

Фрактальные характеристики многомасштабных цифровых моделей нефтяных пластов

Р. Р. ГИЛЬМАНОВ¹, И. А. ТАЙМАНОВ², А. А. ЯКОВЛЕВ^{3,*}

¹Уфимский государственный нефтяной технический университет, 450064, Уфа, Россия

²Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, 630090, Новосибирск, Россия

³ООО «Национальная газовая компания», 107023, Москва, Россия

*Контактный автор: Яковлев Андрей Александрович, e-mail: yakovlevandrey@yandex.ru

Поступила 01 июня 2025 г., доработана 18 июня 2025 г., принята в печать 27 июня 2025 г.

В работе обсуждается взвешенная фрактальная размерность — характеристика нефтяных коллекторов. Показано, что эта характеристика устойчива при различных реализациях цифровых неоднородных анизотропных стохастических моделей реальных месторождений. Получена устойчивая зависимость такого параметра разработки нефтяного месторождения, как эффективность охвата, от фрактальных характеристик. На эту зависимость не влияет корреляционная функция геологической модели. Поэтому взвешенную фрактальную размерность можно использовать для решения обратных задач, когда известны параметры разработки и необходимо восстановить корреляционные функции и геологическое строение, при оптимизации параметров разработки нефтяных месторождений, где время вычислений имеет решающее значение, и при обучении нейронных сетей.

Ключевые слова: фрактальная размерность, цифровая модель, нефтяной пласт.

Цитирование: Гильманов Р.Р., Тайманов И.А., Яковлев А.А. Фрактальные характеристики многомасштабных цифровых моделей нефтяных пластов. Вычислительные технологии. 2025; 30(4):41–53. DOI:10.25743/ICT.2025.30.4.005.

Памяти Ю.И. Шокина

Введение

Геологическое и гидродинамическое моделирование (ГГМ) является неотъемлемой частью процесса разработки нефтегазовых месторождений. Моделирование представляет собой длительный и сложный процесс, который состоит из двух основных этапов:

- 1) моделирование распределения петрофизических параметров и геофизического поля на основе данных наблюдений и с помощью методов интерполяции;
- 2) гидродинамическое моделирование на основе уравнений фильтрации в зависимости от стратегии разработки (конфигурации скважин, режимов добычи и т. д.).

Сложность и длительность процесса ГГМ объясняются отсутствием достаточного объема информации об объекте и необходимостью обеспечения соответствия параметров моделей, полученных на каждом этапе, друг другу. Довольно часто этот процесс становится итеративным. Своевременное построение качественных моделей — основа для принятия эффективных управленческих решений при разработке месторождений, поэтому в настоящее время, когда доля традиционных коллекторов уменьшается, а основной акцент при разработке нефтяных месторождений смещается на сильно расчле-

ненные и низкопроницаемые коллекторы, разработка новых подходов к созданию геологических и гидродинамических моделей является актуальной задачей.

Предлагается подход к моделированию с применением геометрических и топологических методов, в его основе лежит представление нефтегазовых коллекторов как трехмерных тел, для которых уже рассматриваются их топологические и геометрические характеристики:

- числа Бетти (ранги групп гомологий), персистентные гомологии и расстояние “бутылочного горлышка” (bottleneck distance) [1–3];
- скалярные функционалы Минковского [4, 5].

Коллектор представляется как трехмерное тело, разложенное на кубы или симплексы с плоскими границами. Однако реальные коллекторы и их границы весьма нерегулярны, и имеет смысл представлять их как фрактальные множества. Предложенный подход можно использовать для настройки параметров, оценки, классификации и создания моделей.

В статье приведены основные сведения о математических методах и конструкциях, использованных в работе, рассмотрена взвешенная фрактальная размерность как инструмент для связывания динамических и статических моделей.

1. Фрактальная размерность

Существует довольно много природных объектов с самоподобием (фракталом): кроны деревьев, листья растений, берега, ледяные узоры, горные хребты и т. д. Понятие фрактала ввел Мандельброт [7]. Фрактальные характеристики широко используются при моделировании трещиноватых коллекторов [8, 9]. К таким объектам неприменимы обычные характеристики меры (длина, площадь, объем). Например, на рис. 1 показано, что длина гладкой кривой, являющейся одномерным объектом, может быть вычислена с помощью покрытия с минимальным числом N шаров диаметра ϵ :

$$L = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} N(\epsilon) \epsilon = \text{const.}$$

Для кривых сложной геометрической формы предельное значение L стремится к бесконечности.

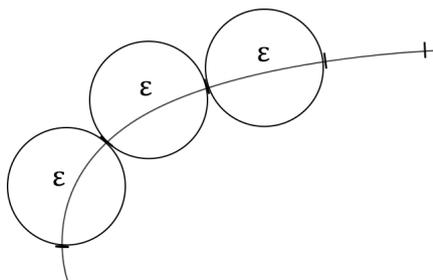


Рис. 1. Покрытие гладкой кривой шарами
Fig. 1. Covering a smooth curve by balls

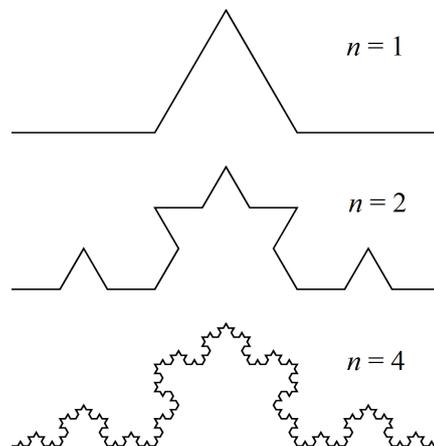


Рис. 2. Кривая Коха
Fig. 2. Koch curve

Мандельброт предложил использовать в качестве меры геометрической сложности объектов фрактальную размерность, которая по существу характеризует плотность и равномерность заполнения евклидова пространства рассматриваемым множеством.

Фрактальная размерность расширяет понятие топологической размерности. Для регулярных фигур, таких как отрезок, круг или шар, фрактальная размерность равна обычной размерности.

Понятие фрактальной размерности FD использует числа $N(\epsilon)$ минимальных покрытий множествами диаметра ϵ :

$$N(\epsilon) \approx \epsilon^{-\text{FD}}.$$

Например, фрактальная размерность кривой Коха (рис. 2) равна

$$\text{FD} = \frac{\log 4}{\log 3} \approx 1.26,$$

поскольку воспроизводит четыре новых копии при $1/3$ -скейлинге на каждом шаге.

Существуют различные подходы к определению фрактальной размерности: размерность счетчика (Минковского – Булигана), размерность Хаусдорфа – Безиковича, информационная размерность, корреляционная размерность и др. [10].

Мы используем размерность подсчета ящиков (box-counting dimension). Ее определение основано на минимальных покрытиях n -мерными кубами с длиной стороны ϵ :

$$\text{FD} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\log N(\epsilon)}{\log(1/\epsilon)},$$

где $N(\epsilon)$ — число кубов со стороной ϵ в минимальном покрытии.

Численные расчеты этого инварианта реализованы в нескольких пакетах. Во всех случаях вычисления должны останавливаться при достаточно малых значениях ϵ , когда отношение $\frac{\log N(\epsilon)}{\log(1/\epsilon)}$ почти стабилизируется. Авторы использовали оригинальное программное обеспечение, разработанное ими и их коллегами.

2. Методы цифрового геологического моделирования

Существует несколько подходов к анализу и обработке таких пространственно распределенных данных, которые можно условно разделить на три категории: детерминированная интерполяция, стохастическая интерполяция и методы машинного обучения.

Детерминированные методы интерполяции позволяют найти аналитическую зависимость между значениями данных в пространстве. Широко используемые зависимости: обратная пропорциональность, сплайн-интерполяция и др. Эти методы существенно просты в оценке, но они игнорируют пространственную корреляцию и неоднородность резервуаров, тогда как стохастические методы позволяют представить такие свойства.

Методы стохастической интерполяции обеспечивают различные равновероятные реализации пространственного поля и позволяют специалистам избежать “недостаточно гладких” моделей, полученных детерминированными методами.

Популярным стохастическим методом построения таких полей в геостатистике является последовательное гауссово моделирование (ПГМ, см., например, [6, 11]). Рассмотрим его и покажем его отличие от спектрального метода [6], который также используется при моделировании.

Последовательное гауссово моделирование экстраполирует данные, известные на множестве точек $P = \{p_1, \dots, p_N\}$ геологического слоя (кубического комплекса) $X \times Y \times H \subset \mathbb{R}^3$ следующим образом. Геофизическое поле представлено случайной функцией $G(p)$, где p — набор координат элементарного куба, $p \in X \times Y \times H$, и значения $G(p)$ известны для $p \in P$. Последовательное гауссово моделирование предполагает, что данные нормально распределены в каждой точке. Он использует описанную ниже процедуру кригинга, которая предполагает стационарность $G(p)$ в каждой ячейке:

- математические ожидания во всех элементарных ячейках равны предопределенному значению M (простой кригинг):

$$E(G(p)) = E(G(q)) = M \quad \text{для всех } p, q \in X \times Y \times H;$$

- корреляция между значениями в различных ячейках зависит только от пространственного расстояния $|p - q| = h$ между их центрами:

$$\text{Cov}(G(p), G(q)) = C(|p - q|) = C(h);$$

- корреляционная функция $C(h)$ задается предопределенной “функцией вариограммы” $\gamma(h)$, выбранной на основе экспертных оценок:

$$\gamma(h) = \frac{1}{2}E((G(p) - G(p+h))^2) = C(0) - C(|h|).$$

Стандартными вариограммами являются гауссова

$$\gamma(h) = \text{const} \left(1 - e^{-h^2/R^2}\right)$$

и экспоненциальная

$$\gamma(h) = \text{const} \left(1 - e^{-h/R^2}\right),$$

зависящие от параметра R , который называется рангом вариограммы.

Кригинг основан на линейной оценке случайного поля $G(p)$ в $X \times Y \times H$:

$$G^*(p) = M + \sum_{i=1}^N \lambda_i(p)(G(p_i) - M).$$

Такая оценка является несмещенной:

$$E(G^*(p) - G(p)) = 0.$$

Веса $\lambda_i(p)$ находятся из условия

$$\text{Var}(G^*(p) - G(p)) = \sigma^2 \rightarrow \min.$$

Последовательное гауссово моделирование использует эту процедуру, чтобы оценить значение G в каждом элементарном кубе $p \in X \times Y \times H \setminus P$, в котором значение $G(p)$ еще неизвестно. Сначала случайно выбирается точка $p_{N+1} \in X \times Y \times H \setminus P$. Значение $G(p_{N+1})$ определяется с помощью кригинга

$$G(p_{N+1}) = M + \sum_{i=1}^N \lambda(p_{N+1})(G(p_i) - M),$$

где веса $\lambda_i(p)$ находятся из условия минимизации дисперсии: производная дисперсии по каждому весу равна нулю

$$\frac{\partial \sigma^2}{\partial \lambda_i} = \text{Cov}(G(p_i), G(p)) - \sum_{j=1}^N \lambda_j \text{Cov}(G(p_i), G(p_j)) = 0 \quad \text{для всех } i = 1, \dots, N,$$

что приводит к системе

$$\sum_{j=1}^N \lambda_j C(|p_i - p_j|) = C(0) \quad \text{для всех } i = 1, \dots, N.$$

Затем эта процедура повторяется для набора из $N+1$ точек $\{p_1, \dots, p_N, p_{N+1}\}$, в которых значения поля G известны, и т. д.

В данной работе тип и диапазон вариограммы были выбраны для варьирования связности геологических слоев.

Рассмотрим другой стохастический метод — спектральный [6]. Геофизическое поле представлено случайной функцией $G(x, y, h)$, где x, y — латеральные координаты, h — вертикальная координата, $(x, y, h) \in X \times Y \times H \subset \mathbb{R}^3$, $X \times Y \times H$ — геологический слой. Следовательно, геофизическое поле $G(x, y, h)$ в каждой точке (x, y) представлено в виде вертикальной скважины (кривая геологического исследования слоя) и разложено в ряд Фурье по некоторому ортонормированному базису $e_i(h) \in L_2(H)$. Коэффициенты разложения $c_i(x, y)$ имеют следующий вид:

$$G(x, y, h) = \sum_i c_i(x, y) e_i(h) = \sum_i \left(m_i(x, y) + \sigma_i(x, y) \xi_i(x, y) \right) e_i(h).$$

Здесь $m_i(x, y)$ и $\sigma_i(x, y)$ являются детерминированными и представляют собой среднее значение и дисперсию стохастического поля $c_i(x, y)$, а $\xi_i(x, y)$ — гауссово стационарное поле. Среднее значение и дисперсия оцениваются с использованием метода k -ближайших соседей (k NN), а вариации k приводят к разным связностям моделей. Этот и другие способы оценки этих величин обсуждаются в [12].

3. Фрактальные характеристики в геологическом и гидродинамическом моделировании

Помимо топологических и геометрических характеристик трехмерных тел, представляющих нефтяные коллекторы, существует и другой способ описания сложной структуры исследуемых объектов. Путь заключается в использовании теории фракталов, которая работает с множествами нецелой размерности. Такое нецелочисленное измерение предоставляет некоторую важную информацию о поведении исследуемых структур. Важность учета фрактальных характеристик сред при гидродинамическом, термодинамическом и других видах моделирования обсуждалась, например, в [13].

Фрактальная размерность — параметр, который следует учитывать в явном виде при моделировании динамики системы [5, 6]. Этот факт натолкнул авторов статьи на возможность поиска зависимости между фрактальной размерностью (статическими характеристиками) и некоторыми характеристиками добычи нефти (динамическими характеристиками).

Объемно-взвешенная фрактальная размерность $\langle \text{FD} \rangle$ резервуара определяется как

$$\langle \text{FD} \rangle = \frac{\sum_{i=1}^N v_i \text{FD}_i}{\sum_{i=1}^N v_i},$$

где FD_i — фрактальная размерность i -й компоненты резервуара, v_i — объем (число ячеек) i -й компоненты и N — число связных компонент.

4. Характеристики нефтедобычи

Коэффициент нефтеотдачи RF — одна из основных характеристик разработки, показывающая скорость извлечения нефти из геологического объекта. Ее значение зависит от многих факторов и различается на разных нефтяных месторождениях. Во многом коэффициент зависит от применяемых на месторождении методов разработки (в том числе вторичных или третичных методов нефтеотдачи) и коллекторских свойств. В общем случае коэффициент нефтеотдачи оценивается как отношение количества добытой нефти Q_{rec} к геологическим запасам нефти Q_{res} :

$$RF = Q_{rec}/Q_{res}.$$

Существует несколько подходов к вычислению значения RF: статистический, основанный на зависимости коэффициента нефтеотдачи от геологических и технологических факторов и аналитический — по формуле, позволяющей разложить коэффициент нефтеотдачи RF на коэффициенты, зависящие от различных условий:

$$RF = E_D E_{vol},$$

где E_D — коэффициент эффективности вытеснения, определяемый как отношение количества нефти, вытесненной непрерывным заводнением, к начальному количеству запасов нефти в пласте, а E_{vol} — объемный коэффициент охвата.

Коэффициент E_D можно рассчитать, используя начальную нефтенасыщенность S_{oi} , остаточную нефтенасыщенность S_{or} , объемный коэффициент нефтеносного пласта в начале заводнения B_{oi} и объемный коэффициент нефтеносного пласта, соответствующий давлению заводнения B_{oa} :

$$E_D = 1 - \frac{S_{or} B_{oi}}{S_{oi} B_{oa}}.$$

Обычно E_D находят экспериментально в лаборатории, анализируя образцы керна и пластовые флюиды.

Объемный коэффициент охвата E_{vol} определяется как отношение объема резервуара, охваченного заводнением, к общему объему резервуара, содержащего нефть. Коэффициент E_{vol} измеряет объем резервуара, содержащего нефть и закачиваемую жидкость. Обычно его рассчитывают эмпирически — через статистические зависимости от выбранной сети скважин, коэффициентов подвижности фаз и неоднородности геологической формации. Он представляется как произведение эффективности охвата по площади E_A и эффективности охвата по вертикали E_V :

$$E_{vol} = E_A E_V.$$

Здесь E_A представляет собой долю предполагаемой площади затопления, занимаемую вытесняемой жидкостью, а E_V — ту же долю захваченной толщины. E_A и E_V обычно используются в моделях с усредненными параметрами: одномерных или двумерных моделях с несколькими вертикальными слоями пласта. Этот метод предложен А.П. Крыловым [14] и более подробно описан, например, в [15]. Мы отсылаем к этим книгам за детальными определениями всех величин.

Гидродинамическое моделирование процессов фильтрации представляет собой численное решение системы дифференциальных уравнений фильтрации с граничными

условиями, соответствующими выбранной системе разработки нефти. Исходя из того, что [5] и другие авторы показывают явное влияние фрактальной размерности на продуктивные характеристики нефтяного месторождения, задачей в статье было исследование зависимостей между $\langle FD \rangle$ моделируемого резервуара и E_{vol} для некоторой стратегии разработки. E_{vol} выбрано потому, что E_D больше зависит от свойств образца керна породы и свойств флюида.

5. Зависимости между фрактальными характеристиками моделируемого коллектора и объемным коэффициентом охвата

Гидродинамическое моделирование выполнялось с помощью программ Schlumberger PETREL и Schlumberger ECLIPSE, что позволило подготовить и выполнить численное моделирование многофазных течений в поровых системах на основе:

- 1) закона Дарси, связывающего поток q_i , давление p_i , относительную проницаемость k_{r_i} , динамическую вязкость μ_i i -й фазы и общую проницаемость k :

$$q_i = -\frac{k_{r_i} k}{\mu_i} \nabla p_i;$$

- 2) уравнения материального баланса

$$\frac{\partial(\phi S_i)}{\partial t} + \operatorname{div} q_i = 0,$$

где S_i — насыщенность i -й фазы и ϕ — пористость;

- 3) уравнения на капиллярное давление $p_{c_{ij}}$ между i -й и j -й фазами

$$p_{c_{ij}} = p_i - p_j;$$

- 4) определения сжимаемости жидкости

$$c_i = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial p_i},$$

где c_i и ρ_i — сжимаемость и плотность i -й фазы.

Для проведения численного моделирования в программе Schlumberger PETREL подготовлена цифровая модель участка нефтяного месторождения (рис. 3).

Месторождение размера $5000 \times 5000 \times 20$ м разбивается на $100 \times 100 \times 100$ ячеек (элементарных параллелепипедов размера $50 \times 50 \times 0.2$ м). В этой цифровой модели пористость интерполируется с помощью алгоритма ПГМ [6, 11] с математическим ожиданием $E = 0.15$, стандартным отклонением $\sigma = 0.05$, экспоненциальной вариограммой с рангами $R = 100, 500, 900$ м вдоль осей X и Y и 0.1 м вдоль оси Z .

Коллектор задается с помощью коэффициента экскурсии (cutoff) α_0 : подразумевается, что куб принадлежит коллектору, если значение α некоторого поля (ниже мы будем рассматривать пористость) на этом кубе удовлетворяет неравенству $\alpha \leq \alpha_0$.

Для каждого ранга вариограммы было сгенерировано 10 реализаций. Далее для каждой такой реализации было получено 30 бинарных моделей (коллектор/неколлектор) с помощью коэффициента экскурсии параметра пористости от нуля до 0.3 с шагом 0.01 . Наконец, было подготовлено 900 бинарных моделей для гидродинамического

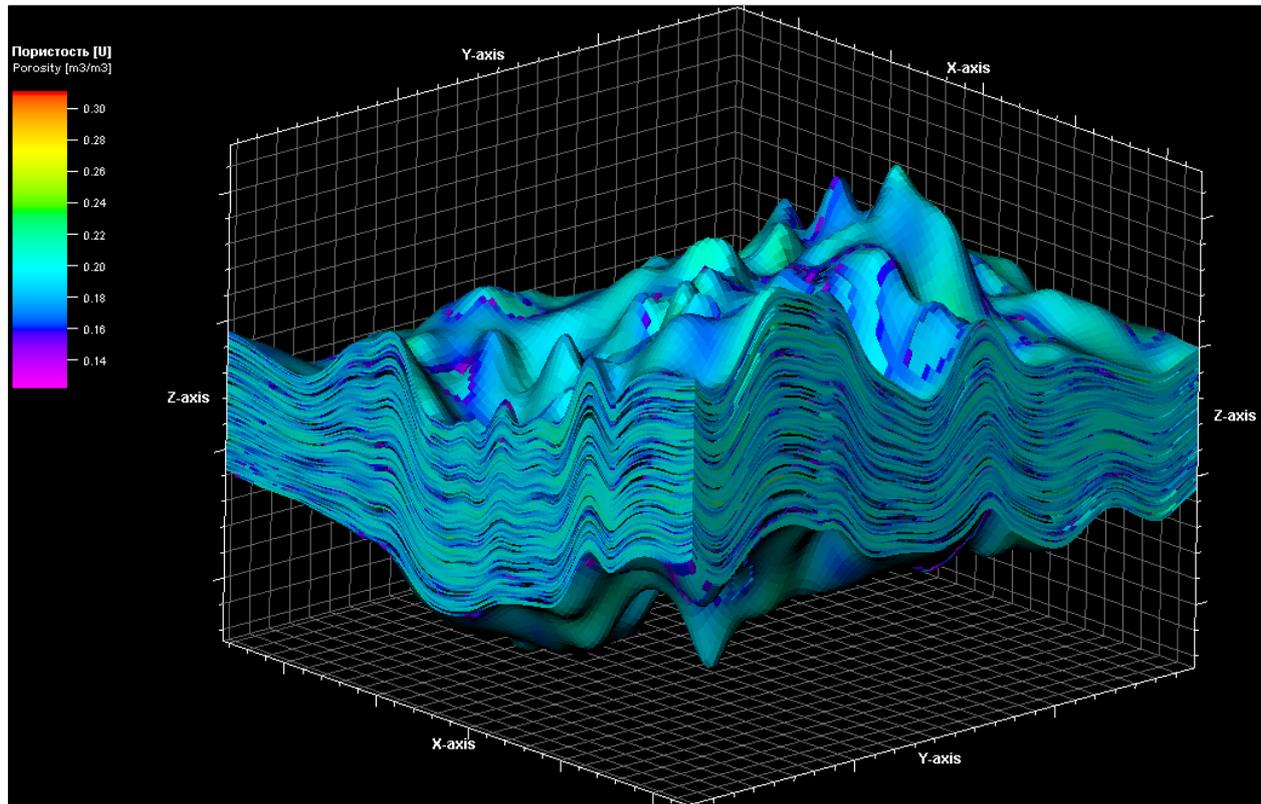


Рис. 3. Цифровая геологическая модель нефтяного месторождения

Fig. 3. Digital geological model of an oil field

моделирования (из-за разных рангов вариограмм, реализаций и коэффициентов экскурсии). Сводный график результатов расчета объемно-взвешенной фрактальной размерности объекта разработки представлен на рис. 4, а. Показано, что $\langle FD \rangle = 3$ для коэффициента экскурсии, равного нулю, когда модель представляет собой связанное трехмерное тело. Затем для каждого ранга вариограммы значения $\langle FD \rangle$ начинают убывать вплоть до нуля, когда коэффициент экскурсии равен 0.3, и модель является объединением связанных тел малого объема. Как и ожидалось, $\langle FD \rangle$ быстрее стремится к нулю для слабо связанных моделей (с минимальным значением ранга $R = 100$). Хвосты графиков кластеризуются в зависимости от рангов вариограмм. Для каждого из полученных 900 кубов проведено гидродинамическое моделирование с помощью Schlumberger ECLIPSE.

В модели использовалась девятиточечная система разработки с нагнетательной скважиной в центре. Расстояние между соседними скважинами по осям X и Y принято равным 500 м. Фильтрационные свойства во всех ячейках следующие: пористость $\phi = 0.2$, проницаемость $k = 10$ мД. Динамическая вязкость μ_i и сжимаемость флюидов c_i (давление, объем, температура — PVT-свойства) для различных фаз принимались соответствующими PVT пластовых флюидов рассматриваемого месторождения. Фазовые проницаемости принимались линейными (отсутствие капиллярных сил в породе), они соответствовали экспериментам на рассматриваемом месторождении. Моделирование проводилось до тех пор, пока не было достигнуто отношение добываемой в скважинах воды к объему общей добываемой жидкости (обводненность), равное 0.98. В результате для каждой симуляции оценивалось значение E_{vol} . Это позволило построить зависимость между E_{vol} и коэффициентами экскурсии для различных рангов и реализа-

ций, представленную на рис. 4, б. Аналогично тому, как было показано на рис. 4, а, E_{vol} начинает стремиться к нулю быстрее для менее связанных моделей (с минимальным рангом вариограммы $R = 100$). Результаты также кластеризуются по рангам вариограмм.

Ситуация меняется после перехода к параметрической зависимости от коэффициента экскурсии (cutoff): $\langle FD \rangle(\text{cutoff})$, $E_{vol}(\text{cutoff})$.

На рис. 5 показана устойчивая зависимость параметра разработки нефтяного месторождения E_{vol} от пространственной фрактальной характеристики $\langle FD \rangle$. Результаты больше не кластеризуются в соответствии с рангами вариограмм.

Полученная устойчивая зависимость позволяет сделать важный вывод. Зависимость $E_{vol}(\langle FD \rangle)$ позволяет экспертам повысить качество моделей за счет оптимизации количества итераций при создании геолого-гидродинамической модели в условиях отсутствия информации. В частности, на основе данных разработки эксперты могут выбрать правильный ранг вариограммы [6, 11] и тем самым более точно воспроизвести структуру пласта, точно решив обратную задачу.

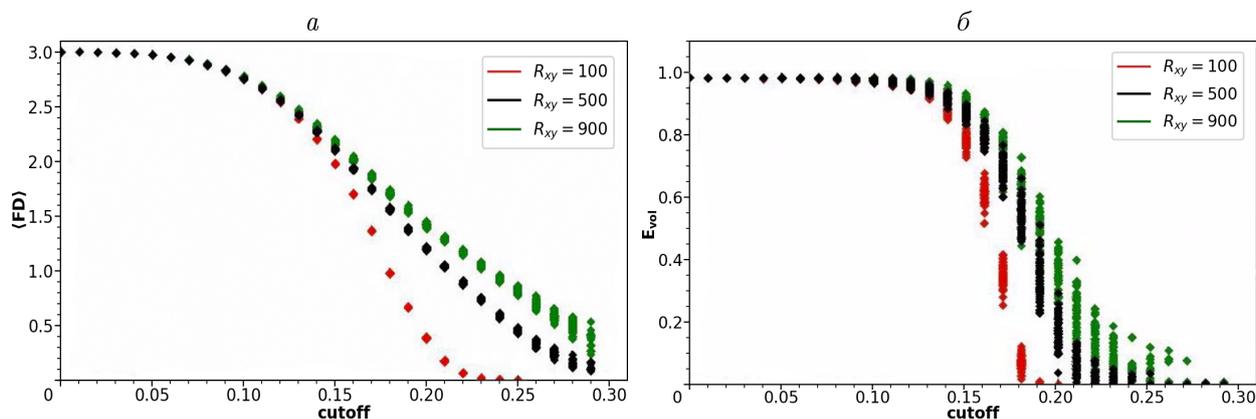


Рис. 4. Зависимость взвешенной по объему фрактальной размерности объекта (а) и коэффициента объемного охвата (б) от уровня экскурсии

Fig. 4. Dependence of the volume-weighted fractal dimension of a reservoir (а) and the volumetric sweep efficiency (б) on the excursion level

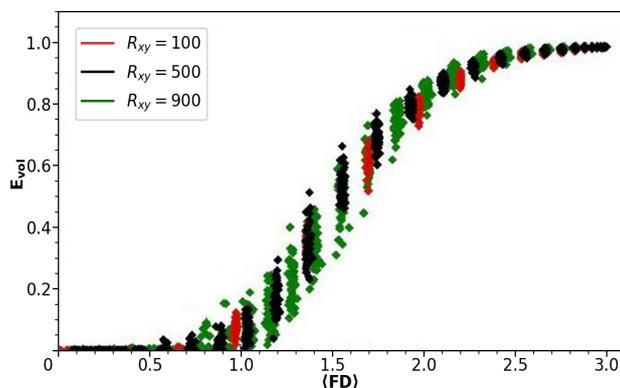


Рис. 5. Зависимость коэффициента объемного охвата от взвешенной по объему фрактальной размерности объекта разработки

Fig. 5. Dependence of volumetric sweep efficiency on the volume-weighted fractal dimension of a reservoir

Заключение

Полученные результаты показывают, что взвешенные фрактальные характеристики, как и топологические характеристики (числа Бетти) [1], зависят от коэффициента отклонения, типа и радиуса вариограммы случайного поля.

Существует прямая связь между характеристикой геологического тела (взвешенной фрактальной размерности) и характеристикой добычи нефти (объемным коэффициентом охвата), которая является одним из факторов, входящих в формулу коэффициента нефтеотдачи. На эту зависимость не влияет диапазон вариограммы геологической модели. Полученный результат может быть полезным, поскольку обычно существует высокая неопределенность в оценке диапазона вариограммы. Эти факты могут быть использованы экспертами на этапе оценки геологической информации для упрощения оценки коэффициента охвата без вычислительно затратного гидродинамического моделирования. Подход прямой оценки коэффициента охвата снижает уровень неопределенности при решении обратных задач и итерационной корректировке геолого-гидродинамических моделей, в том числе необходимость подбора соответствующих вероятностных характеристик. Это имеет решающее значение в процессе оптимизации разработки нефти или определения аналогов для малоизученных месторождений.

Таким образом, применение геометрических характеристик позволяет найти другой качественный подход к работе с геологическими и гидродинамическими моделями в условиях недостатка информации, времени и вычислительных ресурсов.

Благодарности. Работа И.А. Тайманова выполнена в рамках государственного задания ИМ СО РАН, тема FWNF-2022-0004.

Список литературы

- [1] **Baikov V.A., Gilmanov R.R., Taimanov I.A., Yakovlev I.A.** Topological characteristics of oil and gas reservoirs and their applications. Towards Integrative Machine Learning and Knowledge Extraction, Lecture Notes in Computer Science. 2017; (10344):182–193. DOI:10.1007/978-3-319-69775-8_11.
- [2] **Базайкин Я.В., Байков В.А., Тайманов И.А., Яковлев А.А.** Численный анализ характеристик трехмерных геологических моделей нефтегазовых месторождений. Математическое моделирование. 2013; 25(10):19–31.
- [3] **Gilmanov R.R., Kalyuzhnyuk A.V., Taimanov I.A., Yakovlev A.A.** Topological characteristics of digital models of geological core. Machine Learning and Knowledge Extraction, Lecture Notes in Computer Science. 2018; (11015):273–281. DOI:10.1007/978-3-319-99740-7_19.
- [4] **Slotte P.A., Berg K.F., Khanamiri H.H.** Predicting resistivity and permeability of porous media using Minkowski functionals. Transport in Porous Media. 2020; (131):705–722.
- [5] **Andreeva M.V., Kalyuzhnyuk A.V., Krutko V.V., Russkikh N.E., Taimanov I.A.** Representative elementary volume via averaged scalar Minkowski functionals. Lecture Notes in Mechanical Engineering. 2022: 533–539. DOI:10.1007/978-3-030-92144-6_40. Available at: https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-030-92144-6_40.
- [6] **Байков В.А., Бакиров Н.К., Яковлев А.А.** Математическая геология. Т. 1. Введение в геостатистику. Ижевск: ИКИ; 2012: 228.
- [7] **Mandelbrot B.** The fractal geometry of nature. N.Y.: W.H. Freeman and Co.; 1983: 469.

- [8] **Larue D., Hovadik J.** Influence of landscape coverage on measuring spatial and length properties of rock fracture networks: insights from numerical simulation. *Petroleum Geoscience*. 2018; 12(4):291–308.
- [9] **Valdes-Perez A., Blasingame T.** Pressure-transient behavior of doubleporosity reservoirs with transient interporosity transfer with fractal matrix blocks. PE Europec Featured at 80th EAGE Conference and Exhibition. BIRS Workshop, Banff, AB, Canada, July 24–26, 2015, Revised Selected Papers. 2018: 1–28.
- [10] **Falconer K.** Fractal geometry. Mathematical foundations and applications. Chichester: John Wiley and Sons; 1990: 288.
- [11] **Pyrcz M.J., Deutsch C.V.** Geostatistical reservoir modeling, 2nd edition. N.Y.: Oxford University Press; 2014: 448.
- [12] **Ismagilov N.S., Lifshits M.A., Yakovlev A.A.** A new type of conditioning of stationary fields and its application to the spectral simulation approach in geostatistics. *Mathematical Geosciences*. 2012; (53):597–621.
- [13] **Ostoja-Starzewski M.** Continuum mechanics models of fractal porous media: integral relations and extremum principles. *Journal of Mechanics of Materials and Structures*. 2009; 4(5):901–912.
- [14] **Крылов А.П.** Состояние теоретических работ по проектированию разработки нефтяных месторождений и задачи по улучшению этих работ. Сборник “Опыт разработки нефтяных месторождений”. М.: Гостехиздат; 1957: 116–139.
- [15] **Fanchi J.R.** Shared Earth modeling: methodologies for integrated reservoir simulations. Amsterdam: Gulf Professional Publishing; 2002: 306.

Fractal characteristics of multiscale digital models of oil reservoirs

R. R. GILMANOV¹, I. A. TAIMANOV², A. A. YAKOVLEV^{3,*}

¹Ufa State Petroleum Technological University, 450064, Ufa, Russia

²Sobolev Institute of Mathematics, 630090, Novosibirsk, Russia

³“National Gas Company”, 107023, Moscow, Russia

*Corresponding author: Andrey A. Yakovlev, e-mail: yakovlevandrey@yandex.ru

Received June 01, 2025, revised June 18, 2025, accepted June 27, 2025.

Abstract

This study examines the weighted fractal dimension — a fractal characteristic of petroleum reservoirs. The purpose of this paper is to demonstrate that this characteristic remains stable across various realizations of digital heterogeneous anisotropic stochastic models of actual oil fields. A robust correlation has been established between an oil field development parameter (“sweep efficiency”) and fractal characteristics. This correlation proves independent of the geological model’s correlation function.

Geological and hydrodynamic modelling is an important part of oil and gas field development, which is a long and complex process. The complexity and duration of the geological and hydrodynamic modelling process are both due to the lack of sufficient information about the reservoir and the

need to ensure consistency between the parameters obtained at each stage. Often, this process becomes iterative. At the same time, the timely construction of high-quality models is crucial for making effective management decisions for the field development. In this context, developing new approaches to working with geological and hydrodynamic models is an important challenge. This paper proposes a modelling approach based on geometric and topological methods. The core idea is to represent oil and gas reservoirs as three-dimensional bodies, for which topological and geometric characteristics are then analyzed. The proposed approach can be used for parameter tuning, evaluation, classification, and model generation.

The obtained results demonstrate that weighted fractal characteristics, like topological characteristics, depend on the deviation coefficient, type and range of the random field variogram. Direct correlation exists between property of a geological body (weighted fractal dimension) and an oil production parameter (volumetric sweep efficiency), which is included in the oil recovery factor formula. This dependence is unaffected by the variogram range of the geological model.

This finding is particularly valuable, as typically there is high uncertainty in estimating the variogram range. These observations can be used during the expert evaluation of geological data to simplify sweep efficiency assessment without computationally expensive hydrodynamic modelling. The direct estimation approach for sweep efficiency reduces uncertainty in solving inverse problems and iteratively adjusting geological-hydrodynamic models, including the need to fit appropriate probabilistic characteristics.

Keywords: fractal dimension, digital model, oil reservoir.

Citation: Gilmanov R.R., Taimanov I.A., Yakovlev A.A. Fractal characteristics of multiscale digital models of oil reservoirs. Computational Technologies. 2025; 30(4):41–53. DOI:10.25743/ICT.2025.30.4.005. (In Russ.)

In memory of Yu.I. Shokin

Acknowledgements. The work of I.A. Taimanov was carried out within the framework of the state assignment of the IM SB RAS (topic No. FWNF-2022-0004).

References

1. **Baikov V.A., Gilmanov R.R., Taimanov I.A., Yakovlev I.A.** Topological characteristics of oil and gas reservoirs and their applications. Towards Integrative Machine Learning and Knowledge Extraction, Lecture Notes in Computer Science. 2017; (10344):182–193. DOI:10.1007/978-3-319-69775-8_11.
2. **Bazaikin Ya.V., Baikov V.A., Taimanov I.A., Yakovlev A.A.** Numerical analysis of topological characteristics of three-dimensional geological models of oil and gas fields. Matematicheskoe Modelirovanie. 2013; 25(10):19–31. (In Russ.)
3. **Gilmanov R.R., Kalyuzhnyuk A.V., Taimanov I.A., Yakovlev A.A.** Topological characteristics of digital models of geological core. Machine Learning and Knowledge Extraction, Lecture Notes in Computer Science. 2018; (11015):273–281. DOI:10.1007/978-3-319-99740-7_19.
4. **Slotte P.A., Berg K.F., Khanamiri H.H.** Predicting resistivity and permeability of porous media using Minkowski functionals. Transport in Porous Media. 2020; (131):705–722.
5. **Andreeva M.V., Kalyuzhnyuk A.V., Krutko V.V., Russkikh N.E., Taimanov I.A.** Representative elementary volume via averaged scalar Minkowski functionals. Lecture Notes in Mechanical Engineering. 2022; 533–539. DOI:10.1007/978-3-030-92144-6_40. Available at: https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-030-92144-6_40.
6. **Baikov V.A., Bakirov N.K., Yakovlev A.A.** Matematicheskaya geologiya. T. 1. Vvedenie v geostatistiku [Mathematical geology. V. 1. Introduction to geostatistics]. Izhevsk: IKI; 2012: 228. (In Russ.)
7. **Mandelbrot B.** The fractal geometry of nature. N.Y.: W.H. Freeman and Co.; 1983: 469.
8. **Larue D., Hovadik J.** Influence of landscape coverage on measuring spatial and length properties of rock fracture networks: insights from numerical simulation. Petroleum Geoscience. 2018; 12(4):291–308.
9. **Valdes-Perez A., Blasingame T.** Pressure-transient behavior of doubleporosity reservoirs with transient interporosity transfer with fractal matrix blocks. PE Europepec Featured at 80th EAGE

- Conference and Exhibition. BIRS Workshop, Banff, AB, Canada, July 24–26, 2015, Revised Selected Papers. 2018: 1–28.
10. **Falconer K.** Fractal geometry. Mathematical foundations and applications. Chichester: John Wiley and Sons; 1990: 288.
 11. **Pyrcz M.J., Deutsch C.V.** Geostatistical reservoir modeling, 2nd edition. N.Y.: Oxford University Press; 2014: 448.
 12. **Ismagilov N.S., Lifshits M.A., Yakovlev A.A.** A new type of conditioning of stationary fields and its application to the spectral simulation approach in geostatistics. *Mathematical Geosciences*. 2012; (53):597–621.
 13. **Ostoja-Starzewski M.** Continuum mechanics models of fractal porous media: integral relations and extremum principles. *Journal of Mechanics of Materials and Structures*. 2009; 4(5):901–912.
 14. **Krylov A.P.** Sostoyanie teoreticheskikh rabot po proektirovaniyu razrabotki neftyanykh mestorozhdeniy i zadachi po uluchsheniyu etikh rabot [Status of theoretical works on design of development of oil fields and tasks on improvement of these works]. *Sbornik "Opyt Razrabotki Neftyanykh Mestorozhdeniy" [Experience of Development of Oil Fields]*. Moscow: Gostoptekhizdat; 1957: 116–139. (In Russ.)
 15. **Fanchi J.R.** Shared Earth modeling: methodologies for integrated reservoir simulations. Amsterdam: Gulf Professional Publishing; 2002: 306.