

ДВИЖЕНИЕ ГОРИЗОНТАЛЬНОГО ЦИЛИНДРА В ОПРОКИДЫВАЮЩЕЙСЯ ВОЛНЕ*

Б. Е. ПРОТОПОПОВ

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН

Новосибирск, Россия

e-mail: boris@hydro.nsc.ru

The numerical simulation for the motion of a horizontal cylinder drifting initially under water close to its surface and then captured by the overturning wave is carried out. The following approach has been used: the pressure and velocity fields are calculated, which are generated by the free (without a body) overturning wave, then the cylinder is placed into one of these fields and its motion is determined (disregarding the reverse body effect on water). The trajectories of the cylinder motion are calculated in dependence on its form, size and initial position.

Введение

Рассматривается задача о движении тела в жидкости при его захвате опрокидывающейся волной. Последнюю можно смоделировать (численно), задав в начальный момент плавный бор большой амплитуды [1]. Получаемая таким образом волна является ярко выраженным представителем ныряющих волн, обрушение которых сопровождается выбросом струи жидкости вперед по направлению движения волны. Тело выбрано достаточно простой формы, а именно — эллиптический цилиндр. Обладая нейтральной плавучестью, цилиндр первоначально дрейфует на малой глубине. Затем тело вовлекается в движение опрокидывающейся волной. Траектория такого движения может оказаться нетривиальной, в частности возможно выпадение тела из волны. Определение траекторий движения тела в зависимости от его формы, размеров и начального положения и является целью данной работы.

Поведение кругового цилиндра под *периодической* (синусоидальной) волной рассмотрено в [2]. Показано, что под действием сил первого порядка цилиндр нейтральной плавучести движется по круговой траектории. Амплитуда траектории (радиус круга) отличается от амплитуды траектории соответствующей жидкой частицы лишь на величину четвертого порядка малости по r/λ (r — радиус цилиндра, λ — длина набегающей волны). Аналогичный результат получен и для эллиптического цилиндра [3]. Заметим, что поведение цилиндра в *опрокидывающейся* волне представляет собой существенно более сложную (нестационарную и сильно нелинейную) задачу, которая на данный момент может быть решена только численно.

*Работа выполнена в рамках Интеграционного проекта №1 СО РАН и при частичном финансировании Совета поддержки ведущих научных школ, грант №00-15-96162 .

© Б. Е. Протопопов, 2002.

В настоящей работе используется следующий подход к решению поставленной задачи. Сначала рассчитываются поля давления и скорости, возникающие в жидкости при ее движении типа свободного (без тела) опрокидывающегося бора. Затем в одно из этих полей помещается цилиндр и определяется траектория его движения. Пренебрежение обратным влиянием тела на движение жидкости является основным допущением данного подхода. Более сложные модели — с точным выполнением условия непротекания на теле — оставлены для будущих исследований.

Близкая по идее постановка использована в [4], где, в частности, проанализировано перемещение лежащих на дне тел сферической формы (камней) в результате опрокидывания волн прибоя. Волна как таковая вообще не рассматривается, ее присутствие проявляется лишь посредством задания так называемого градиента импульса давления. Знание последнего позволяет найти начальную скорость тела и скорость окружающей его жидкости. Разность этих скоростей определяет величину вязкой силы. Кроме нее учитываются также сила тяжести, сила Архимеда и сила трения тела о дно. Рассчитывается движение тела под действием указанных сил и с начальной скоростью, полученной от удара опрокидывающейся волны. В более поздней работе [5] этих же авторов построено приближенное решение задачи об обтекании однородным потоком сферы, лежащей на плоскости. Граничные условия непротекания на теле опять были нарушены, хотя и в меньшей степени по сравнению с аналогичной работой [6].

Результаты настоящих исследований могут быть применены к оценке выживаемости так называемых автономных необитаемых подводных аппаратов [7] в штормовых условиях. Эти аппараты, предназначенные для океанологических исследований, имеют небольшие габариты (в сравнении с возможной высотой штормовых волн). Кроме того, многие из них работают на солнечной энергии, так что значительную часть времени находятся на поверхности воды либо на малой глубине под водой.

В данной работе рассматривается только строго боковое набегание волны на тело, когда “направляющие” бора параллельны направляющим цилиндра. В этом случае движение системы жидкость — тело является двумерным, что заметно упрощает задачу. В плоскости движения выберем декартову систему координат с осями x и z , направленными горизонтально и вертикально вверх соответственно.

1. Поля давления и скорости

Данный параграф содержит постановку задачи и метод расчета полей давления и скорости, возникающих в жидкости при ее движении типа опрокидывающегося бора. Жидкость предполагается однородной, невязкой, несжимаемой, ее движение — потенциальным.

1.1. Постановка задачи

В любой момент времени t потенциал скорости $\phi(x, z, t)$ определяется как решение следующей краевой задачи (буквенные индексы снизу означают частные производные):

$$\phi_{xx} + \phi_{zz} = 0 \quad (D(t)), \quad (1)$$

$$\phi_x = 0 \quad (x = 0), \quad (2)$$

$$\phi_x = c \quad (x = l + ct), \quad (3)$$

$$\phi_z = 0 \quad (z = -h), \quad (4)$$

$$\phi = \tilde{\phi}(\xi, t) \quad (x = \tilde{x}(\xi, t), \quad z = \tilde{z}(\xi, t)). \quad (5)$$

Здесь $D(t)$ есть жидкая область, ограниченная слева и справа вертикальными стенками, снизу — горизонтальным дном, сверху — свободной поверхностью. Правая стенка подвижна при $c \neq 0$. Свободная поверхность представлена в параметрическом виде, с тем чтобы допустить опрокидывание волн. Уравнение (1) выражает несжимаемость жидкости, уравнения (2)–(4) — непротекание через твердые границы. Уравнение (5) есть условие на свободной поверхности, в котором как положение самой поверхности, так и значение потенциала на ней известны лишь в начальный момент времени, а затем их следует находить из уравнений

$$\tilde{x}_t = \tilde{u}, \quad \tilde{z}_t = \tilde{w}, \quad (6)$$

$$\tilde{\phi}_t = \frac{1}{2} (\tilde{u}^2 + \tilde{w}^2) - g\tilde{z}, \quad (7)$$

где

$$\tilde{u}(\xi, t) = \phi_x, \quad \tilde{w}(\xi, t) = \phi_z, \quad (x = \tilde{x}(\xi, t), \quad z = \tilde{z}(\xi, t)); \quad (8)$$

g — ускорение свободного падения. Уравнения (6)–(8) есть кинематические и динамическое условия на свободной поверхности в случае, когда параметр ξ совпадает с лагранжевой координатой вдоль поверхности.

Начальные данные для эволюционных уравнений (6), (7) взяты из [1]:

$$\tilde{x}(\xi, 0) = x_0(\xi), \quad \tilde{z}(\xi, 0) = |z_0(\xi)| + \frac{1}{4}z_0^2(\xi), \quad (9)$$

$$\tilde{\phi}(\xi, 0) = \frac{1}{2}c \left(\xi + b \ln \cosh \frac{x_0(\xi) - a}{b} \right). \quad (10)$$

Здесь

$$z_0(\xi) \equiv \frac{1}{2}c \left(1 + \tanh \frac{x_0(\xi) - a}{b} \right), \quad (11)$$

а функция $x_0(\xi)$ важна лишь с точки зрения сгущения узлов расчетной сетки и конкретизирована ниже.

По найденному потенциалу скорости давление $p(x, z, t)$ вычисляется согласно интегралу Коши — Лагранжа:

$$p = -\rho \left(\phi_t + \frac{1}{2} (\phi_x^2 + \phi_z^2) + gz \right), \quad (12)$$

а вектор скорости — взятием градиента от потенциала:

$$u = \phi_x, \quad w = \phi_z.$$

Здесь ρ есть плотность жидкости, $u(x, z, t)$ и $w(x, z, t)$ — горизонтальная и вертикальная компоненты скорости.

1.2. Метод расчета

Метод расчета задачи (1)–(11) на потенциал скорости подробно изложен в [1]. Здесь же ограничимся лишь перечислением основных идей метода.

Задача записывается в обобщенных криволинейных координатах, в которых жидкая область представляет собой постоянный прямоугольник. В начальный момент времени отображение на прямоугольник осуществляется простой алгебраической процедурой, а

в дальнейшем сохранение прямоугольника обеспечивается за счет выбора лагранжевых координат в качестве обобщенных. В результате замены координат уравнение Лапласа переходит в эллиптическое уравнение общего вида, которое переписывается в виде системы из трех уравнений первого порядка относительно потенциала и компонент скорости. Решение полученной эллиптической системы находится установлением (на каждом шаге по времени) решения соответствующей параболической задачи. Последняя рассчитывается методом дробных шагов. Все производные (первого порядка) по пространственным координатам вычисляются точным дифференцированием квадратичных сплайнов, аппроксимирующих искомые величины. Эволюционная часть задачи, включающая в себя уравнения (6) – (8), а также аналогичные (6) уравнения для перемещения внутренних узлов сетки, рассчитывается по неявной схеме Кранка – Николсона. Ввиду неявности схемы требуется итерационный процесс (на каждом шаге по времени) для подправления условий (5) и (8), которыми эллиптическая и эволюционная части задачи связаны между собой.

Поскольку в [1] давление не вычислялось, остановимся подробнее на особенностях процедуры его расчета. Для дискретизации интеграла Коши – Лагранжа (12) по времени также применяется схема Кранка – Николсона:

$$\frac{1}{2}(p^{n+1} + p^n) = s^{n+1} \equiv -\rho \left(\frac{\phi^{n+1} - \phi^n}{\tau} + \frac{1}{2}(q^{n+1} + q^n) \right). \quad (13)$$

Здесь τ – шаг по времени, верхний индекс означает номер временного слоя и использовано обозначение:

$$q \equiv \frac{1}{2}(\phi_x^2 + \phi_z^2) + gz.$$

Если потенциал скорости уже найден, то согласно второму из равенств (13) становится известной последовательность $\{s^n\}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) полусумм давления. Для нахождения каждого из слагаемых, входящих в эти полусуммы, необходимо знать начальное давление p^0 . В самом деле, из первого равенства (13) нетрудно получить (в последующих трех формулах индексы – номера временных шагов – написаны снизу, чтобы не путать их с показателями степени):

$$p_n = (-1)^n \left(p_0 + 2 \sum_{i=1}^n (-1)^i s_i \right). \quad (14)$$

Начальное поле давления может быть рассчитано как решение уравнения Пуассона, известным способом выводимое из уравнений Эйлера движения идеальной несжимаемой жидкости. Однако погрешность расчета таким образом величины p_0 будет, как видно из (14), знакопеременно входить (не затухая!) во все последующие значения p_n , так что давление получается осциллирующим по времени. По этой причине здесь используется другой способ определения начального поля давления.

Сначала выполняются N пробных шагов по времени расчета задачи (1) – (11) и вычисляются соответственно столько же полусумм давлений s_n . Затем по этим полусуммам подбирается такое начальное давление, которое приводит к последовательности $\{p_n\}$ с минимальными в некотором смысле осцилляциями. Например, эту проблему можно сформулировать так: требуется найти значение p_0 , минимизирующее функционал

$$J(p_0) \equiv \sum_{n=1}^{N-1} \left(p_n(p_0) - \frac{1}{2}(s_n + s_{n+1}) \right)^2,$$

где зависимость $p_n(p_0)$ определена формулой (14). Решение данной задачи выписывается в явном виде:

$$p_0 = \frac{-1}{N-1} \left[\frac{1}{2} (s_1 + (-1)^N s_N) + 2 \sum_{n=1}^N (-1)^n (N-n) s_n \right].$$

После того как по описанной методике найдены значения p_0 во всех узлах сетки, расчет задачи (1)–(11) начинается снова, но уже с известным начальным полем давления. Тогда схема (13) дает давление на каждом шаге по времени.

Как отмечено выше, задача (1)–(12) на скорость и давление жидкости рассчитывается в криволинейных обобщенных (лагранжевых) координатах. Пересчет в плоскость физических координат осуществляется по формуле

$$f_* = f(\xi_*, \zeta_*).$$

Здесь $f(\xi, \zeta)$ есть интересующая нас величина (давление или скорость); f_* — ее значение в заданной точке с физическими координатами x_* и z_* ; ξ_* и ζ_* — обобщенные координаты этой точки, т. е. корни системы уравнений:

$$x(\xi_*, \zeta_*) = x_*, \quad z(\xi_*, \zeta_*) = z_*. \quad (15)$$

Чтобы пользоваться этими формулами, надо, во-первых, представить зависимости $f(\xi, \zeta)$, $x(\xi, \zeta)$, $z(\xi, \zeta)$ непрерывным (а не сеточным) образом и, во-вторых, решить систему уравнений (15).

Первая из задач — задача интерполяции — решается построением квадратичных сплайнов вида

$$f(\xi, \zeta) = \alpha_{00} + \alpha_{10}\xi + \alpha_{01}\zeta + \alpha_{20}\xi^2 + \alpha_{02}\zeta^2.$$

Представления функций $x(\xi, \zeta)$ и $z(\xi, \zeta)$ аналогичны. Коэффициенты каждого такого аппроксимирующего полинома (разные в разных ячейках сетки) находятся из условий его равенства заданному значению в центре ячейки и непрерывности вместе с первой производной по нормали в серединах сторон ячейки.

Система уравнений (15) решается приближенно. Сначала находится ближайшая к заданной точке (x_*, z_*) ячейка сетки. Затем внутри этой ячейки строится вспомогательная, более мелкая сетка и находится ближайший к заданной точке узел уже этой локальной сетки. Обобщенные координаты этого узла выбираются в качестве искомым.

2. Движение цилиндра

В данном параграфе рассматривается движение горизонтального цилиндра, вызванное движением окружающей его жидкости. Влияние жидкости на тело учитывается двумя различными способами. В первом случае цилиндр движется в рассчитанном поле давления жидкости, что позволяет найти силы, действующие на тело, а значит, его ускорение, скорость и т. д. При этом инерционные свойства цилиндра имеют решающее значение, но условие непротекания жидкости через поверхность тела может нарушаться сколь угодно сильно. Во втором случае цилиндр движется в поле скорости жидкости таким образом, что условия непротекания нарушаются минимально, однако движение тела оказывается не зависящим от его массы и момента инерции.

2.1. Постановка задачи

Тело обладает тремя степенями свободы: его положение в пространстве и времени полностью определяется горизонтальной и вертикальной координатами центра масс, $X(t)$ и $Z(t)$, и углом поворота $\Theta(t)$. Указанные величины изменяются согласно уравнениям

$$\frac{dX}{dt} = U, \quad \frac{dZ}{dt} = W, \quad \frac{d\Theta}{dt} = \Omega, \quad (16)$$

где $U(t)$, $W(t)$ — компоненты скорости центра масс тела; $\Omega(t)$ — угловая скорость. Цилиндр начинает свое движение из некоторого заданного положения:

$$X(0) = X_0, \quad Z(0) = Z_0, \quad \Theta(0) = \Theta_0. \quad (17)$$

Правые части уравнений (16) определяются по-разному, в зависимости от того, движется тело в поле давления или в поле скорости.

2.1.1. Движение в поле давления

В случае, когда известно давление $p(x, z, t)$, скорости перемещения и вращения цилиндра находятся из обыкновенных дифференциальных уравнений — законов изменения количества движения и момента количества движения тела:

$$\frac{dU}{dt} = \frac{P}{m}, \quad \frac{dW}{dt} = \frac{R}{m} - g, \quad \frac{d\Omega}{dt} = \frac{M_0}{I}. \quad (18)$$

Здесь $P(t)$, $R(t)$ есть компоненты силы давления жидкости на тело; $M_0(t)$ — момент сил давления относительно центра масс тела; m — масса тела; I — момент инерции тела относительно его центра масс. Начальные данные для уравнений (18) имеют вид

$$U(0) = U_0, \quad W(0) = W_0, \quad \Omega(0) = \Omega_0 \quad (19)$$

(значения U_0 , W_0 и Ω_0 конкретизированы ниже).

Компоненты силы и момент сил давления на тело вычисляются интегрированием по его поверхности (контуру) S :

$$P = - \oint_S p dz, \quad R = \oint_S p dx, \quad (20)$$

$$M_0 = \oint_S p (\hat{x} dx + \hat{z} dz) = M - XR + ZP.$$

Здесь $p(x, z, t)$ — заданное поле давления; \hat{x} , \hat{z} — координаты точки относительно центра масс тела:

$$\hat{x} \equiv x - X, \quad \hat{z} \equiv z - Z;$$

$M(t)$ — момент сил давления относительно начала координат:

$$M = \oint_S p (x dx + z dz). \quad (21)$$

2.1.2. Движение в поле скорости

В случае, когда заданы компоненты скорости $u(x, z, t)$ и $w(x, z, t)$ жидкости, окружающей цилиндр, движение последнего определяется граничными условиями: нарушения этих условий должны быть минимальны (в среднеквадратичном смысле). При этом рассматриваются как условия непротекания жидкости через поверхность тела, так и условия прилипания. Последние позволяют оценить влияние вязкости жидкости на движение цилиндра.

Будем искать величины U , W и Ω такие, которые минимизируют функционал

$$J_1(U, W, \Omega) \equiv \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L [(U - \Omega \hat{z}_i - u_i) \cos \alpha_i + (W + \Omega \hat{x}_i - w_i) \sin \alpha_i]^2$$

в случае идеальной жидкости и функционал

$$J_2(U, W, \Omega) \equiv \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L [(U - \Omega \hat{z}_i - u_i)^2 + (W + \Omega \hat{x}_i - w_i)^2]$$

в случае вязкой жидкости. Здесь суммирование проводится по поверхности тела, L — количество на ней узлов, в которых и контролируется выполнение граничных условий. В круглых скобках стоят разности скоростей тела и жидкости в выбранных узлах, векторы $(\cos \alpha_i, \sin \alpha_i)$ есть единичные нормали к поверхности тела. Условия минимума функционалов

$$\frac{\partial J_j}{\partial U} = \frac{\partial J_j}{\partial W} = \frac{\partial J_j}{\partial \Omega} = 0 \quad (j = 1, 2)$$

дают системы линейных уравнений на величины U , W и Ω . Решения этих систем записываются в явном виде, который, однако, здесь не приводится из-за своей громоздкости.

2.2. Метод расчета

Обыкновенные дифференциальные уравнения (16), (18) рассчитываются методом конечных разностей по схеме Кранка — Николсона, например:

$$\frac{X^{n+1, k+1} - X^n}{\tau} = \frac{1}{2} (U^{n+1, k} + U^n).$$

Второй верхний индекс означает номер итерации. Итерационный процесс необходим в силу весьма сложной (неявной) зависимости правых частей уравнений от искомым величин.

При расчете компонент силы и момента интегралы в (20), (21) заменяются суммами (по поверхности тела):

$$P = - \sum_{i=1}^L p_{i+1/2} (z_{i+1} - z_i), \quad R = \sum_{i=1}^L p_{i+1/2} (x_{i+1} - x_i),$$

$$M = \sum_{i=1}^L p_{i+1/2} \left(x_{i+1/2} (x_{i+1} - x_i) + z_{i+1/2} (z_{i+1} - z_i) \right).$$

Здесь значения всех величин между узлами определяются полусуммами, а значения с “запредельными” индексами — по условию периодичности, например:

$$p_{i+1/2} \equiv \frac{1}{2} (p_{i+1} + p_i), \quad p_{L+1} \equiv p_1.$$

Масса и момент инерции тела вычисляются по формулам

$$m = \frac{1}{2}\sigma \sum_{i=1}^L (\hat{x}_i \hat{z}_{i+1} - \hat{x}_{i+1} \hat{z}_i), \quad (22)$$

$$I = \frac{1}{12}\sigma \sum_{i=1}^L (\hat{x}_i \hat{z}_{i+1} - \hat{x}_{i+1} \hat{z}_i) (\hat{x}_i^2 + \hat{x}_i \hat{x}_{i+1} + \hat{x}_{i+1}^2 + \hat{z}_i^2 + \hat{z}_i \hat{z}_{i+1} + \hat{z}_{i+1}^2), \quad (23)$$

где σ — плотность тела. Эти формулы соответствуют приближенному представлению тела в виде суммы треугольников с вершинами в центре масс тела и двух соседних узлах на его поверхности. Отдельные слагаемые в (22), (23) есть массы и моменты инерции этих треугольников.

3. Результаты расчетов

Обезразмерим все величины с масштабами, составленными из (размерных) плотности, ускорения свободного падения и глубины жидкости. Таким образом, в безразмерном виде имеем

$$\rho = g = h = 1.$$

Задача на давление и скорость рассчитана с константами

$$l = 30.0, \quad a = 15.0, \quad b = 2.0, \quad c = -1.7$$

на сетке с количеством ячеек 150×10 и шагом по времени $\tau = 0.01$. При этом использован следующий вид функции $x_0(\xi)$ из начальных данных (9)–(11):

$$x_0(\xi) = \begin{cases} a \tanh \{ \beta_1 \xi / \xi_a \} (\tanh \beta_1)^{-1} & (0 \leq \xi \leq \xi_a), \\ l - (l - a) \tanh \{ \beta_2 (\xi_l - \xi) / (\xi_l - \xi_a) \} (\tanh \beta_2)^{-1} & (\xi_a \leq \xi \leq \xi_l). \end{cases}$$

Подбором коэффициентов β_1 , β_2 можно добиться желаемого сгущения узлов расчетной сетки (в плоскости физических координат) в окрестности центра волны — точки $x = a = x_0(\xi_a)$. Аналогичным образом узлы сетки были сгущены и в вертикальном направлении (от дна к свободной поверхности).

Константы, фигурирующие в задаче на движение цилиндра, в расчетах выбирались следующим образом. Свободными были начальная горизонтальная координата X_0 и параметры формы тела — горизонтальная r_1 и вертикальная r_2 полуоси эллиптического цилиндра. Начальное заглубление Z_0 задавалось минимальным при условии, что тело остается полностью погруженным (т. е. при таком заглублении цилиндр касается поверхности жидкости). Угол Θ_0 начального поворота тела всегда был нулевым. Начальные скорости U_0 , W_0 и Ω_0 находились из условия минимизации либо функционала J_1 , если цилиндр движется в поле давления или в поле скорости с условиями непротекания, либо J_2 , если цилиндр движется в поле скорости с условиями прилипания. Рассмотрены только тела нейтральной плавучести ($\sigma = 1$). Шаг по времени всегда был таким же, как и в задаче на давление и скорость. Число узлов на поверхности цилиндра было $L = 100$. Для интерполяции давления и скорости внутри какой-либо сеточной ячейки последняя разбивалась на 80×80 более мелких ячеек (одинакового размера).

Для начала рассмотрено движение кругового цилиндра ($r_1 = r_2 = r$).

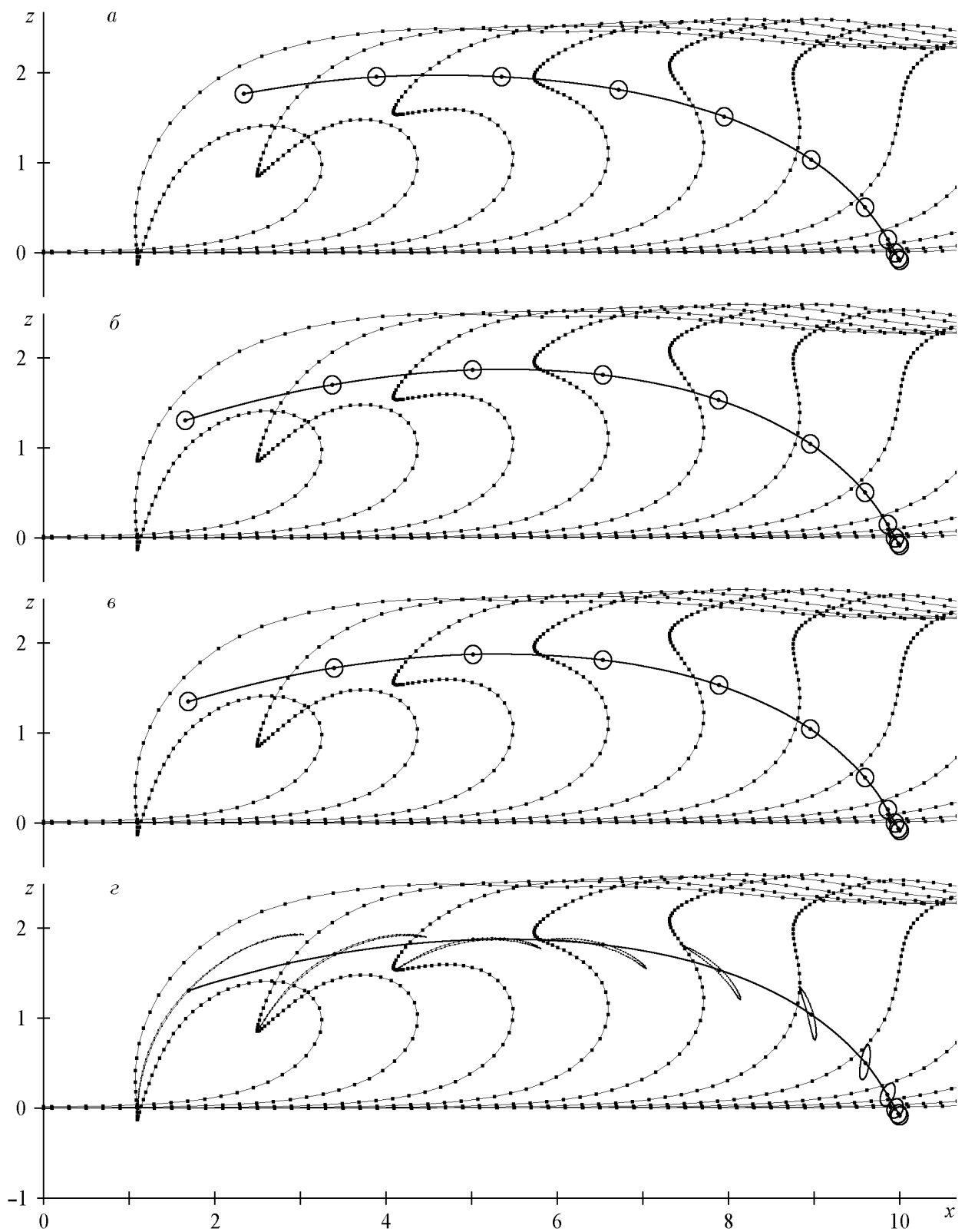


Рис. 1. Движение твердого кругового ($r = 0.1$) цилиндра в поле давления (*a*), в поле скорости с условиями непротекания (*б*), в поле скорости с условиями прилипания (*в*), а также движение соответствующего жидкого цилиндра (*г*).

Первая серия расчетов выполнена для цилиндра радиуса $r = 0.1$. Начальное положение тела варьировалось. Выбраны следующие значения горизонтальной координаты: $X_0 = 10.0, 8.0$ и 12.0 . Этим значениям соответствуют начальные заглубления цилиндра $Z_0 = -0.0886, -0.0985$ и -0.0181 . Результаты расчетов представлены на рис. 1–3 соответственно. Показаны формы свободной поверхности и положения цилиндра в моменты

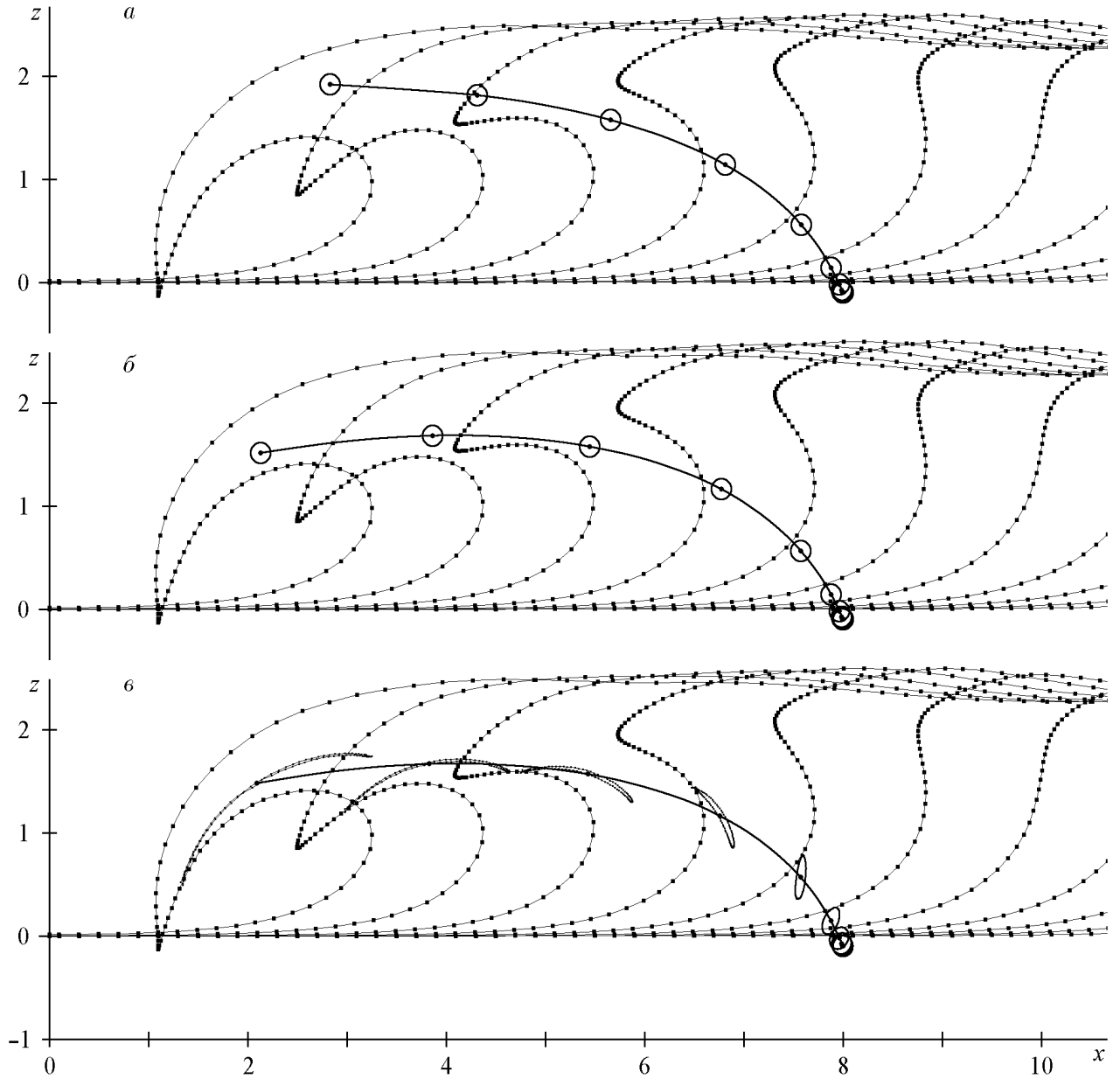


Рис. 2. Движение твердого кругового ($r = 0.1$) цилиндра в поле давления (а) и в поле скорости (б), а также движение соответствующего жидкого цилиндра (в).

времени $t = 0.0, 0.7, 1.3, 1.8, 2.3, 2.8, 3.3, 3.8, 4.3, 4.8, 5.3$ (справа налево). Последний момент времени максимальный, до которого удается досчитать движение опрокидывающейся волны с выбранными параметрами. На рисунках представлены не все расчетные области, а лишь левые их части, где собственно и происходит движение тела. Точки на поверхности жидкости соответствуют реальным положениям узлов расчетной сетки, причем каждый узел всегда совпадает с одной и той же частицей жидкости. Для большей

наглядности соседние узлы (жидкие частицы) соединены отрезками прямых.

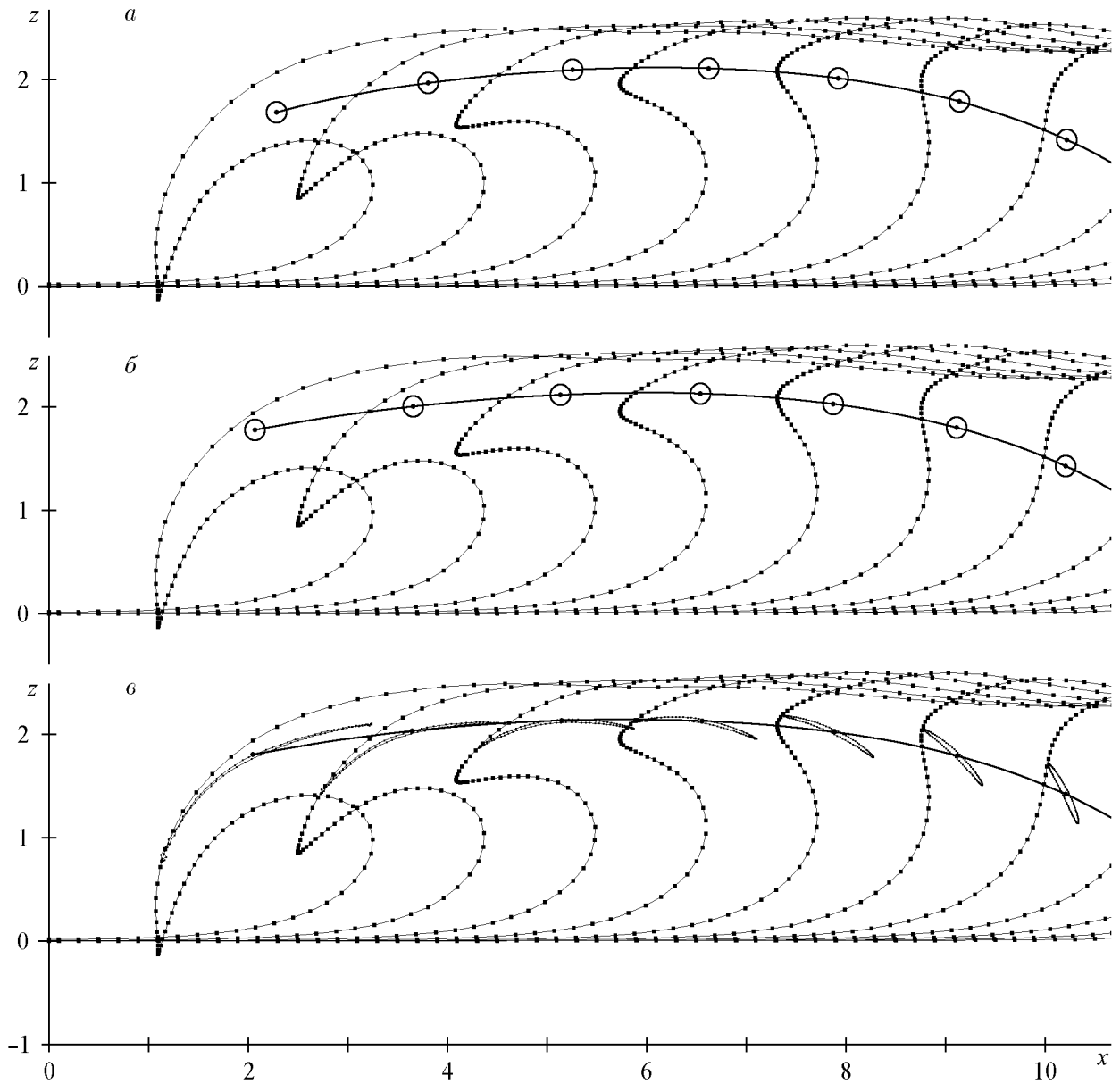


Рис. 3. Движение твердого кругового ($r = 0.1$) цилиндра в поле давления (*a*) и в поле скорости (*б*), а также движение соответствующего жидкого цилиндра (*в*).

Рис. 1, *a* соответствует движению тела в поле давления, создаваемого опрокидывающейся волной, рис. 1, *б* и 1, *в* — движению в поле скорости (с граничными условиями непротекания и прилипания соответственно). На рис. 1, *г* для сравнения показано движение жидкого контура, у которого все начальные параметры точно такие же, как и у недеформируемого цилиндра. Сплошной линией изображена траектория центра масс цилиндра (*a–в*) и траектория жидкой частицы, совпадающей с центром масс при $t = 0$ (*г*). Поскольку движение кругового цилиндра в поле скорости оказалось слабо зависящим от типа граничных условий (сравните рис. 1, *б* и рис. 1, *в*) при всех испробованных параметрах, то на рис. 2–4 движение в поле скорости с условиями прилипания опущено, а часть рис. 2, *в*–4, *в* соответствует движению жидкого контура.

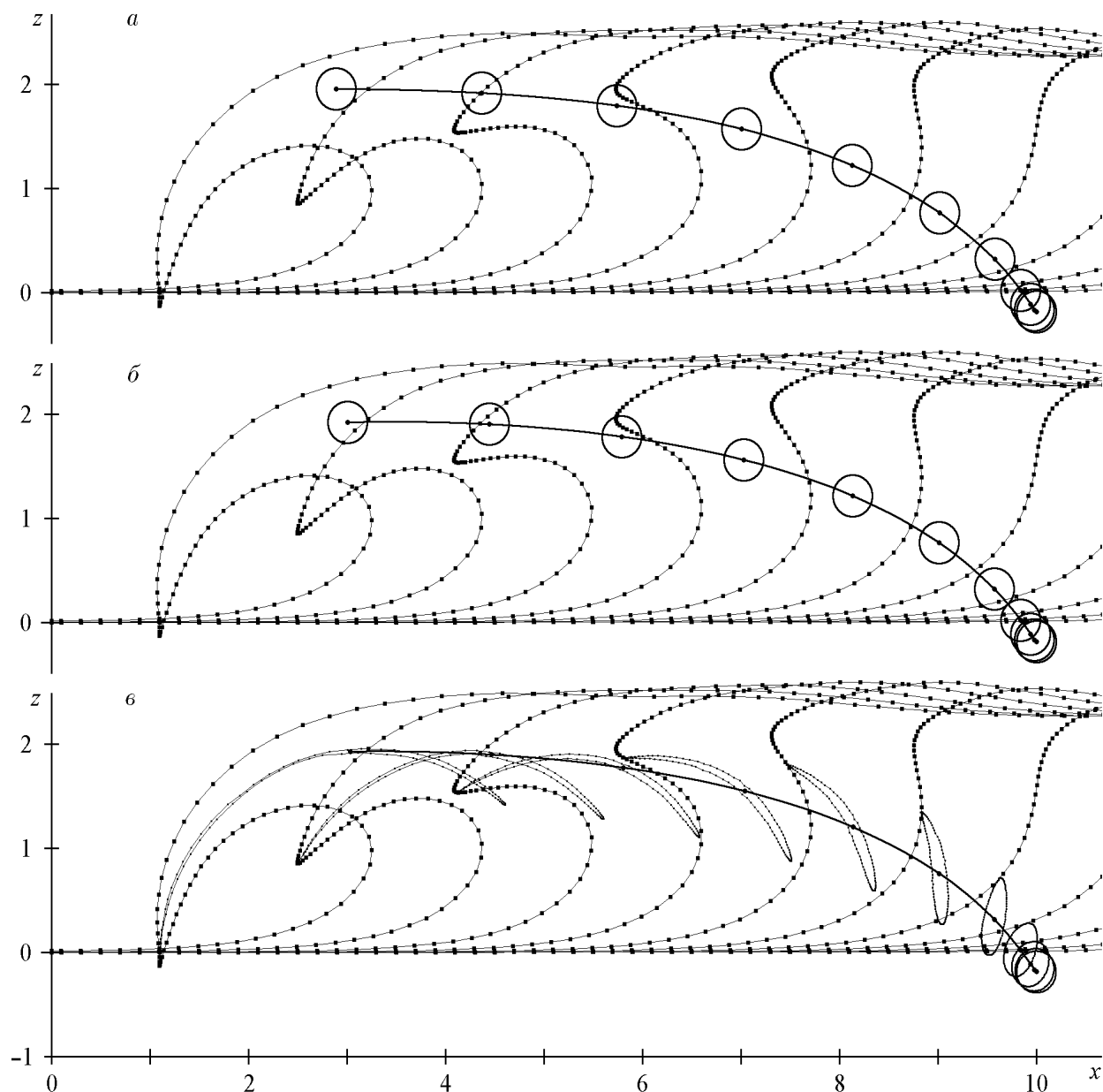


Рис. 4. Движение твердого кругового ($r = 0.2$) цилиндра в поле давления (*a*) и в поле скорости (*б*), а также движение соответствующего жидкого цилиндра (*в*).

Наблюдается очень сильная деформация жидкого контура в опрокидывающейся волне. Однако моделирование твердого тела путем “запрета” деформации соответствующего жидкого контура (с приближенным выполнением условий непротекания) не дает существенного отличия по траектории центра масс. Это отличие становится заметным лишь в случае движения в поле давления и проявляется в запаздывании тела по сравнению с движением в поле скорости. В любом случае цилиндр остается внутри волны и не стремится приблизиться к свободной границе.

На рис. 4 представлены результаты расчетов движения цилиндра большего радиуса ($r = 0.2$) из начального положения $X_0 = 10.0$, $Z_0 = -0.1886$. Увеличение радиуса цилиндра влечет увеличение его начального заглубления (иначе он не будет полностью погруженным), т. е. удаление центра масс от поверхности жидкости. Это, по-видимому, и является

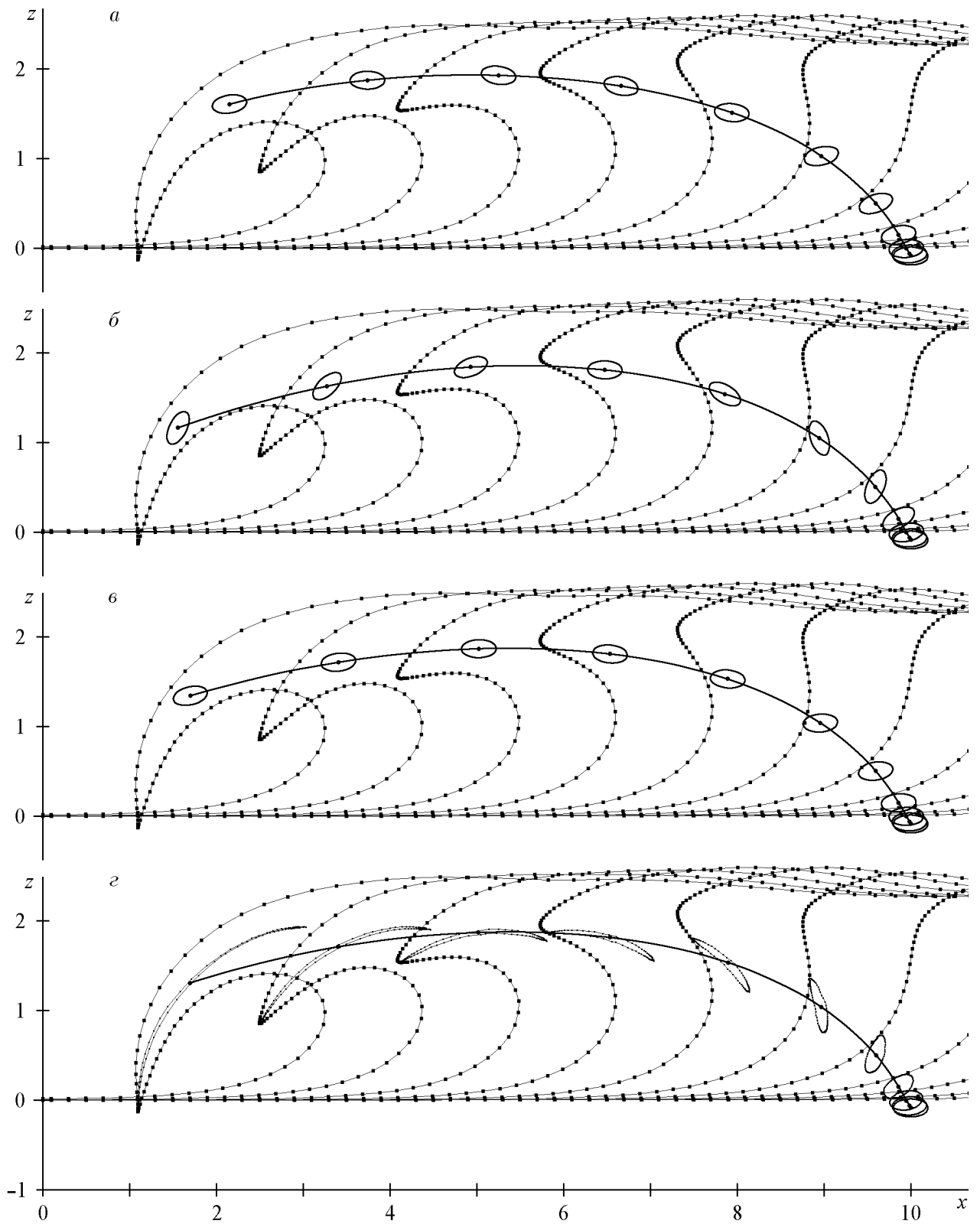


Рис. 5. Движение твердого эллиптического ($r_1 = 0.2$, $r_2 = 0.1$) цилиндра в поле давления (*a*), в поле скорости с условиями непротекания (*б*), в поле скорости с условиями прилипания (*в*), а также движение соответствующего жидкого цилиндра (*г*).

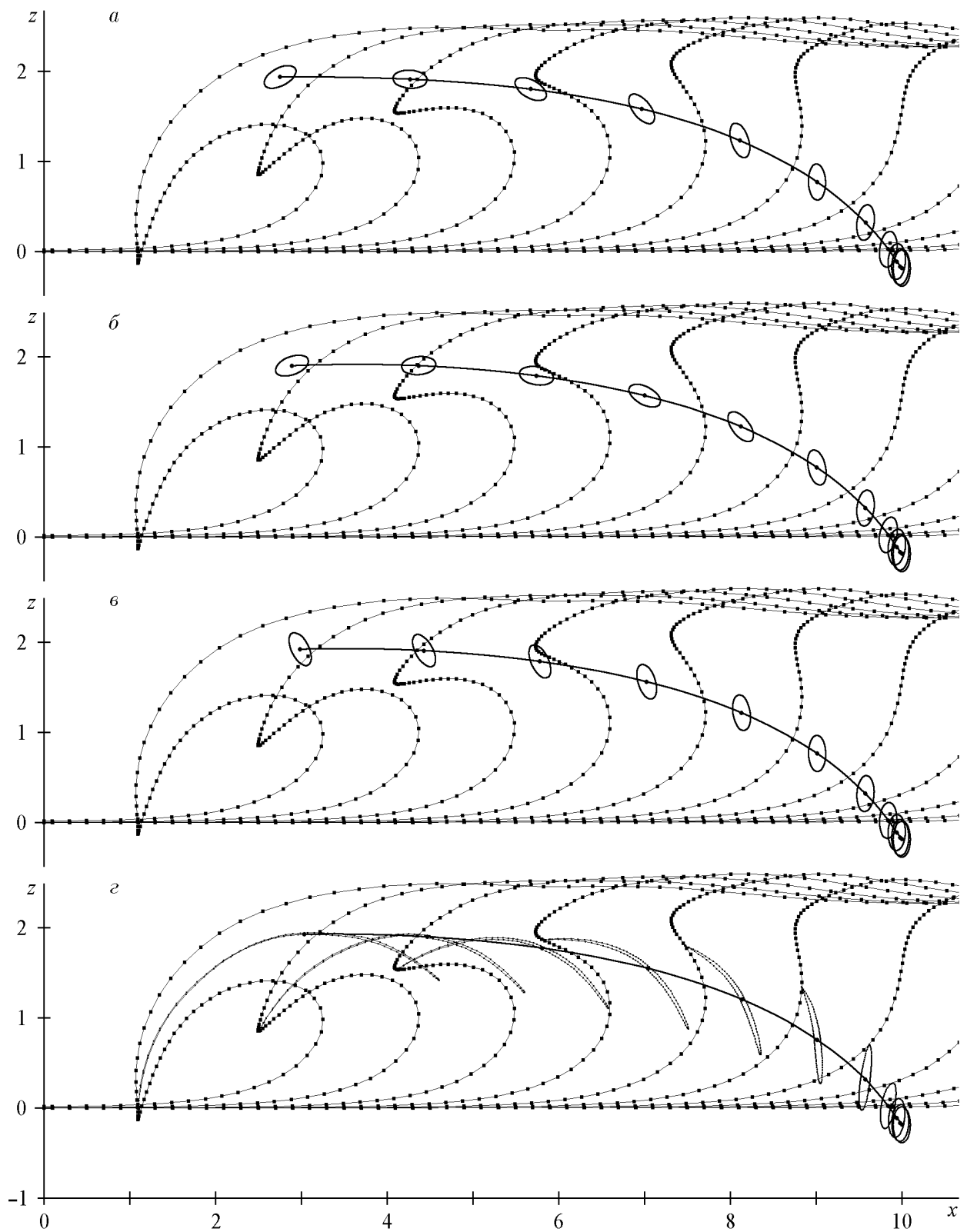


Рис. 6. Движение твердого эллиптического ($r_1 = 0.1$, $r_2 = 0.2$) цилиндра в поле давления (*a*), в поле скорости с условиями непротекания (*б*), в поле скорости с условиями прилипания (*в*), а также движение соответствующего жидкого цилиндра (*г*).

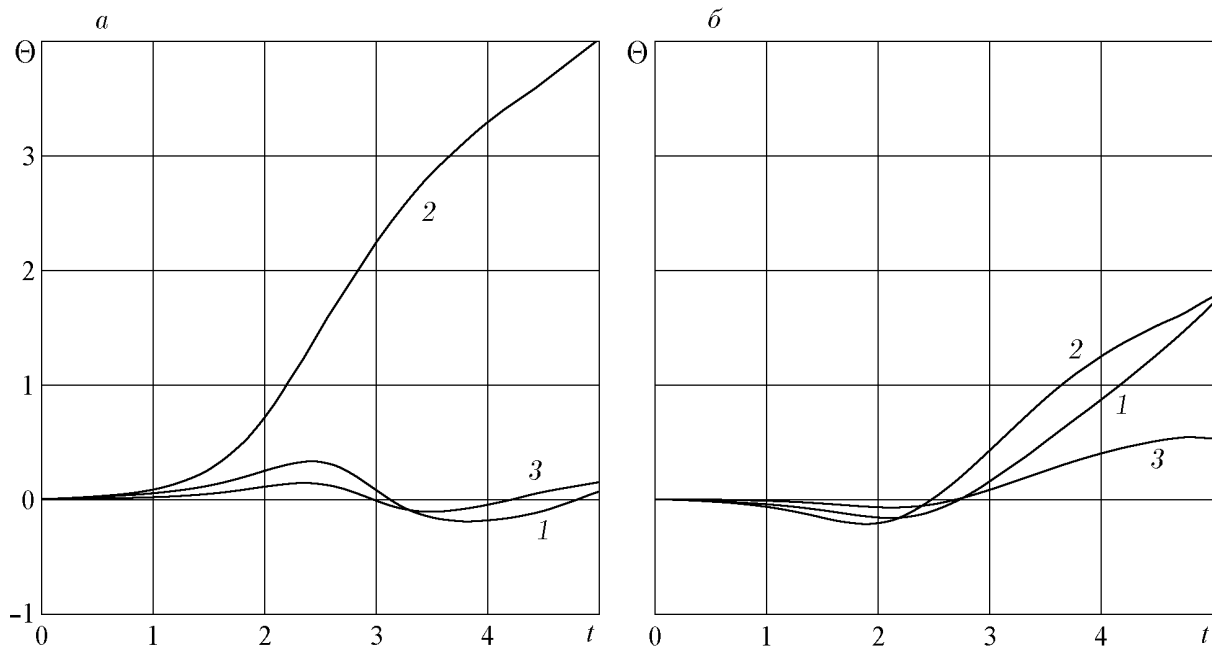


Рис. 7. Угол поворота эллиптического цилиндра с параметрами $r_1 = 0.2$, $r_2 = 0.1$ (а) и $r_1 = 0.1$, $r_2 = 0.2$ (б).

причиной еще более слабого отличия траекторий, чем в случае цилиндра меньшего радиуса (чем больше глубина, тем слабее движение жидкости, а значит, и тела).

Далее рассмотрено движение эллиптического цилиндра. Первый расчет выполнен для цилиндра с параметрами $r_1 = 0.2$, $r_2 = 0.1$ и начальными координатами $X_0 = 10.0$, $Z_0 = -0.0886$, второй — с $r_1 = 0.1$, $r_2 = 0.2$, $X_0 = 10.0$, $Z_0 = -0.1886$. Результаты расчетов представлены на рис. 5 и 6 соответственно. Как и в случае кругового цилиндра, траектории центра масс слабо отличаются друг от друга. Лишь при движении в поле давления отличие становится заметным. Горизонтальный эллипс ($r_1 = 0.2$, $r_2 = 0.1$) движется медленнее, чем в поле скорости, а вертикальный ($r_1 = 0.1$, $r_2 = 0.2$) — чуть быстрее (аналогично круговым цилиндрам с $r = 0.1$ и $r = 0.2$ соответственно). Таким образом, движение тела в большей степени зависит от глубины, на которой находится тело, чем от его формы.

Вращение эллиптического цилиндра, в отличие от кругового, становится заметным. Для большей наглядности угол поворота тела как функция времени показан на отдельном рисунке. Кривые 1–3 на рис. 7 соответствуют различным “способам перемещения” тела (рис. 5, а–в и рис. 6, а–в). Как видно, угол поворота оказался весьма чувствительным как к способу перемещения цилиндра, так и к начальной ориентации его сечения (эллипса). Что касается последнего фактора, то скорее всего решающим опять оказалось не само различие по начальному углу поворота, а вытекающее из этого различие по начальному заглублению тела.

Заключение

Рассчитаны траектории движения горизонтального эллиптического цилиндра при его захвате опрокидывающейся волной. Использован приближенный подход — с пренебрежением обратным влиянием тела на движение жидкости. Рассмотрены три варианта такого подхода: движение в поле давления, в поле скорости с условиями непротекания и в поле

скорости с условиями прилипания.

Расчеты показали, что траектория движения тела в большей степени зависит от его начального положения, чем от формы тела либо способа его перемещения. При движении в поле скорости траектория центра масс тела слабо отличается от траектории соответствующей жидкой частицы. Отличие становится заметным лишь при движении в поле давления. Во всех рассмотренных случаях цилиндр оставался строго внутри гребня волны и не наблюдалась тенденция его приближения к свободной поверхности (и тем более выпадения из волны). Для цилиндра эллиптического сечения возможно весьма существенное вращение в зависимости от используемого способа перемещения тела, а также от его начального заглубления и ориентации (угла поворота) эллипса.

В дальнейшем предполагается построить более качественную численную модель (с точным выполнением граничных условий на теле), применение которой позволит уточнить многие характеристики процесса и, в частности, выявить причину столь заметного разногласия рассмотренных приближенных подходов по углу поворота эллиптического цилиндра.

Список литературы

- [1] ПРОТОПОРОВ В. Е. An efficient numerical method for calculation of strongly nonlinear water waves // Вычисл. технологии. 1998. Т. 3, №3. С. 55–71.
- [2] OGILVIE T. F. First- and second-order forces on a cylinder submerged under a free surface // J. Fluid Mech. 1963. Vol. 16. P. 451–472.
- [3] WILMOTT P. On the motion of a small two-dimensional body submerged beneath surface waves // J. Fluid Mech. 1987. Vol. 176. P. 465–481.
- [4] COX S. J., COOKER M. J. The motion of a rigid body impelled by sea-wave impact // Appl. Ocean Res. 1999. Vol. 21. P. 113–125.
- [5] COX S. J., COOKER M. J. Potential flow past a sphere touching a tangent plane // J. Eng. Math. 2000. Vol. 38. P. 355–370.
- [6] LI L., SCHULTZ W. W., MERTE H. The velocity potential and the interacting force for two spheres moving perpendicularly to the line joining their centers // J. Eng. Math. 1993. Vol. 27. P. 147–160.
- [7] АГЕЕВ М. Д., ГОРНАК В. Е., ХМЕЛЬКОВ Д. Б. О разработке экспериментального образца солнечного автономного подводного аппарата // Вест. ДВО РАН. 1998. №3. С. 3–11.

*Поступила в редакцию 18 января 2002 г.,
в переработанном виде — 31 января 2002 г.*