Вычислительные технологии **Том 8, № 6, 2003**

НОРМАЛЬНЫЕ ФОРМЫ ДЛЯ ГРАДИЕНТНЫХ СИСТЕМ С КОСОСИММЕТРИЧНОЙ СТРУКТУРНОЙ МАТРИЦЕЙ*

С. Б. Медведев
Институт вычислительных технологий СО РАН, Новосибирск, Россия
e-mail: medvedev@ict.nsc.ru

Gradient systems with a skew-symmetric structure matrix and positive quadratic characteristic function are considered. An algorithm for the construction of a normal form is suggested. The algorithm takes into account a specific structure of these systems. In comparison with the Poincare normal form, the main advantage of the considered normal forms is the conservation of a characteristic function for an arbitrary truncation of this normal form. Ion-acoustic waves in a strong magnetic field are considered as an example.

Введение

Значение нормальных форм для исследования дифференциальных уравнений хорошо известно. Метод нормальных форм в окрестности стационарной точки или периодического решения позволяет привести исходное уравнение к более простому виду, в котором содержится основная информация о поведении решения и который часто допускает более полное дальнейшее исследование. Основы теории для обыкновенных дифференциальных уравнений были заложены в работах Пуанкаре [1]. Дальнейшие обобщения сводились к сужению класса рассматриваемых уравнений. Наиболее продвинутой оказалась теория канонических гамильтоновых систем, для которых Биркгоф построил нормальные формы, носящие его имя [2]. В последнее время появились попытки обобщить теорию нормальных форм Пуанкаре на уравнения в частных производных [3, 4]. Также развивалась теория нормальных форм для полевых гамильтоновских систем с неканоническими скобками Пуассона [5].

Хотя по замечанию С. П. Новикова все разумные бездиссипативные уравнения математической физики являются гамильтоновскими, существуют уравнения, которые описывают реальные физические системы и не являются гамильтоновскими. Одним из общих свойств таких уравнений является наличие интеграла энергии. Для таких уравнений применение теории гамильтоновских систем невозможно, поскольку они не имеют самой гамильтоновской структуры, а применение общей теории нормальных форм Пуанкаре приводит к тому, что усеченные нормальные формы не сохраняют интеграл энергии или его приближение. Конечно, усеченная нормальная форма сохраняет интеграл энергии с соот-

*Работа поддержена Российским фондом фундаментальных исследований, грант № 01-01-00959.

вествующей усечению точностью, но точного сохранения нет. В этом состоит ее отличие от гамильтоновских систем, которые точно сохраняют усеченный гамильтониан.

В данной работе мы рассмотрим уравнения градиентного типа с кососимметричной структурной матрицей [6]. Поскольку мы не предполагаем, что это уравнение гамильтоновское, тем самым мы не предполагаем выполнения тождества Якоби для скобки с соответствующей структурной матрицей. Интересный физический пример такой системы дают уравнения гидродинамики реальных нематиков [7]. Другие примеры кососимметричных градиентных систем возникают при применении симметризации с использованием закона сохранения массы к уравнению гидродинамики [8] (описание этого метода можно найти в гл. 5 книги [9]). Следует также упомянуть исследования Обухова симметричных и кососимметричных систем, возникающих при построении малопараметрических моделей гидродинамических течений [10].

1. Нормальные формы Пуанкаре для уравнений в частных производных

Прежде чем переходить к рассмотрению градиентных систем, напомним теорию нормальных форм для одного класса уравнений в частных производных. Рассмотрим систему

$$\partial u_i(x,t)/\partial t + \lambda_i(x)u_i(x,t) = F_i(x,u), \quad u \in R^l, \quad x \in R^m, \tag{1}$$

с правой частью в форме

$$F_i(x,u) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{0<\alpha_1+...+\alpha_n} \sum_{j_1,...,j_n} f^{j_1...j_n}_{\alpha_1...\alpha_n}(x) D^{\alpha_1} u_{j_1} ... D^{\alpha_n} u_{j_n}, \tag{2}$$

где $D^\beta = \partial^{\beta_1}_{x_1}...\partial^{\beta_m}_{x_m}$. Мы предполагаем, что мультииндексы $\alpha_1,...,\alpha_n$ удовлетворяют положительным условиям $0 \le \alpha_1,...,0 \le \alpha_n$, которые означают отсутствие интегральных членов.

Обобщим понятие резонансного и нерезонансного монома для нашей системы.

Определение 1. Моном

$$G_i = f^{j_1...j_n}_{\alpha_1...\alpha_n}(x) D^{\alpha_1} u_{j_1} ... D^{\alpha_n} u_{j_n} \tag{3}$$

называется резонансным в точке x, если выполнено равенство

$$\lambda_i(x) = \lambda_{j_1}(x) + ... + \lambda_{j_n}(x). \tag{4}$$

В противном случае моном G_i называется нерезонансным.

Аналогично определяем условие резонанса в любой окрестности.

Определение 2. Моном G_i называется нерезонансным в окрестности точки x, если G_i нерезонансный в каждой точке окрестности. В противном случае G_i называется резонансным.

Мы предполагаем, что частные производные от неизвестных функций, собственных значений и коэффициентов малы $u_i, \lambda_i(x), f^{j_1...j_n}_{\alpha_1...\alpha_n}(x)$

$$D^\beta u_i \sim \epsilon^{|\beta|} u_i, \quad D^\beta \lambda_i \sim \epsilon^{|\beta|} \lambda_i, \quad D^\beta f^{j_1...j_n}_{\alpha_1...\alpha_n}(x) \sim \epsilon^{|\beta|} f^{j_1...j_n}_{\alpha_1...\alpha_n}(x). \tag{5}$$

Тогда имеет место

Теорема 1. *Используя формальную замену переменных $u_i(x) = v_i(x) + B_i$, система (1) может быть приведена к нормальной форме в окрестности точки x_0*

$$\partial v_i(x,t)/\partial t + \lambda_i(x) v_i(x,t) = W_i(x,u), \tag{6}$$

где все мономы в ряду W являются резонансными в окрестности точки x_0 и B_i имеют вид (2).

Эта теорема аналогична теореме Пуанкаре для обыкновенных дифференциальных уравнений, и доказательство приведено в [3]. Мы используем эту теорему для построения кососимметричной нормальной формы уравнений для ионно-звуковых волн.

2. Кососимметричные градиентные системы

Мы рассмотрим градиентную систему

$$\dot{x} = G \nabla h, \quad x \in R^n \tag{7}$$

с кососимметричной матрицей G. Гамильтоновские системы являются наиболее известным и хорошо изученным примером градиентных систем. Кососимметричность G гарантирует сохранение функции h, которую мы будем называть характеристической функцией или функцией Гамильтона, несмотря на факт, что система может быть негамильтоновской. Матрица G определяет скобку для двух функций f и g:

$$\{f, g\} = \nabla f G \nabla g. \tag{8}$$

Мы будем называть матрицу G структурной или гамильтоновской, если соответствующая скобка (8) удовлетворяет тождеству Якоби.

Нас будет интересовать нормальная форма градиентой системы (7). Система (7) определяется двумя объектами G и h. Таким образом, имеются две возможности. Первая состоит в упрощении структурной матрицы G. Для гамильтоновских систем теорема Дарбу дает преобразование, переводящее невырожденную матрицу G в постоянную симплектическую матрицу. Для сингулярных гамильтоновских систем нормальные формы скобок Пуассона были рассмотрены в работе [11]. Тождество Якоби играет решающую роль при исследовании скобок Пуассона.

Если структурная матрица приведена к постоянному виду, то далее из гамильтониана необходимо исключить все нерезонансные члены. Это хорошо известная процедура для канонических систем. Однако для сингулярных скобок Пуассона упрощение гамильтониана — трудноразрешимая задача.

Для структурных матриц, которые не являются гамильтоновыми, теории приведения их к простой форме не существует.

Альтернативный путь состоит в упрощении характеристической функции h. Упрощение может быть проведено с использованием хорошо известной теории Морса. Мы рассмотрим простейшую ситуацию, когда критическая точка h является невырожденной:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x_i \partial x_j} \neq 0, \tag{9}$$

тогда согласно лемме Морса существует замена переменных $x = x(y)$, которая преобразует функцию $h(x)$ к морсовской канонической форме

$$2h(y) = y_1^2 + ... + y_i^2 - y_{i_1}^2 - ... - y_n^2, \tag{10}$$

где i определяется единственным образом для h. Эта замена переводит исходную систему (7) к виду

$$\dot{y} = K\nabla h = KDy, \tag{11}$$

где $K = (\partial y/\partial x)G(\partial y/\partial x)^T$ и диагональная матрица D определена квадратичной формой (10). $D_{kk} = 1$, если $k \leq i$, и $D_{kk} = -1$, если $k > i$.

Далее мы могли бы найти для системы (11) нормальную форму Пуанкаре, которая позволяет исключить все нерезонансные члены. Но усеченные нормальные формы Пуанкаре не гарантируют сохранение для системы (11) характеристической функции (10). Поэтому мы рассмотрим специальную процедуру исключения нерезонансных членов, которая сохраняет градиентный вид и вид характеристической функции, что гарантирует точное сохранение характеристической функции для любой усеченной нормальной формы.

Заметим, что понятие градиентной системы легко обобщается на непрерывный случай

$$\partial u(x)/\partial t = G\delta H/\delta u(x), \tag{12}$$

где $u(x,t)$ — неизвестная функция x и t вместо искомого вектора $x(t)$; G — кососимметричный оператор вместо матрицы; H — функционал от $u(x,t)$ вместо функции $h(x)$.

3. Кососимметричная нормальная форма

Мы рассмотрим градиентную систему (11) с положительно определенной характеристической функцией h, которая без потери общности имеет вид

$$h(y) = y_1^2 + ... + y_n^2.$$

Матрица D этом случае совпадает с единичной матрицей. Предположим, что разложение K по степеням y имеет вид $K = K_0 + K_1 + ...$, где K_0 есть постоянная матрица. Тогда имеет место

Теорема 2. *Пусть характеристическая функция системы (11) является квадратичной и положительно определенной, тогда эта система может быть приведена формальной заменой зависимых переменных к форме*

$$\dot{z} = Lz, \tag{13}$$

где в правой части находятся только резонансные члены и матрица L является кососимметричной.

Доказательство. Сначала заметим, что преобразованная система является также градиентной с характеристической функцией $h(z) = z_1^2 + ... + z_n^2$ и в силу кососимметричности L функция $h(z)$ сохраняется.

Далее легко видеть, что собственные числа линеаризированной системы чисто мнимые. Поэтому для каждого резонансного члена вида $k_{ij}y_j$ из i-го уравнения системы (11) симметричный член вида $k_{ji}y_i$ из j-го уравнения также является резонансным. Действительно, резонансные условия для второго члена получаются комплексным сопряжением резонансного условия для первого члена и перестановкой собственных чисел λ_i и λ_j матрицы K_0. Таким образом, для каждого нерезонансного члена в системе (11) симметричный член также является нерезонансным, и разумно исключать эту пару нерезонансных членов одновременно, одним согласованным преобразованием.

Преобразование, исключающее оба симметричных нерезонансных члена, также имеет специальный вид

$$y \to (E + V)y, \tag{14}$$

где E обозначает единичную матрицу, а V есть кососимметричная матрица. Для любой кососимметричной матрицы V можно построить ортогональную матрицу U, такую, что первые члены разложения имеют вид $U = E + K + \ldots$ Такое сопоставление можно сделать, используя обобщенную формулу Кэли $U = F(V)/F(-V)$, где F — любая функция, такая, что $F(V) \neq -F(-V)$. Таким образом, если мы вместо исходного преобразования (14) возьмем продолженное преобразование

$$y \to F(V)y, \tag{15}$$

то оно одновременно исключает пару симметрично расположенных нерезонансных членов и сохраняет квадратичный вид характеристической функции. Выполняя аналогичные преобразования для всех нерезонансных членов, мы можем исключить их до любого наперед заданного порядка. При этом нам достаточно брать вместо F только несколько первых членов разложения в ряд Тейлора, которое необходимо для заданной точности вычисления. Очевидно, что такое преобразование не однозначно, но результирующая нормальная форма единственна. ■

Для непрерывных косоградиентных систем рассмотренное доказательсво проходит без изменений, если ограничиться непрерывными системами, для которых имеет место теорема 1.

Для гамильтоновых систем предложенное преобразование также применимо. Однако тождество Якоби для усеченных нормальных форм может не выполняться.

4. Ионно-звуковые волны в сильном магнитном поле

Рассмотрим гидродинамические уравнения для медленных движений неизотермической плазмы, помещенной в магнитное поле $\mathbf{H}$, которое направлено вдоль оси z и может зависеть от пространственных переменных:

$$\partial \mathbf{v}/\partial t + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} = -e\nabla\varphi/M + [\mathbf{v}\boldsymbol{\Omega}]; \tag{16}$$

$$\partial\rho/\partial t + \mathrm{div}\rho\mathbf{v} = 0; \tag{17}$$

$$\Delta\varphi = -\frac{4\pi e}{M}(\rho - \rho_0 \exp(e\varphi/T)), \tag{18}$$

где $\mathbf{v}, \rho, M$ — скорость, плотность, масса ионов; φ — потенциал электрического поля; $\boldsymbol{\Omega} = e\mathbf{H}/Mc$. Температуру электронов T и невозмущенную плотность ρ_0 также считаем неоднородными. В однородном случае эта система описывает два типа волн — ионно-звуковые и циклотронные.

Проведем упрощение исходной системы. Будем рассматривать длинноволновые колебания. Ограничимся квадратичной нелинейностью с пространственными производными первого порядка и в линейной части проводим вычисления с точностью до членов с третьей пространственной производной, поскольку в однородном случае спектр ионно-звуковых волн является распадным и дисперсия имеет третий порядок по волновым числам. Это условие гарантирует совпадение упрощенных уравнений с ранее полученными уравнениями для однородного случая.

В нулевом приближении система (10)–(12) есть линейная система обыкновенных дифференциальных уравнений, в которой переменные x, y, z играют роль параметров. Поэтому мы можем разделить движения на быстрые, описываемые u, v с собственной частотой $f = \Omega_z$, и на медленные, описываемые w, ρ с нулевой собственной частотой. Далее можно применять теорему 1, чтобы исключить нерезонансные члены с помощью квазитождественных преобразований. Резонансные члены будем определять как для обыкновенных дифференциальных уравнений, несмотря на то что частоты могут зависить от пространственных переменных.

Однако прямое применение метода нормальных форм Пуанкаре не гарантирует точного сохранения интеграла энергии, точнее, его приближения. Неоднородность среды еще больше усложняет вид приближенных уравнений и уменьшает шансы на сохранение интеграла энергии. Поэтому применим метод кососимметричных нормальных форм, который позволяет исключить нерезонансные члены и гарантирует точное сохранение интеграла энергии.

Система (10)–(12) является гамильтоновской [12, 13]

$$\begin{pmatrix} \partial u/\partial t \\ \partial v/\partial t \\ \partial w/\partial t \\ \partial \rho/\partial t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -Q_z & Q_y & \partial_x \\ Q_z & 0 & -Q_x & \partial_y \\ -Q_y & Q_x & 0 & \partial_z \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta H/\delta u \\ \delta H/\delta v \\ \delta H/\delta w \\ \delta H/\delta \rho \end{pmatrix} = 0, \tag{19}$$

где Q_x, Q_y, Q_z — компоненты вектора $\mathbf{Q} = (\mathrm{rot}\mathbf{v} + \mathbf{\Omega})/\rho$,

$$H = \frac{1}{2}\int \rho \mathbf{v}^2 dr + U[\rho] \tag{20}$$

— гамильтониан и

$$U = \frac{1}{8\pi}\int (\nabla\varphi)^2 dr + \frac{1}{M}\int T\rho_0\{(e\varphi/T - 1)\exp(e\varphi/T) + 1\}dr \tag{21}$$

— внутренняя энергия плазмы.

Введем новые переменные

$$\psi = \rho^{1/2}\frac{u + iv}{\sqrt{2}}, \psi^* = \rho^{1/2}\frac{u - iv}{\sqrt{2}}, p = \rho^{1/2} w$$

и новую переменную q из условия $\displaystyle\frac{1}{2}\int q^2 dr = U[\rho]$, которые приводят гамильтониан к квадратичному виду

$$H = \int \psi^*\psi dr + \frac{1}{2}\int (p^2 + q^2) dr.$$

Для наших вычислений достаточно приближенного выражения

$$q = c_0\rho_0^{1/2}\left\{\frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} - \frac{1}{6}\left(\frac{\rho - \rho_0}{\rho_0}\right)^2 + \frac{1}{2\rho_0}\nabla^2 d^2(\rho - \rho_0)\right\},$$

где $c_0 = \sqrt{T/M}, d = \sqrt{\dfrac{TM}{4\pi e^2\rho_0}}$ — скорость ионно-звуковых волн и радиус Дебая.

Уравнения движения в новых переменных принимают следующий вид:

$$\begin{pmatrix} \partial\psi/\partial t \\ \partial\psi^*/\partial t \\ \partial p/\partial t \\ \partial q/\partial t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} J_{11} & -J_{21}^* & -J_{31}^* & -J_{41}^* \\ J_{21} & J_{22} & -J_{32}^* & -J_{42}^* \\ J_{31} & J_{32} & J_{33} & -J_{43}^* \\ J_{41} & J_{42} & J_{43} & J_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta H/\delta\psi^* \\ \delta H/\delta\psi \\ \delta H/\delta p \\ \delta H/\delta q \end{pmatrix} = 0, \tag{22}$$

где * означает сопряжение;

$$J_{11} = iQ_z\rho + \rho^{1/2}D\frac{\psi^*}{2\rho} + \frac{\psi}{2\rho}D^*\rho^{1/2},$$

$$J_{21} = \rho^{1/2}D^*\frac{\psi^*}{2\rho} + \frac{\psi^*}{2\rho}D^*\rho^{1/2},$$

$$J_{22} = -iQ_z\rho + \rho^{1/2}D^*\frac{\psi}{2\rho} + \frac{\psi^*}{2\rho}D\rho^{1/2},$$

$$J_{31} = -\rho\frac{Q_y + iQ_x}{\sqrt{2}} + \rho^{1/2}\partial_z\frac{\psi^*}{2\rho} + \frac{c}{2\rho}D^*\rho^{1/2},$$

$$J_{32} = -\rho\frac{Q_y - iQ_x}{\sqrt{2}} + \rho^{1/2}\partial_z\frac{\psi}{2\rho} + \frac{c}{2\rho}D\rho^{1/2},$$

$$J_{33} = \rho^{1/2}\partial_z\frac{p}{2\rho} + \frac{p}{2\rho}\partial_z\rho^{1/2},$$

$$J_{41} = AD^*\rho^{1/2},$$

$$J_{42} = AD\rho^{1/2},$$

$$J_{43} = A\partial_z\rho^{1/2},$$

$$J_{44} = 0;$$

$$D = \frac{\partial_x + i\partial_y}{\sqrt{2}}, D^* = \frac{\partial_x - i\partial_y}{\sqrt{2}}.$$

Оператор A находится из условия $\partial q/\partial t = A\partial\rho/\partial t$, и его приближенное выражение

$$A = c_0\rho_0^{1/2}\left\{\frac{1}{\rho_0} - \frac{1}{3}\left(\frac{\rho-\rho_0}{\rho_0^2}\right) + \frac{1}{2\rho_0}\nabla^2 d^2\right\}.$$

Исключение нерезонансных членов в системе (16) проведем за несколько этапов. Сначала исключим линейные члены первого порядка

$$\begin{pmatrix} \partial\psi/\partial t \\ \partial\psi^*/\partial t \\ \partial p/\partial t \\ \partial q/\partial t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} if & 0 & 0 & \rho_0^{1/2}D\frac{c_0}{\rho_0^{1/2}} \\ 0 & -if & 0 & \rho_0^{1/2}D^*\frac{c_0}{\rho_0^{1/2}} \\ 0 & 0 & 0 & \rho_0^{1/2}\partial_z\frac{c_0}{\rho_0^{1/2}} \\ \frac{c_0}{\rho_0^{1/2}}D^*\rho_0^{1/2} & \frac{c_0}{\rho_0^{1/2}}D\rho_0^{1/2} & \frac{c_0}{\rho_0^{1/2}}\partial_z\rho_0^{1/2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi \\ \psi^* \\ p \\ q \end{pmatrix} = 0 \tag{23}$$

с помощью замены

$$\begin{pmatrix} \psi \\ \psi^* \\ p \\ q \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \psi \\ \psi^* \\ p \\ q \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\dfrac{i\rho_0^{1/2}}{f} D \dfrac{c_0}{\rho_0^{1/2}} \\ 0 & 0 & 0 & \dfrac{i\rho_0^{1/2}}{f} D^* \dfrac{c_0}{\rho_0^{1/2}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\dfrac{c_0}{\rho_0^{1/2}} D^* \dfrac{i\rho_0^{1/2}}{f} & \dfrac{c_0}{\rho_0^{1/2}} D \dfrac{i\rho_0^{1/2}}{f} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi \\ \psi^* \\ p \\ q \end{pmatrix}. \tag{24}$$

Однако это преобразование не является ортогональным и, следовательно, не сохраняет квадратичный вид гамильтониана H. Чтобы требуемое преобразование было ортогональным, нужно добавить члены более высокого порядка точности. В самом деле, заметим, что преобразование (18) можно записать в виде

$$\varphi \to (E + K)\varphi, \tag{25}$$

где K — кососимметричный оператор. С помощью обобщенной формулы Кэли можно сопоставить каждому кососимметричному оператору K ортогональный оператор O по формуле

$$O = F(K)/F(-K), \tag{26}$$

где функция F, такая, что $F(K) \neq -F(-K)$. Для данных вычислений достаточно взять следующее продолжение:

$$\varphi \to (E + K + K^2/2)\varphi.$$

Аналогично исключаются нерезонансные линейные и нелинейные члены более высокого порядка. В результате получим систему, описывающую взаимодействие циклотронных и ионно-звуковых волн с заданной точностью

$$\begin{pmatrix} \partial\psi/\partial t \\ \partial\psi^*/\partial t \\ \partial p/\partial t \\ \partial q/\partial t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} K_{11} & 0 & -K_{31}^* & 0 \\ 0 & K_{22} & -K_{32}^* & 0 \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & -K_{43}^* \\ 0 & 0 & K_{43} & K_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi \\ \psi^* \\ p \\ q \end{pmatrix} = 0, \tag{27}$$

где

$$K_{11} = i\left(f + \frac{\rho_0^{1/2}}{2f} D \frac{c_0^2}{\rho_0} D^* \rho_0^{1/2} + \rho_0^{1/2} D \frac{c_0^2}{\rho_0} D^* \frac{\rho_0^{1/2}}{2f}\right),$$

$$K_{22} = -i\left(f + \frac{\rho_0^{1/2}}{2f} D^* \frac{c_0^2}{\rho_0} D \rho_0^{1/2} + \rho_0^{1/2} D^* \frac{c_0^2}{\rho_0} D \frac{\rho_0^{1/2}}{2f}\right),$$

$$K_{31} = \rho_0^{1/2} \partial_z \frac{\psi^*}{\rho_0} - \left(\partial_z \frac{\psi^*}{\rho_0^{1/2}}\right),$$

$$K_{32} = \rho_0^{1/2} \partial_z \frac{\psi}{\rho_0} - \left(\partial_z \frac{\psi}{\rho_0^{1/2}}\right),$$

$$K_{33} = \rho_0^{1/2} \partial_z \frac{p}{2\rho_0} + \frac{p}{2\rho_0} \partial_z \rho_0^{1/2},$$

$$K_{43} = \frac{c_0}{\rho_0^{1/2}} \left(1 - D^* \frac{\rho_0}{2f^2} D \frac{c_0^2}{\rho_0} - D \frac{\rho_0}{2f^2} D^* \frac{c_0^2}{\rho_0} + D^* D d^2 \right) \partial_z \rho_0^{1/2} + \frac{c_0}{2\rho_0^{1/2}} \partial_z \frac{q}{c_0} - \frac{q}{3\rho_0} \partial_z \rho_0^{1/2},$$

$$K_{44} = \frac{c_0}{\rho_0^{1/2}} D \frac{i\rho_0}{f} D^* \frac{c_0}{\rho_0^{1/2}} - \frac{c_0}{\rho_0^{1/2}} D^* \frac{i\rho_0}{f} D \frac{c_0}{\rho_0^{1/2}}.$$

В силу тождества

$$K_{31}\psi + K_{32}\psi^* \equiv 0 \tag{28}$$

воздействие циклотронных волн на ионно-звуковые в данном приближении отсутствует. Для ионно-звуковых волн имеем систему

$$\begin{pmatrix} p_t \\ q_t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} K_{33} & -K_{43}^* \\ K_{43} & K_{44} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = 0. \tag{29}$$

В полученной системе мы отбросили члены высокого порядка из структурного оператора, поэтому это не гамильтоновская система, но в силу кососимметричности она сохраняет гамильтониан H. При постоянном магнитном поле эта система совпадает с уравнениями, полученными в [14].

Заключение

В заключение отметим, что предложенный метод применим к кососимметричным градиентным системам, у которых характеристическая функция положительна. Обычно в качестве характеристической функции выступает интеграл энергии. В свою очередь, положительность интеграла энергии является необходимым условием для устойчивости системы. Поэтому для таких устойчивых систем мы может использовать квазитождественные преобразования, упрощающие исходную систему.

В качестве примера мы рассмотрели ионно-звуковые волны в сильном неоднородном магнитном поле. Предложенный метод может быть применен также при получении уравнений для ионно-звуковых волн в слабом магнитном поле [15]. Возможно применение этого метода и для других аналогичных уранений.

Список литературы

[1] Арнольд В.И. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.

[2] Биркгоф Д. Динамические системы. Ижевск: Изд-во Удмуртского ун-та, 1999.

[3] Medvedev S.B. Poincare normal forms for partial differential equations// Proc. R. Soc. Lond. 1999. Vol. 455. P. 4061–4075.

[4] Брюно А.Д. Степенная геометрия. М.: Наука, 1997.

[5] Дубровин Б.А., Новиков С.П. Гидродинамика слабодеформированных солитонных решеток. Дифференциальная геометрия и гамильтонова теория// УМН. 1989. Т. 44, № 6. С. 29–98.

[6] Фоменко А.Т. Симплектическая геометрия. Методы и приложения. М.: Изд-во МГУ, 1988.

[7] Кац Е.И., Лебедев В.В. Динамика жидких кристаллов. М.: Наука, 1988.

[8] Синяев В.Н. Об одном принципе построения конечно-разностных схем, основанных на законах сохранения полной энергии // Численные методы механики сплошной среды: Сб. науч. тр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. ВЦ; ИТПМ. 1974. Т. 5, № 2. С. 7–15.

[9] Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. М.: Наука, 1989.

[10] Гледзер Е.Б., Должанский Ф.В., Обухов А.М. Системы гидродинамического типа и их применение. М.: Наука, 1981.

[11] Weinstein A. The local structure of Poisson manifold// J. Diff. Geom. 1983. Vol. 18. P. 523–557.

[12] Захаров В.Е., Кузнецов Е.А. Гамильтоновский формализм для систем гидродинамического типа. Новосибирск, 1982. (Препр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. ИАиЭ; № 186).

[13] Захаров В.Е. Гамильтоновский формализм для гидродинамических моделей плазмы // ЖЭТФ. 1971. Т. 60, № 5. С. 1714–1726.

[14] Захаров В.Е., Кузнецов Е.А. О трехмерных солитонах // ЖЭТФ. 1974. Т. 66, вып. 2. С. 594–597.

[15] Laedke E.W., Spatschek K.H. Nonlinear ion-acoustic waves in weak magnetic fields // Physics Fluids. 1982. Vol. 25. N 6. P. 985–989.

Поступила в редакцию 2 октября 2003 г.