

Представление двумерных решений полной системы уравнений Навье – Стокса с помощью тригонометрических рядов

С. П. БАУТИН^{1,*}, И. А. ВАЗИЕВА¹, А. Г. ОБУХОВ²

¹Снежинский физико-технический институт Национальный исследовательский ядерный университет МИФИ, 456776, Снежинск, Россия

²Тюменский государственный университет, 625000, Тюмень, Россия

*Контактный автор: Баутин Сергей Петрович, e-mail: spbautin@mail.ru

Поступила 13 июня 2025 г., доработана 20 июня 2025 г., принята в печать 03 июля 2025 г.

В работе в случае двух независимых пространственных переменных рассматривается полная система уравнений Навье – Стокса, решения которой описывают движение сжимаемого вязкого теплопроводного газа. Для нее в квадрате на плоскости xOy ставится задача Коши с непрерывными начальными данными. После соответствующего продолжения этих данных на больший квадрат решение задачи Коши представляется в виде соответствующих тригонометрических рядов по пространственным переменным. Коэффициенты рядов являются искомыми функциями от времени. Для этих коэффициентов приведена бесконечная система обыкновенных дифференциальных уравнений с соответствующими начальными условиями. Построены конечные отрезки тригонометрических сумм, приближенно передающие решения рассматриваемых задач Коши.

Ключевые слова: полная система уравнений Навье – Стокса, задача Коши, тригонометрические ряды, приближенные решения.

Цитирование: Баутин С.П., Вазиева И.А., Обухов А.Г. Представление двумерных решений полной системы уравнений Навье – Стокса с помощью тригонометрических рядов. Вычислительные технологии. 2025; 30(4):66–76. DOI:10.25743/ICT.2025.30.4.007.

Введение

При решении начально-краевых задач для нелинейных уравнений с частными производными основными являются разностные методы, при этом численно определяется конечное число значений искомых функций в отдельных изолированных точках. Но очень часто под вопросом остаются надежность и адекватность получаемых разностными методами численных результатов.

Среди аналитических методов получения решений нелинейных уравнений с частными производными одним из основных методов является использование конечных или бесконечных представлений с применением различных систем базисных функций для разных функциональных пространств.

На протяжении более чем двухсотлетней истории исследований уравнений с частными производными одним из востребованных функциональных базисов является базис

из тригонометрических функций. Хотя в 1804 г. при первых изложениях предложенного Ж.Б.Ж. Фурье подхода к решению линейного уравнения теплопроводности современники ставили чуть ли не в вину то, что в нем не используются степенные ряды. Заметим, что через семьдесят лет, в 1874 г., С.В. Ковалевская привела свой знаменитый контр-пример, показывающий, что линейное уравнение теплопроводности может не иметь решения в виде сходящегося ряда по степеням времени [1, 2]. К сожалению, эффективность тригонометрических рядов Фурье и более поздних обобщений этого подхода имеет место только при решении линейных задач.

Спустя двести лет после первых работ Ж.Б.Ж. Фурье методика применения бесконечных тригонометрических рядов была эффективно применена для математического моделирования одномерных течений сжимаемого вязкого теплопроводного газа при построении решений нелинейной системы уравнений с частными производными смешанного типа [3]. Но доказать сходимость используемых тригонометрических рядов тогда не удалось. Проведенные численные расчеты [3] показали “машинную” сходимость используемых представлений: при увеличении числа слагаемых в конечных отрезках тригонометрических рядов, используемых для приближенного описания решений, отличия в разных приближениях фактически стремились к нулю.

Недавно применяя описанную методику представления с помощью тригонометрического ряда решения задачи Коши для уравнения Бюргерса

$$u_t + uu_x = \mu_0 u_{xx}, \quad u(t, x)|_{t=0} = \sum_{k=1}^{\infty} u_k^o \sin(kx),$$

являющегося нелинейным уравнением с частными производными, удалось доказать сходимость построенного тригонометрического ряда [4]. Также и в случае нелинейной системы уравнений движения построены [5–7] сходящиеся тригонометрические ряды, задающие решения соответствующих задач Коши. Эти факты и послужили отправной точкой для исследований, представленных в данной работе: в случае двух независимых пространственных переменных построение в виде тригонометрических рядов решений полной системы уравнений Навье – Стокса.

1. Полная система уравнений Навье – Стокса в двумерном случае

Полная система уравнений Навье – Стокса в случае двух пространственных переменных имеет следующий вид [2, 8], естественно, эквивалентный более раннему представлению этой системы [9]:

$$\begin{cases} \delta_t + u\delta_x + v\delta_y - \delta(u_x + v_y) = 0, \\ u_t + uu_x + vv_y + \frac{1}{\gamma}\delta p_x = \mu_0\delta \left(\frac{1}{4}v_{xy} + u_{xx} + \frac{3}{4}u_{yy} \right), \\ v_t + uv_x + vv_y + \frac{1}{\gamma}\delta p_y = \mu_0\delta \left(\frac{1}{4}u_{xy} + v_{yy} + \frac{3}{4}v_{xx} \right), \\ p_t + up_x + vp_y + \gamma p(u_x + v_y) = \kappa_0 p(\delta_{xx} + \delta_{yy}) + 2\kappa_0(p_x\delta_x + p_y\delta_y) + \\ + \kappa_0\delta(p_{xx} + p_{yy}) + \mu_0\gamma(\gamma - 1) \left[(u_x^2 - u_x v_y + v_y^2) + \frac{3}{4}(u_y + v_x)^2 \right], \end{cases} \quad (1)$$

где $\delta = 1/\rho$ — удельный объем; u, v — декартовы компоненты векторов скорости газа; p — давление; γ — показатель адиабаты газа; μ_0, κ_0 — постоянные коэффициенты вязкости и теплопроводности.

На плоскости xOy задается некоторый квадрат, и без нарушения общности рассмотрения полагается, что он имеет вид

$$\{0 \leq x \leq \pi; 0 \leq y \leq \pi\}.$$

Для системы (1), решения которой описывают двумерные нестационарные течения сжимаемого вязкого теплопроводного политропного газа в указанном квадрате, задаются непрерывные начальные условия, разделенные по пространственным переменным:

$$\begin{cases} \delta(t, x, y)|_{t=0} = 1 + \delta_1^o(x) + \delta_2^o(y), \\ u(t, x, y)|_{t=0} = u_1^o(x) + u_2^o(y), \\ v(t, x, y)|_{t=0} = v_1^o(x) + v_2^o(y), \\ p(t, x, y)|_{t=0} = 1 + p_1^o(x) + p_2^o(y). \end{cases}$$

Функции $\delta_1^o(x)$, $p_1^o(x)$, $\delta_2^o(y)$, $p_2^o(y)$ продолжают четным образом: первые две — на отрезок $\{-\pi \leq x \leq 0\}$, вторые две функции — на отрезок $\{-\pi \leq y \leq 0\}$. Четыре другие функции из начальных условий: $u_1^o(x)$, $v_1^o(x)$, $u_2^o(y)$, $v_2^o(y)$ — продолжают нечетным образом: на отрезок $\{-\pi \leq x \leq 0\}$ — первая пара, на отрезок $\{-\pi \leq y \leq 0\}$ — вторая пара.

После такого продолжения для системы (1) при $\{-\pi \leq x \leq \pi\}$ и $\{-\pi \leq y \leq \pi\}$ начальные условия с учетом их четности могут быть представлены в виде

$$\begin{cases} \delta(t, x, y)|_{t=0} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\delta_{k,1}^o \cos(kx) + \delta_{k,2}^o \cos(ky) \right), \\ u(t, x, y)|_{t=0} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(u_{k,1}^o \sin(kx) + u_{k,2}^o \sin(ky) \right), \\ v(t, x, y)|_{t=0} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(v_{k,1}^o \sin(kx) + v_{k,2}^o \sin(ky) \right), \\ p(t, x, y)|_{t=0} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(p_{k,1}^o \cos(kx) + p_{k,2}^o \cos(ky) \right), \end{cases} \quad (2)$$

где вследствие непрерывности функций $f_1^o(x)$, $f_2^o(y)$ выписанные тригонометрические ряды сходятся при всех x, y . Здесь $f \in \{\delta, u, v, p\}$.

Смысл двойных индексов следующий: первый индекс задает частоту гармоник, перед которой стоит данный коэффициент тригонометрического ряда; второй индекс равен единице, если гармоника зависит от первой пространственной переменной x ; второй индекс равен двойке, если гармоника зависит от второй пространственной переменной y .

Решение задачи (1), (2) ищется в виде

$$\begin{aligned} \delta(t, x, y) &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\delta_{k,1}(t) \cos(kx) + \delta_{k,2}(t) \cos(ky) \right), \\ u(t, x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(u_{k,1}(t) \sin(kx) + u_{k,2}(t) \sin(ky) \right), \\ v(t, x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(v_{k,1}(t) \sin(kx) + v_{k,2}(t) \sin(ky) \right), \\ p(t, x, y) &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(p_{k,1}(t) \cos(kx) + p_{k,2}(t) \cos(ky) \right) \end{aligned} \quad (3)$$

с неизвестными коэффициентами $\delta_{k,1}(t)$, $\delta_{k,2}(t)$, $u_{k,1}(t)$, $u_{k,2}(t)$, $v_{k,1}(t)$, $v_{k,2}(t)$, $p_{k,1}(t)$, $p_{k,2}(t)$, зависящими от t и для которых заданы начальные условия при $x = 0$, $y = 0$

$$f_{k,1}(0) = f_{k,1}^o, \quad f_{k,2}(0) = f_{k,2}^o.$$

Здесь также $f \in \{\delta, u, v, p\}$, переменная k принимает целые положительные значения.

2. Преобразования уравнений системы (1)

Для первого уравнения системы (1) все требуемые преобразования ниже выписаны подробно. Сначала по представлениям (3) определяются частные производные, входящие в первое уравнение системы (1). Потом в это уравнение подставляются (3) и найденные выражения для производных. В полученном соотношении раскрываются скобки, и оно расписывается через двойные суммы:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{\infty} \delta'_{k,1}(t) \cos(kx) + \sum_{k=1}^{\infty} \delta'_{k,2}(t) \cos(ky) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} u_{k,1}(t) m \delta_{m,1}(t) \sin(kx) \sin(mx) + \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} u_{k,2}(t) m \delta_{m,1}(t) \sin(ky) \sin(mx) + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} v_{k,1}(t) m \delta_{m,2}(t) \sin(kx) \sin(my) + \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} v_{k,2}(t) m \delta_{m,2}(t) \sin(ky) \sin(my) + \sum_{k=1}^{\infty} k u_{k,1}(t) \cos(kx) + \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \delta_{k,1}(t) m u_{m,1}(t) \cos(kx) \cos(mx) + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \delta_{k,2}(t) m u_{m,1}(t) \cos(ky) \cos(mx) + \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} k v_{k,2}(t) \cos(ky) + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \delta_{k,1}(t) m v_{m,2}(t) \cos(kx) \cos(my) + \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \delta_{k,2}(t) m v_{m,2}(t) \cos(ky) \cos(my). \end{aligned}$$

Полученное уравнение проецируется на базис $\{\cos x, \cos 2x, \cos 3x, \dots\}$, т.е. последовательно умножается на $\cos(\ell x)$, $\ell = 1, 2, \dots$, и интегрируется по x и y на отрезках от $-\pi$ до $+\pi$. Далее учитываются значения конкретных определенных интегралов и вводится константа

$$a_{km\ell} = \begin{cases} 1, & \text{если } \ell = k + m \text{ или } \ell = |k - m|, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Также учитывается, что константа

$$b_{km\ell} = \begin{cases} 1, & \text{если } \ell = |k - m|, \\ -1, & \text{если } \ell = k + m, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

С помощью этих констант вычисляются интегралы

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \cos(kx) \cos(mx) \cos(\ell x) dx = \frac{\pi}{2} a_{km\ell}, \quad \int_{-\pi}^{+\pi} \sin(kx) \sin(mx) \cos(\ell x) dy = \frac{\pi}{2} b_{km\ell}.$$

В результате получается бесконечная система обыкновенных дифференциальных уравнений и после деления каждого уравнения на $2\pi^2$ эта система имеет нормальную форму

$$\delta'_{\ell,1}(t) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} m u_{k,1}(t) \delta_{m,1}(t) b_{km\ell} + \ell u_{\ell,1}(t) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} m u_{k,1}(t) \delta_{m,1}(t) a_{km\ell}, \quad \ell = 1, 2, \dots$$

Для построения приближенных решений системы (1) используются конечные суммы

$$f(t, x, y) = 1 + \sum_{k=1}^K \left(f_{k,1}(t) \cos(kx) + f_{k,2}(t) \cos(ky) \right),$$

$$g(t, x, y) = \sum_{k=1}^K \left(g_{k,1}(t) \cos(kx) + g_{k,2}(t) \cos(ky) \right),$$

где K — выбранное значение числа слагаемых в конечных отрезках рядов, $f \in \{\delta, p\}$, $g \in \{u, v\}$.

Тогда бесконечные системы обыкновенных дифференциальных уравнений перейдут в конечные системы следующего вида:

$$\delta'_{\ell,1}(t) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^K \sum_{m=1}^K m u_{k,1}(t) \delta_{m,1}(t) b_{km\ell} + \ell u_{\ell,1}(t) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^K \sum_{m=1}^{\infty} m u_{k,1}(t) \delta_{m,1}(t) a_{km\ell}, \quad \ell = 1, 2, \dots, K.$$

Учет значений констант $a_{km\ell}$, $b_{km\ell}$ приводит к следующим обыкновенным дифференциальным уравнениям для коэффициентов $\delta_{\ell,1}(t)$:

при $\ell = 1$

$$\delta'_{1,1}(t) = \sum_{j=1}^{K-1} \left(j u_{j+1,1}(t) \delta_{j,1}(t) + (j+1) u_{j,1}(t) \delta_{j+1,1}(t) \right) + u_{1,1}(t), \quad (4)$$

при $2 \leq \ell \leq K-1$

$$\delta'_{\ell,1}(t) = \sum_{j=1}^{K-\ell} \left(j u_{j+\ell,1}(t) \delta_{j,1}(t) + (j+\ell) u_{j,1}(t) \delta_{j+\ell,1}(t) \right) + \ell u_{\ell,1}(t), \quad (5)$$

при $\ell = K$

$$\delta'_{K,1}(t) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{K-1} (K-2j) u_{K-j,1}(t) \delta_{j,1}(t) + K u_{K,1}(t). \quad (6)$$

Затем уравнение (1) проецируется на базис $\{\cos y, \cos 2y, \cos 3y, \dots\}$, т.е. последовательно умножается на $\cos(\ell y)$, $\ell = 1, 2, \dots, K$, и интегрируется по x и y на отрезках от $-\pi$ до $+\pi$.

После соответствующих преобразований получается следующая конечная система обыкновенных дифференциальных уравнений для коэффициентов $\delta_{\ell,2}(t)$:

при $\ell = 1$

$$\delta'_{1,2}(t) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{K-1} (2j+1) \left(v_{j,2}(t) \delta_{j+1,2}(t) + v_{j+1,2}(t) \delta_{j,2}(t) \right) + u_{1,2}(t), \quad (7)$$

при $2 \leq \ell \leq K-1$

$$\delta'_{\ell,2}(t) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{K-\ell} (2j+\ell) \left(v_{j,2}(t) \delta_{j+\ell,2}(t) + v_{j+\ell,2}(t) \delta_{j,2}(t) \right) +$$

$$+ \ell u_{\ell,2}(t) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\ell-1} (\ell-2j) v_{\ell-j,2}(t) \delta_{j,2}(t), \quad (8)$$

при $\ell = K$

$$\delta'_{K,2}(t) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{K-1} (K-2j) v_{K-j,2}(t) \delta_{j,2}(t) + K u_{K,2}(t). \quad (9)$$

Построение соответствующих приближений остальных искомых функций задачи (1), (2) также сводится к получению соответствующих конечных систем обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$f'_{\ell,i}(t) = F_{\ell,i}(f_{j,i}(t)), \quad \ell = 1, 2, \dots, K, \quad i = 1, 2, \quad f \in \{u, v, p\}. \quad (10)$$

Данные системы достаточно громоздкие, и поэтому их вид здесь не приводится.

3. Приближенные решения системы (1)

Численное решение систем обыкновенных дифференциальных уравнений (4)–(10) позволяет построить начальные отрезки тригонометрических рядов (3) и тем самым получить приближенные решения задачи (1), (2).

Исходные данные: $\mu_0 = 0.001$; $K = 90$; количество точек по времени $t_* = 100$ с шагом выдачи результатов 0.5; вычисления производятся с заранее заданной точностью $\varepsilon = 10^{-4}$; количество точек по пространственным переменным $M_x = 101$, $x \in [0; \pi]$ и $M_y = 101$, $y \in [0; \pi]$.

Представление решений через конечные суммы выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} \delta(t, x, y) &= \delta_1(t, x) + \delta_2(t, y) = 1 + \sum_{k=1}^K \delta_{k,1}(t) \cos(kx) + \sum_{k=1}^K \delta_{k,2}(t) \cos(ky), \\ u(t, x, y) &= u_1(t, x) + u_2(t, y) = \sum_{k=1}^K u_{k,1}(t) \sin(kx) + \sum_{k=1}^K u_{k,2}(t) \sin(ky), \\ v(t, x, y) &= v_1(t, x) + v_2(t, y) = \sum_{k=1}^K v_{k,1}(t) \sin(kx) + \sum_{k=1}^K v_{k,2}(t) \sin(ky), \\ p(t, x, y) &= p_1(t, x) + p_2(t, y) = 1 + \sum_{k=1}^K p_{k,1}(t) \cos(kx) + \sum_{k=1}^K p_{k,2}(t) \cos(ky). \end{aligned}$$

В рассмотренном ниже примере взяты следующие начальные условия:

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta_{1,1}(0) = 0, \delta_{k,1}(0) = 0, \quad \text{если } k \geq 2, \\ \delta_{1,2}(0) = 0, \delta_{k,2}(0) = 0, \quad \text{если } k \geq 2, \\ u_{1,1}(0) = 0, u_{2,1}(0) = 0.1, u_{k,1}(0) = 0, \quad \text{если } k \geq 3, \\ u_{1,2}(0) = 0, u_{2,2}(0) = 0, u_{3,2}(0) = 0.1, u_{k,2}(0) = 0, \quad \text{если } k \geq 4, \\ v_{1,1}(0) = 0, v_{2,1}(0) = 0, v_{3,1}(0) = 0.1, v_{k,1}(0) = 0, \quad \text{если } k \geq 4, \\ v_{1,2}(0) = 0, v_{2,2}(0) = 0, v_{3,2}(0) = 0, v_{4,2}(0) = 0, v_{5,2}(0) = 0.1, v_{k,2}(0) = 0, \quad \text{если } k \geq 6, \\ p_{1,1}(0) = 0.1, p_{k,1}(0) = 0, \quad \text{если } k \geq 2, \\ p_{1,2}(0) = 0, p_{k,2}(0) = 0, \quad \text{если } k \geq 2. \end{array} \right.$$

Значит, предлагаемые начальные условия для конечных сумм имеют вид

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta(t, x, y)|_{t=0} = 1, \\ u(t, x, y)|_{t=0} = 0.1 \sin(2x) + 0.1 \sin(3y), \\ v(t, x, y)|_{t=0} = 0.1 \sin(3x) + 0.1 \sin(5y), \\ p(t, x, y)|_{t=0} = 1 + 0.1 \cos(x). \end{array} \right. \quad (11)$$

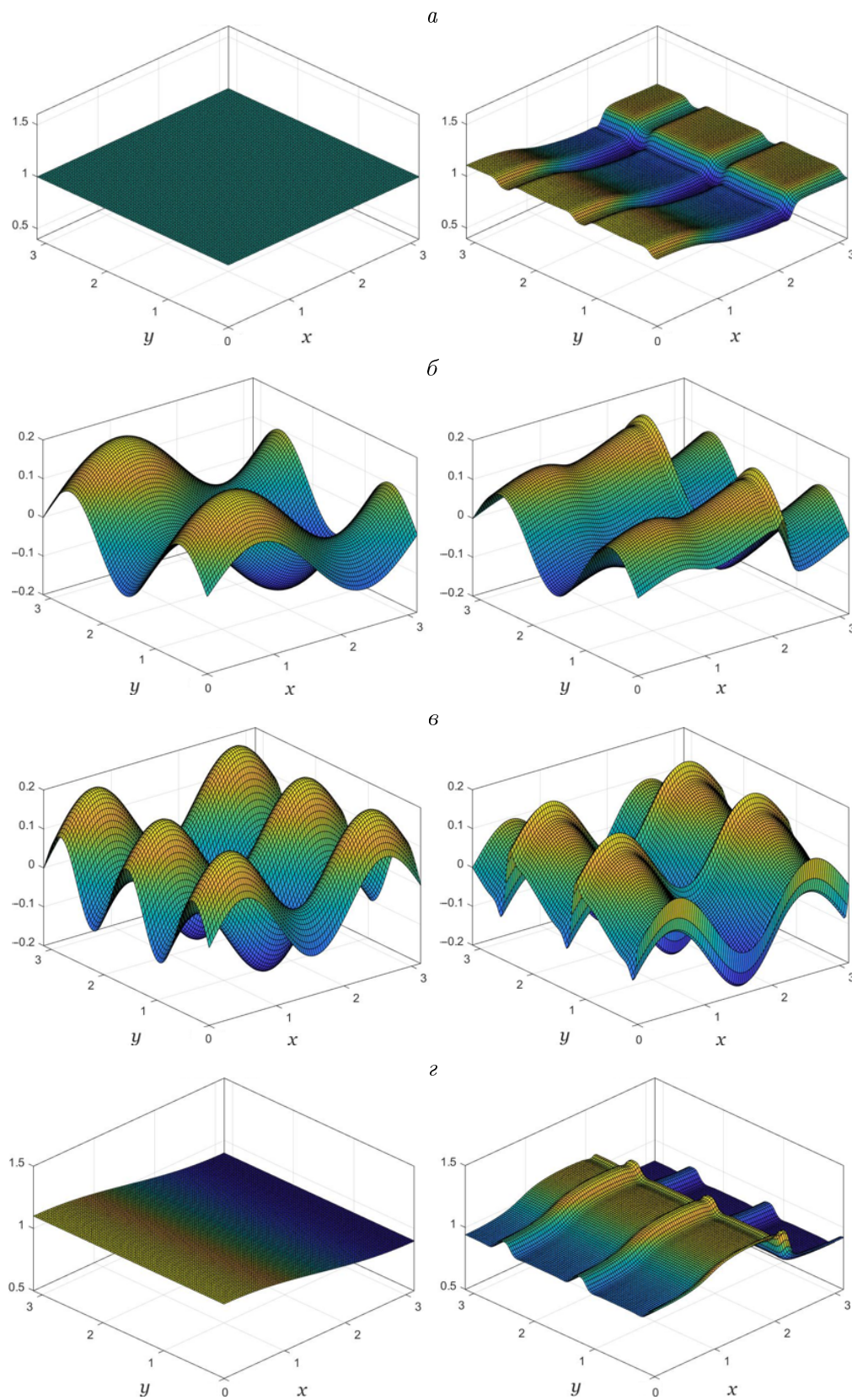


Рис. 1. Поверхности удельного объема δ (*а*), функций u (*б*) и v (*в*) и поверхности давления p (*г*) в моменты времени $t = 0$ (слева) и $t = 20$ (справа)

Fig. 1. Specific volume surfaces δ (*а*), the functions u (*б*) and v (*в*) and pressure surface p (*г*) at time points $t = 0$ (left) and $t = 20$ (right)

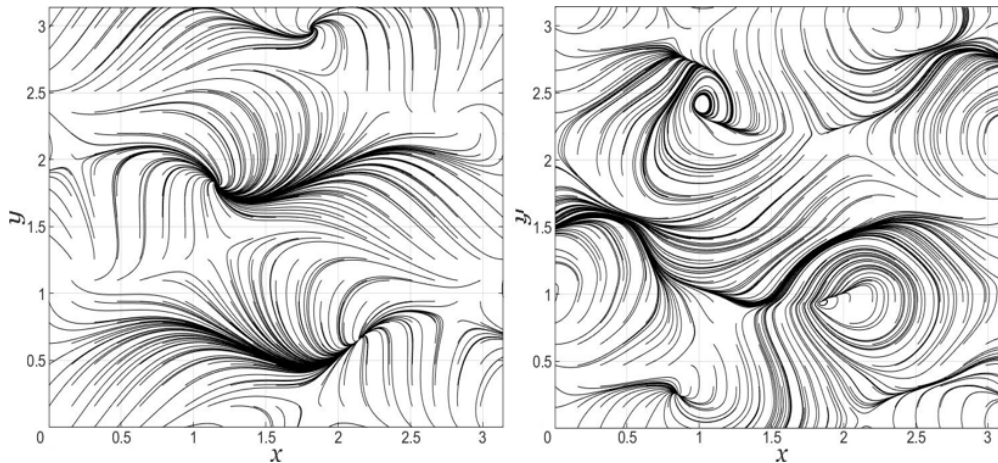


Рис. 2. Мгновенные линии тока в моменты времени $t = 5$ (слева) и $t = 20$ (справа)
 Fig. 2. Instantaneous streamlines at time points $t = 5$ (left) and $t = 20$ (right)

На рис. 1 и 2 приведены результаты расчетов основных характеристик течений сжимаемого вязкого теплопроводного газа для двух безразмерных расчетных моментов времени: $t = 0$ и 20. Фиксированный момент времени $t = 0$ соответствует начальному заданному состоянию течения газа согласно начальным условиям (11).

С течением времени газодинамические параметры газа изменяются. На правых частях рисунков представлены графики функций двух пространственных переменных x и y в фиксированный момент времени $t = 20$.

На рис. 1, а представлены графики удельного объема $\delta(t, x, y)|_{t=0} = 1$ и $\delta(t, x, y)|_{t=20}$. На рис. 1, б и в приведены графики проекций $u(t, x, y)|_{t=0}$, $u(t, x, y)|_{t=20}$, $v(t, x, y)|_{t=0}$, $v(t, x, y)|_{t=20}$ векторов скоростей на оси координат Ox и Oy соответственно. На рис. 1, г размещены графики давления $p(t, x, y)|_{t=0}$ и $p(t, x, y)|_{t=20}$. На рис. 2 изображены мгновенные линии тока, построенные в результате численных расчетов. Они дают наглядное представление о возникающих сложных двумерных течениях газа.

В соответствии с начальными условиями общее движение газа задается в виде периодических колебаний давления по закону косинуса $p(t, x, y)|_{t=0} = 1 + 0.1 \cos(x)$ с амплитудой 0.1 и единичной частотой вдоль оси абсцисс. Такое заданное начальными условиями периодическое движение газа приводит к соответствующему периодическому изменению всех других газодинамических параметров, на которое накладываются периодические разночастотные колебания компонентов скоростей $u(t, x, y)$ и $v(t, x, y)$. В результате возникает очень сложное нестационарное разнонаправленное вихревое течение газа, изображенное на рис. 2.

Появление большого количества разнонаправленных вихрей обусловлено тем, что во многих локальных участках расчетной области возникают примыкающие друг к другу течения противоположных направлений и различной интенсивности. Это хорошо видно на рис. 2.

Динамика изменений газодинамических параметров течения газа в данном варианте расчетов в общем виде представлена в [10].

Заключение

В работе описана методика представления решений в виде сходящихся бесконечных тригонометрических рядов, впервые она применена для нелинейных систем уравнений

с частными производными, в том числе в случае двух пространственных переменных. Показано, что методика решения систем нелинейных уравнений с частными производными с помощью тригонометрических сумм эффективно применяется для описания течений сжимаемого вязкого теплопроводного газа. С использованием этой методики строятся новые решения нелинейных уравнений с частными производными, которые могут служить тестами для расчетов нелинейных уравнений разностными методами.

Список литературы

- [1] **Ковалевская С.В.** К теории дифференциальных уравнений с частными производными. Научные труды. М.: Издательство АН СССР; 1948: 368.
 - [2] **Баутин С.П.** Характеристическая задача Коши и ее приложения в газовой динамике. Новосибирск: Наука; 2009: 368.
 - [3] **Баутин С.П., Замыслов В.Е., Скачков П.П.** Математическое моделирование тригонометрическими рядами одномерных течений вязкого теплопроводного газа. Новосибирск: Наука; Екатеринбург: Издательство УрГУПС; 2014: 91.
 - [4] **Баутин С.П., Замыслов В.Е.** Представление решений уравнения Бюргерса тригонометрическими рядами. Вестник национального исследовательского ядерного университета «МИФИ». 2022; 11(4):305–318.
 - [5] **Баутин С.П., Карелина О.А., Обухов А.Г.** Представление решений системы уравнений движения с помощью тригонометрических рядов. Вестник национального исследовательского ядерного университета «МИФИ». 2023; 12(1):39–51.
 - [6] **Баутин С.П., Карелина О.А., Обухов А.Г.** Некоторые нестационарные двумерные течения газа, определяемые с помощью тригонометрических рядов. Вестник национального исследовательского ядерного университета «МИФИ». 2023; 12(4):223–232.
 - [7] **Баутин С.П., Замыслов В.Е., Карелина О.А., Обухов А.Г.** Решение нелинейных уравнений с частными производными тригонометрическими рядами. Снежинск: СФТИ НИЯУ МИФИ; 2024: 153.
 - [8] **Ковеня В.М., Яненко Н.Н.** Метод расщепления в задачах газовой динамики. Новосибирск: Наука; 2007: 310.
 - [9] **Лойцянский Л.Г.** Механика жидкости и газа. М.: Наука; 1970: 904.
 - [10] **Баутин С.П., Обухов А.Г.** Вариант расчета двумерных нестационарных течений вязкого сжимаемого теплопроводного газа с помощью тригонометрических рядов. Снежинск: СФТИ НИЯУ МИФИ; 2024. Адрес доступа: https://vkvideo.ru/video-71669107_456239267 (дата обращения 03 июня 2025).
-

Representation of two-dimensional solutions for the complete system of Navier – Stokes equations using trigonometric seriesS. P. BAUTIN^{1,*}, I. A. VAZIEVA¹, A. G. OBUKHOV²¹Snezhinsky Institute of Physics and Technology National Research Nuclear University MEPhI, 456776, Snezhinsk, Russia²Tyumen State University, 625000, Tyumen, Russia*Corresponding author: Sergey P. Bautin, e-mail: spbautin@mail.ru

Received June 13, 2025, revised June 20, 2025, accepted July 03, 2025.

Abstract

The paper addresses the complete set of Navier – Stokes equations in the case of two independent spatial variables. Solutions of these equations describe the flows of compressible viscous heat-conducting gas. The Cauchy problem with continuous initial data is posed in the squared on the xOy plane. Continuation of these data on the second square leads to the solution of the Cauchy problem which is presented in the form of corresponding trigonometric series for spatial variables. The coefficients of the series are the desired functions of time. Infinite system of ordinary differential equations with corresponding initial conditions for these coefficients is presented. Finite segments of trigonometric sums approximating the solutions of the Cauchy problem under consideration are presented.

Keywords: the complete system of Navier – Stokes equations, the Cauchy problem, trigonometric series, approximate solutions.

Citation: Bautin S.P., Vazieva I.A., Obukhov A.G. Representation of two-dimensional solutions for the complete system of Navier – Stokes equations using trigonometric series. Computational Technologies. 2025; 30(4):66–76. DOI:10.25743/ICT.2025.30.4.007. (In Russ.)

References

1. **Kovalevskaya S.V.** K teorii differentsial'nykh uravneniy s chastnymi proizvodnymi [On the theory of partial differential equations]. Scientific proceedings. Moscow: Izdatel'stvo AN SSSR; 1948: 368. (In Russ.)
2. **Bautin S.P.** Kharakteristicheskaya zadacha Koshi i ee prilozheniya v gazovoy dinamike [The characteristic Cauchy problem and its applications in gas dynamics]. Novosibirsk: Nauka; 2009: 368. (In Russ.)
3. **Bautin S.P., Zamyslov V.E., Skachkov P.P.** Matematicheskoe modelirovanie trigonometricheskimi ryadami odnomernykh techeniy вязкого теплопроводного газа [Mathematical modeling by trigonometric series of one-dimensional flows of viscous heat-conducting gas]. Novosibirsk: Nauka; Ekaterinburg: Izdatel'stvo UrGUPS; 2014: 91. (In Russ.)
4. **Bautin S.P., Zamyslov V.E.** Representation of solutions to the Burgers equation trigonometric series. Vestnik Natsional'nogo Issledovatel'skogo Yadernogo Universiteta "MIFI". 2022; 11 (4):305–318. (In Russ.)
5. **Bautin S.P., Karelina O.A., Obukhov A.G.** Submission of decisions system of equations of motion using trigonometric series. Vestnik Natsional'nogo Issledovatel'skogo Yadernogo Universiteta "MIFI". 2023; 12(1):39–51. (In Russ.)
6. **Bautin S.P., Karelina O.A., Obukhov A.G.** Some unsteady two-dimensional gas flows, determined using trigonometric series. Vestnik Natsional'nogo Issledovatel'skogo Yadernogo Universiteta "MIFI". 2023; 12(4):223–232. (In Russ.)

7. **Bautin S.P., Zamyslov V.E., Karelina O.A., Obukhov A.G.** Reshenie nelineynykh uravneniy s chastnymi proizvodnymi trigonometricheskimi ryadami [Solving nonlinear partial differential equations using trigonometric series]. Snezhinsk: SFTI NIYaU MIFI; 2024: 153. (In Russ.)
8. **Kovenya V.M., Yanenko N.N.** Metod rasshchepleniya v zadachakh gazovoy dinamiki [The splitting method in problems of gas dynamics]. Novosibirsk: Nauka; 2007: 310. (In Russ.)
9. **Loitsyanskii L.G.** Mekhanika zhidkosti i gaza [Mechanics of liquid and gas]. Moscow: Nauka; 1970: 904. (In Russ.)
10. **Bautin S.P., Obukhov A.G.** Variant rascheta dvumernykh nestatsionarnykh techeniy vyazkogo szhimaemogo teploprovodnogo gaza s pomoshch'yu trigonometricheskikh ryadov [A variant of calculating two-dimensional unsteady flows of a viscous compressible heat-conducting gas using trigonometric series]. Snezhinsk: SFTI NIYaU MIFI; 2024. Available at: https://vkvideo.ru/video-71669107_456239267. (In Russ.) (accessed June 03, 2025).