее $\mu^j_{k,i}$ и $\rho^j_{k,i}$ с разными индексами j — ограниченные сеточные функции. Объединяя полученные выражения, перепишем (12) в следующем виде:

$$\frac{\partial^3 u(t_{k-1/2},x_i)}{\partial t^3} - \sigma\frac{\partial^4 u(t_{k-1/2},x_i)}{\partial t^2\partial x^2} - \frac{\partial^2 f(t_{k-1/2},x_i)}{\partial t^2} +$$
$$+\tau^2\left(\frac{1}{24}\frac{\partial^5 u(t_{k-1/2},x_i)}{\partial t^5} + \frac{\partial z(t_{k-1/2},x_i)}{\partial t} - \frac{\sigma}{8}\frac{\partial^6 u(t_{k-1/2},x_i)}{\partial t^4\partial x^2} - \sigma\frac{\partial^2 z(t_{k-1/2},x_i)}{\partial x^2}\right) +$$
$$+\tau^4\left(\frac{\xi^1_{k,i}-\xi^1_{k-1,i}}{\tau} + \frac{\sigma}{2}\left(\frac{-\xi^1_{k,i-1}+2\xi^1_{k,i}-\xi^1_{k,i+1}}{h^2} + \frac{-\xi^1_{k-1,i-1}+2\xi^1_{k-1,i}-\xi^1_{k-1,i+1}}{h^2}\right)\right) +$$
$$+h^2\left(\frac{\eta^1_{k,i}-\eta^1_{k-1,i}}{\tau} + \frac{\sigma}{2}\left(\frac{-\eta^1_{k,i-1}+2\eta^1_{k,i}-\eta^1_{k,i+1}}{h^2} + \frac{-\eta^1_{k-1,i-1}+2\eta^1_{k-1,i}-\eta^1_{k-1,i+1}}{h^2}\right)\right) +$$
$$+\tau^4\mu^6_{k,i} + h^2\rho^3_{k,i} = 0.$$

Первые три слагаемых обращаются в нуль на основании уравнения (1). Из (17) следует, что коэффициент при τ^2 тоже обращается в нуль. Чтобы приведенное выше равенство выполнялось при любых τ и h, сеточные функции ξ^1 и η^1 должны удовлетворять сеточным уравнениям

$$\frac{\xi^1_{k,i}-\xi^1_{k-1,i}}{\tau}+\frac{\sigma}{2}\left(\frac{-\xi^1_{k,i-1}+2\xi^1_{k,i}-\xi^1_{k,i+1}}{h^2}+\frac{-\xi^1_{k-1,i-1}+2\xi^1_{k-1,i}-\xi^1_{k-1,i+1}}{h^2}\right)=\mu^7_{k,i}, \qquad (20)$$

$$\frac{\eta^1_{k,i}-\eta^1_{k-1,i}}{\tau}+\frac{\sigma}{2}\left(\frac{-\eta^1_{k,i-1}+2\eta^1_{k,i}-\eta^1_{k,i+1}}{h^2}+\frac{-\eta^1_{k-1,i-1}+2\eta^1_{k-1,i}-\eta^1_{k-1,i+1}}{h^2}\right)=\rho^4_{k,i}, \qquad (21)$$

где $||\mu^7_k||_2 \le c_4$ и $||\rho^4_k||_2 \le c_5$, $k=1,\dots,M$. Дополним их краевыми и начальными условиями. Для этого используем разложение (15). Из (11) и (6) следует, что $v^k_0=0$ и $v^k_N=0$, $k=1,\dots,M$. На основании краевого условия (3)

$$\frac{\partial^2 u(t_k,0)}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u(t_k,1)}{\partial t^2}=0, \quad k=1,\dots,M.$$

Учитывая (19), получим краевые условия

$$\xi^1_{k,0}=\xi^1_{k,N}=0, \quad k=1,\dots,M, \qquad (22)$$

$$\eta^1_{k,0}=\eta^1_{k,N}=0, \quad k=1,\dots,M. \qquad (23)$$

Учитывая (14) и (18), ввиду произвольности τ и h из (15) получаем начальные условия

$$\xi^1_{0,i}=0, \quad i=0,\dots,N, \qquad (24)$$

$$\eta^1_{0,i}=0, \quad i=0,\dots,N. \qquad (25)$$

В итоге для функций ξ^1 и η^1 мы получили сеточные задачи (20), (22), (24) и (21), (23), (25) соответственно. Они отличаются от задачи (4)–(6) только правой частью и начальным условием. Поэтому оценки (16) следуют из (10) с константами $c_2=T\max\limits_{0\le k\le M}||\mu^7_k||_2$ и $c_3=T\max\limits_{0\le k\le M}||\rho^4_k||_2$. □

3. Коррекция правой части

Предположим, что на сетке $\omega_\tau\times\omega_h$ мы получили решение задачи (4)–(6). Рассмотрим новую разностную схему для задачи (1)–(3):

$$\frac{w^1_i-w^0_i}{\tau}+\frac{\sigma}{2}\left(\frac{-w^1_{i-1}+2w^1_i-w^1_{i+1}}{h^2}+\frac{-w^0_{i-1}+2w^0_i-w^0_{i+1}}{h^2}\right)=$$
$$=f^{k-1/2}_i-\frac{-2y^0_i+7y^1_i-9y^2_i+5y^3_i-y^4_i}{12\tau}+\frac{\tau^2}{8}\frac{\partial^2 f^{1/2}_i}{\partial t^2}, \quad i=1,\dots,N-1, \qquad (26)$$

$$\frac{w^k_i-w^{k-1}_i}{\tau}+\frac{\sigma}{2}\left(\frac{-w^k_{i-1}+2w^k_i-w^k_{i+1}}{h^2}+\frac{-w^{k-1}_{i-1}+2w^{k-1}_i-w^{k-1}_{i+1}}{h^2}\right)=$$
$$=f^{k-1/2}_i-\frac{y^{k+1}_i-3y^k_i+3y^{k-1}_i-y^{k-2}_i}{12\tau}+\frac{\tau^2}{8}\frac{\partial^2 f^{k-1/2}_i}{\partial t^2}, \quad i=1,\dots,N-1, \quad k=2,\dots,M, \qquad (27)$$

$$w^0_i=u_0(x_i), \quad i=0,\dots,N, \qquad (28)$$

$$w^k_0=w^k_N=0, \quad k=0,\dots,M. \qquad (29)$$

Используя (11), можем записать

$$\frac{-2y^0_i+7y^1_i-9y^2_i+5y^3_i-y^4_i}{12\tau}=\frac{\tau}{12}(2(v^2_i-v^1_i)-(v^3_i-v^2_i)), \quad i=1,\dots,N-1, \qquad (30)$$

$$\frac{y^{k+1}_i-3y^k_i+3y^{k-1}_i-y^{k-2}_i}{12\tau}=\frac{\tau}{12}(v^k_i-v^{k-1}_i), \quad i=1,\dots,N-1, \quad k=2,\dots,M. \qquad (31)$$

Такое представление слагаемых в правых частях (26) и (27) будем использовать для теоретических выкладок.

Лемма 2. *Для решения разностной задачи* (26)–(29) *справедливо разложение*

$$w_i^k = u(t_k, x_i) + \tau^4 \xi_{k,i}^2 + h^2 \eta_{k,i}^2, \quad (t_k, x_i) \in \omega_\tau \times \omega_h, \tag{32}$$

где функция u — *решение задачи* (1)–(3), *а сеточные функции* ξ_k^2 *и* η_k^2 *ограничены:*

$$||\xi_k^2||_2 \le c_6, \quad ||\eta_k^2||_2 \le c_7, \quad k = 1, \dots, M. \tag{33}$$

Доказательство. Как и при доказательстве леммы 1, нужно определить сеточные функции ξ_k^2 и η_k^2, пользуясь разложением (32). Левая часть сеточного уравнения (26) совпадает с левой частью (27) при $k = 1$. Поэтому, подставляя в слагаемые в левой части (27) разложение (32) при $k = 1, \dots, M$ и используя формулу Тейлора в окрестности точки $(t_{k-1/2}, x_i)$, получаем следующие выражения:

$$\begin{gathered}
\frac{w_i^k - w_i^{k-1}}{\tau} = \frac{\partial u(t_{k-1/2}, x_i)}{\partial t} + \frac{\tau^2}{24}\frac{\partial^3 u(t_{k-1/2}, x_i)}{\partial t^3} + \tau^4 \frac{\xi_{k,i}^2 - \xi_{k-1,i}^2}{\tau} + h^2 \frac{\eta_{k,i}^2 - \eta_{k-1,i}^2}{\tau} + \tau^4 \mu_{k,i}^8, \\
\frac{\sigma}{2}\left(\frac{-w_{i-1}^k + 2w_i^k - w_{i+1}^k}{h^2} + \frac{-w_{i-1}^{k-1} + 2w_i^{k-1} - w_{i+1}^{k-1}}{h^2}\right) = -\sigma \frac{\partial^2 u(t_{k-1/2}, x_i)}{\partial x^2} - \\
-\frac{\tau^2}{8}\sigma \frac{\partial^4 u(t_{k-1/2}, x_i)}{\partial t^2 \partial x^2} + \tau^4 \frac{\sigma}{2}\left(\frac{-\xi_{k,i-1}^2 + 2\xi_{k,i}^2 - \xi_{k,i+1}^2}{h^2} + \frac{-\xi_{k-1,i-1}^2 + 2\xi_{k-1,i}^2 - \xi_{k-1,i+1}^2}{h^2}\right) + \\
+h^2 \frac{\sigma}{2}\left(\frac{-\eta_{k,i-1}^2 + 2\eta_{k,i}^2 - \eta_{k,i+1}^2}{h^2} + \frac{-\eta_{k-1,i-1}^2 + 2\eta_{k-1,i}^2 - \eta_{k-1,i+1}^2}{h^2}\right) + \tau^4 \mu_{k,i}^9 + h^2 \rho_{k,i}^5, \quad k = 1, \dots, M.
\end{gathered} \tag{34}$$

Слагаемые (30) и (31) в правых частях (26) и (27) соответственно содержат величину вида $\tau(v_i^k - v_i^{k-1})$ при $k = 2, \dots, M$, где сеточная функция v^k задана соотношением (11) при $k = 1, \dots, M$. Подставляя в (11) разложение (15) и пользуясь формулой Тейлора в окрестности точки $(t_{k-1/2}, x_i)$, получим

$$\tau(v_i^k - v_i^{k-1}) = \tau^2 \frac{\partial^3 u(t_{k-1/2}, x_i)}{\partial t^3} + \tau^4 \mu_{k,i}^{10} + h^2 \rho_{k,i}^6, \quad k = 2, \dots, M. \tag{35}$$

Используя (35) при $k = 2$ и $k = 3$, для выражения в правой части (30) получаем

$$\tau(2(v_i^2 - v_i^1) - (v_i^3 - v_i^2)) = \tau^2 \left(2\frac{\partial^3 u(t_{3/2}, x_i)}{\partial t^3} - \frac{\partial^3 u(t_{5/2}, x_i)}{\partial t^3} + \tau^2 \mu_{2,i}^{11}\right) + h^2 \rho_{2,i}^7.$$

Используя для производных в правой части полученной формулы разложение Тейлора в окрестности точки $(t_{1/2}, x_i)$, запишем ее в виде

$$\tau(2(v_i^2 - v_i^1) - (v_i^3 - v_i^2)) = \tau^2 \frac{\partial^3 u(t_{1/2}, x_i)}{\partial t^3} + \tau^4 \mu_{1/2,i}^{12} + h^2 \rho_{1/2,i}^8. \tag{36}$$

Далее при $k = 2, \dots, M$ подставим (34) и (35) с учетом (31) в разностную схему (27). Получим равенство

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial u(t_{k-1/2},x_i)}{\partial t}-\sigma\frac{\partial^2 u(t_{k-1/2},x_i)}{\partial x^2}-f(t_{k-1/2},x_i)+\\
&+\frac{\tau^2}{8}\left(\frac{\partial^3 u(t_{k-1/2},x_i)}{\partial t^3}-\sigma\frac{\partial^4 u(t_{k-1/2},x_i)}{\partial t^2\partial x^2}-\frac{\partial^2 f(t_{k-1/2},x_i)}{\partial t^2}\right)+\\
&+\tau^4\left(\frac{\xi^2_{k,i}-\xi^2_{k-1,i}}{\tau}+\frac{\sigma}{2}\left(\frac{-\xi^2_{k,i-1}+2\xi^2_{k,i}-\xi^2_{k,i+1}}{h^2}+\frac{-\xi^2_{k-1,i-1}+2\xi^2_{k-1,i}-\xi^2_{k-1,i+1}}{h^2}\right)\right)+\\
&+h^2\left(\frac{\eta^2_{k,i}-\eta^2_{k-1,i}}{\tau}+\frac{\sigma}{2}\left(\frac{-\eta^2_{k,i-1}+2\eta^2_{k,i}-\eta^2_{k,i+1}}{h^2}+\frac{-\eta^2_{k-1,i-1}+2\eta^2_{k-1,i}-\eta^2_{k-1,i+1}}{h^2}\right)\right)+\\
&+\tau^4\mu^{13}_{k,i}+h^2\rho^9_{k,i}=0,\quad i=1,\dots,N-1,\quad k=2,\dots,M.
\end{aligned}
\tag{37}
$$

При $k=1$ аналогичным образом подставим (34) и (36) с учетом (30) в (26). Полученное соотношение будет отличаться от (37) при $k=1$ только сеточными функциями $\mu^j_{k,i}$ и $\rho^j_{k,i}$. Поэтому мы можем считать (37) справедливым при всех $k=1,\dots,M$.

На основании уравнения (1) первые три слагаемых и коэффициент в скобках при τ^2 в левой части (37) равны нулю. В итоге в силу произвольности τ и h мы получим два уравнения относительно сеточных функций ξ^2 и η^2

$$
\frac{\xi^2_{k,i}-\xi^2_{k-1,i}}{\tau}+\frac{\sigma}{2}\left(\frac{-\xi^2_{k,i-1}+2\xi^2_{k,i}-\xi^2_{k,i+1}}{h^2}+\frac{-\xi^2_{k-1,i-1}+2\xi^2_{k-1,i}-\xi^2_{k-1,i+1}}{h^2}\right)=\mu^{14}_{k,i}, \tag{38}
$$

$$
\frac{\eta^2_{k,i}-\eta^2_{k-1,i}}{\tau}+\frac{\sigma}{2}\left(\frac{-\eta^2_{k,i-1}+2\mu^2_{k,i}-\eta^2_{k,i+1}}{h^2}+\frac{-\eta^2_{k-1,i-1}+2\mu^2_{k-1,i}-\eta^2_{k-1,i+1}}{h^2}\right)=\rho^{10}_{k,i} \tag{39}
$$

с ограниченными сеточными функциями μ^{14}_k и ρ^{10}_k в правой части.

Из разложения (32) с учетом условий (28), (29) и (3) получим начальные и краевые условия для функций ξ^2 и η^2:

$$\xi^2_{0,i}=0,\quad i=0,\dots,N, \tag{40}$$

$$\eta^2_{0,i}=0,\quad i=0,\dots,N, \tag{41}$$

$$\xi^2_{k,0}=\xi^2_{k,N}=0,\quad k=0,\dots,M, \tag{42}$$

$$\eta^2_{k,0}=\eta^2_{k,N}=0,\quad k=0,\dots,M. \tag{43}$$

Таким образом, для определения сеточных функций ξ^2 и η^2 имеем разностные задачи (38), (40), (42) и (39), (41), (43) соответственно. Поэтому оценки (33) выполняются с константами $c_6=T\max\limits_{0\le k\le M}||\mu^{14}_k||_2$ и $c_7=T\max\limits_{0\le k\le M}||\rho^{10}_k||_2$. □

4. Вычислительный эксперимент

Для иллюстрации повышения порядка точности схемы с откорректированной правой частью рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f(t,x),\quad (t,x)\in[0,1]\times[0,1],$$

с краевыми и начальным условиями

$$
\begin{gathered}
u(t,0)=u(t,1)=0\quad\forall\, t\in[0,1],\\
u(0,x)=u_0(x)=\sin(\pi x^2)\quad\forall\, x\in[0,1].
\end{gathered}
$$

Порядки сходимости разностных схем
Convergence orders for difference schemes

τ	e_1^h	$s_1^h \approx 2.0$	$\log_2(s_1^h) \approx 2.0$	e_2^h	$s_2^h \approx 2.0$	$\log_2(s_2^h) \approx 2.0$
1/10	$2.90{\cdot}10^{-3}$	–	–	$2.9281{\cdot}10^{-3}$	–	–
1/20	$9.86{\cdot}10^{-4}$	2.94	1.56	$1.8288{\cdot}10^{-4}$	16.01	4.00
1/40	$2.72{\cdot}10^{-4}$	3.63	1.86	$1.1430{\cdot}10^{-5}$	16.00	4.00
1/80	$6.96{\cdot}10^{-5}$	3.90	1.97	$7.1440{\cdot}10^{-7}$	16.00	4.00
1/160	$1.75{\cdot}10^{-5}$	3.98	1.99	$4.4025{\cdot}10^{-8}$	16.23	4.02

Полагая правую часть равной

$$f(t,x) = 2\exp(t^2)\left((t+2\pi^2x^2)\sin(\pi x^2) - \pi\cos(\pi x^2)\right),$$

получаем точное решение

$$u(t,x) = \exp(t^2)\sin(\pi x^2).$$

Возьмем $\tau_0 = h_0 = 1/10$, а затем $\tau_n = \tau_0/2^n$ и $h_n = h_0/4^n$ для $n = 1,\dots,5$. Более сильное убывание шагов по пространству связано с выравниванием более грубого вклада слагаемых вида $O(h^2)$ в общую погрешность уточненного решения $O(\tau^4 + h^2)$.

Рассмотрим погрешности приближенных решений на последнем шаге по времени

$$e_1^h = \left(\sum_{i=1}^{N-1}(y_i^M - u_i^M)^2 h\right)^{1/2} \quad \text{и} \quad e_2^h = \left(\sum_{i=1}^{N-1}(w_i^M - u_i^M)^2 h\right)^{1/2}$$

и проследим за убыванием нормы ошибки приближенного решения с помощью функций $s_j^h = e_j^{2h}/e_j^h$ для обеих схем с $j = 1,2$.

Результаты последовательного применения разностных схем (4)–(6) и (26)–(29) приведены в таблице. Они действительно демонстрируют улучшение со второго порядка сходимости до четвертого по времени, оставляя неизменным второй порядок сходимости по пространству.

Заключение

Итак, для разностной схемы Кранка – Николсон мы действительно обосновали теоретически и подтвердили вычислительным экспериментом повышение порядка сходимости по времени со второго по четвертый. По сравнению с предшествующей работой [7] для этого же параболического уравнения, где проведено повышение с первого до второго порядка разностной схемы с опережением, доказательство усложнилось как увеличением порядка используемых поправочных разностей, так и учетом погрешности, производимой усреднением оператора второй производной.

Может возникнуть вопрос о несоответствии порядков аппроксимации по времени и пространству у откорректированной разностной схемы. Но первоначально этот прием авторами разрабатывался для использования с аппроксимацией методом конечных элементов по пространству, где дискретизация сразу получалась третьего или четвертого порядка в зависимости от сложности конечных элементов. Но сложность совместного обоснования метода конечных разностей по времени и конечных элементов по пространству приводила к непрозрачному и громоздкому изложению, затрудняющему первое знакомство с относительно простым алгоритмическим приемом для повышения точности приближенных решений.

При частом использовании этого метода коррекции надежда на его многократное применение с дальнейшим увеличением точности за счет последующего уточнения правой части налетела на влияние ошибок округления. Для объяснения этого влияния обратим внимание на множитель $1/\tau$ перед суммой значений предыдущего решения в (26) и (27). Этот множитель увеличивает влияние их ошибок округления как в правой части, так и в откорректированном решении. А разности более высокого порядка привели бы к еще большей степени этого множителя, так что придется увеличивать число знаков в мантиссе для уменьшения такого влияния.

Благодарности. Работа поддержана Красноярским математическим центром, финансируемым Министерством науки и высшего образования Российской Федерации в рамках мероприятий по созданию и развитию региональных НОМЦ (соглашение № 075-02-2025-1606).

Список литературы

[1] **Яненко Н.Н., Шокин Ю.И.** О первом дифференциальном приближении разностных схем для гиперболических систем уравнений. Сибирский математический журнал. 1969; 10(5):1173–1187.

[2] **Шокин Ю.И.** Метод дифференциального приближения. Новосибирск: Наука; 1979: 224.

[3] **Bohmer K., Stetter H.J.** Defect correction methods. Theory and Applications. Springer: Wien; 1984: 243.

[4] **Shaidurov V., Novikov A.** Difference schemes for second-order ordinary differential equations with corrector and predictor properties. Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling. 2022; 37(3):175–187.

[5] **Волков Е.А.** Решение задачи Дирихле методом уточнений разностями высших порядков. I. Дифференциальные уравнения. 1965; 1(7):946–960.

[6] **Волков Е.А.** Решение задачи Дирихле методом уточнений разностями высших порядков. II. Дифференциальные уравнения. 1965; 1(8):1070–1084.

[7] **Shaydurov V.V., Gileva L.V., Golubev R.A.** Analysis of the error of difference solutions as a basis for improving accuracy. Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling. 2025; 40(3):1–9.

[8] **Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Г.** Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука; 1967: 736.

[9] **Вабищевич П.Н.** Численные методы решения нестационарных задач. М.: ЛЕНАНД; 2021: 464.

Вычислительные технологии, 2025, том 30, № 4, с. 108–118. © ФИЦ ИВТ, 2025 ISSN 1560-7534
Computational Technologies, 2025, vol. 30, no. 4, pp. 108–118. © FRC ICT, 2025 eISSN 2313-691X

COMPUTATIONAL TECHNOLOGIES

DOI:10.25743/ICT.2025.30.4.010

Improving the accuracy of the Crank – Nicolson difference scheme by correcting the right-hand side using difference derivatives of the initial solution

V. V. Shaydurov*, L. V. Gileva, R. A. Golubev

Institute of Computational Modelling SB RAS, 660036, Krasnoyarsk, Russia
*Corresponding author: Vladimir V. Shaydurov, e-mail: shaidurov04@mail.ru
Received May 21, 2025, revised June 18, 2025, accepted June 24, 2025.

Abstract

The study of the main terms of the truncation error for difference schemes plays rather important role. Firstly, for a stable difference scheme, the value of the main term of the truncation error determines the order of convergence of its grid solution. Secondly, when coupled with the original equation, they form the so-called first differential approximation [1, 2], which at the differential level methodically suggests the properties of the difference scheme. In order to illustrate the use of the first differential approximation, we present an abstract of one of the works by Yu.I. Shokin [1]. "The issues of stability and approximation viscosity of difference schemes for hyperbolic systems of equations are considered. It is shown that the stability and approximation viscosity of schemes are determined by their first differential approximation. For a number of schemes (simple, majorant, splitting), the sufficiency (and the necessity in some cases) of incomplete parabolicity of first differential approximations for the stability of the schemes is proved. In addition, necessary and sufficient conditions are given for the schemes to have an approximation viscosity that does not act on one of the invariants of the system (property)".

Thus, the main error terms, missing in the explicit form of the difference scheme, in combination with the original equation, nevertheless, affect fundamental properties such as stability, convergence, and the fulfillment of conservation laws in a number of cases. Note that attempts to add grid approximations for some main error terms to the difference scheme usually lead to instability of the resulting difference schemes.

In our approach, to improve the accuracy of a numerical solution, we do not change the difference scheme operator, thus leaving the first differential approximation unchanged. We improve the accuracy of the approximation by correcting the right-hand side to compensate the contribution of one of the main error terms. This correction is determined using the already calculated grid solution of the lower order difference scheme. Despite the fact that the lower order difference scheme has only the second order convergence in time, the scheme with the corrected right-hand side already is of the fourth order convergence in time. This property is theoretically proved and is confirmed by a computational experiment.

For ordinary differential equations, the application of this method is described in the collective monograph edited by K. Bohmer and H.J. Stetter [3], and was also used in the work by V.V. Shaidurov and A.E. Novikov [4] for systems of such equations. For partial differential equations, the application was restricted by difference schemes for the Poisson equation [5, 6]. In our previous work [7], this method was applied to a parabolic equation, where the correction of the right-hand side of a difference scheme of the first order convergence in time results in the second order convergence on the same difference grid in both time and space.

Keywords: approximation error, correction of a difference scheme.

Citation: Shaydurov V.V., Gileva L.V., Golubev R.A. Improving the accuracy of the Crank – Nicolson difference scheme by correcting the right-hand side using difference derivatives of the initial solution. Computational Technologies. 2025; 30(4):108–118. DOI:10.25743/ICT.2025.30.4.010. (In Russ.)

Acknowledgements. This work is supported by the Krasnoyarsk Mathematical Center and financed by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation in the framework of the establishment and development of regional Centers for Mathematics Research and Education (Agreement No. 075-02-2025-1606).

References

1. **Yanenko N.N., Shokin Yu.I.** The first differential approximation of difference schemes for hyperbolic systems of equations. Siberian Mathematical Journal. 1969; 10(5):868–880. DOI:10.1007/BF00971662.
2. **Shokin Yu.I.** The method of differential approximation. Berlin: Springer; 1983: 298.
3. **Bohmer K., Stetter H.J.** Defect correction methods. Theory and Applications. Springer: Wien; 1984: 243.
4. **Shaidurov V., Novikov A.** Difference schemes for second-order ordinary differential equations with corrector and predictor properties. Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling. 2022; 37(3):175–187.
5. **Volkov E.A.** Solving the Dirichlet problem by a method of corrections with higher order differences. I. Differentsial'nye Uravneniya. 1965; 1(7):946–960. (In Russ.)
6. **Volkov E.A.** Solving the Dirichlet problem by a method of corrections with higher order differences. II. Differentsial'nye Uravneniya. 1965; 1(8):1070–1084. (In Russ.)
7. **Shaydurov V.V., Gileva L.V., Golubev R.A.** Analysis of the error of difference solutions as a basis for improving accuracy. Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling. 2025; 40(3):1–9.
8. **Ladyzhenskaya O., Solonnikov V., Ural'ceva N.** Linear and quasilinear equations of parabolic type. Providence: American Mathematical Society; 1968: 648.
9. **Vabischevich P.N.** Chislennye metody resheniya nestatsionarnyh zadach [Numerical methods for solving non-stationary problems]. Moscow: LENAND; 2021: 464. (In Russ.)