Вычислительные технологии **Том 6, № 6, 2001**

ИДЕМПОТЕНТНАЯ МАТЕМАТИКА И ИНТЕРВАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ*

Г. Л. Литвинов, В. П. Маслов, А. Н. Соболевский
Международный центр "Софус Ли", Москва, Россия
e-mail: islc@dol.ru, maslov@ipmnet.ru
ansobol@idempan.phys.msu.su

A short introduction to idempotent mathematics and idempotent version of interval analysis is presented. Applications are discussed.

Введение

Многие задачи в теории оптимизации и других областях математики оказываются линейными над полукольцами с идемпотентным сложением. Это наблюдение приводит к так называемому *идемпотентному принципу суперпозиции* [1], который является естественным аналогом известного принципа суперпозиции в квантовой механике. Данный подход систематически развивается под названием *идемпотентной математики* или *идемпотентного анализа*. Фактически речь идет о целой новой области математики, интенсивно развивающейся в последние годы (см., например, [1 – 8]).

Одним из наиболее важных примеров идемпотентного полукольца является множество $\mathbf{R}_{\max} = \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$, снабженное операциями $\oplus = \max$, $\odot = +$ (см. разд. 1). Важно, что существует соответствие между интересными, полезными и важными конструкциями и результатами над полем действительных (или комплексных) чисел и аналогичными конструкциями, относящимися к различным идемпотентным полукольцам. Это соответствие может быть сформулировано в духе известного принципа соответствия Н. Бора в квантовой механике; фактически эти два принципа тесно связаны друг с другом (см. [4 – 6], а также разд. 4 – 6).

В настоящей статье мы обсуждаем идемпотентные аналоги некоторых основных идей, конструкций и результатов, известных из традиционного математического и функционального анализа. Оказывается, что принцип соответствия служит мощным эвристическим инструментом для применения неожиданных аналогий и идей, заимствованных из различных областей математики (см., например, [1 – 6]).

К настоящему времени идемпотентная теория достигла значительного развития. Она включает, в частности, новую теорию интегрирования, новую линейную алгебру, спектральную теорию и функциональный анализ. Ее приложения охватывают различные задачи оптимизации, такие как многокритериальное принятие решений, оптимизация на

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант №99–01–01198) и Института математической физики Эрвина Шредингера (Вена). Материалы были доложены на XVI конференции по интервальной математике, Красноярск, 17–19 августа 1999 г.

графах, дискретная оптимизация с большим параметром (асимптотические задачи), оптимальное конструирование компьютерных систем и вычислительных сред, оптимальная организация параллельной обработки данных, динамическое программирование, приложения к дифференциальным уравнениям, численному анализу, системам дискретных событий, информатике, дискретной математике, математической логике и т. д. (см., например, работы [2 – 9] и приведенную в них библиографию).

Раздел 1 содержит краткое эвристическое введение в идемпотентную математику, раздел 2 — определения основных понятий идемпотентной арифметики и несколько важных примеров. В разделах 3 – 6 мы рассматриваем понятие линейности в идемпотентном анализе и указываем некоторые из его приложений к идемпотентной линейной алгебре.

Источники исходных данных в практических задачах, как правило, не допускают абсолютно точного измерения соответствующих величин. В силу этого поступающие данные часто имеют вид доверительных интервалов или других числовых множеств. Интервальный анализ (см., например, [10 – 13]) переносит операции традиционного математического анализа с чисел на числовые интервалы, таким образом позволяя обрабатывать неточные входные данные и контролировать ошибки округления в численных расчетах. Чтобы построить аналог интервального анализа в контексте теории оптимизации и идемпотентного анализа, мы развиваем обобщение идемпотентной арифметики на случай операций над множествами (см. разд. 7).

Интервальное расширение произвольного идемпотентного полукольца построено в разделах 8 и 9. Простое приложение интервальной арифметики к идемпотентной линейной алгебре обсуждается в разд. 11.

Идемпотентная интервальная арифметика оказывается значительно более простой, чем ее традиционный аналог, где, в частности, умножение интервалов не дистрибутивно относительно их сложения, в то время как идемпотентная интервальная арифметика сохраняет дистрибутивность. В традиционном интервальном анализе множество всех квадратных интервальных матриц данного порядка не образует даже полугруппы относительно операции матричного умножения: последняя не ассоциативна, так как дистрибутивность скалярного умножения теряется. Напротив, в идемпотентном случае ассоциативность матричного умножения сохранена. Наконец, в традиционном интервальном анализе некоторые задачи линейной алгебры, связанные с решением интервальных систем линейных уравнений, оказываются весьма трудными с вычислительной точки зрения (вообще говоря, NP-трудными, см. [14 – 20] и приведенную в этих работах библиографию). Ниже мы покажем, что в идемпотентном случае решение интервальной системы линейных уравнений требует полиномиального числа операций, как и обычный алгоритм исключения Гаусса.

Столь простой идемпотентную интервальную арифметику делают два свойства идемпотентных полуколец: монотонность арифметических операций и “положительность” (в определенном ниже смысле) всех элементов полукольца.

Идемпотентный интервальный анализ оказывается особенно пригодным для изучения задач, в которых применяемые преобразования данных сохраняют некоторое отношение порядка. Его методами можно решать и задачи с априорной неопределенностью параметров, интервалы возможного изменения которых не являются малыми.

Некоторые опубликованные здесь результаты по идемпотентному интервальному анализу были ранее анонсированы в [21, 41], см. также [42].

Подчеркнем, что идемпотентный интервальный анализ представляет собой еще один пример эвристической силы идемпотентного принципа соответствия.

1. Деквантование и идемпотентный принцип соответствия

Пусть $\mathbf{R}$ — поле вещественных чисел, а $\mathbf{R}_+$ — подмножество всех неотрицательных чисел. Рассмотрим следующую замену переменной:

$$u \mapsto w = h \ln u,$$

где $u \in \mathbf{R}_+ \setminus \{0\}$, $h > 0$; таким образом, $u = \mathrm{e}^{w/h}$, $w \in \mathbf{R}$. Обозначим через $\mathbf{0}$ дополнительный бесконечно удаленный элемент $-\infty$, через S — расширенную действительную прямую $\mathbf{R} \cup \{\mathbf{0}\}$. Введенная замена переменной имеет естественное продолжение D_h на все S, при котором $D_h(0) = \mathbf{0}$; обозначим также через $\mathbf{1}$ элемент $D_h(1) = 0$.

Обозначим через S_h множество S, снабженное двумя операциями: $\oplus_h$ (обобщенным сложением) и $\odot_h$ (обобщенным умножением) такими, что D_h является гомоморфизмом $\{R_+, +, \cdot\}$ на $\{S, \oplus_h, \odot_h\}$. Это означает, что

$$D_h(u_1 + u_2) = D_h(u_1) \oplus_h D_h(u_2) \quad \text{и} \quad D_h(u_1 \cdot u_2) = D_h(u_1) \odot_h D_h(u_2),$$

т. е.

$$w_1 \odot_h w_2 = w_1 + w_2 \quad \text{и} \quad w_1 \oplus_h w_2 = h \ln(\mathrm{e}^{w_1/h} + \mathrm{e}^{w_2/h}).$$

Легко проверить, что $w_1 \oplus_h w_2 \to \max\{w_1, w_2\}$ при $h \to 0$.

Обозначим через $\mathbf{R}_{\max}$ множество $S = \mathbf{R} \cup \{\mathbf{0}\}$, снабженное операциями $\oplus = \max$ и $\odot = +$, где $\mathbf{0} = -\infty$ и $\mathbf{1} = 0$, как определено выше. Алгебраические структуры во множествах $\mathbf{R}_+$ и S_h изоморфны, поэтому $\mathbf{R}_{\max}$ можно рассматривать как результат деформации алгебраической структуры в $\mathbf{R}_+$.

Подчеркнем очевидную аналогию этого построения с процедурой квантования; в частности, h здесь — аналог постоянной Планка. В этих терминах $\mathbf{R}_+$ (или $\mathbf{R}$) играет роль "квантового объекта", а $\mathbf{R}_{\max}$ — "классического" или "полуклассического" объекта, возникающего как результат *деквантования* этого квантового объекта.

Аналогично обозначим через $\mathbf{R}_{\min}$ множество $\mathbf{R} \cup \{\mathbf{0}\}$, снабженное операциями $\oplus = \min$ и $\odot = +$, где $\mathbf{0} = +\infty$ и $\mathbf{1} = 0$. Ясно, что соответствующая процедура деквантования порождается заменой переменных $u \mapsto w = -h \ln u$.

Рассмотрим также множество $\mathbf{R} \cup \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$, где $\mathbf{0} = -\infty$, $\mathbf{1} = +\infty$, снабженное операциями $\oplus = \max$ и $\odot = \min$. Очевидно, эта структура может быть получена в результате "вторичного деквантования" $\mathbf{R}$ или $\mathbf{R}_+$.

Алгебры, рассмотренные нами в этом разделе, являются наиболее важными примерами идемпотентных полуколец. (Общее определение идемпотентного полукольца, которое является основной алгебраической структурой идемпотентного анализа, см. в разд. 2.)

Основной объект традиционного математического анализа — *функция*, определенная на некотором множестве X и принимающая значения в поле $\mathbf{R}$ (или $\mathbf{C}$). Идемпотентным аналогом традиционной функции является отображение $X \to S$, где X — некоторое множество, а $S = \mathbf{R}_{\min}$, $\mathbf{R}_{\max}$ или другое идемпотентное *полукольцо*. Как показывают следующие примеры, переопределение основных конструкций традиционного математического анализа в терминах идемпотентной математики может дать интересные и нетривиальные результаты (детали и некоторые обобщения см., например, в [1–7]).

Пример 1.1. Интегрирование и меры. Чтобы определить идемпотентный аналог интеграла по мере Лебега на прямой, рассмотрим интегральную сумму для функции $\varphi(x)$,

$x \in X = [a, b]$, и заменим в ее выражении традиционные сложение и умножение вещественных чисел операциями $\oplus$ и $\odot$ из некоторого идемпотентного полукольца (для определенности будем рассматривать полукольцо $\mathbf{R}_{\max}$):

$$\sum_i \varphi(x_i)\Delta_i \mapsto \bigoplus_i \varphi(x_i) \odot \Delta_i = \max_i (\varphi(x_i) + \Delta_i).$$

При $\max \Delta_i \to 0$ интегральная сумма стремится к

$$\int_X^{\oplus} \varphi(x)\, dx = \sup_{x \in X} \varphi(x)$$

для любой ограниченной функции $\varphi\colon X \to \mathbf{R}_{\max}$.

Обобщая, назовем $\mathbf{R}_{\max}$-*мерой* на X функцию множества

$$m_\varphi(B) = \sup_{x \in B} \varphi(x), \quad B \subset X.$$

Идемпотентный интеграл по такой мере определяется следующим образом:

$$\int_X^{\oplus} \psi(x)\, dm_\varphi = \int_X^{\oplus} \psi(x) \odot \varphi(x)\, dx = \sup_{x \in X} (\psi(x) + \varphi(x)).$$

Поскольку $m_\varphi(\bigcup_\alpha B_\alpha) = \sup_\alpha m_\varphi(B_\alpha)$, введенная мера аддитивна относительно взятия сумм по любым множествам индексов. Очевидно, это обстоятельство крайне облегчает построение теории меры и интеграла в идемпотентном случае (см., например, [3]).

Пример 1.2. Преобразование Фурье — Лежандра. Рассмотрим векторное пространство $\mathbf{R}^n$ как топологическую группу относительно обычной операции сложения векторов. Для функции, заданной на этой группе, преобразование Фурье — Лапласа определяется следующим образом:

$$\varphi(x) \mapsto \widetilde{\varphi}(\xi) = \int_{\mathbf{R}^n} \mathrm{e}^{i\xi x} \varphi(x)\, dx.$$

Здесь отображение $x \mapsto \exp(i\xi x)$ есть *характер* группы $\mathbf{R}^n$, т. е. решение функционального уравнения

$$f(x + y) = f(x) f(y).$$

Идемпотентным аналогом этого соотношения служит уравнение

$$f(x + y) = f(x) \odot f(y) = f(x) + f(y).$$

“Идемпотентные характеры” группы $\mathbf{R}^n$ — это линейные функции вида $x \mapsto \xi x = \xi_1 x_1 + \dots + \xi_n x_n$. Таким образом, с помощью преобразования Фурье — Лапласа вводится следующее определение:

$$\varphi(x) \mapsto \widetilde{\varphi}(\xi) = \int_{\mathbf{R}^n}^{\oplus} (\xi x) \odot \varphi(x)\, dx = \sup_{x \in \mathbf{R}^n} (\xi x + \varphi(x)).$$

Это выражение отличается от известного преобразования Лежандра (или Лежандра — Фенхеля; см., например, [22]) лишь несущественными деталями.

Рассмотренные примеры подсказывают следующую формулировку идемпотентного принципа соответствия [4]:

Существует эвристическое соответствие между интересными, полезными и важными конструкциями и результатами, полученными над полем действительных (или комплексных) чисел, и аналогичными конструкциями и результатами, относящимися к идемпотентным полукольцам. Это соответствие может толковаться в духе принципа соответствия Н. Бора в квантовой механике.

Следовательно, идемпотентную математику можно трактовать как "классическую тень" (или "аналог") традиционной математики над числовыми полями.

2. Идемпотентные полукольца: основные определения

Рассмотрим множество S, снабженное двумя алгебраическими операциями: *сложением* $\oplus$ и *умножением* $\odot$. Тройка $\{S, \oplus, \odot\}$ называется *идемпотентным полукольцом*, если она удовлетворяет следующим условиям (здесь и ниже символ $\star$ обозначает любую из двух операций $\oplus$, $\odot$):

— сложение $\oplus$ и умножение $\odot$ *ассоциативны*: $x \star (y \star z) = (x \star y) \star z$ для всех $x, y, z \in S$;

— сложение $\oplus$ *коммутативно*: $x \oplus y = y \oplus x$ для всех $x, y \in S$;

— сложение $\oplus$ *идемпотентно*: $x \oplus x = x$ для всех $x \in S$;

— умножение $\odot$ *дистрибутивно* относительно сложения $\oplus$: $x \odot (y \oplus z) = (x \odot y) \oplus (x \odot z)$ и $(x \oplus y) \odot z = (x \odot z) \oplus (y \odot z)$ для всех $x, y, z \in S$.

Далее в настоящей статье слово "идемпотентный" будет иногда опускаться, если это не приводит к неясности.

Единицей идемпотентного полукольца S называется такой элемент $\mathbf{1} \in S$, что

$$\mathbf{1} \odot x = x \odot \mathbf{1} = x$$

для всех $x \in S$.

Нулем идемпотентного полукольца S называется такой элемент $\mathbf{0} \in S$, что $\mathbf{0} \neq \mathbf{1}$ и

$$\mathbf{0} \oplus x = x, \qquad \mathbf{0} \odot x = x \odot \mathbf{0} = \mathbf{0}$$

для всех $x \in S$.

Легко заметить, что если идемпотентное полукольцо S содержит единицу (нуль), то этот элемент определен единственным образом.

Говорят, что полукольцо S *коммутативно*, если $x \odot y = y \odot x$ для всех $x, y \in S$.

Заметим, что в литературе встречаются различные варианты этой аксиоматики (см., например, работы [2−8] и приведенную в них библиографию).

Сложение $\oplus$ определяет на идемпотентном полукольце S канонический *частичный порядок*: по определению $x \preceq y$ тогда и только тогда, когда $x \oplus y = y$. Будем писать $x \prec y$, если $x \preceq y$ и $x \neq y$. Если S содержит нуль $\mathbf{0}$, то $\mathbf{0}$ является его наименьшим элементом относительно порядка $\preceq$. Операции $\oplus$ и $\odot$ согласованы с порядком $\preceq$ в следующем смысле: если $x \preceq y$, то $x \star z \preceq y \star z$ и $z \star x \preceq z \star y$ для всех x, y, $z \in S$.

Говорят, что идемпотентное полукольцо S является *a-полным*, если для любого подмножества $\{x_\alpha\} \subset S$, включая пустое подмножество $\emptyset$, определена сумма $\bigoplus\{x_\alpha\} = \bigoplus_\alpha x_\alpha$, причем $(\bigoplus_\alpha x_\alpha) \odot y = \bigoplus_\alpha (x_\alpha \odot y)$ и $y \odot (\bigoplus_\alpha x_\alpha) = \bigoplus_\alpha (y \odot x_\alpha)$ для любого $y \in S$. Идемпотентное полукольцо S, содержащее нуль $\mathbf{0}$, называют *b-полным*, если условия *a*-полноты выполняются для любого непустого ограниченного сверху подмножества $\{x_\alpha\} \subset S$. Любое b-полное полукольцо или является a-полным, или становится таковым после добавления наибольшего элемента $\infty = \sup S$; подробнее см. в [5, 6].

Отметим, что $\bigoplus_\alpha x_\alpha = \sup\{x_\alpha\}$ по отношению к каноническому частичному порядку $\preceq$; в частности, a-полное идемпотентное полукольцо всегда содержит нуль $\mathbf{0} = \bigoplus \emptyset$. Неравенство $\bigoplus_\alpha x_\alpha \preceq \bigoplus_\beta y_\beta$ справедливо для любых (в b-полном полукольце — ограниченных сверху) множеств $\{x_\alpha\}$ и $\{y_\beta\}$ таких, что $x_\alpha \preceq y_\beta$ для любого α при некотором β.

Идемпотентное полукольцо S не содержит *делителей нуля*, если для всех x, $y \in S$ из равенства $x \odot y = \mathbf{0}$ с необходимостью следует, что $x = \mathbf{0}$ или $y = \mathbf{0}$. Идемпотентное полукольцо S удовлетворяет *условию сокращения*, если для всех x, y, $z \in S$ таких, что $x \neq \mathbf{0}$, из $x \odot y = x \odot z$ или $y \odot x = z \odot x$ следует, что $y = z$. Любое идемпотентное полукольцо, удовлетворяющее условию сокращения, не содержит делителей нуля. Коммутативное идемпотентное полукольцо S является *идемпотентным полуполем*, если каждый ненулевой элемент S обратим; в этом случае условие сокращения выполняется.

Идемпотентное полукольцо S является *алгебраически замкнутым*, если уравнение $x^n = y$, где $x^n = x \odot x \odot \cdots \odot x$ (n раз), разрешимо при всех $y \in S$ и $n \in \mathbf{N}$. Идемпотентное полукольцо S с единицей $\mathbf{1}$ удовлетворяет *условию стабилизации*, если при $x \preceq \mathbf{1}$ и $y \neq \mathbf{0}$ последовательность $x^n \oplus y$ стабилизируется (т. е. $x^n \oplus y = x^{n_0} \oplus y$ при $n \geq n_0$) [23, 24]. Отметим, что в [24] свойство алгебраической замкнутости неправильно названо "алгебраической полнотой" из-за ошибки переводчика.

Наиболее важные примеры идемпотентных полуколец рассмотрены в разделе 1. Как легко убедиться, идемпотентное полукольцо $\mathbf{R}_{\max}$ есть b-полное алгебраически замкнутое идемпотентное полуполе, удовлетворяющее условию стабилизации, а полукольцо $\mathbf{R}_{\min}$ изоморфно $\mathbf{R}_{\max}$. Заметим, что $\mathbf{R}_{\max}$ и $\mathbf{R}_{\min}$ линейно упорядочены относительно соответствующих операций сложения (т. е. для любых x и y либо $x = y$, либо $x \prec y$, либо $y \prec x$), причем порядок $\preceq$ в $\mathbf{R}_{\max}$ совпадает с обычным линейным порядком $\leq$ и противоположен порядку $\preceq$ в $\mathbf{R}_{\min}$.

Рассмотрим множество $\widehat{\mathbf{R}}_{\max} = \mathbf{R}_{\max} \cup \{\infty\}$ с операциями $\oplus$, $\odot$, продолженными по формулам: $\infty \oplus x = \infty$ для всех $x \in \mathbf{R}_{\max}$, $\infty \odot x = \infty$, если $x \neq \mathbf{0}$, и $\infty \odot \mathbf{0} = \mathbf{0}$. Легко показать, что это множество есть a-полное идемпотентное полукольцо, а ∞ — его наибольший элемент (структура полуполя нарушается из-за необратимости элемента ∞).

Отметим, что единственным a-полным идемпотентным полуполем является булева алгебра $S_B = \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$.

Пусть $\{S_1, S_2, \dots\}$ — некоторый набор идемпотентных полуколец. Есть несколько способов построить из них новое идемпотентное полукольцо.

Пример 2.1. Пусть S — идемпотентное полукольцо, а X — произвольное множество. Множество $\mathcal{M}(X; S)$ всех функций $X \to S$ образует идемпотентное полукольцо относительно следующих операций:

$$(f \oplus g)(x) = f(x) \oplus g(x), \quad (f \odot g)(x) = f(x) \odot g(x), \quad x \in X.$$

Если S содержит нуль $\mathbf{0}$ и (или) единицу $\mathbf{1}$, то постоянные функции $o(x) = \mathbf{0}$ и $e(x) = \mathbf{1}$ служат нулем и (или) единицей идемпотентного полукольца $\mathcal{M}(X; S)$. Можно также рассматривать различные подполукольца $\mathcal{M}(X; S)$.

Пример 2.2. Пусть $\{S_i\}$ — набор идемпотентных полуколец с операциями $\oplus_i$, $\odot_i$ и нулями $\mathbf{0}_i$, где $i = 1, \dots, n$. Множество $S = (S_1 \setminus \{\mathbf{0}_1\}) \times \cdots \times (S_n \setminus \{\mathbf{0}_n\}) \cup \mathbf{0}$ образует идемпотентное полукольцо относительно следующих "покоординатных" операций: $x \star y = (x_1, \dots, x_n) \star (y_1, \dots, y_n) = (x_1 \star_1 y_1, \dots, x_n \star_n y_n)$; элемент $\mathbf{0}$ есть нуль этого полукольца.

Отметим, что декартово произведение $S_1 \times \cdots \times S_n$ также является идемпотентным полукольцом относительно покоординатных операций и нулем этого полукольца служит элемент $(\mathbf{0}_1, \ldots, \mathbf{0}_n)$.

Заметим, что даже если исходные полукольца из примеров 2.1 и 2.2 линейно упорядочены, то производные полукольца, вообще говоря, упорядочены лишь частично.

Пример 2.3. Рассмотрим $\mathrm{Mat}_{mn}(S)$ — множество всех матриц с m строками и n столбцами, коэффициенты которых принадлежат идемпотентному полукольцу S. Под *суммой* $\oplus$ матриц $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij}) \in \mathrm{Mat}_{mn}(S)$, как обычно, будем понимать матрицу $A \oplus B = (a_{ij} \oplus b_{ij}) \in \mathrm{Mat}_{mn}(S)$, а под *произведением* матриц $A \in \mathrm{Mat}_{lm}(S)$ и $B \in \mathrm{Mat}_{mn}(S)$ — матрицу $AB = (\bigoplus_{k=1}^{m} a_{ik} \odot b_{kj}) \in \mathrm{Mat}_{ln}(S)$. Множество $\mathrm{Mat}_{nn}(S)$ квадратных матриц порядка n образует идемпотентное полукольцо относительно этих операций (вообще говоря, некоммутативное). Через $\preceq$ обозначим каноническое отношение порядка в $\mathrm{Mat}_{mn}(S)$ по матричному сложению.

Лемма 1. *Умножение матриц согласуется с каноническим порядком $\preceq$ в следующем смысле: если $A = (a_{ik}), A' = (a'_{ik}) \in \mathrm{Mat}_{lm}(S)$, $B = (b_{kj}), B' = (b'_{kj}) \in \mathrm{Mat}_{mn}(S)$, $A \preceq A'$ в $\mathrm{Mat}_{lm}(S)$ и $B \preceq B'$ в $\mathrm{Mat}_{mn}(S)$, то $AB \preceq A'B'$ в $\mathrm{Mat}_{ln}(S)$.*

Доказательство.

$$AB = \left(\bigoplus_{k=1}^{m} a_{ik} \odot b_{kj}\right) \preceq \left(\bigoplus_{k=1}^{m} a_{ik} \odot b'_{kj}\right) \preceq \left(\bigoplus_{k=1}^{m} a'_{ik} \odot b'_{kj}\right) = A'B',$$

поскольку операции $\oplus$ и $\odot$ согласованы с каноническим порядком в S. ■

Если $\mathbf{0}$ есть нуль S, то матрица $O = (o_{ij})$, где $o_{ij} = \mathbf{0}$, есть нуль полукольца $\mathrm{Mat}_{nn}(S)$; если $\mathbf{1}$ есть единица S, то матрица $E = (\delta_{ij})$, где $\delta_{ij} = \mathbf{1}$ при $i = j$ и $\delta_{ij} = \mathbf{0}$ в противном случае, есть единица полукольца $\mathrm{Mat}_{nn}(S)$.

Многие другие примеры можно найти в [2−8].

3. Идемпотентность и линейность

Рассмотрим теперь идемпотентный аналог линейного пространства. Множество V называется *полумодулем* над идемпотентным полукольцом S (или S-полумодулем), если оно снабжено идемпотентной коммутативной ассоциативной операцией сложения $\oplus_V$ и операцией умножения слева на скаляр $\odot_V \colon S \times V \to V$, удовлетворяющими для всех λ, $\mu \in S$, $v, w \in V$ следующим условиям:

— $(\lambda \odot \mu) \odot_V v = \lambda \odot_V (\mu \odot_V v)$;

— $\lambda \odot_V (v \oplus_V w) = (\lambda \odot_V v) \oplus_V (\lambda \odot_V w)$;

— $(\lambda \oplus \mu) \odot_V v = (\lambda \odot_V v) \oplus_V (\mu \odot_V v)$.

S-полумодуль V называется *полумодулем с нулем*, если полукольцо S содержит нуль $\mathbf{0} \in S$ и существует нулевой элемент $\mathbf{0}_V \in V$ такой, что для всех $v \in V$, $\lambda \in S$ справедливы равенства:

— $\mathbf{0}_V \oplus_V v = v$;

— $\lambda \odot_V \mathbf{0}_V = \mathbf{0} \odot_V v = \mathbf{0}_V$.

В дальнейшем наряду с термином "полумодуль" будем в качестве синонима употреблять термин "(идемпотентное) линейное пространство".

Пример 3.1. Конечномерное идемпотентное линейное пространство. Простейший S-полумодуль — это декартово произведение $S^n = \{\, (a_1, \ldots, a_n) \mid a_j \in S, j = 1, \ldots, n \,\}$

с покоординатными операциями сложения и умножения на скаляр. Множество всех эндоморфизмов $S^n \to S^n$ совпадает с полукольцом $\mathrm{Mat}_{nn}(S)$ всех S-значных квадратных матриц соответствующего порядка (см. пример 2.3).

Пример 3.2. Линейное пространство матриц. Пусть $c \in S$, а матрица $A \in \mathrm{Mat}_{mn}(S)$. Произведением $c \odot A$ называется матрица $(c \odot a_{ij}) \in \mathrm{Mat}_{mn}(S)$. Множество всех S-значных матриц данного порядка $\mathrm{Mat}_{mn}(S)$ образует полумодуль относительно сложения $\oplus$ и умножения на элементы S.

Пример 3.3. Функциональные пространства. *Идемпотентным функциональным пространством* $\mathcal{F}(X;S)$ называется подмножество совокупности $\mathcal{M}(X;S)$ всех отображений $X \to S$, замкнутое относительно операций сложения $\oplus$ в $\mathcal{M}(X;S)$ и поточечного умножения на скаляр $(c \odot f)(x) = c \odot f(x)$, где $c \in S$. Таким образом, идемпотентное функциональное пространство — еще один пример S-полумодуля. Если полукольцо S содержит нулевой элемент $\mathbf{0}$ и $\mathcal{F}(X;S)$ содержит нулевую постоянную функцию $o(x) = \mathbf{0}$, то функциональное пространство $\mathcal{F}(X;S)$ имеет структуру полумодуля с нулем $o(x)$ над полукольцом S.

Напомним, что идемпотентное сложение определяет частичный порядок в полукольце S. Важный пример идемпотентного функционального пространства — пространство $\mathcal{B}(X;S)$ всех функций $X \to S$, ограниченных сверху относительно частичного порядка $\preceq$ в S. Имеется много интересных пространств этого типа, включая $\mathcal{C}(X;S)$ (пространство непрерывных функций, определенных на топологическом пространстве X), аналоги пространств Соболева и т. д. (подробнее см., например, [2–6]).

Согласно принципу соответствия, многие важные понятия, идеи и результаты могут быть перенесены из обычного функционального анализа в идемпотентный анализ. Например, идемпотентное скалярное произведение в $\mathcal{B}(X;S)$ может быть определено формулой

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \int_X^{\oplus} \varphi(x) \odot \psi(x)\, dx,$$

где интеграл определен как операция sup (см. пример 1.1). Это определение корректно, если полукольцо S является b-полным.

Пример 3.4. Интегральные операторы. Естественно строить идемпотентные аналоги *интегральных операторов*, имеющие вид

$$K\colon \varphi(y) \mapsto (K\varphi)(x) = \int_Y^{\oplus} K(x,y) \odot \varphi(y)\, dy,$$

где $\varphi(y)$ — элемент функционального пространства $\mathcal{F}_1(Y;S)$, $(K\varphi)(x)$ принадлежит пространству $\mathcal{F}_2(X;S)$, а $K(x,y)$ — функция из $X \times Y$ в S. Такие операторы являются гомоморфизмами соответствующих функциональных пространств. Если $S = \mathbf{R}_{\max}$, то это определение превращается в формулу

$$(K\varphi)(x) = \sup_{y \in Y} (K(x,y) + \varphi(y)).$$

Формулы этого типа стандартны для задач оптимизации (см., например, [25]).

4. Идемпотентный принцип суперпозиции

В квантовой механике принцип суперпозиции означает, что уравнение Шредингера, являющееся для этой теории основным, линейно. В идемпотентной математике также имеется (идемпотентный) принцип суперпозиции: он означает, что некоторые важные задачи и уравнения (например, уравнение Гамильтона—Якоби, являющееся основным в классической механике, задачи оптимизации, уравнение Беллмана и его обобщения), нелинейные в обычном смысле, оказываются линейными над соответствующими идемпотентными полукольцами (см. [1–4]).

Линейность уравнения Гамильтона—Якоби над $\mathbf{R}_{\min}$ (и $\mathbf{R}_{\max}$) может быть выведена из обычной линейности (над $\mathbf{C}$) уравнения Шредингера посредством процедуры деквантования, описанной в разделе 1. В этом случае параметр деквантования h совпадает с $i\hbar$, где $\hbar$ — постоянная Планка, которая должна считаться чисто мнимой, потому что $h > 0$ (подробнее см. в [5]). Переход к мнимой постоянной Планка аналогичен переходу к мнимому времени в эвклидовой квантовой теории поля [26, 27] (напомним, что энергия и время — канонически сопряженные величины). Конечно, это построение тесно связано с вариационными принципами механики; в частности, представление решения уравнения Шредингера в виде интеграла Фейнмана соответствует формуле Олейник—Лакса для решения уравнения Гамильтона—Якоби (подробнее, см., например, [5, 28]).

Аналогичная ситуация имеет место для дифференциального уравнения Беллмана (см. [1, 3]).

Б. А. Карре [29, 30] использовал идемпотентную линейную алгебру, чтобы показать, что различные проблемы оптимизации для конечных графов могут быть переформулированы единым образом и приведены к решению дискретных уравнений Беллмана, т. е. системы линейных алгебраических уравнений над идемпотентным полукольцом.

Дискретное уравнение Беллмана. Известно, что дискретные версии уравнения Беллмана являются линейными над соответствующими идемпотентными полукольцами [29, 30]. Следующее уравнение (дискретное стационарное уравнение Беллмана) играет важную роль как в дискретной теории оптимизации, так и в идемпотентной теории матриц:

$$X = AX \oplus B, \tag{1}$$

где $A \in \mathrm{Mat}_{nn}(S)$, $X, B \in \mathrm{Mat}_{ns}(S)$, матрицы A, B заданы, а X неизвестна. Уравнение (1) служит естественным идемпотентным аналогом обычной линейной системы $AX = B$ в традиционной линейной алгебре.

Отметим, что если существует замыкание $A^* = E \oplus A \oplus A^2 \oplus \ldots$ матрицы A (см. следующий раздел), то матрица $X = A^*B$ удовлетворяет (1), поскольку $A^* = AA^* \oplus E$. Легко проверить, что это частное решение является наименьшим элементом множества всех решений уравнения (1).

В действительности теория дискретного стационарного уравнения Беллмана может быть развита при использовании тождества $A^* = AA^* \oplus E$ как дополнительной аксиомы без его содержательной интерпретации (так называемые *полукольца с замыканием*; см., например, [31]).

Б. А. Карре [29] также обобщил на идемпотентный случай основные алгоритмы вычислительной линейной алгебры и показал, что некоторые из них совпадают с алгоритмами, независимо полученными ранее при решении задач оптимизации; например, при решении задачи о кратчайшем маршруте алгоритм Беллмана соответствует одному из вариантов метода Якоби решения систем линейных уравнений, а алгоритм Форда — варианту метода Гаусса — Зейделя.

Подчеркнем, что эти известные результаты могут быть истолкованы как проявление идемпотентного принципа суперпозиции.

5. Идемпотентная теория матриц: некоторые результаты

Матричная алгебра и теория графов. Как известно, любой квадратной матрице $A = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}_{nn}(S)$ может быть поставлен в соответствие *взвешенный ориентированный граф*. Этот геометрический объект включает в себя три составные части: совокупность X из n элементов $x_1, x_2, \dots, x_n$, называемых *вершинами*, множество Γ всех упорядоченных пар (x_i, x_j) таких, что $a_{ij} \neq \mathbf{0}$, называемых *дугами*, и отображение $A\colon \Gamma \to S$, определяемое соотношениями $A(x_i, x_j) = a_{ij}$. Элементы полукольца a_{ij} в этом случае называются *весами* дуг (x_i, x_j) графа.

Обратно, по заданному взвешенному ориентированному графу можно восстановить соответствующую ему матрицу (a_{ij}).

Введенное определение допускает отсутствие связи между некоторыми парами вершин в случае, когда соответствующий элемент матрицы A равен $\mathbf{0}$, а также существование "петель", т. е. дуг с совпадающими началом и концом, которые соответствуют ненулевым диагональным элементам матрицы A. Понятие взвешенного ориентированного графа удобно, в частности, при математическом анализе параллельных и распределенных вычислений в вычислительных средах и компьютерных сетях (см., например, [3, 8, 32, 33]).

Напомним, что последовательность вершин вида

$$p = (y_0, y_1, \dots, y_k),$$

где $k \geq 0$ и $(y_i, y_{i+1}) \in \Gamma$, $i = 0, \dots, k-1$, называется *маршрутом* (или *путем*) длины k, соединяющим вершину y_0 с вершиной y_k. Обозначим совокупность всех таких маршрутов через $P_k(y_0, y_k)$. *Весом* $A(p)$ *маршрута* p называется произведение весов дуг, соединяющих его последовательные вершины:

$$A(p) = A(y_0, y_1) \odot \cdots \odot A(y_{k-1}, y_k).$$

По определению вес "маршрута" $p \in P_0(x_i, x_j)$ равен $\mathbf{1}$, если $i = j$, и $\mathbf{0}$ в противном случае.

Для любой матрицы $A \in \mathrm{Mat}_{nn}(S)$ определим $A^0 = E$, $A^k = AA^{k-1}$, $k \geq 1$. Пусть $a_{ij}^{(k)}$ есть (i, j)-й элемент матрицы A^k, тогда можно легко проверить, что

$$a_{ij}^{(k)} = \bigoplus_{i_0 = i,\ 1 \leq i_1, \dots, i_{k-1} \leq n,\ i_k = j} a_{i_0 i_1} \odot \cdots \odot a_{i_{k-1} i_k} = \bigoplus_{p \in P_k(x_i, x_j)} A(p).$$

Таким образом, $a_{ij}^{(k)}$ есть точная верхняя грань весов всех маршрутов длины k, соединяющих вершину $x_{i_0} = x_i$ с вершиной $x_{i_k} = x_j$.

Операция замыкания и алгебраическая задача о маршрутах. Пусть S является идемпотентным полукольцом с единицей $\mathbf{1}$. Операция *замыкания* $*$ в S определяется при помощи "степенного" ряда

$$x^* = \mathbf{1} \oplus x \oplus x^2 \oplus s = \sup\{\mathbf{1}, x, x^2, \dots\}$$

для каждого $x \in S$. Эта операция была впервые введена С. Клини в специальном случае [34], она также хорошо известна в идемпотентном анализе [7, 8, 29, 30, 35].

Разумеется, сумма указанного ряда должна быть корректно определена. Ясно, что бесконечная сумма $\bigoplus_{0 \leq k < \infty} x^k$ определена в любом a-полном полукольце. В полукольцах $\mathbf{R}_{\max}$ и $\mathbf{R}_{\min}$ замыкание x^* определено лишь для таких x, что $x \preceq \mathbf{1}$ (так что $x^* = \mathbf{1}$). В (a-полных) полукольцах $\mathbf{R} \cup \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$ с операциями $\oplus = \max$, $\odot = \min$, $\widehat{\mathbf{R}}_{\max}$ и S_B (см. разд. 2) замыкание определено для всех элементов.

Лемма 2. *Операция замыкания согласована с каноническим порядком $\preceq$ в S в следующем смысле: если $x, x' \in S$ и $x \preceq x'$, то $x^* \preceq (x')^*$.*

Доказательство. Вследствие согласованности операции $\odot$ с каноническим порядком в S в степенных рядах, выражающих x^* и $(x')^*$, для соответственных слагаемых выполняются неравенства $x^k \preceq (x')^k$, $k \geq 0$. ■

В матричном полукольце $\mathrm{Mat}_{nn}(S)$ замыкание определяется выражением

$$A^* = E \oplus A \oplus A^2 \oplus \ldots$$

Обозначим элементы матрицы A^* через $a_{ij}^{(*)}$, $i, j = 1, \ldots, n$, тогда

$$a_{ij}^{(*)} = \bigoplus_{0 \leq k < \infty} \bigoplus_{p \in P_k(x_i, x_j)} A(p).$$

Матрица замыкания A^* является решением известной *алгебраической задачи о маршрутах*, состоящей в нахождении для любой пары вершин (x_i, x_j) точной верхней грани весов всех маршрутов, соединяющих эти вершины, без ограничения на длину маршрута. Операция замыкания в матричных полукольцах широко изучалась (см. [3–9, 29, 30, 35] и библиографию, приведенную в этих работах).

Пример 5.1. Задача о кратчайшем маршруте. Пусть $S = \mathbf{R}_{\min}$, так что веса дуг ориентированного графа выражаются действительными числами; в этом случае

$$A(p) = A(y_0, y_1) + A(y_1, y_2) + \cdots + A(y_{k-1}, y_k).$$

Если придать величине a_{ij} смысл длины дуги (x_i, x_j) в некоторой метрике, то $a_{ij}^{(*)}$ есть длина кратчайшего маршрута, соединяющего вершину x_i с вершиной x_j.

Пример 5.2. Задача о транзитивном замыкании. Пусть S есть булева алгебра $\{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$. В этом случае ориентированный граф, соответствующий матрице A, отвечает некоторому бинарному *отношению* $R \subset X \times X$ на множестве вершин X: $A(x_i, x_j) = \mathbf{1}$ в том и только в том случае, если $x_i \, R \, x_j$. Поэтому матрица A^* соответствует транзитивному и рефлексивному замыканию R^* отношения R.

Пример 5.3. Задача о максимальной пропускной способности. Положим $S = \mathbf{R} \cup \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$, где $\oplus = \max$, $\odot = \min$ (см. разд. 1). Тогда

$$a_{ij}^{(*)} = \max_p A(p), \quad A(p) = \min\{A(y_0, y_1), A(y_1, y_2), \ldots, A(y_{k-1}, y_k)\}.$$

Если величина a_{ij} задает "пропускную способность" дуги (x_i, x_j), то пропускная способность маршрута p определяется как минимальная пропускная способность участвующих в нем дуг, а элемент $a_{ij}^{(*)}$ имеет смысл максимальной пропускной способности, которую может иметь маршрут из вершины x_i в вершину x_j.

Пример 5.4. Задача обращения матрицы. Заметим, что в применяемых здесь формулах используется лишь свойство дистрибутивности операции умножения $\odot$ относительно сложения $\oplus$, но не идемпотентность сложения. Это позволяет ставить "алгебраическую задачу о маршрутах" и в случае неидемпотентных полуколец S (см., например, [36]). Выбирая $S = \mathbf{R}$, получаем, что

$$A^* = E + A + A^2 + \cdots = (E - A)^{-1}.$$

В случае, если $\|A\| \geq 1$, но матрица $(E - A)$ обратима, это выражение определяет регуляризованную сумму расходящегося степенного ряда.

Пример 5.5. Простая задача динамического программирования. Пусть $S = \mathbf{R}_{\max}$, так что веса дуг графа, соответствующего матрице A, суть действительные числа. Будем интерпретировать a_{ij} как *прибыль*, получаемую при переходе из i-й вершины в j-ю, и введем вектор $F = (f_i) \in \mathrm{Mat}_{n1}(\mathbf{R}_{\max})$, элементы которого имеют смысл *терминальной прибыли*, связанной с каждой из вершин, т. е. f_i — это величина премии за уход из графа через вершину x_i. Разумеется, величины a_{ij} и f_i могут быть и отрицательными (убытки вместо прибыли). Пусть m есть полная прибыль, соответствующая маршруту $p \in P_k(x_i, x_j)$, т. е.

$$m = A(p) + f_j.$$

Тогда максимальная прибыль, достигаемая на всевозможных маршрутах длины k, исходящих из вершины x_i, как нетрудно видеть, равна $(A^k F)_i$, а максимальная прибыль, достижимая без ограничения на длину маршрута, равна $(A^* F)_i$.

В общем случае матрица замыкания A^* может и не существовать, если сумма ряда $E \oplus A \oplus A^2 \oplus \ldots$ в полукольце S не определена для некоторых пар (x_i, x_j). Ниже мы обсудим достаточное условие для существования замыкания, следуя работе Б. А. Карре [29].

Пусть S — идемпотентное полукольцо с единицей $\mathbf{1}$. Говорят, что матрица $A = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}_{nn}(S)$ является *определенной* (*полуопределенной*), если

$$a_{i_0 i_1} \odot \cdots \odot a_{i_{k-1} i_k} \prec \mathbf{1} \quad (a_{i_0 i_1} \odot \cdots \odot a_{i_{k-1} i_k} \preceq \mathbf{1})$$

для любого маршрута $(x_{i_0}, \ldots, x_{i_k})$ такого, что $x_{i_0} = x_{i_k}$ (такие маршруты в ориентированном графе называются также *циклами*). Очевидно, каждая определенная матрица полуопределена. Это определение аналогично определению Б. А. Карре [29] с тем единственным отличием, что последний рассматривает отношение порядка, обратное $\preceq$.

Теорема 1 (Карре). *Пусть $A \in \mathrm{Mat}_{nn}(S)$ есть полуопределенная квадратная матрица порядка n. Тогда*

$$\bigoplus_{l=0}^{k} A^l = \bigoplus_{l=0}^{n-1} A^l$$

для $k \geq n - 1$, так что замыкание $A^* = \bigoplus_{k=0}^{\infty} A^k$ существует и равно $\bigoplus_{k=0}^{n-1} A^k$.

Доказательство см. в [29, Теорема 4.1]. Его основная идея проста: в графе полуопределенной матрицы невозможно построить маршрут произвольно большого веса, так как вес любого замкнутого подмаршрута, который входит как множитель в полный вес всего маршрута, не может превосходить $\mathbf{1}$. Поэтому может быть получена универсальная верхняя оценка весов всевозможных маршрутов, учет которой позволяет оборвать бесконечный ряд для матрицы-замыкания.

Спектральная теория. Спектральная теория матриц, чьи элементы принадлежат некоторому идемпотентному полукольцу, аналогична известной теории Перрона — Фробениуса для неотрицательных матриц (см., например, [3, 8, 23, 24]).

Напомним, что матрица $A = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}_{nn}(S)$ называется *неприводимой* в смысле [8], если для любых $1 \leq i, j \leq n$ либо $a_{ij} \neq \mathbf{0}$, либо существуют такие $1 \leq i_1, \ldots, i_k \leq n$, что $a_{ii_1} \odot \cdots \odot_{i_k j} \neq \mathbf{0}$. В [23, 24] матрицы с этим свойством называются неразложимыми.

Приведем следующий важный результат из [23, 24] (см. также [8]):

Теорема 2 (Дудников, Самборский). *Если коммутативное идемпотентное полукольцо S с нулем $\mathbf{0}$ и единицей $\mathbf{1}$ алгебраически замкнуто и удовлетворяет условиям сокращения и стабилизации, то для любой матрицы $A \in \mathrm{Mat}_{nn}(S)$ существуют отличный от нуля "собственный вектор" $V \in \mathrm{Mat}_{n1}(S)$ и "собственное значение" $\lambda \in S$ такие, что $AV = \lambda \odot V$. Если матрица A неприводима, то "собственное значение" λ определено единственным образом.*

Доказательство см. в [24, Теорема 6.2]. Одно из приложений этого результата приведено в разделе 11. Подобные результаты имеют место и для пространств ограниченных или непрерывных функций [3].

6. Принцип соответствия для вычислений и алгоритмы линейной алгебры

Разумеется, идемпотентный принцип соответствия выполняется и для вычислительных алгоритмов, а также для их программных и аппаратных реализаций [4, 9]. Сформулируем это положение следующим образом:

Есть основания ожидать, что идемпотентные аналоги любого важного и интересного численного алгоритма также являются важными и интересными.

В силу принципа суперпозиции особое значение имеют аналоги алгоритмов линейной алгебры. Отметим, что в численных алгоритмах для решения стандартных бесконечномерных линейных задач над идемпотентными полукольцами (т. е. задач, связанных с идемпотентным интегрированием, интегральными операторами и преобразованиями, обобщенными уравнениями Гамильтона — Якоби и Беллмана) используются соответствующие конечномерные (или конечные) "линейные приближения". В свою очередь, нелинейные алгоритмы часто могут быть аппроксимированы линейными. Таким образом, идемпотентная линейная алгебра лежит в основе идемпотентного численного анализа.

Как известно, алгоритмы линейной алгебры удобны для параллельных вычислений. Их идемпотентные аналоги также допускают распараллеливание; это дает систематический метод применения параллельных вычислений к задачам оптимизации.

Основные алгоритмы линейной алгебры (например, вычисление скалярного произведения двух векторов, матричное сложение и умножение и т. д.) часто не зависят от конкретных полуколец, а также природы числовых множеств, содержащих элементы векторов и матриц.

7. Операции над множествами в идемпотентной арифметике

Пусть S — идемпотентное полукольцо, $\mathcal{S}$ — некоторая система его подмножеств, а $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ — ее элементы. Введем обозначение $\mathbf{x} \star \mathbf{y} = \{\, t \in S \mid t = x \star y, x \in \mathbf{x}, y \in \mathbf{y} \,\}$. Предположим, что $\mathcal{S}$ удовлетворяет следующим двум условиям:

1. Если $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{S}$, а $\star$ — алгебраическая операция в S, то существует $\mathbf{z} \in \mathcal{S}$ такое, что $\mathbf{z} \supset \mathbf{x} \star \mathbf{y}$.

2. Если $\{\mathbf{z}_\alpha\}$ — такое подмножество $\mathcal{S}$, что $\bigcap_\alpha \mathbf{z}_\alpha \neq \emptyset$, то существует точная нижняя грань $\{\mathbf{z}_\alpha\}$ в $\mathcal{S}$ относительно порядка $\subset$, т. е. такое множество $\mathbf{x} \in \mathcal{S}$, что $\mathbf{x} \subset \bigcap_\alpha \mathbf{z}_\alpha$ и $\mathbf{y} \subset \mathbf{x}$ для любого $\mathbf{y} \in \mathcal{S}$ такого, что $\mathbf{y} \subset \bigcap_\alpha \mathbf{z}_\alpha$.

Определим алгебраические операции $\overline{\oplus}$, $\overline{\odot}$ в $\mathcal{S}$ следующим образом: если $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{S}$, то $\mathbf{x} \mathbin{\overline{\star}} \mathbf{y}$ есть точная нижняя грань множества всех элементов $\mathbf{z} \in \mathcal{S}$ таких, что $\mathbf{x} \star \mathbf{y} \subset \mathbf{z}$. Таким образом, $\mathbf{x} \mathbin{\overline{\star}} \mathbf{y}$ является "наилучшим приближением сверху" к $\mathbf{x} \star \mathbf{y}$ в семействе подмножеств $\mathcal{S}$.

Предложение 1. *Справедливы следующие утверждения:*

— $\mathcal{S}$ замкнуто относительно операций $\overline{\oplus}$, $\overline{\odot}$;

— если система $\mathcal{S}$ содержит все одноэлементные подмножества S, то полукольцо $\{S, \oplus, \odot\}$ изоморфно подмножеству алгебры $\{\mathcal{S}, \overline{\oplus}, \overline{\odot}\}$.

Доказательство очевидно.

Как показывает следующий пример, в общем случае алгебра $\{\mathcal{S}, \overline{\oplus}, \overline{\odot}\}$ может не обладать "хорошими" свойствами.

Пример 7.1. Пусть $\mathcal{S} = 2^S$, в этом случае $\mathbf{x} \star \mathbf{y} \in \mathcal{S}$ для всех $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{S}$, так что $\mathbf{x} \mathbin{\overline{\star}} \mathbf{y} = \mathbf{x} \star \mathbf{y}$. Множество $\mathcal{S}$ с этим "наивным" определением операций $\overline{\oplus}$, $\overline{\odot}$ удовлетворяет приведенным выше предположениям, но может не быть идемпотентным полукольцом. Действительно, пусть S — полукольцо $(\mathbf{R}_{\max} \setminus \{\mathbf{0}\})^2 \cup \{(\mathbf{0}, \mathbf{0})\}$ с операциями $\oplus$, $\odot$, определенными в примере 2.2. Рассмотрим множество $\mathbf{x} = \{(0,1), (1,0)\} \in \mathcal{S}$. Очевидно, $\mathbf{x} \mathbin{\overline{\oplus}} \mathbf{x} = \{(0,1), (1,0), (1,1)\} \neq \mathbf{x}$, и если $\mathbf{y} = \{(1,0)\}$, $\mathbf{z} = \{(0,1)\}$, то $\mathbf{x} \mathbin{\overline{\odot}} (\mathbf{y} \mathbin{\overline{\oplus}} \mathbf{z}) = \{(1,2), (2,1)\} \neq (\mathbf{x} \mathbin{\overline{\odot}} \mathbf{y}) \mathbin{\overline{\oplus}} (\mathbf{x} \mathbin{\overline{\odot}} \mathbf{z}) = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2)\}$. Таким образом, $\mathcal{S}$ с данными операциями $\overline{\oplus}$, $\overline{\odot}$ не удовлетворяет аксиомам идемпотентности и дистрибутивности.

Отсюда следует, что $\mathcal{S}$ должно удовлетворить некоторым дополнительным условиям, чтобы иметь структуру идемпотентного полукольца. В следующих разделах мы рассматриваем случай, когда $\mathcal{S}$ — множество всех замкнутых интервалов. Этот случай особенно важен, так как он представляет собой идемпотентный аналог традиционного интервального анализа.

8. Слабое интервальное расширение идемпотентного полукольца

Пусть S — идемпотентное полукольцо. Замкнутый *интервал* в S — это множество вида $\mathbf{x} = [\underline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{x}}] = \{\, t \in S \mid \underline{\mathbf{x}} \preceq t \preceq \overline{\mathbf{x}} \,\}$, где $\underline{\mathbf{x}}$, $\overline{\mathbf{x}} \in S$ $(\underline{\mathbf{x}} \preceq \overline{\mathbf{x}})$ называются *нижней* и *верхней границами* интервала $\mathbf{x}$ соответственно.

Отметим, что если $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ — интервалы в S, то $\mathbf{x} \subset \mathbf{y}$ тогда и только тогда, когда $\underline{\mathbf{y}} \preceq \underline{\mathbf{x}} \preceq \overline{\mathbf{x}} \preceq \overline{\mathbf{y}}$. В частности, $\mathbf{x} = \mathbf{y}$ тогда и только тогда, когда $\underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{y}}$ и $\overline{\mathbf{x}} = \overline{\mathbf{y}}$.

Замечание 8.1. Пусть $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ — интервалы в S. Вообще говоря, множество $\mathbf{x} \star \mathbf{y}$ не является интервалом в S. Действительно, рассмотрим множество $S = \{\mathbf{0}, a, b, c, d\}$, и пусть $\oplus$ задается следующим отношением порядка: $\mathbf{0}$ — наименьший элемент, d — наибольший элемент, а a, b и c несравнимы друг с другом. Если $\odot$ — нулевое умножение, т. е. если $x \odot y = \mathbf{0}$ для всех $x, y \in S$, то S является идемпотентным полукольцом без единицы. Пусть $\mathbf{x} = [\mathbf{0}, a]$, $\mathbf{y} = [\mathbf{0}, b]$, тогда $\mathbf{x} \oplus \mathbf{y} = \{\mathbf{0}, a, b, d\}$. Это множество не является интервалом, так как не содержит элемент c, хотя $\mathbf{0} \preceq c \preceq d$.

Пусть S — идемпотентное полукольцо. *Слабым интервальным расширением* $I(S)$ полукольца S назовем множество всех замкнутых интервалов в S, снабженное операциями $\overline{\oplus}$, $\overline{\odot}$: $\mathbf{x} \mathbin{\overline{\star}} \mathbf{y} = [\underline{\mathbf{x}} \star \underline{\mathbf{y}}, \overline{\mathbf{x}} \star \overline{\mathbf{y}}]$ для всех $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in I(S)$.

Предложение 2. *Слабое интервальное расширение $I(S)$ идемпотентного полукольца S замкнуто относительно операций $\overline{\oplus}$, $\overline{\odot}$ и образует идемпотентное полукольцо.*

Доказательство. Множество $I(S)$ с операциями $\overline{\oplus}$, $\overline{\odot}$ можно отождествить с подмножеством идемпотентного полукольца $S \times S$ с покоординатными операциями (см. пример 2.2). Поскольку $\underline{\mathbf{x}}\star\underline{\mathbf{y}} \preceq \overline{\mathbf{x}}\star\overline{\mathbf{y}}$ всякий раз, когда $\underline{\mathbf{x}} \preceq \overline{\mathbf{x}}$ и $\underline{\mathbf{y}} \preceq \overline{\mathbf{y}}$, множество $I(S)$ замкнуто относительно операций $\overline{\oplus}$, $\overline{\odot}$; следовательно, $I(S)$ является идемпотентным полукольцом (подполукольцом $S \times S$). ■

Введенная операция $\overline{\oplus}$ индуцирует в $I(S)$ каноническое частичное упорядочение $\preceq$, причем $\mathbf{x} \preceq \mathbf{y}$ тогда и только тогда, когда $\underline{\mathbf{x}} \preceq \underline{\mathbf{y}}$ и $\overline{\mathbf{x}} \preceq \overline{\mathbf{y}}$.

Как показывает следующее предложение, данный способ ввести алгебраические операции в $I(S)$ согласуется с общей конструкцией, изложенной в предыдущем пункте.

Предложение 3. *Для любых $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in I(S)$ интервал $\mathbf{x} \mathbin{\overline{\star}} \mathbf{y}$ является точной нижней гранью в $I(S)$ относительно упорядочения $\subset$ семейства всех интервалов, содержащих множество $\mathbf{x} \star \mathbf{y}$.*

Доказательство. Пусть интервал $\mathbf{z} \in I(S)$ таков, что $\mathbf{x}\star\mathbf{y} \subset \mathbf{z}$. Имеем $\underline{\mathbf{x}}\star\underline{\mathbf{y}} \in \mathbf{x}\star\mathbf{y} \subset \mathbf{z}$ и $\overline{\mathbf{x}} \star \overline{\mathbf{y}} \in \mathbf{x} \star \mathbf{y} \subset \mathbf{z}$; следовательно, $\underline{\mathbf{z}} \preceq \underline{\mathbf{x}} \star \underline{\mathbf{y}}$ и $\overline{\mathbf{x}} \star \overline{\mathbf{y}} \preceq \overline{\mathbf{z}}$. Из этого вытекает, что $\mathbf{x} \mathbin{\overline{\star}} \mathbf{y} \subset \mathbf{z}$, т. е. интервал $\mathbf{x} \mathbin{\overline{\star}} \mathbf{y}$ содержится в любом интервале, содержащем множество $\mathbf{x} \star \mathbf{y}$.

Возьмем теперь $t \in \mathbf{x} \star \mathbf{y}$, и пусть $x \in \mathbf{x}$, $y \in \mathbf{y}$ таковы, что $t = x \star y$. По определению интервала $\underline{\mathbf{x}} \preceq x \preceq \overline{\mathbf{x}}$ и $\underline{\mathbf{y}} \preceq y \preceq \overline{\mathbf{y}}$. Так как операция $\star$ согласована с порядком $\preceq$, получаем, что $\underline{\mathbf{x}} \star \underline{\mathbf{y}} \preceq x \star y \preceq \overline{\mathbf{x}} \star \overline{\mathbf{y}}$; из этого следует, что $t \in \mathbf{x} \mathbin{\overline{\star}} \mathbf{y}$, т. е. интервал $\mathbf{x} \mathbin{\overline{\star}} \mathbf{y}$ содержит множество $\mathbf{x} \star \mathbf{y}$. Отсюда вытекает доказываемое утверждение. ■

Замечание 8.2. Отметим, что система $\mathcal{S} = I(S)$ подмножеств S может не удовлетворять условию 2 раздела 7, если полукольцо S не является b-полным.

Предложение 4. *Если идемпотентное полукольцо S является a-полным (b-полным) и для любого (ограниченного непустого) подмножества $\{\mathbf{x}_\alpha\}$ его слабого интервального расширения $I(S)$ сумма элементов определена соотношением $\overline{\oplus}_\alpha \mathbf{x}_\alpha = [\bigoplus_\alpha \underline{\mathbf{x}}_\alpha, \bigoplus_\alpha \overline{\mathbf{x}}_\alpha]$, то идемпотентное полукольцо $I(S)$ также является a-полным (b-полным).*

Доказательство. Пусть S — a-полное (b-полное) идемпотентное полукольцо, а $\{\mathbf{x}_\alpha\}$ — непустое подмножество $I(S)$ (ограниченное в $I(S)$ непустое подмножество $I(S)$, так что множества $\{\underline{\mathbf{x}}_\alpha\}$ и $\{\overline{\mathbf{x}}_\alpha\}$ ограничены в S). В силу сделанных предположений интервал $\overline{\bigoplus}_\alpha \mathbf{x}_\alpha$ корректно определен в обоих рассматриваемых случаях. Проверим выполнение аксиомы дистрибутивности. Если S есть a-полное полукольцо, а множество $X \subset I(S)$ пусто, то $\overline{\bigoplus} X = [\mathbf{0}, \mathbf{0}]$ и для всех $\mathbf{y} \in I(S)$ справедливы равенства $\mathbf{y} \mathbin{\overline{\odot}} \Big(\overline{\bigoplus} X\Big) = \Big(\overline{\bigoplus} X\Big) \mathbin{\overline{\odot}} \mathbf{y} = [\mathbf{0}, \mathbf{0}]$. Если множество X непусто, то прямым вычислением легко убедиться, что

$$\mathbf{y} \mathbin{\overline{\odot}} \left(\overline{\bigoplus}_\alpha \mathbf{x}_\alpha\right) = \left[\bigoplus_\alpha \underline{\mathbf{y}} \odot \underline{\mathbf{x}}_\alpha, \bigoplus_\alpha \overline{\mathbf{y}} \odot \overline{\mathbf{x}}_\alpha\right] = \overline{\bigoplus}_\alpha (\mathbf{y} \mathbin{\overline{\odot}} \mathbf{x}_\alpha)$$

и аналогично $\left(\overline{\bigoplus}_\alpha \mathbf{x}_\alpha\right) \mathbin{\overline{\odot}} \mathbf{y} = \overline{\bigoplus}_\alpha (\mathbf{x}_\alpha \mathbin{\overline{\odot}} \mathbf{y})$ для любого $\mathbf{y} \in I(S)$. Таким образом, идемпотентное полукольцо $I(S)$ является a-полным (b-полным), если S — a-полное (b-полное) полукольцо. ■

Предложение 5. *В предположениях предыдущего предложения интервал* $\overline{\bigoplus}_\alpha \mathbf{x}_\alpha$ *является точной нижней гранью относительно упорядочения* $\subset$ *семейства всех интервалов из* $I(S)$, *содержащих множество* $\bigoplus_\alpha \mathbf{x}_\alpha = \{\, t \in S \mid t = \bigoplus_\alpha x_\alpha,\ x_\alpha \in \mathbf{x}_\alpha$ *для всех* $\alpha \,\}$.

Это предложение доказывается аналогично предложению 3.

Следующие два предложения являются прямыми следствиями определения операций $\overline{\oplus}$, $\overline{\odot}$:

Предложение 6. *Если идемпотентное полукольцо* S *коммутативно, то его слабое интервальное расширение* $I(S)$ *также коммутативно.*

Предложение 7. *Если идемпотентное полукольцо* S *содержит нуль* $\mathbf{0}$ *(единицу* $\mathbf{1}$*), то интервал* $[\mathbf{0},\mathbf{0}]$ *(соответственно* $[\mathbf{1},\mathbf{1}]$*) является нулем (единицей) полукольца* $I(S)$.

Предложение 8. *Если идемпотентное полукольцо* S *содержит нуль* $\mathbf{0}$ *и не имеет делителей нуля, то и* $I(S)$ *не имеет делителей нуля.*

Доказательство. Пусть $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in I(S)$ и $\mathbf{x} \neq [\mathbf{0},\mathbf{0}]$, $\mathbf{y} \neq [\mathbf{0},\mathbf{0}]$. Поскольку $\underline{\mathbf{x}} \preceq \overline{\mathbf{x}}$, $\underline{\mathbf{y}} \preceq \overline{\mathbf{y}}$, это означает, что $\overline{\mathbf{x}} \neq \mathbf{0}$, $\overline{\mathbf{y}} \neq \mathbf{0}$. Таким образом, если $\mathbf{z} = \mathbf{x} \,\overline{\odot}\, \mathbf{y}$, то $\overline{\mathbf{z}} = \overline{\mathbf{x}} \odot \overline{\mathbf{y}} \neq \mathbf{0}$, так как в S нет делителей нуля. Из этого следует, что $\mathbf{z} \neq [\mathbf{0},\mathbf{0}]$. ■

Предложение 9. *Если идемпотентное полукольцо* S *алгебраически замкнуто и для любых* $x, y \in S$, $n \in \mathbf{N}$ *выполняется равенство* $(x \oplus y)^n = x^n \oplus y^n$, *то* $I(S)$ *алгебраически замкнуто.*

Доказательство. Пусть $\mathbf{x}^n = \mathbf{x}\overline{\odot}\mathbf{x}\overline{\odot}\ldots\overline{\odot}\mathbf{x} = \mathbf{y}$. Из определения операций $\overline{\oplus}$, $\overline{\odot}$ следует, что $\underline{\mathbf{x}}^n = \underline{\mathbf{y}}$ и $\overline{\mathbf{x}}^n = \overline{\mathbf{y}}$. Пусть $\underline{\mathbf{z}} \in S$ и $\overline{\mathbf{z}} \in S$ — решения этих двух уравнений. Покажем, что можно выбрать $\underline{\mathbf{z}}$ и $\overline{\mathbf{z}}$ так, что $\underline{\mathbf{z}} \preceq \overline{\mathbf{z}}$, т. е. интервал $[\underline{\mathbf{z}}, \overline{\mathbf{z}}]$ может быть определен корректно.

Возьмем $\overline{\mathbf{z}}' = \underline{\mathbf{z}} \oplus \overline{\mathbf{z}}$, так что $\underline{\mathbf{z}} \preceq \overline{\mathbf{z}}'$. Поскольку $\overline{\mathbf{z}}'^n = (\underline{\mathbf{z}} \oplus \overline{\mathbf{z}})^n = \underline{\mathbf{z}}^n \oplus \overline{\mathbf{z}}^n$, получаем, что $\overline{\mathbf{z}}'^n = \underline{\mathbf{y}} \oplus \overline{\mathbf{y}} = \overline{\mathbf{y}}$. Поэтому $[\underline{\mathbf{z}}, \overline{\mathbf{z}}']^n = [\underline{\mathbf{y}}, \overline{\mathbf{y}}] = \mathbf{y}$. ■

Замечание 8.3. Заметим, что равенство $(x \oplus y)^n = x^n \oplus y^n$ выполнено в любом коммутативном идемпотентном полукольце S, удовлетворяющем условию сокращения (см., например, [24, Утверждение 2.1]).

9. Более сильное понятие интервального расширения

Подчеркнем, что в общем случае слабое интервальное расширение $I(S)$ идемпотентного полукольца S, удовлетворяющего условиям сокращения и стабилизации, не наследует эти свойства. Действительно, пусть $\mathbf{x} \,\overline{\odot}\, \mathbf{z} = \mathbf{y} \,\overline{\odot}\, \mathbf{z}$, где $\mathbf{z} = [\mathbf{0}, \overline{\mathbf{z}}]$ и $\overline{\mathbf{z}} \neq \mathbf{0}$, тогда элемент $\mathbf{z}$ отличен от нуля, но из этого не следует, что $\mathbf{x} = \mathbf{y}$, поскольку $\underline{\mathbf{x}}$ и $\underline{\mathbf{y}}$ могут не совпадать. Далее, пусть $\mathbf{y} = [\mathbf{0}, \overline{\mathbf{y}}] \neq [\mathbf{0},\mathbf{0}]$; тогда нижняя граница интервала $\mathbf{x}^n \overline{\odot} \mathbf{y}$, вообще говоря, не стабилизируется при $n \to \infty$.

Назовем *интервальным расширением* идемпотентного полукольца S с нулем $\mathbf{0}$ множество $\mathbf{I}(S) = \{\, \mathbf{x} \mid \mathbf{0} \prec \underline{\mathbf{x}} \preceq \overline{\mathbf{x}} \,\} \cup \{[\mathbf{0},\mathbf{0}]\}$, снабженное операциями $\overline{\oplus}$ и $\overline{\odot}$, которые определены аналогично тому, как это сделано выше. Ясно, что $\mathbf{I}(S) \subset I(S)$.

Отметим, что корректное определение этого объекта не всегда возможно, если полукольцо S содержит делители нуля. Действительно, пусть интервалы $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{I}(S)$ таковы, что $\mathbf{0} \prec \underline{\mathbf{x}} \prec \overline{\mathbf{x}}$, $\mathbf{0} \prec \underline{\mathbf{y}} \prec \overline{\mathbf{y}}$, $\underline{\mathbf{x}} \odot \underline{\mathbf{y}} = \mathbf{0}$, но $\overline{\mathbf{x}} \odot \overline{\mathbf{y}} \neq \mathbf{0}$, тогда $\mathbf{x} \,\overline{\odot}\, \mathbf{y} = [\mathbf{0}, \overline{\mathbf{x}} \odot \overline{\mathbf{y}}] \notin \mathbf{I}(S)$.

Далее будем предполагать, что интервальное расширение $\mathbf{I}(S)$ идемпотентного полукольца S замкнуто относительно операций $\overline{\oplus}$ и $\overline{\odot}$. Для этого достаточно потребовать, чтобы полукольцо S не содержало делителей нуля.

Теорема 3. *Множество $\mathbf{I}(S)$ образует идемпотентное полукольцо относительно операций $\overline{\oplus}$ и $\overline{\odot}$ с нулем $[\mathbf{0}, \mathbf{0}]$. Оно наследует некоторые специальные свойства полукольца S:*

— если S является $\mathfrak{a}$-полным ($\mathfrak{b}$-полным), то $\mathbf{I}(S)$ также $\mathfrak{a}$-полно ($\mathfrak{b}$-полно);

— если S коммутативно, то и $\mathbf{I}(S)$ коммутативно;

— если $\mathbf{1}$ — единица в S, то $[\mathbf{1}, \mathbf{1}]$ — единичный элемент в $\mathbf{I}(S)$;

— если S не содержит делителей нуля, то и $\mathbf{I}(S)$ не содержит делителей нуля;

— если S алгебраически замкнуто и для любых $x, y \in S$, $n \in \mathbf{N}$ выполнено равенство $(x \oplus y)^n = x^n \oplus y^n$, то $\mathbf{I}(S)$ алгебраически замкнуто;

— если S удовлетворяет условию сокращения, то $\mathbf{I}(S)$ также удовлетворяет условию сокращения;

— если S — полукольцо с единицей, удовлетворяющее условию стабилизации, то $\mathbf{I}(S)$ также удовлетворяет условию стабилизации.

Доказательство. Используя определение операций $\overline{\oplus}$, $\overline{\odot}$ и предложение 2, легко проверить, что $\mathbf{I}(S)$ образует идемпотентное полукольцо относительно операций $\overline{\oplus}$, $\overline{\odot}$, содержащее нулевой элемент $[\mathbf{0}, \mathbf{0}]$. Первые пять утверждений в списке вытекают из предложений 4 и 6 – 9.

Предположим, что S удовлетворяет условию сокращения, $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbf{I}(S)$ и интервал $\mathbf{z}$ отличен от нуля. Если $\mathbf{x} \mathbin{\overline{\odot}} \mathbf{z} = \mathbf{y} \mathbin{\overline{\odot}} \mathbf{z}$, то $\underline{\mathbf{x}} \odot \underline{\mathbf{z}} = \underline{\mathbf{y}} \odot \underline{\mathbf{z}}$ и $\overline{\mathbf{x}} \odot \overline{\mathbf{z}} = \overline{\mathbf{y}} \odot \overline{\mathbf{z}}$; кроме того, $\underline{\mathbf{z}} \neq \mathbf{0}$ и $\overline{\mathbf{z}} \neq \mathbf{0}$, поскольку $\mathbf{z} \neq [\mathbf{0}, \mathbf{0}]$. Поэтому из сделанных предположений вытекает, что $\mathbf{x} = [\underline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{x}}] = [\underline{\mathbf{y}}, \overline{\mathbf{y}}] = \mathbf{y}$. Если $\mathbf{z} \mathbin{\overline{\odot}} \mathbf{x} = \mathbf{z} \mathbin{\overline{\odot}} \mathbf{y}$, то $\mathbf{x} = \mathbf{y}$ аналогичным образом.

Предположим далее, что S удовлетворяет условию стабилизации; по определению $\underline{\mathbf{y}} \neq \mathbf{0}$ и $\overline{\mathbf{y}} \neq \mathbf{0}$ для любого отличного от нуля $\mathbf{y} \in \mathbf{I}(S)$. Рассмотрим последовательность $\mathbf{x}^n \mathbin{\overline{\overline{\oplus}}} \mathbf{y}$, где $\mathbf{x} \preceq [\mathbf{1}, \mathbf{1}]$; как нижние, так и верхние границы интервалов этой последовательности стабилизируются в S, так что по определению операций $\overline{\oplus}$, $\overline{\odot}$ стабилизация имеет место и для целых интервалов как элементов $\mathbf{I}(S)$. ■

Пусть S — идемпотентное полукольцо, тогда отображение $\iota\colon S \to I(S)$, определяемое формулой $\iota(x) = [x, x]$, является изоморфным вложением S в его слабое интервальное расширение $I(S)$. Если полукольцо S содержит нуль $\mathbf{0}$, а его интервальное расширение определено корректно, то отображение $\iota\colon S \to \mathbf{I}(S) \subset I(S)$ является изоморфным вложением S в его интервальное расширение. В дальнейшем мы отождествим полукольцо S с подполукольцами $\iota(S) \subset I(S)$ или $\iota(S) \subset \mathbf{I}(S) \subset I(S)$ и будем обозначать операции в $I(S)$ и в $\mathbf{I}(S)$ через $\oplus$, $\odot$. Если полукольцо S содержит единицу $\mathbf{1}$, то мы будем использовать обозначение $\mathbf{1}$ и для единичного элемента $[\mathbf{1}, \mathbf{1}]$ в $I(S)$ или $\mathbf{I}(S)$; примем также аналогичное соглашение для нулевого элемента $[\mathbf{0}, \mathbf{0}]$.

10. Идемпотентная интервальная арифметика Каухера

Подчеркнем, что в интервальном идемпотентном анализе большинство алгебраических свойств идемпотентного полукольца сохраняется и в его интервальном расширении. С другой стороны, если S — идемпотентное полуполе, то множество $\mathbf{I}(S)$ в общем случае будет не полуполем, а только коммутативным полукольцом с сокращениями.

Напомним, что любое коммутативное идемпотентное полукольцо S с нулем $\mathbf{0}$ может быть изоморфно вложено в идемпотентное полуполе $\widetilde{S}$ при условии, что S удовлетворяет условию сокращения (см., например, [23]). Если $\widetilde{S}$ совпадает со своим подполуполем, порожденным S, то $\widetilde{S}$ называется *полуполем дробей*, соответствующим полукольцу S. Это полуполе может быть построено как совокупность классов эквивалентности элементов $S \times (S \setminus \{\mathbf{0}\})$ по отношению $\sim$, где

$$(x, y) \sim (z, t) \quad \Leftrightarrow \quad x \odot t = y \odot z,$$

для любых $(x, y), (z, t) \in S \times (S \setminus \{\mathbf{0}\})$. Алгебраические операции в полуполе дробей определяются соотношениями

$$(x, y) \oplus (z, t) = ((x \odot t) \oplus (y \odot z), y \odot t), \qquad (x, y) \odot (z, t) = (x \odot z, y \odot t).$$

Нетрудно проверить, что введенные операции удовлетворяют аксиомам коммутативного полукольца с нулем $\{\, (\mathbf{0}, y) \mid y \neq \mathbf{0} \,\}$ и единицей $\{\, (y, y) \mid y \neq \mathbf{0} \,\}$. По отношению к этим операциям пары (x, y) ведут себя как "дроби" с "числителем" x и (ненулевым) "знаменателем" y. Для каждой дроби (x, y), представляющей ненулевой элемент $\widetilde{S}$, обратный элемент задается дробью (y, x). Таким образом, введенная алгебраическая структура удовлетворяет всем аксиомам полуполя.

В контексте традиционного интервального анализа аналогичное расширение алгебры числовых интервалов ведет к так называемой *интервальной арифметике Каухера* [37, 38]. В дополнение к обычным интервалам $[x, y]$, где $x \leq y$, она включает квазиинтервалы $[x, y]$ с $y < x$, которые возникают как обратные к обычным интервалам.

Как показывает следующее утверждение, в идемпотентном варианте арифметики Каухера полуполе дробей интервального расширения $\mathbf{I}(S)$, соответствующего коммутативному идемпотентному полукольцу S с условием сокращения, имеет очень простую структуру: оно изоморфно идемпотентному полуполю $(\widetilde{S} \setminus \{\mathbf{0}\})^2 \cup \{\mathbf{0}\}$ (см. пример 2.2).

Предложение 10. *Пусть $\widetilde{S}$ является полуполем дробей, соответствующим коммутативному идемпотентному полукольцу S с нулем $\mathbf{0}$, удовлетворяющему условию сокращения. Тогда полуполе дробей, соответствующих интервальному расширению $\mathbf{I}(S)$, изоморфно полуполю $(\widetilde{S} \setminus \{\mathbf{0}\})^2 \cup \{\mathbf{0}\}$ с покоординатными операциями.*

Доказательство. Из теоремы 3 следует, что $\mathbf{I}(S)$ является коммутативным идемпотентным полукольцом с нулевым элементом $\mathbf{0} = [\mathbf{0}, \mathbf{0}]$ и удовлетворяет условию сокращения. Таким образом, $\mathbf{I}(S)$ может быть изоморфно вложено в соответствующее ему полуполе дробей.

Определим отображение $\varphi\colon \mathbf{I}(S) \times (\mathbf{I}(S) \setminus \{\mathbf{0}\}) \to (\widetilde{S} \setminus \{\mathbf{0}\})^2 \cup \{\mathbf{0}\}$ так, что $\varphi((\mathbf{x}, \mathbf{y})) = (\underline{\mathbf{x}} \odot \underline{\mathbf{y}}^{-1}, \overline{\mathbf{x}} \odot \overline{\mathbf{y}}^{-1})$. Это отображение сюръективно. Действительно, $(\mathbf{0}, \mathbf{0}) = \varphi((\mathbf{0}, \mathbf{y}))$ для любого $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$. Проверим, что если $a, b \in \widetilde{S}$, $a \neq \mathbf{0}$, $b \neq \mathbf{0}$, то существуют такие $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{I}(S)$, $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$, что $\varphi((\mathbf{x}, \mathbf{y})) = (a, b)$. По определению полуполя дробей найдутся такие ненулевые элементы $a_1, a_2, b_1, b_2 \in S$, что $a = a_1 \odot a_2^{-1}$, $b = b_1 \odot b_2^{-1}$. Определим

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{x}} &= a_1 \odot b_1 \odot b_2, & \overline{\mathbf{x}} &= (a_1 \odot b_1 \odot b_2) \oplus (a_2 \odot b_1^2), \\ \underline{\mathbf{y}} &= a_2 \odot b_1 \odot b_2, & \overline{\mathbf{y}} &= (a_1 \odot b_2^2) \oplus (a_2 \odot b_1 \odot b_2); \end{aligned}$$

тогда $\mathbf{0} \prec \underline{\mathbf{x}} \preceq \overline{\mathbf{x}}$, $\mathbf{0} \prec \underline{\mathbf{y}} \preceq \overline{\mathbf{y}}$ и

$$\begin{gathered} \underline{\mathbf{x}} \odot \underline{\mathbf{y}}^{-1} = a_1 \odot b_1 \odot b_2 \odot b_2^{-1} \odot b_1^{-1} \odot a_2^{-1} = a, \\ \overline{\mathbf{x}} \odot \overline{\mathbf{y}}^{-1} = b_1 \odot (a_1 \odot b_2 \oplus a_2 \odot b_1) \odot (a_1 \odot b_2 \oplus a_2 \odot b_1)^{-1} \odot b_2^{-1} = b. \end{gathered}$$

Поскольку $x \odot y^{-1} = z \odot t^{-1}$ тогда и только тогда, когда $x \odot t = y \odot z$ для любых $x, y, z, t \in \widetilde{S}$ таких, что $y \neq \mathbf{0}$ и $t \neq \mathbf{0}$, мы видим, что $\varphi((\mathbf{x}, \mathbf{y})) = \varphi((\mathbf{z}, \mathbf{t}))$ тогда и только тогда, когда $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ и $(\mathbf{z}, \mathbf{t})$ определяют один и тот же элемент полуполя дробей, соответствующего $\mathbf{I}(S)$. Кроме того,

$$\begin{aligned}
\varphi((\mathbf{x}, \mathbf{y}) \oplus (\mathbf{z}, \mathbf{t})) &= \varphi(((\mathbf{x} \odot \mathbf{t}) \oplus (\mathbf{y} \odot \mathbf{z}), \mathbf{y} \odot \mathbf{t})) = \\
&= ((\underline{\mathbf{x}} \odot \underline{\mathbf{y}}^{-1}) \oplus (\underline{\mathbf{z}} \odot \underline{\mathbf{t}}^{-1}), (\overline{\mathbf{x}} \odot \overline{\mathbf{y}}^{-1}) \oplus (\overline{\mathbf{z}} \odot \overline{\mathbf{t}}^{-1})) = \\
&= \varphi((\mathbf{x}, \mathbf{y})) \oplus \varphi((\mathbf{z}, \mathbf{t})), \\
\varphi((\mathbf{x}, \mathbf{y}) \odot (\mathbf{z}, \mathbf{t})) &= \varphi((\mathbf{x} \odot \mathbf{z}, \mathbf{y} \odot \mathbf{t})) = \\
&= ((\underline{\mathbf{x}} \odot \underline{\mathbf{y}}^{-1}) \odot (\underline{\mathbf{z}} \odot \underline{\mathbf{t}}^{-1}), (\overline{\mathbf{x}} \odot \overline{\mathbf{y}}^{-1}) \odot (\overline{\mathbf{z}} \odot \overline{\mathbf{t}}^{-1})) = \\
&= \varphi((\mathbf{x}, \mathbf{y})) \odot \varphi((\mathbf{z}, \mathbf{t})).
\end{aligned}$$

Поэтому отображение φ является изоморфизмом полуполя дробей, соответствующих $\mathbf{I}(S)$, и идемпотентного полуполя $(\widetilde{S} \setminus \{\mathbf{0}\})^2 \cup \{\mathbf{0}\}$. ■

Условие коммутативности в этом предложении является естественным. Действительно, из теории упорядоченных групп можно вывести, что b-полное идемпотентное полукольцо, в котором каждый ненулевой элемент обратим, коммутативно, т. е. является полуполем (см. [5]).

11. Идемпотентная интервальная линейная алгебра

Пусть S — идемпотентное полукольцо, а $I(S)$ — его слабое интервальное расширение; тогда совокупность $\mathrm{Mat}_{nn}(I(S))$ квадратных матриц порядка n является идемпотентным полукольцом. Если интервальное расширение $\mathbf{I}(S)$ полукольца S определено корректно, то же самое справедливо для $\mathrm{Mat}_{nn}(\mathbf{I}(S))$. *Нижней* и *верхней матрицами* любой (не обязательно квадратной) интервальной матрицы $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_{ij}) \in \mathrm{Mat}_{mn}(I(S))$ ($\mathbf{A} = (\mathbf{a}_{ij}) \in \mathrm{Mat}_{mn}(\mathbf{I}(S))$) называются матрицы $\underline{\mathbf{A}} = (\underline{\mathbf{a}}_{ij})$ и $\overline{\mathbf{A}} = (\overline{\mathbf{a}}_{ij})$.

Предложение 11. *Пусть S — идемпотентное полукольцо. Отображение*

$$\mathbf{A} \in \mathrm{Mat}_{nn}(I(S)) \mapsto [\underline{\mathbf{A}}, \overline{\mathbf{A}}] \in I(\mathrm{Mat}_{nn}(S))$$

является изоморфизмом идемпотентных полуколец $\mathrm{Mat}_{nn}(I(S))$ и $I(\mathrm{Mat}_{nn}(S))$. Если интервальное расширение $\mathbf{I}(S)$ полукольца S определено корректно, то отображение $A \in \mathrm{Mat}_{nn}(\mathbf{I}(S)) \mapsto [\underline{\mathbf{A}}, \overline{\mathbf{A}}] \in I(\mathrm{Mat}_{nn}(S))$ является гомоморфизмом идемпотентного полукольца $\mathrm{Mat}_{nn}(\mathbf{I}(S))$ в полукольцо $I(\mathrm{Mat}_{nn}(S))$.

Здесь интервалы $[\underline{\mathbf{A}}, \overline{\mathbf{A}}]$ в $I(\mathrm{Mat}_{nn}(S))$ определены относительно частичного порядка $\preceq$ в $\mathrm{Mat}_{nn}(S)$ (см. пример 2.3). Доказательство легко следует из определения алгебраических операций в $I(S)$; действительно, из последнего вытекает, что сложение и умножение интервальных матриц сводятся к сложению и умножению их нижних и верхних матриц.

Разумеется, обозначение $A \in \mathbf{A}$ эквивалентно соотношениям $\underline{\mathbf{A}} \preceq A \preceq \overline{\mathbf{A}}$.

Следующее предложение непосредственно выводится из теоремы 2:

Предложение 12. *Если коммутативное идемпотентное полукольцо S с нулем $\mathbf{0}$ и единицей $\mathbf{1}$ алгебраически замкнуто и удовлетворяет условиям сокращения и стабилизации, то для любой матрицы $\mathbf{A} \in \mathrm{Mat}_{nn}(\mathbf{I}(S))$ существуют ненулевой "собственный вектор" $\mathbf{V} \in \mathrm{Mat}_{n1}(\mathbf{I}(S))$ и "собственное значение" $[\underline{\lambda}, \overline{\lambda}] \in \mathbf{I}(S)$ такие, что $\mathbf{AV} = [\underline{\lambda}, \overline{\lambda}] \odot \mathbf{V}$. Если матрица $\mathbf{A}$ неприводима, то "собственное значение" $[\underline{\lambda}, \overline{\lambda}]$ определено единственным образом.*

Из определения алгебраических операций в полукольцах $I(S)$, $\mathbf{I}(S)$ следует, что $\underline{\mathbf{A}}\,\underline{\mathbf{V}} = \underline{\lambda} \odot \underline{\mathbf{V}}$ и $\overline{\mathbf{A}}\,\overline{\mathbf{V}} = \overline{\lambda} \odot \overline{\mathbf{V}}$.

Рассмотрим следующее интервальное дискретное стационарное уравнение Беллмана (см. также разд. 4, 5):

$$X = \mathbf{A}X \oplus \mathbf{B},$$

где $\mathbf{A} \in \mathrm{Mat}_{nn}(\mathbf{I}(S))$, $\mathbf{B} \in \mathrm{Mat}_{ns}(\mathbf{I}(S))$, а X — неизвестная матрица с n строками и s столбцами.

Следуя работе [39], можно рассматривать два различных понятия решения данного дискретного стационарного уравнения Беллмана:

1. *Объединенное множество решений:*

$$\Sigma(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \{\, X \in \mathrm{Mat}_{ns}(S) \mid X = AX \oplus B \text{ для некоторых } A \in \mathbf{A}, B \in \mathbf{B} \,\}.$$

2. *Алгебраическое решение:* такая матрица $\mathbf{X} \in \mathrm{Mat}_{ns}(\mathbf{I}(S))$, что $\mathbf{X} = \mathbf{AX} \oplus \mathbf{B}$.

Отметим, что в работах [39, 40] вводятся и другие множества решений, а также обсуждаются их взаимосвязи.

Напомним, что минимальное решение уравнения $X = AX \oplus B$ в смысле канонического порядка $\preceq$ в $\mathrm{Mat}_{ns}(S)$ задается формулой $X = A^*B$. Ниже мы всюду будем предполагать, что матрица замыкания A^* существует, и рассматривать только минимальные решения. В частности, если матрица A является определенной в смысле Б. А. Карре (см. [29] и разд. 5), то минимальное решение единственно. Мы будем пользоваться обозначением $\Sigma_{\min}(\mathbf{A}, \mathbf{B})$, чтобы подчеркнуть, что речь идет об объединенном множестве минимальных решений.

В традиционном интервальном анализе алгебраическое решение является подмножеством объединенного множества решений, а это последнее обладает весьма сложной структурой, для полного описания которой требуется экспоненциально большое число операций. Даже задачи распознавания (является ли объединенное множество решений пустым) и нахождения внешней интервальной оценки для него с заданной погрешностью оказываются NP-трудными (см. [14–20] и библиографию, приведенную в этих работах, а также обсуждение в [39, 40]). Следующее утверждение показывает, что *в идемпотентном интервальном анализе (минимальное) алгебраическое решение системы уравнений $X = \mathbf{A}X \oplus \mathbf{B}$ является точной внешней интервальной оценкой объединенного множества минимальных решений $\Sigma_{\min}(\mathbf{A}, \mathbf{B})$.*

Теорема 4. *Интервальная матрица $\mathbf{A}^*\mathbf{B} \in \mathrm{Mat}_{ns}(\mathbf{I}(S))$, рассматриваемая как интервал в $I(\mathrm{Mat}_{ns}(S))$, является точной нижней гранью относительно упорядочения $\subset$ множества всех интервалов в $I(\mathrm{Mat}_{ns}(S))$, содержащих объединенное множество минимальных решений $\Sigma_{\min}(\mathbf{A}, \mathbf{B})$.*

Доказательство. Поскольку умножение матриц и операция замыкания согласованы с каноническим порядком $\preceq$ в матричных полукольцах (см. леммы 1 и 2), интервал $\mathbf{A}^*\mathbf{B} = \left[\underline{\mathbf{A}}^*\underline{\mathbf{B}}, \overline{\mathbf{A}}^*\overline{\mathbf{B}}\right]$ корректно определен в $I(\mathrm{Mat}_{ns}(S))$.

Пусть интервал $\mathbf{Z} \in \mathrm{Mat}_{ns}(\mathbf{I}(S)) \subset I(\mathrm{Mat}_{ns}(S))$ содержит множество $\Sigma_{\min}(\mathbf{A}, \mathbf{B})$; тогда $\mathbf{A}^*\mathbf{B} \subset \mathbf{Z}$, поскольку $\underline{\mathbf{A}}^*\underline{\mathbf{B}} \in \Sigma_{\min}(\mathbf{A}, \mathbf{B}) \subset \mathbf{Z}$ и $\overline{\mathbf{A}}^*\overline{\mathbf{B}} \in \Sigma_{\min}(\mathbf{A}, \mathbf{B}) \subset \mathbf{Z}$.

Обратно, пусть $T \in \Sigma_{\min}(\mathbf{A}, \mathbf{B})$, так что $T = A^*B$, где $A \in \mathbf{A}$, $B \in \mathbf{B}$. Тогда $T \in \mathbf{A}^*\mathbf{B}$, поскольку $\underline{\mathbf{A}}^*\underline{\mathbf{B}} \preceq T \preceq \overline{\mathbf{A}}^*\overline{\mathbf{B}}$. Поэтому $\Sigma_{\min}(\mathbf{A}, \mathbf{B}) \subset \mathbf{A}^*\mathbf{B}$, что завершает доказательство. ■

Следствие. *Точная внешняя интервальная оценка $\mathbf{A}^*\mathbf{B}$ объединенного множества минимальных решений $\Sigma_{\min}(\mathbf{A},\mathbf{B})$ может быть получена за полиномиальное число операций.*

Доказательство. В силу определения операций $\odot$, $\oplus$ в интервальном расширении идемпотентного полукольца S операции над интервальными матрицами сводятся к раздельному выполнению операций над их нижними и верхними матрицами. С другой стороны, алгебраическое решение дискретного стационарного уравнения Беллмана $X = AX \oplus B$ может быть построено с помощью метода Гаусса или других эффективных алгоритмов линейной алгебры, требующих полиномиального числа операций. Повторяя это построение для нижней и верхней матриц $\underline{\mathbf{A}}^*\underline{\mathbf{B}}$ и $\overline{\mathbf{A}}^*\overline{\mathbf{B}}$ по отдельности, получаем искомую интервальную оценку $\mathbf{A}^*\mathbf{B}$. ■

Рассмотрим итерационный процесс:

$$\mathbf{X}_{k+1} = \mathbf{A}\mathbf{X}_k \oplus \mathbf{B} = \mathbf{A}^{k+1}\mathbf{X}_0 \oplus \left(\bigoplus_{l=0}^{k} \mathbf{A}^l\right)\mathbf{B}, \tag{2}$$

где $\mathbf{X}_k \in \mathrm{Mat}_{ns}(\mathbf{I}(S))$, $k = 0, 1, \ldots$

Следующее утверждение с точностью до терминологии принадлежит Б. А. Карре [29, Теорема 6.1].

Предложение 13. *Если матрица $A \in \mathrm{Mat}_{nn}(S)$ полуопределена, то итерационный процесс $X_{k+1} = AX_k \oplus B$ стабилизируется к (минимальному) решению $X = A^*B$ уравнения $X = AX \oplus B$ не более чем через n итераций для любого начального приближения $X_0 \in \mathrm{Mat}_{ns}(S)$ такого, что $X_0 \preceq A^*B$.*

Предположим, что идемпотентное полукольцо S удовлетворяет предположениям предложения 12. Пусть $[\underline{\lambda}_1, \overline{\lambda}_1], \ldots, [\underline{\lambda}_k, \overline{\lambda}_k]$, $1 \le k \le n$, суть собственные значения матрицы $\mathbf{A} \in \mathrm{Mat}_{nn}(\mathbf{I}(S))$. Обозначим $\sup\{\overline{\lambda}_1, \ldots, \overline{\lambda}_k\} = \bigoplus_{l=1}^{k} \overline{\lambda}_l$ через $\rho(\mathbf{A})$. Можно сформулировать простой спектральный критерий сходимости итерационного процесса (2):

Теорема 5. *Пусть S — идемпотентное полукольцо, удовлетворяющее предположениям предложения 12, а матрица $\mathbf{A} \in \mathrm{Mat}_{nn}(\mathbf{I}(S))$ такова, что $\rho(\mathbf{A}) \preceq \mathbf{1}$. Тогда итерационный процесс $\mathbf{X}_{k+1} = \mathbf{A}\mathbf{X}_k \oplus \mathbf{B}$, $k \ge 0$, стабилизируется к (минимальному) решению $\mathbf{X} = \mathbf{A}^*\mathbf{B}$ уравнения $\mathbf{X} = \mathbf{A}\mathbf{X} \oplus \mathbf{B}$ не более чем через n итераций для любого $\mathbf{X}_0 \in \mathrm{Mat}_{ns}(\mathbf{I}(S))$ такого, что $\mathbf{X}_0 \preceq \mathbf{X}$.*

Доказательство. Достаточно доказать, что каждая из последовательностей нижних и верхних матриц $\{\mathbf{X}_k\}$ сходится в отдельности. С этой целью покажем, что матрицы $\underline{\mathbf{A}}$ и $\overline{\mathbf{A}}$ полуопределены; тогда результат будет следовать из предложения 13.

Поскольку $\underline{\mathbf{a}}_{ij} \preceq \overline{\mathbf{a}}_{ij}$ для всех i, j, следует лишь проверить, что матрица $\overline{\mathbf{A}}$ полуопределена. Сначала мы докажем это, если $\overline{\mathbf{A}}$ неприводима. Выражая единственное собственное значение неприводимой матрицы $\overline{\mathbf{A}}$ через веса циклов в соответствующем ей графе, получаем [23, 24]

$$\overline{\lambda}^{\varphi(n)} = \bigoplus_{\substack{l=1,\ldots,n\\(i_1,\ldots,i_l)}} [\overline{\mathbf{a}}_{i_1 i_2} \odot \cdots \odot \overline{\mathbf{a}}_{i_l i_1}]^{\varphi(n)/l},$$

где $\varphi(n)$ есть наименьшее общее кратное чисел $1, \ldots, n$. Поэтому для любого цикла p его вес $A(p) = \overline{\mathbf{a}}_{i_1 i_2} \odot \cdots \odot \overline{\mathbf{a}}_{i_l i_1}$ удовлетворяет неравенству $A(p) \preceq \mathbf{1}$, если $\overline{\lambda} \preceq \mathbf{1}$ (действительно, если $A(p) \oplus \mathbf{1} \succ \mathbf{1}$, то по замечанию 8.3 $\mathbf{1} \oplus A(p)^{\varphi(n)/l} = (\mathbf{1} \oplus A(p))^{\varphi(n)/l} \succ \mathbf{1}$, так что $\mathbf{1} \oplus \overline{\lambda}^{\varphi(n)} \succ \mathbf{1}$ — противоречие). Таким образом, матрица $\overline{\mathbf{A}}$ полуопределена.

В идемпотентной матричной алгебре устанавливается, что любая приводимая матрица $\overline{\mathbf{A}}$ перестановкой строк и столбцов может быть приведена к верхнему блочно-треугольному виду (см., например, [8]):

$$B = \begin{pmatrix} B_1 & * & \dots & * \\ \mathbf{0} & B_2 & \dots & * \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & B_k \end{pmatrix}, \qquad 1 < k \leq n,$$

где все квадратные матрицы $B_1, \dots, B_k$ либо нулевые, либо неприводимые. Покажем, что каждое собственное значение $\overline{\lambda}$ матрицы $\overline{\mathbf{A}}$ одновременно является собственным значением одной из матриц B_l, $l = 1, \dots, k$. Действительно, пусть $V = (v_i) \in \mathrm{Mat}_{n1}(S)$ есть собственный вектор матрицы $\overline{\mathbf{A}}$, отвечающий собственному значению $\overline{\lambda}$. Рассмотрим разложение множества вершин $X = X_1 \cup \dots \cup X_k$, где $X_l \cap X_s = \emptyset$, если $l \neq s$, и $B_l = (b_{ij})_{x_i, x_j \in X_l}$, $l = 1, \dots, k$; пусть $l_0 = \max \{ l \mid v_i \neq \mathbf{0}$ для некоторой вершины $x_i \in X_l \}$. Тогда $\overline{\lambda}$ — единственное собственное значение неприводимой матрицы B_{l_0}, соответствующее собственному вектору $(v_i)_{x_i \in X_{l_0}}$. Условие $\rho(\mathbf{A}) \preceq \mathbf{1}$ означает, что матрицы $B_1, \dots, B_k$ полуопределены. Поскольку замкнутых маршрутов, содержащих вершины из разных групп $x_i \in X_l$, $x_j \in X_s$, $l \neq s$, в графе матрицы $\overline{\mathbf{A}}$ не существует, можно заключить, что эта матрица является полуопределенной. ■

Замечание 11.1. Интересно сравнить это простое предложение с известным спектральным критерием сходимости итерационного процесса в традиционном интервальном анализе ([12, Теорема 12.1]), который в наших обозначениях имеет следующий вид:

Итерационный процесс $\mathbf{X}_{k+1} = \mathbf{A}\mathbf{X}_k + \mathbf{B}$, $k \geq 0$, *сходится к единственному решению* $\mathbf{X}$ *уравнения* $\mathbf{X} = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{B}$ *для любого* $\mathbf{X}_0 \in \mathrm{Mat}_{ns}(I(\mathbf{C}))$ *тогда и только тогда, когда* $\rho(|\mathbf{A}|) < 1$.

Список литературы

[1] Maslov V. P. New superposition principle for optimization problems // Seminaire sur les Equations aux Dérivées Partielles 1985/86. Palaiseau: Centre Math. de l'École Polytechnique, 1986. Exposé 24.

[2] Idempotent analysis // Advances in Soviet Mathematics. Vol. 13 / Ed. V. P. Maslov, S. N. Samborskiĭ. Providence: Amer. Math. Society, 1992.

[3] Kolokoltsov V. N., Maslov V. P. Idempotent Analysis and Applications. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1997.

[4] Litvinov G. L., Maslov V. P. Correspondence Principle for Idempotent Calculus and Some Computer Applications. Bures-sur-Yvette: Institut des Hautes Etudes Sci., 1995. IHES/M/95/33. The same in [7], p. 420–443. (math.GM/0101021, LANL e-print archive: http://arXiv.org).

[5] Литвинов Г. Л., Маслов В. П., Шпиз Г. Б. Идемпотентный функциональный анализ: алгебраический подход // Мат. заметки. 2001. Т. 69, №5. С. 696–799. (math.FA/0009128, LANL e-print archive: http://arXiv.org).

[6] Литвинов Г. Л., Маслов В. П., Шпиз Г. Б. Линейные функционалы на идемпотентных пространствах: алгебраический подход // Докл. РАН. 1998. Т. 363, №3. С. 298–300.

[7] Idempotency // Publ. of the Newton Institute / Ed. by J Gunawardena. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1998.

[8] Baccelli F. L., Cohen G., Olsder G. J., Quadrat J.-P. Synchronization and Linearity: an Algebra for Discrete Event Systems. N. Y.: Wiley, 1992.

[9] Litvinov G. L., Maslov V. P., Rodionov A. Ya. Unifying Approach to Software and Hardware Design for Scientific Calculations. Prepr. Intern. Sophus Lie Centre, 1995. (quant-ph/9904024, LANL e-print archive (http://arXiv.org).)

[10] Kearfott R. B. Rigorous Global Search: Continuous Problems. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1996.

[11] Neumaier A. Interval Methods for Systems of Equations. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1990.

[12] Алефельд Г., Херцбергер Ю. Введение в интервальные вычисления. М.: Мир, 1987.

[13] Moore R. E. Methods and Applications of Interval Analysis. Philadelphia: SIAM, 1979.

[14] Лакеев А. В., Носков С. И. О множестве решений линейного уравнения с интервально заданными оператором и правой частью // Докл. РАН. 1993. Т. 330, №4. С. 430–433.

[15] Лакеев А. В., Носков С. И. О множестве решений линейного уравнения с интервально заданными оператором и правой частью // Сиб. мат. журн. 1994. Т. 35, №5. С. 1074–1084.

[16] Kreinovich V., Lakeyev A. V., Noskov S. I. Optimal solution of interval linear systems is intractable (NP-hard) // Interval Comput. 1993. Vol. 1. P. 6–14.

[17] Kreinovich V., Lakeyev A. V., Rohn J. Computational complexity of interval algebraic problems: Some are feasible and some are computationally intractable: A survey // Sci. Comput. and Validated Numer. / Eds G. Alefeld, A. Frommer, B. Lang. Berlin: Akad. Verlag, 1996. P. 293–306.

[18] Lakeyev A. V., Kreinovich V. NP-hard classes of linear algebraic systems with uncertainties // Reliable Comput. 1997. Vol. 3, No. 1. P. 51–81.

[19] Kreinovich V., Lakeyev A. V., Rohn J., Kahl P. Computational Complexity and Feasibility of Data Processing and Interval Computations. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1998.

[20] Coxson G. E. Computing exact bounds on elements of an inverse interval matrix is NP-hard // Reliable Comput. 1999. Vol. 5, No. 2. P. 137–142.

[21] Соболевский А. Н. Интервальная арифметика и линейная алгебра над идемпотентными полукольцами // Докл. РАН. 1999. Т. 369, №6. С. 747–749.

[22] Рокафеллар Р. Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973.

[23] Дудников П. С., Самборский С. Н. Эндоморфизмы полумодулей над полукольцами с идемпотентной операцией // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1991. Т. 55, №1. С. 93–109. [Киев, 1987 (Препр. / АН УССР. ИМ; №87.48.).]

[24] Dudnikov P. S., Samborskiĭ S. N. Endomorphisms of finitely generated free semimodules // Idempotent Analysis: Advances in Soviet Math. Vol. 13 / Ed. V. P. Maslov, S. N. Samborskiĭ. Providence: Amer. Math. Society, 1992. P. 65–85.

[25] Bellman R. E., Dreyfus S. E. Dynamic Programming and Applications. Paris: Dunod, 1965.

[26] Nelson E. Probability Theory and Euclidian Field Theory. Constructive Quantum Field Theory. Vol. 25. Berlin: Springer-Verl., 1973.

[27] Васильев А.Н. Функциональные методы в квантовой теории поля и статистике. Л.: Изд-во ЛГУ, 1976.

[28] Lions P.-L. Generalized Solutions of Hamilton–Jacobi Equations. L.: Pitman, 1982.

[29] Carré B. A. An algebra for network routing problems // J. Inst. Math. Appl. 1971. Vol. 7. P. 273–294.

[30] Carré B. A. Graphs and Networks. Oxford: Oxford Univ. Press, 1979.

[31] Lehmann D. Algebraic structures for transitive closure // Theor. Comput. Sci. 1977. Vol. 4. P. 59–76.

[32] Авдошин С. М., Белов В. В., Маслов В. П. Математические аспекты синтеза вычислительных сред. М.: Изд-во МИЭМ, 1984.

[33] Воеводин В. В. Математические основы параллельных вычислений. М.: Изд-во МГУ, 1991.

[34] Kleene S. C. Representation of events in nerve sets and finite automata // Automata Studies / Eds. J. McCarthy, C. Shannon. Princeton: Princeton Univ. Press, 1956. P. 3–40.

[35] Backhouse R., Carré B. A. Regular algebra applied to path-finding problems // J. Inst. Maths Appl. 1975. Vol. 15. P. 161–186.

[36] Rote G. A systolic array algorithm for the algebraic path problem (shortest paths; matrix inversion) // Computing. 1985. Vol. 34. P. 191–219.

[37] Kaucher E. Algebraische Erweiterungen der Intervallrechnung unter Erhaltung Ordnungs- und Verbandsstrukturen // Computing Suppl. 1977. Vol. 1. P. 65–79.

[38] Kaucher E. Interval analysis in the extended interval space IR // Computing Suppl. 1980. Vol. 2. P. 33–49.

[39] Shary S. P. Algebraic approach to the interval linear static identification, tolerance, and control problems, or One more application of Kaucher arithmetic // Reliable Computing. 1996. Vol. 2, No. 1. P. 3–33.

[40] Shary S. P. Algebraic approach in the “outer problem” for interval linear equations // Reliable Computing. 1997. Vol. 3, No. 2. P. 103–135.

[41] Литвинов Г.Л., Соболевский А.Н. Точные интервальные решения дискретного уравнения Беллмана и сложность задач интервальной линейной алгебры // Докл. РАН. 2000. Т. 374, № 3. С. 304–306.

[42] Litvinov G., Sobolevskii A. Idempotent interval analysis and optimization problems // Reliable Comp. 2001. Vol. 7, No. 5. P. 353–377. (math.SC/0101080, LANL e-print archive: http://arXiv.org).

Поступила в редакцию 11 декабря 1999 г.