Вычислительные технологии **Том 2, № 2, 1997**

НЕЛИНЕЙНОЕ ЭВОЛЮЦИОННОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ДОСТАТОЧНО ДЛИННЫХ ДВУМЕРНЫХ ВОЛН НА СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ*†

Г. А. Хабахпашев
Институт теплофизики СО РАН, Новосибирск, Россия

Теоретически рассмотрена волновая динамика несжимаемой жидкости с неглубоким пологим дном. Для описания эволюции смещения свободной поверхности получено одно уравнение, которое даже для идеальной жидкости над горизонтальным дном является обобщением уравнения Кадомцева—Петвиашвили на случай существенно трехмерных возмущений.

Хорошо известная модель Кадомцева—Петвиашвили [1] предполагает, что характерный горизонтальный масштаб рассматриваемых возмущений по продольной координате много меньше, чем по трансверсальной. Однако в последнее время все большее внимание исследователей привлекают уравнения, в которых не заложена указанная неравноправность (например, [2, 3]). Цель данной работы и состоит в выводе таких уравнений. Будут учтены также диссипативные потери, связанные с нестационарным трением о неподвижное слабонаклонное дно.

1. Постановка задачи и упрощение исходных уравнений

Благодаря тому, что скорость распространения гравитационных волн по свободной поверхности мелкой воды на несколько порядков меньше скорости звука, воспользуемся приближением несжимаемости жидкости. Тогда исходная система уравнений гидродинамики (уравнение неразрывности и уравнения Стокса) может быть записана в следующей классической форме [4]:

$$(\nabla \cdot \mathbf{u}) + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} + w\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} + \frac{1}{\rho}\nabla p = \nu\left(\nabla^2 \mathbf{u} + \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial z^2}\right), \tag{2}$$

†Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант №96-01-01766.

$$\frac{\partial w}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) w + w \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + g = \nu \left(\nabla^2 w + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right), \tag{3}$$

где оператор градиента ∇ определен в горизонтальной плоскости (т. е. в плоскости x, y), z — вертикальная координата, $\mathbf{u}$ — вектор горизонтальной составляющей скорости жидкости, а w — ее вертикальная компонента, p — давление, ρ — плотность, ν — кинематическая вязкость жидкости, g — ускорение свободного падения.

Будем считать, что, во-первых, стационарные составляющие течения жидкости равны нулю, во-вторых, "длина волны" λ существенно больше, а амплитуда возмущения η_a значительно меньше равновесной глубины слоя h ($h/\lambda \sim \varepsilon^{1/2}$, $\eta_a/h \sim \varepsilon$, где ε — малый параметр), в-третьих, капиллярные эффекты не велики (число Бонда $\mathrm{Bo} = \rho g h^2/\sigma > 1$, здесь σ — поверхностное натяжение), в-четвертых, неподвижное твердое дно является слабонаклонным ($\nabla h \sim \varepsilon^{3/2}$), и наконец, в-пятых, появляющиеся пограничные слои остаются тонкими, т. е. время прорастания пограничного слоя на всю толщину жидкости много больше характерного времени волнового процесса t_w (число гидродинамической гомохромности $\mathrm{Ho}_\nu = \nu t_w/h^2 \sim \varepsilon^2$). Следовательно, возникающее течение будет потенциальным ($\partial \mathbf{u}/\partial z = \nabla w$) всюду за исключением узкой придонной области, и третьи слагаемые в уравнениях (2), (3) могут быть опущены как члены неучитываемого порядка малости ($w^2/u^2 \sim \varepsilon$). Кроме того, благодаря сделанным предположениям можно пренебречь первым слагаемым в правой части уравнения (2) и всей правой частью в уравнении (3). В результате имеем

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \left(\frac{u^2}{2} + \frac{p}{\rho} \right) = \nu \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial z^2}, \tag{4}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{u^2}{2} + \frac{p}{\rho} \right) + g = 0. \tag{5}$$

Поставим также обычные краевые условия на дне и свободной границе:

$$\mathbf{u} = w = 0 \quad \text{при} \quad z = -h(x, y),$$

$$w = w_s = \frac{\partial \eta}{\partial t} + (\mathbf{u}_s \cdot \nabla)\eta, \quad \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} = 0, \quad p = p_s = -\sigma \nabla^2 \eta \quad \text{при} \quad z = \eta(t, x, y).$$

Здесь индексом s обозначены значения величин, относящиеся к свободной поверхности.

Интегрируя уравнение (5) по координате z от z до $\eta(t, x, y)$ и используя динамическое граничное условие на свободной поверхности, находим формулу для полного напора:

$$\frac{u^2}{2} + \frac{p}{\rho} = \frac{u_s^2}{2} - \frac{\sigma}{\rho} \nabla^2 \eta + g(\eta - z) + \int_z^\eta \frac{\partial w}{\partial t}\, dz.$$

Подставляя это выражение в уравнение (4), перепишем его в виде

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \left(g\eta + \frac{u_s^2}{2} - \frac{\sigma}{\rho} \nabla^2 \eta \right) + \nabla \left(\int_z^\eta \frac{\partial w}{\partial t}\, dz \right) = \nu \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial z^2}.$$

Проинтегрируем данное уравнение по координате z от $-h(x, y)$ до $\eta(t, x, y)$:

$$\int_{-h}^\eta \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}\, dz + (h + \eta) \nabla \left(g\eta + \frac{u_s^2}{2} - \frac{\sigma}{\rho} \nabla^2 \eta \right) + \int_{-h}^\eta \left[\nabla \left(\int_z^\eta \frac{\partial w}{\partial t}\, dz \right) \right] dz = -\nu \left. \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} \right|_{z=-h}. \tag{6}$$

Благодаря слабой нелинейности и потенциальности течения (в основной толще слоя жидкости) трансформируем последнее слагаемое в левой части данного уравнения:

$$\int_{-h}^{\eta}\left[\nabla\left(\int_{z}^{\eta}\frac{\partial w}{\partial t}\,dz\right)\right]dz=\int_{-h}^{\eta}\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\int_{z}^{\eta}\nabla w\,dz\right)\right]dz=\int_{-h}^{\eta}\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\int_{z}^{\eta}\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z}\,dz\right)\right]dz=$$

$$=\int_{-h}^{\eta}\left(\frac{\partial \mathbf{u}_s}{\partial t}-\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}\right)dz=(h+\eta)\frac{\partial \mathbf{u}_s}{\partial t}-\int_{-h}^{\eta}\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}\,dz.$$

Горизонтальную компоненту уравнения движения запишем в виде

$$(h+\eta)\left[\frac{\partial \mathbf{u}_s}{\partial t}+\nabla\left(g\eta+\frac{u_s^2}{2}-\frac{\sigma}{\rho}\nabla^2\eta\right)\right]=-\nu\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z}\bigg|_{z=-h}. \tag{7}$$

Для определения трения жидкости о дно вернемся к системе уравнений движения.

2. Учет трения жидкости о дно

Полагая, что вязкость жидкости не велика, а амплитуда волн мала, в уравнениях (4) и (5) можно пренебречь слагаемыми, содержащими u^2, и членом $\partial w/\partial t$. Следовательно, вертикальная компонента уравнения движения свелась к гидростатике: $p=\rho g(\eta-z)$, где благодаря умеренности капиллярных эффектов использовано простейшее динамическое условие на свободной поверхности ($p=0$ при $z=\eta$). Подставим этот профиль давления в линеаризованное уравнение (4):

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}+g\nabla\eta=\nu\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial z^2}.$$

Перепишем данное уравнение в виде, более удобном для его решения:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial z^2}-\frac{1}{\nu}\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}=\frac{g}{\nu}\nabla\eta. \tag{8}$$

Найдем решение этого уравнения методом разделения переменных:

$$u_j(t,x,y,z)=v_j(t,z)f_j(x,y),\quad j=x,\ y.$$

Далее применим к уравнению (8) преобразование Лапласа по времени. Тогда имеем

$$\frac{\partial^2 V_j(s,z)}{\partial z^2}-\frac{s}{\nu}V_j(s,z)=\frac{G_j(s,x,y)}{\nu f_j(x,y)}-\frac{v_j(0)}{\nu}\equiv N_j(s), \tag{9}$$

где $V_j(s,z)$ и $G_j(s,x,y)$ — изображения $v_j(t,z)$ и $g\partial\eta/\partial j$ соответственно. Правая часть уравнения (9) есть функция только переменной s, так как левая его часть не зависит от координат x и y. Предположение о тонкости пограничных слоев позволяет перенести, не ухудшая точности, условие отсутствия касательных напряжений со свободной поверхности на $z=\infty$ (пограничные слои практически “бесконечно"глубоко утоплены в жидкости). Решение неоднородного линейного дифференциального уравнения второго порядка (9), удовлетворяющее краевым условиям $V_j=0$ при $z=-h(x,y)$ и $\partial V_j/\partial z=0$ при $z=\infty$, определяется с помощью метода вариации произвольных постоянных:

$$V_j(s,z)=N_j(s)\,\frac{\nu}{s}\left\{\exp\left[-\sqrt{\frac{s}{\nu}}(z+h)\right]-1\right\}.$$

Отсюда находим интересующие нас значения производных на дне:

$$\left.\frac{\partial V_j}{\partial z}\right|_{z=-h} = -N_j(s)\sqrt{\frac{\nu}{s}}.$$

Применив к данному соотношению обратное преобразование Лапласа, получим в пространстве оригиналов выражения для составляющих трения о дно:

$$\tau_{jz} = \mu\left.\frac{\partial u_j}{\partial z}\right|_{z=-h} = \rho\sqrt{\frac{\nu}{\pi}}\left(\frac{u_j(0,x,y)}{\sqrt{t}} - g\int_0^t \frac{\partial \eta}{\partial j}\frac{dt_i}{\sqrt{t-t_i}}\right). \tag{10}$$

Таким образом, вычисление интеграла Дюамеля, входящего в правую часть формулы (10), требует знания всей предыстории процесса. Но значения $\partial\eta/\partial j$, соответствующие моменту времени $t_i \ll t$, суммируются с меньшим "весом", чем величины $\partial\eta/\partial j$ при $t_i \approx t$. Поэтому при распространении даже плоских (независящих от одной из координат) положительных ($\eta > 0$) возмущений с не очень пологим снижением уровня воды трение о дно (последнее может быть горизонтальным) сменит знак. Этот эффект обусловлен тем, что на склоне волны продольная компонента градиента давления действует против возмущения скорости жидкости.

3. Вывод эволюционных уравнений

Проинтегрируем уравнение (1) по координате z от $-h$ до η. С помощью граничных условий оно принимает форму закона сохранения массы:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + (h+\eta)(\nabla\cdot\langle\mathbf{u}\rangle) + (\langle\mathbf{u}\rangle\cdot\nabla)(h+\eta) = 0. \tag{11}$$

Здесь угловыми скобками помечены значения скорости, осредненные по глубине жидкости. Таким образом, в системе уравнений (7), (10) и (11) остались скорости $\mathbf{u}_s$ и $\langle\mathbf{u}\rangle$. Чтобы исключить величину $\mathbf{u}_s$, необходимо заменить ее с помощью переменной $\langle\mathbf{u}\rangle$.

Допустим, что зависимости для линейных волн в бассейне постоянной глубины локально верны (это справедливо при $\nabla h \sim \varepsilon^{3/2}$). Тогда фурье-компоненты поверхностной и осредненной скоростей взаимосвязаны следующим образом [5]:

$$u_s(\omega,k) = \frac{kh}{\operatorname{th}(kh)}\langle u(\omega,k)\rangle, \tag{12}$$

где ω — циклическая частота, а k — волновое число. Воспользуемся наиболее точной (из простейших) полиномиальной аппроксимацией выражения для фазовой скорости достаточно длинных волн:

$$c^2 = \frac{gh(1+\sigma k^2/\rho g)}{(1+k^2h^2/3)}.$$

Сравнение данной формулы с классическим дисперсионным соотношением

$$c^2 = gh\left(1+\frac{\sigma k^2}{\rho g}\right)\frac{\operatorname{th}(kh)}{kh}$$

позволяет переписать равенство (12) в полиномиальном виде:

$$u_s(\omega) = \left(1+\frac{k^2h^2}{3}\right)\langle u(\omega)\rangle.$$

Обратное фурье-преобразование этого выражения дает связь:

$$\mathbf{u}_s = \langle \mathbf{u} \rangle - \frac{h^2}{3} \nabla^2 \langle \mathbf{u} \rangle. \qquad (13)$$

В случае слабой нелинейности возмущений поправка относится лишь ко второму члену в правой части данного равенства (см. [6]). Следовательно, в исследуемом приближении ею можно пренебречь, так как она характеризуется неучитываемым порядком малости.

Благодаря подстановке зависимостей (10) и (13), уравнение (7) принимает вид закона сохранения горизонтальной составляющей количества движения жидкости в слое:

$$(h+\eta)\left[\frac{\partial \langle \mathbf{u} \rangle}{\partial t} + \nabla\left(g\eta + \frac{\langle u \rangle^2}{2} - \frac{\sigma}{\rho}\nabla^2\eta\right)\right] - \frac{h^2}{3}\nabla^2\frac{\partial \langle \mathbf{u} \rangle}{\partial t} = \sqrt{\frac{\nu}{\pi}}\left(g\nabla\int_0^t \frac{\eta\ dt_i}{\sqrt{t-t_i}} - \frac{\mathbf{u}_0}{\sqrt{t}}\right). \qquad (14)$$

Здесь снова опущены члены третьего порядка малости. От уравнения, входящего в классическую систему уравнений Буссинеска (см. например, [4]), соотношение (14) отличается не только наличием диссипативного члена, но и видом инерционного и нелинейного членов. Отметим, что в уравнении (14) нет членов, содержащих ∇h. При $\sigma = \nu = 0$ именно этим (14) проще уравнения, входящего в систему уравнений Перегрина [7]. Учет слабого наклона дна остался только в (11).

Для исключения осредненной скорости продифференцируем (11) по времени, подействуем скалярно оператором градиента на уравнение (14) и вычтем второе из первого:

$$\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2} - \nabla\left[(h+\eta)\,\nabla\left(g\eta + \frac{\langle u \rangle^2}{2} - \frac{\sigma}{\rho}\nabla^2\eta\right)\right] + \frac{1}{h}\,h(\nabla\cdot\langle \mathbf{u} \rangle)\,\frac{\partial\eta}{\partial t} +$$

$$+\left(\langle \mathbf{u} \rangle\cdot\nabla\frac{\partial\eta}{\partial t}\right) + \frac{h^2}{3}\,\nabla^2\frac{\partial}{\partial t}[h(\nabla\cdot\langle \mathbf{u} \rangle)] + \sqrt{\frac{\nu}{\pi}}\left[g\nabla^2\int_0^t\frac{\eta\ dt_i}{\sqrt{t-t_i}} - \frac{1}{h\sqrt{t}}h(\nabla\cdot\mathbf{u}_0)\right] = 0.$$

Заметим, что скорость содержится лишь в членах второго порядка малости. Поэтому в третьем и пятом слагаемых $h(\nabla\cdot\langle \mathbf{u} \rangle)$ можно заменить на $-\partial\eta/\partial t$, а в шестом слагаемом $h(\nabla\cdot\mathbf{u}_0)$ на $-\partial\eta_0/\partial t$. Кроме того, не будем рассматривать процессы, когда волны одновременно распространяются в противоположных направлениях. Тогда можно во втором члене $\langle u \rangle^2$ заменить на $g\eta^2/h$, а четвертое слагаемое трансформировать простым образом:

$$\left(\langle \mathbf{u} \rangle\cdot\nabla\frac{\partial\eta}{\partial t}\right) = \frac{\eta}{h}\frac{\partial}{\partial t}[h\,(\nabla\cdot\langle \mathbf{u} \rangle)] = -\frac{\eta}{h}\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2}.$$

Допустимость первого преобразования основывается на двух моментах: данные выражения эквивалентны для линейных прогрессивных монохроматических волн, и в среднем вклад этого слагаемого составляет лишь 1/6 в суммарном нелинейном члене. В итоге

$$\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2} - gh\nabla^2\eta - g(\nabla\eta\cdot\nabla h) - g\nabla^2\eta^2 - \frac{1}{2h}\frac{\partial^2\eta^2}{\partial t^2} -$$

$$-\frac{h^2}{3}\nabla^2\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2} + \frac{\sigma h}{\rho}\nabla^4\eta + \sqrt{\frac{\nu}{\pi}}\left(g\nabla^2\int_0^t\frac{\eta\ dt_i}{\sqrt{t-t_i}} + \frac{1}{h\sqrt{t}}\frac{\partial\eta_0}{\partial t}\right) = 0.$$

Подчеркнем, что сделанное выше предположение о том, что возмущения не двигаются навстречу друг другу, позволяет заменить также в членах второго порядка малости $\partial^2/\partial t^2$ на $gh\nabla^2$, и наоборот. Поэтому перепишем данное уравнение в более компактном виде:

$$\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2} - gh\nabla^2\eta - \frac{3}{2}\,g\nabla^2\eta^2 - g(\nabla\eta\cdot\nabla h) - h^2\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{\mathrm{Bo}}\right)\nabla^2\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2} +$$

$$+\sqrt{\frac{\nu}{\pi}}\left(g\nabla^2\int_0^t\frac{\eta\ dt_i}{\sqrt{t-t_i}}+\frac{1}{h\sqrt{t}}\frac{\partial\eta_0}{\partial t}\right)=0. \tag{15}$$

Если волна движется преимущественно вдоль оси x, то вместо интеграла по времени можно получить, подобно тому, как это было сделано в разделе 2, интеграл по координате x:

$$\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2}-gh\nabla^2\eta-\frac{3}{2}g\nabla^2\eta^2-g(\nabla\eta\cdot\nabla h)-h^2\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{\mathrm{Bo}}\right)\nabla^2\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2}+$$

$$+\sqrt{\frac{\nu}{\pi}}\left(\frac{g}{\sqrt{c_0}}\nabla^2\int_0^x\frac{\eta\ dx_i}{\sqrt{x-x_i}}+\frac{1}{h\sqrt{t}}\frac{\partial\eta_0}{\partial t}\right)=0, \tag{16}$$

где $c_0=\sqrt{gh}$. Хорошо известно (см. например, [8]), что при численных расчетах различные эффекты перехода к конечным разностям и округления вводят малые высокочастотные осцилляции даже в том случае, когда изучаемая аналитическая задача удовлетворяет условию длинноволновости. Численные решения, найденные с помощью уравнения (15) или (16), могут оказаться неустойчивыми при $\mathrm{Bo}<3$ (короткие волны усиливаются). В этой ситуации приходится вернуться к более громоздкому виду дисперсионного члена:

$$\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2}-gh\nabla^2\eta-\frac{3}{2}g\nabla^2\eta^2-g(\nabla\eta\cdot\nabla h)-\frac{h^2}{3}\nabla^2\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2}+\frac{\sigma h}{\rho}\nabla^4\eta+$$

$$+\sqrt{\frac{\nu}{\pi}}\left(g\nabla^2\int_0^t\frac{\eta\ dt_i}{\sqrt{t-t_i}}+\frac{1}{h\sqrt{t}}\frac{\partial\eta_0}{\partial t}\right)=0; \tag{17}$$

$$\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2}-gh\nabla^2\eta-\frac{3}{2}g\nabla^2\eta^2-g(\nabla\eta\cdot\nabla h)-\frac{h^2}{3}\nabla^2\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2}+\frac{\sigma h}{\rho}\nabla^4\eta+$$

$$+\sqrt{\frac{\nu}{\pi}}\left(\frac{g}{\sqrt{c_0}}\nabla^2\int_0^x\frac{\eta\ dx_i}{\sqrt{x-x_i}}+\frac{1}{h\sqrt{t}}\frac{\partial\eta_0}{\partial t}\right)=0. \tag{18}$$

Численные расчеты по уравнениям (17) и (18) должны быть устойчивыми. Напомним, что эволюционные уравнения (15)–(18) выведены с точностью до членов второго порядка малости и учитывают слабую нелинейность возмущений, пологость топографии, длинноволновую инерцию слоя жидкости, поверхностное натяжение и нестационарное трение о дно.

4. Обсуждение результатов и заключение

Проанализируем частные и предельные случаи. Рассмотрим вначале идеальную жидкость. При этом уравнения (15)–(18) кардинально упрощаются. И дело не только в том, что они становятся чисто дифференциальными. Важно, что исчезает не просто интеграл, а свертка, вычисление которой требует знания предыстории процесса во всем исследуемом бассейне, т. е. огромной памяти и высокой скорости компьютера. Пусть $\eta(t,x,y)=\eta(t,x)$ и $\nabla h=0$; тогда уравнение (15) согласуется с модифицированным уравнением Буссинеска, а для возмущений, распространяющихся в направлении роста координаты x, приходим к уравнению Кортевега — де Вриза. Если $\partial^2\eta/\partial y^2\sim\varepsilon\,\partial^2\eta/\partial x^2$ и $\nabla h=0$, то уравнение (15) также упрощается и может быть сведено к уравнению Кадомцева—Петвиашвили.

Уравнения типа (15) с $\nu=0$ и $\nabla h=0$ были получены в [9, 10] для возмущений поверхности феррожидкости (или, в другом случае, заряженной жидкости) в поперечном магнитном (или соответственно электрическом) поле. Однако нелинейный член вида $\nabla^2\eta^2$ был обусловлен наличием именно этого (дополнительного к силе тяжести) внешнего поля, а член с гидродинамической нелинейностью при выводе уравнения волнового типа отбрасывался.

В работе [2] изучались возмущения, бегущие преимущественно в одном направлении, и приведено без вывода уравнение типа (15) с $\nu = 0$ и $\sigma = 0$. Оно содержит также инерционные и нелинейные члены, пропорциональные ∇h ($\sim \varepsilon^3$), и учитывает силу Кориолиса.

Что касается топографии, то ее учет с помощью лишь одного члена, входящего в уравнения (15) – (18), оказывается достаточным, чтобы для наката плоской линейной монохроматической волны получить закон Грина: амплитуда волны обратно пропорциональна корню четвертой степени из глубины жидкости. Не исключено, что уравнения (15) – (18) будут способны описать распространение возмущений и над крутыми, но локальными неровностями дна (например, прохождение плоской нелинейной уединенной волны над ступенькой или уступом).

В [3] уравнение типа (15) с $\nu = 0$ и $\nabla h = 0$ применялось для исследования поперечной и продольной неустойчивости уединенных волн в средах с положительной дисперсией (т. е. в нашем случае при Bo < 3). В частности, рассмотрены двумерные солитоны и уединенные возмущения с периодически модулированным фронтом.

В вязкой жидкости при распространении гравитационных волн типа “бугор"возможны отрыв тонкого придонного слоя и возникновение зоны возвратного течения. К сожалению, автору не известны работы по экспериментальному изучению этого явления.

Подводя итог, подчеркнем, что вывод уравнения (14) базируется на использовании поверхностной скорости и полиномиальной аппроксимации дисперсионного соотношения. Именно благодаря этому удалось найти уравнения (15) – (18), которые даже при $\nu = 0$ и $\nabla h = 0$ являются обобщением уравнения Кадомцева — Петвиашвили на случай существенно трехмерных возмущений. Результаты, полученные в [2, 3], позволяют надеяться, что предложенные эволюционные уравнения могут стать новым объектом исследований по нелинейной динамике двумерных волн.

Автор выражает признательность П. И. Гешеву, С. К. Немировскому, Д. Е. Пелиновскому, Е. Н. Пелиновскому, З. И. Федотовой и О. Ю. Цвелодубу за полезные обсуждения данной работы и ценные советы.

Список литературы

[1] Кадомцев Б. Б., Петвиашвили В. И. Об устойчивости уединенных волн в среде со слабой дисперсией. *Докл. АН СССР*, **192**, №4, 1970, 753–756.

[2] Kim K. Y., Reid R. O., Whitaker R. E. On an open radiational boundary condition for weakly dispersive tsunami waves. *J. Computational Physics*, **76**, No. 2, 1988, 327–348.

[3] Пелиновский Д. Е., Степанянц Ю. А. Неустойчивость уединенных волн в средах с положительной дисперсией в рамках двумерных уравнений Буссинеска. *ЖЭТФ*, **106**, №1(7), 1994, 192–206.

[4] Карпман В. И. *Нелинейные волны в диспергирующих средах.* Наука, М., 1973.

[5] Пелиновский Е. Н. “Дифференциальная"модель волн на воде. *Докл. АН СССР*, **300**, №5, 1988, 1231–1234.

[6] Хабахпашев Г. А. Дифференциальный метод моделирования слабонелинейных волн на воде переменной глубины. *Изв. РАН. Физика атмосферы и океана*, **32**, №6, 1996, 841–847.

[7] Peregrine D. H. Long waves on a beach. *J. Fluid Mech.*, **27**, No. 4, 1967, 815–827.

[8] Уизем Дж. *Линейные и нелинейные волны.* Мир, М., 1976.

[9] Жакин А. И. О нелинейных равновесных формах и нелинейных волнах на поверхности феррожидкости (идеального проводника) в поперечном магнитном (электрическом) поле. *Магнитная гидродинамика*, №4, 1983, 41–48.

[10] Жакин А. И. Нелинейные волны на поверхности заряженной жидкости. Неустойчивость, ветвление и нелинейные равновесные формы заряженной поверхности. *Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа*, №3, 1984, 94–102.

Поступила в редакцию 8 сентября 1996 г.