Вычислительные технологии **Том 8, № 6, 2003**

АЛГОРИТМИЗАЦИЯ ЗАДАЧИ О ФЛАТТЕРЕ ВЯЗКОУПРУГИХ ПЛАСТИНОК, ОБТЕКАЕМЫХ СВЕРХЗВУКОВЫМ ПОТОКОМ ГАЗА

Б. А. Худаяров

Ташкентский институт инженеров ирригации и механизации сельского хозяйства, Узбекистан

e-mail: uzposttash@uzpak.uz

A nonlinear flutter problem of viscoelastic plates is considered. Critical speed of flutter has been determined.

Проблемы алгоритмизации задачи механики сплошных сред изучены в работах академика АН РУз В.К. Кабулова [1–3] и др. В данной статье этот вопрос рассматривается для нелинейных задач о флаттере вязкоупругой пластины.

Рассмотрим нелинейную задачу о флаттере вязкоупругой пластины. Пусть пластина со сторонами a и b и толщиной h шарнирно оперта по всему контуру, обтекается с одной стороны сверхзвуковым потоком газа. При предположении, принятом в [4–9], уравнение колебаний вязкоупругой пластины имеет вид

$$\left.\begin{aligned} \frac{D}{h}(1-R^*)\nabla^4 W = L(W,\Phi) - \rho\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} - \\ -\frac{B}{h}\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{BV}{h}\frac{\partial W}{\partial x} - \frac{B_1 V^2}{h}\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2, \\ \frac{1}{E}\nabla^4\Phi = -\frac{1}{2}(1-R^*)L(W,W). \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Здесь W, Φ — поперечный прогиб пластины и функция напряжений; $\nabla^2 W = \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2}$ — оператор Лапласа; L — диференциальный оператор:

$$L(W,\Phi) = \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y},$$

$$L(W,W) = 2\left[\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}\right)^2\right];$$

$$B = \eta\frac{p_\infty}{V_\infty}; \quad B_1 = \eta(\eta+1)\frac{p_\infty}{4V_\infty^2};$$

$D = \dfrac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$ — жесткость при изгибе; ρ — плотность материала пластины; η — показатель политропы газа; μ — коэффициент Пуассона; E — модуль упругости пластины;

p_∞ и V_∞ — соответственно давление и скорость звука в невозмущенном потоке; R^* — интегральный оператор с ядром релаксации $R(t)$.

Решения системы (1), удовлетворяющие граничным условиям задачи, будем искать в виде

$$W(x,y,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}W_{nm}(t)\sin\frac{n\pi x}{a}\sin\frac{m\pi y}{b}, \tag{2}$$

где $W_{nm}(t)$ — неизвестные функции времени.

После определения из второго уравнения (1) функции напряжений Φ и последующего применения метода Бубнова — Галеркина к первому уравнению (1) получим систему интегродифференциальных уравнений (ИДУ) относительно искомых функций $W_{kl}(t)$. Введя в ИДУ безразмерные величины

$$\frac{W}{h},\quad \frac{V_\infty t}{a},\quad \frac{a}{V_\infty}R(t)$$

и сохраняя при этом прежние обозначения, запишем

$$\ddot W_{kl}+\lambda^4\Omega^2\left[\left(\frac{k}{\lambda}\right)^2+l^2\right]^2(1-R^*)W_{kl}+\frac{12\lambda^4(1-\mu^2)\Omega^2}{\pi^2}\times$$

$$\times\sum_{n,i,j=1}^{\infty}\sum_{m,r,s=1}^{\infty}a_{klnmirjs}W_{nm}(1-R^*)W_{ir}W_{js}+M\dot W_{kl}-$$

$$-2M\mathrm{M}^*\sum_{n=1}^{\infty}\gamma_{kl}W_{nl}+M_1\mathrm{M}^{*2}\sum_{n,i}\sum_{m,r}\Gamma_{klnmir}W_{nm}W_{ir}=0, \tag{3}$$

где

$$\Omega^2=\frac{\pi^4}{12(1-\mu^2)}M_E^2\left(\frac{h}{a}\right)^2;\ \ M=\eta M_p^2\left(\frac{a}{h}\right)^2;\ \ M_1=\eta(\eta+1)\frac{M_p^2}{4};$$

$$\mathrm{M}^*=\frac{V}{V_\infty}\text{ — число Маха; }\ M_E=\sqrt{\frac{E}{\rho V_\infty^2}};\ \ M_p=\sqrt{\frac{P_\infty}{\rho V_\infty^2}};\ \ \lambda=\frac{a}{b};$$

γ_k, γ_{kl}, Γ_{klnmir}, a_{klnmir} — безразмерные коэффициенты [10].

Интегрирование системы (3) проводилось численным методом, предложенным в работах [11, 12]. Для этого запишем ее в интегральной форме, тогда формула численного интегрирования при ядре Колтунова — Ржаницына $R(t)=A\cdot\exp(-\beta t)t^{\alpha-1}$, $0<\alpha<1$, $A>0$, $\beta>0$ примет вид

$$W_{ikl}=\frac{1}{1+A_iM}\Bigg\{W_{0kl}+(\dot W_{0kl}+MW_{0kl})t_i-\sum_{j=0}^{i-1}A_j\Bigg(MW_{jkl}-$$

$$-(t_i-t_j)\Bigg[2M\mathrm{M}^*\sum_{n=1}^{N}\gamma_{kn}W_{jnl}-\lambda^4\Omega^2\left[\left(\frac{k}{\lambda}\right)^2+l^2\right]^2\Bigg(W_{jkl}-\frac{A}{\alpha}\times$$

$$\times\sum_{s=0}^{j}B_se^{-\beta t_s}W_{j-skl}\Bigg)-\frac{12\lambda^4(1-\mu^2)\Omega^2}{\pi^2}\sum_{n,i_1,j_1=1}^{N}\sum_{m,r,s_1=1}^{L}a_{klnmi_1rj_1s_1}W_{jnm}\times$$

$$\times\left(W_{ji_1r}W_{jj_1s_1}-\frac{A}{\alpha}\sum_{s=0}^{j}B_se^{-\beta t_s}W_{j-si_1r}W_{j-sj_1s_1}\right)-$$

$$-M_1\mathrm{M}^{*2}\sum_{n,i_1=1}^{N}\sum_{m,r=1}^{L}\Gamma_{klnmi_1r}W_{jnm}W_{ji_1r}\Big)\Big]\Big\}, \qquad (4)$$

$i=1,2,\ldots$; $n=\overline{1,N}$; $m=\overline{1,L}$. Здесь A_j, B_s — числовые коэффициенты, не зависящие от выбора подынтегральных функций и принимающие различные значения в зависимости от использованных квадратурных формул.

Результаты вычислений представлены в таблице. На основе формулы (4) определена критическая скорость флаттера вязкоупругих пластин.

В таблице приведены критические значения скорости флаттера в зависимости от физико-механических и геометрических характеристик пластины.

В качестве критерия, определяющего критическую скорость флаттера, принимаем условие, что при этих скоростях амплитуда колебаний изменяется по гармоническому закону. При сверхкритических скоростях имеет место колебательное движение с интенсивно нарастающими амплитудами, которое может привести конструкцию к разрушению. В случае $V < V_{kp}$ амплитуда колебаний затухает.

Как видно из анализа результатов, приведенных в таблице, значение коэффициента V_{kp} оказываются в упругом ($A = 0$) и вязкоупругом ($A = 0.1$) случаях соответственно равным 854.15 и 753 м/с. Таким образом, вязкоупругие свойства материала приводят к уменьшению скорости флаттера.

Обратим внимание на значительное увеличение V_{kp} при значениях параметра α. Для $\alpha = 0.1,\ 0.75$ критическая скорость флаттера, найденная по формуле (4), соответственно равна 624 и 863.5 м/с, эти значения различаются на 38.4 %. Во всех вычислениях принимаются следующие значения постоянных: $\mu = 0.32$, $E = 2*10^6$ кг/см^2, $p_\infty = 1.014$ кг/см^2.

В заключение отметим, что влияние параметра сингулярности α имеет доминирующее значение не только в колебаниях вязкоупругих систем, но и в значениях критической скорости флаттера по сравнению с другими реологическими параметрами ядра наследственности. Этот факт в данной работе установлен впервые. Кроме того, отметим, что метод, предложенный в работах [11, 12], оказался эффективным не только при решении слабосингулярных систем обыкновенных ИДУ, описывающих дискретную модель консервативных задач [13], но и для неконсервативных задач устойчивости вязкоупругих систем.

A	α	β	a/h	V_{kp}, м/с
0				854.15
0.001	0.25	0.05	400	852.4
0.04				762
0.1				753
	0.1			624
0.1	0.5	0.05	400	835
	0.75			863.5
0.1	0.25	0.01		762
		0.1	400	746.2
			350	1130
0.05	0.25	0.05	450	525
			480	435

Проведенные исследования динамического поведения пластинки дают возможность найти оптимальные варианты характеристики композиционных материалов, используемых в авиационных конструкциях, выяснить эффективность армирования элементов конструкции с целью снижения веса и улучшения эксплуатационных характеристик.

Список литературы

[1] Кабулов В.К. Алгоритмизация в механике сплошных сред. Ташкент: Фан, 1979. 304 с.

[2] Кабулов В.К. Алгоритмизация теории упругости и деформационной прочности. Ташкент: Фан, 1966. 391 с.

[3] Кабулов В.К. Проблемы алгоритмизации в теории вязкоупругости // Вопр. вычисл. и прикл. математики. Ташкент, 1996. Вып. 102. С. 4–18.

[4] Бадалов Ф.Б., Суяров А.М. Изгиб, устойчивость и динамика наследственно-деформируемых элементов конструкций лететельных аппаратов из композитных материалов. Ташкент: ТашГАИ, 2000. 120 с.

[5] Огибалов П.М., Колтунов М.А. Оболочки и пластины. М.: Изд-во МГУ, 1967. 352 с.

[6] Ларионов Г.С. Нелинейный фактор упруговязкой пластинки // Механика твердого тела. 1974. С. 95–100.

[7] Матяш В.И. Флаттер упруговязкой пластинки // Механика полимеров. 1971. № 6. С. 1077–1083.

[8] Ильюшин А.Л. Закон плоских сечений в аэродинамике больших сверхзвуковых скоростей // Прикл. математика и механика. 1956. Т. XX, вып. 6. С. 733–755.

[9] Вольмир А.С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек. М.: Наука, 1972. 432 с.

[10] Худояров Б.А. Нелинейный флаттер вязкоупругих пластин и цилиндрических панелей: Дис. на соискание ученой степени канд. физ.-мат. наук. Ташкент. Ин-т механ. АН РУз, 1998. 129 с.

[11] Бадалов Ф.Б. Методы решения интегральных и интегродифференциальных уравнений наследственной теории вязкоупругости. Ташкент: Мехнат, 1987. 271 с.

[12] Бадалов Ф.Б., Эшматов Х., Юсупов М. О некоторых методах решения систем интегродифференциальных уравнений, встречающихся в задачах вязкоупругости // Прикл. математика и механика. 1987. Т. 53, № 5. С. 867–871.

[13] Бадалов Ф.Б. Метод степенных рядов в нелинейной наследственной теории вязкоупругости. Ташкент: Фан, 1980. 220 с.

Поступила в редакцию 11 июня 2003 г.