

МНОГОСЕТОЧНЫЙ МЕТОД С ШАХМАТНЫМ ИСКЛЮЧЕНИЕМ НЕИЗВЕСТНЫХ БЕЗ СГЛАЖИВАЮЩИХ ИТЕРАЦИЙ*

В. В. ЕФРЕМОВ, В. В. ШАЙДУРОВ

Институт вычислительного моделирования СО РАН,

Красноярск, Россия

e-mail: shidurov@icm.krasn.ru

In paper the variant of V-cycle is considered with red-black elimination of unknowns to solve model grid analog of Poisson equation. The more effective operator is presented to project right-hand side on rough grid, which accelerates convergence of multigrid method. As a result, it is possible to dispense with smoothing iterations and nevertheless to attain constriction of error 5.7 times less by one V-cycle which has approximately the same number of algebraic operations as 5.5 simple iterations.

Введение

Начиная с основополагающих работ [1–3], стандартный многосеточный метод решения больших систем сеточных уравнений содержит сглаживающие итерации (предварительные и заключительные), проектирование системы на более крупную сетку и коррекцию решения на мелкой сетке с использованием поправки, интерполируемой с грубой сетки [4–6]. В данной работе предложен вариант многосеточного метода, в котором сглаживающие итерации отсутствуют, но сходимость по-прежнему имеется. Для решения сеточной аппроксимации уравнения Пуассона используется последовательность сеток, получаемая исключением каждого второго узла сетки с пятиточечными шаблонами-крестами, повернутыми на 45° на соседних уровнях. Известно, что отсутствие сглаживающих итераций в стандартном методе действительно не дает сходимости. В предлагаемой модификации сходимость обеспечивается более подходящей процедурой проектирования правой части на грубую сетку, не совпадающей с обычно рекомендуемыми процедурами [4–6]. Она выбрана на основании фурье-анализа, применяемого в ряде работ [4, 5] для количественной оценки сходимости многосеточных методов. Отметим, что обычно фурье-анализ не дает строгого обоснования сходимости многосеточного метода и является эвристическим для рекомендаций по выбору различных параметров, влияющих на сходимость. Для рассмотренного алгоритма вычислительный эксперимент дал хорошее совпадение скорости сходимости двухсеточного метода с ее предсказанием на основании фурье-анализа, в том числе наилучшего множителя подавления ошибки величиной 0.15 для рассмотренного алгоритма.

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 02-01-00523.

© Институт вычислительных технологий Сибирского отделения Российской академии наук, 2004.

Шахматное исключение приводит к уменьшению числа неизвестных в два раза и увеличению шага грубой сетки (равномерной квадратной, но повернутой на 45°) в $\sqrt{2}$ раз. Более распространенный прием увеличения шага вдвое приводит к уменьшению числа неизвестных в 4 раза, но различие между операторами на грубой и мелкой сетке становится более существенным, что обычно приводит к увеличению числа итераций сглаживания между сетками. Здесь удалось совсем отказаться от сглаживающих итераций.

1. Постановка задачи

Пусть $\Omega = \{z = (x, y) : 0 < x < 1, 0 < y < 1\}$ – единичный квадрат с границей Γ . Рассмотрим задачу Дирихле для уравнения Пуассона

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f \quad \text{в } \Omega, \quad (1)$$

$$u = 0 \quad \text{на } \Gamma \quad (2)$$

с непрерывной правой частью $f(x, y) \in C(\Omega)$. Построим равномерную разностную сетку

$$\bar{\Omega}_h = \{z_{ij} = (x_i, y_j) : x_i = ih, i = 0, \dots, n; y_j = jh, j = 0, \dots, n\}$$

с шагом $h = 1/n$. Введем множество внутренних и граничных узлов $\Omega_h = \bar{\Omega}_h \cap \Omega$ и $\Gamma_h = \bar{\Omega}_h \cap \Gamma$. Для дискретизации задачи (1), (2) используем стандартную разностную схему

$$(L^h u^h)_{ij} = f_{ij}, \quad z_{ij} \in \Omega_h; \quad (3)$$

$$u_{ij}^h = 0, \quad z_{ij} \in \Gamma_h \quad (4)$$

с пятиточечным шаблоном

$$(L^h u^h)_{ij} \equiv \frac{4}{h^2} u_{ij}^h - \frac{1}{h^2} (u_{i-1,j}^h + u_{i+1,j}^h + u_{i,j-1}^h + u_{i,j+1}^h).$$

Здесь и далее для произвольной функции $\varphi(x, y)$ принято обозначение $\varphi_{ij} = \varphi(x_i, y_j)$. Известно, что задача (3), (4) невырождена и имеет единственное решение u^h , заданное на $\bar{\Omega}_h$.

В дальнейшем систематически будет использоваться следующий прием исключения половины неизвестных. К уравнению с четной суммой индексов $i + j$ прибавим четыре соседних уравнения с нечетной суммой $i + j$ с целью исключения неизвестных с этими индексами и разделим левую и правую части уравнения на 2. В итоге получим сеточное равенство

$$(\tilde{L}^h u^h)_{ij} = (M^h f)_{ij} \quad (5)$$

с операторами

$$\begin{aligned} (\tilde{L}^h u^h)_{ij} \equiv & \frac{3}{(\sqrt{2}h)^2} u_{ij}^h - \frac{1}{2(\sqrt{2}h)^2} (u_{i-1,j-1}^h + u_{i-1,j+1}^h + u_{i+1,j-1}^h + u_{i+1,j+1}^h) - \\ & - \frac{1}{4(\sqrt{2}h)^2} (u_{i-2,j}^h + u_{i+2,j}^h + u_{i,j-2}^h + u_{i,j+2}^h) \end{aligned}$$

и

$$(M^h f)_{ij} \equiv \frac{f_{ij}}{2} + \frac{1}{8}(f_{i,j-1} + f_{i-1,j} + f_{i+1,j} + f_{i,j+1}).$$

Замечание 1. Для алгоритмической определенности в граничных узлах $z_{ij} \in \Gamma_h$ положим сеточное значение функции f_{ij} равным нулю. С теоретической точки зрения это согласуется с нечетным продолжением сеточной функции u^h через прямолинейные участки границы. Такой способ продолжения приводит к периодичности с периодом 2 по x и по y продолженной сеточной функции на

$$R_h^2 = \{z_{ij} : i, j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}.$$

В дальнейшем это делает оправданным применение фурье-анализа.

Для упрощения описания сеточных операторов мы будем далее использовать схематическую запись их шаблонов. Например, для \tilde{L}^h шаблон имеет вид

$$\frac{1}{4(\sqrt{2}h)^2} \times \begin{pmatrix} & & -1 & & \\ & -2 & 0 & -2 & \\ -1 & 0 & 12 & 0 & -1 \\ & -2 & 0 & -2 & \\ & & -1 & & \end{pmatrix} \begin{matrix} j+2 \\ j+1 \\ j \\ j-1 \\ j-2 \\ i-2 \\ i-1 \\ i \\ i+1 \\ i+2 \end{matrix}.$$

Для исключения новых появившихся неизвестных в углах шаблона \tilde{L}^h используем сеточный оператор

$$(S^h \varphi)_{ij} \equiv \frac{1}{(\sqrt{2}h)^2} (\varphi_{i-1,j} + \varphi_{i+1,j} - \varphi_{i,j-1} - \varphi_{i,j+1}).$$

На гладких функциях φ он аппроксимирует выражение

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}$$

со вторым порядком аппроксимации. Используя приближенное равенство $S^h u^h \approx 0$ четыре раза в узлах $z_{i\pm 1,j}$ и $z_{i,j\pm 1}$, приходим к приближенному равенству

$$(L^{\sqrt{2}h} u^h)_{ij} \approx (M^h f)_{ij} \quad (6)$$

с оператором $L^{\sqrt{2}h}$, шаблон которого имеет вид

$$\frac{1}{(\sqrt{2}h)^2} \times \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Итак, вновь получено разностное уравнение, на этот раз с пятиточечным шаблоном “наклонный крест”. Это сеточное уравнение аппроксимирует исходное уравнение (1) также со вторым порядком аппроксимации, что легко проверить путем разложения функции в ряд Тейлора относительно узла z_{ij} . Применение оператора S^h не нарушило порядка аппроксимации ввиду симметрии коэффициентов, давших добавку $(S^h(S^h u^h))_{ij}$, которая на гладких функциях имеет вид

$$(S^h(S^h \varphi))_{ij} = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right) + O(h^2).$$

Обозначим

$$\begin{aligned}\bar{\Omega}_{\sqrt{2}h} &= \{z_{ij} \in \bar{\Omega}_h : i + j - \text{четное}\}, \\ \Omega_{\sqrt{2}h} &= \bar{\Omega}_{\sqrt{2}h} \cap \Omega, \quad \Gamma_{\sqrt{2}h} = \bar{\Omega}_{\sqrt{2}h} \cap \Gamma.\end{aligned}$$

Взяв равенство (6) в узлах $\Omega_{\sqrt{2}h}$ как уравнение для определения новой сеточной функции $u^{\sqrt{2}h}$, добавим краевое условие в узлах $\Gamma_{\sqrt{2}h}$. В итоге получается невырожденная система

$$(L^{\sqrt{2}h} u^{\sqrt{2}h})_{ij} = (M^h f)_{ij} \quad \text{на} \quad \Omega_{\sqrt{2}h}, \quad (7)$$

$$u^{\sqrt{2}h} = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_{\sqrt{2}h}.$$

Эта система имеет единственное решение $u^{\sqrt{2}h}$, заданное на $\bar{\Omega}_{\sqrt{2}h}$ и, вообще говоря, не совпадающие с u^h .

Это исключение неизвестных в шахматном порядке в зарубежной литературе носит название красно-черного исключения [4, 6] и является основой ряда многосеточных методов. Сформулируем один из них в двухсеточном варианте. Многосеточный метод получается рекуррентным применением двухсеточного.

Итак, пусть задано приближение v_1^h к решению u^h на сетке $\bar{\Omega}_h$, совпадающее с ним на границе Γ_h . Тогда процедура Increase (h, v_1^h, f^h, v_2^h) уточнения решения $v_1^h \rightarrow v_2^h$ системы (3), (4) на сетке h с правой частью f^h реализуется в четыре шага.

1. Вычисляем невязку

$$r^h = f^h - L^h v_1^h \quad \text{на} \quad \Omega_h. \quad (8)$$

2. Решаем систему

$$L^{\sqrt{2}h} u^{\sqrt{2}h} = M^h r^h \quad \text{на} \quad \Omega_{\sqrt{2}h}, \quad (9)$$

$$u^{\sqrt{2}h} = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_{\sqrt{2}h}.$$

3. Полученную поправку добавим к приближенному решению

$$\tilde{v}_2^h = v_1^h + u^{\sqrt{2}h} \quad \text{на} \quad \bar{\Omega}_{\sqrt{2}h}. \quad (10)$$

4. По приближенному решению \tilde{v}_2^h в узлах $\bar{\Omega}_{\sqrt{2}h}$ построим новое приближенное решение v_2^h в узлах $\Omega_h \setminus \bar{\Omega}_{\sqrt{2}h}$ путем решения уравнений

$$L^h v_2^h = f^h \quad \text{на} \quad \Omega_h \setminus \Omega_{\sqrt{2}h},$$

$$v_2^h = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_h \setminus \Gamma_{\sqrt{2}h}, \quad (11)$$

$$v_2^h = \tilde{v}_2^h \quad \text{на} \quad \bar{\Omega}_{\sqrt{2}h}.$$

Отметим, что каждое уравнение (11) содержит только по одному неизвестному значению v_2^h . В итоге получим новое приближение v_2^h .

Повторяя шаги 1–4, получаем итерационный цикл, в ряде случаев сходящийся с множителем, не зависящим от шага h .

2. Фурье-анализ

Для исследования этого метода применим фурье-анализ. Его суть состоит в том, что приближенное решение и его погрешность считаются разложенными в конечный ряд Фурье, и прослеживается коэффициент подавления каждой гармоники. Итак, пусть исходная ошибка

$$e_1^h = u^h - v_1^h$$

разлагается в ряд Фурье

$$e_{1,i,j}^h = \sum_{\theta_1, \theta_2} A(\theta_1, \theta_2) \exp(\mathbf{i}(i\theta_1 + j\theta_2)). \quad (12)$$

Здесь \mathbf{i} — мнимая единица, а сумма берется по конечному набору параметров

$$\theta_1 = \pm \frac{\pi k}{n}, \quad k = 1, \dots, n-1 \quad \text{и} \quad \theta_2 = \pm \frac{\pi l}{n}, \quad l = 1, \dots, l-1,$$

о которых нам достаточно знать, что

$$-\pi < \theta_1 \leq \pi, \quad -\pi < \theta_2 \leq \pi.$$

Вычисление невязки эквивалентно следующей операции:

$$r^h = L^h e_1^h. \quad (13)$$

Применительно к разложению (12) это дает равенство

$$(L^h e_1^h)_{ij} = \sum_{\theta_1, \theta_2} \left(\frac{1}{h^2} (4 - 2 \cos \theta_1 - 2 \cos \theta_2) \right) A(\theta_1, \theta_2) \exp(\mathbf{i}(i\theta_1 + j\theta_2)). \quad (14)$$

Для упрощения записи введем коэффициент-символ оператора L^h , действующего на гармонику с параметрами θ_1, θ_2 :

$$L^h(\theta_1, \theta_2) = \frac{1}{h^2} (4 - 2 \cos \theta_1 - 2 \cos \theta_2). \quad (15)$$

Вычисление правой части в (9) связано с символом оператора M^h :

$$M^h(\theta_1, \theta_2) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cos \theta_1 + \frac{1}{4} \cos \theta_2. \quad (16)$$

Оператор $L^{\sqrt{2}h}$ умножает гармонику с параметрами θ_1, θ_2 в четных узлах на следующий множитель:

$$L^{\sqrt{2}h}(\theta_1, \theta_2) = \frac{1}{(\sqrt{2}h)^2} (4 - 2 \cos(\theta_1 + \theta_2) - 2 \cos(-\theta_1 + \theta_2)). \quad (17)$$

Как уже говорилось, оператор, обратный к $L^{\sqrt{2}h}$, существует и невырожден, так что он производит деление гармоники на этот же множитель. В итоге гармоники ошибки e_1^h с параметрами (θ_1, θ_2) в четных узлах приобретают следующий вид:

$$u_{ij}^{\sqrt{2}h} = \sum_{\theta_1, \theta_2} \left(\frac{1}{L^{\sqrt{2}h}(\theta_1, \theta_2)} M^h(\theta_1, \theta_2) L^h(\theta_1, \theta_2) \right) A(\theta_1, \theta_2) \exp(\mathbf{i}(i\theta_1 + j\theta_2)). \quad (18)$$

Обозначим

$$D(\theta_1, \theta_2) = \frac{1}{L\sqrt{2h}(\theta_1, \theta_2)} M^h(\theta_1, \theta_2) L^h(\theta_1, \theta_2).$$

Добавление поправки $u^{\sqrt{2}h}$ в четных узлах приводит к равенству

$$e_{2,i,j}^h = \sum_{\theta_1, \theta_2} \left(1 - D(\theta_1, \theta_2)\right) A(\theta_1, \theta_2) \exp(\mathbf{i}(i\theta_1 + j\theta_2)).$$

Введем функцию

$$I_{ij}^h(\theta_1, \theta_2) = \begin{cases} 1 & \text{в четных узлах,} \\ (\cos \theta_1 + \cos \theta_2)/2 & \text{в нечетных узлах.} \end{cases}$$

Тогда на шаге 4 получаем в целом по сеточной области

$$e_{2,i,j}^h = \sum_{\theta_1, \theta_2} I_{ij}^h(\theta_1, \theta_2) \left(1 - D(\theta_1, \theta_2)\right) A(\theta_1, \theta_2) \exp(\mathbf{i}(i\theta_1 + j\theta_2)).$$

Поставим целью избавиться в I_{ij}^h от зависимости i, j . Для этого представим $I_{ij}^h(\theta_1, \theta_2)$ в виде суммы двух значений других индексов $J^h(\theta_1, \theta_2)$ и $J^h(\theta_1 + \pi, \theta_2 + \pi)$. А именно, гармонику с параметрами (θ_1, θ_2) с амплитудой A разложим в суммы гармоники с параметрами (θ_1, θ_2) , $(\theta_1 + \pi, \theta_2 + \pi)$ и амплитудами A_1, A_2 . Для этого найдем такую функцию $J^h(\theta_1, \theta_2)$, что

$$A_1 = J^h(\theta_1, \theta_2)A, \quad A_2 = J^h(\theta_1 + \pi, \theta_2 + \pi)A$$

и

$$\begin{aligned} A_1 \exp(\mathbf{i}(i\theta_1 + j\theta_2)) + A_2 \exp(\mathbf{i}(i(\theta_1 + \pi) + j(\theta_2 + \pi))) &= \\ &= I_{ij}^h(\theta_1, \theta_2)A \exp(\mathbf{i}(i\theta_1 + j\theta_2)). \end{aligned}$$

В четных узлах имеем $A_1 + A_2 = A$, а в нечетных узлах $A_1 - A_2 = A(\cos \theta_1 + \cos \theta_2)/2$. В итоге получаем систему

$$\begin{cases} J^h(\theta_1, \theta_2) + J^h(\theta_1 + \pi, \theta_2 + \pi) = 1, \\ J^h(\theta_1, \theta_2) - J^h(\theta_1 + \pi, \theta_2 + \pi) = (\cos \theta_1 + \cos \theta_2)/2. \end{cases} \quad (19)$$

Ее решением является функция

$$J^h(\theta_1, \theta_2) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cos \theta_1 + \frac{1}{4} \cos \theta_2.$$

Итак, гармоника с параметрами (θ_1, θ_2) оказалась инвариантной, она породила дополнительную гармонику с параметрами $(\theta_1 + \pi, \theta_2 + \pi)$. Аналогично гармоника с параметрами $(\theta_1 + \pi, \theta_2 + \pi)$ порождает дополнительную гармонику с параметрами (θ_1, θ_2) (в силу периодичности с периодом 2π гармоники с параметрами $(\theta_1 + 2\pi, \theta_2 + 2\pi)$ и (θ_1, θ_2) совпадают). Поэтому рассмотрим взаимодействующую пару гармоник, она оказывается инвариантной [4, 6]. Символ оператора перехода для этой пары является матрицей 2×2 :

$$\begin{pmatrix} J^h(\theta_1, \theta_2)(1 - D(\theta_1, \theta_2)) & J^h(\theta_1, \theta_2)(1 - D(\theta_1 + \pi, \theta_2 + \pi)) \\ J^h(\theta_1 + \pi, \theta_2 + \pi)(1 - D(\theta_1, \theta_2)) & J^h(\theta_1 + \pi, \theta_2 + \pi)(1 - D(\theta_1 + \pi, \theta_2 + \pi)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} =$$

$$= \left(\begin{array}{c} J^h(\theta_1, \theta_2)(A_1(1 - D(\theta_1, \theta_2)) + A_2(1 - D(\theta_1 + \pi, \theta_2 + \pi))) \\ J^h(\theta_1 + \pi, \theta_2 + \pi)(A_1(1 - D(\theta_1, \theta_2)) + A_2(1 - D(\theta_1 + \pi, \theta_2 + \pi))) \end{array} \right).$$

В полученном решении эти гармоники складываются по правилу (19). Поэтому в четных узлах имеем

$$S_1 = \exp(\mathbf{i}(\theta_1 + j\theta_2))(A_1(1 - D(\theta_1, \theta_2)) + A_2(1 - D(\theta_1 + \pi, \theta_2 + \pi))),$$

а в нечетных узлах

$$S_2 = \exp(\mathbf{i}(\theta_1 + j\theta_2)) \frac{\cos \theta_1 + \cos \theta_2}{2} (A_1(1 - D(\theta_1, \theta_2)) + A_2(1 - D(\theta_1 + \pi, \theta_2 + \pi))).$$

Эти выражения можно оценить сверху:

$$\begin{aligned} S &= \max\{|S_1|, |S_2|\} \leq |A_1|(1 - D(\theta_1, \theta_2)) + |A_2|(1 - D(\theta_1 + \pi, \theta_2 + \pi)) \leq \quad (20) \\ &\leq \max\{|A_1|, |A_2|\} (|(1 - D(\theta_1, \theta_2))| + |(1 - D(\theta_1 + \pi, \theta_2 + \pi))|). \end{aligned}$$

Отсюда видно, что чем меньше $|1 - D(\theta_1, \theta_2)|$, $|1 - D(\theta_1 + \pi, \theta_2 + \pi)|$, тем меньше ошибка. На рис. 1 представлен график функции $|1 - D(\theta_1, \theta_2)|$. График функции $|1 - D(\theta_1 + \pi, \theta_2 + \pi)|$ совпадает с ним ввиду симметрии относительно двух осей координат.

Для $\theta_1 + \theta_2 = 0$ и $\theta_1 - \theta_2 = 0$ значение $1 - D(\theta_1, \theta_2)$ равно нулю. Значение функции $1 - D(\theta_1, \theta_2)$ для параметров $(0, \pm\pi)$ и $(\pm\pi, 0)$ не так мало, что обычно приводит к дополнительным сглаживающим итерациям на мелкой сетке для исключения гармоник ошибки с такими параметрами.

Попробуем найти другой оператор \widetilde{M}^h , такой, что выражение

$$\frac{1}{L^{\sqrt{2}h}(\theta_1, \theta_2)} \widetilde{M}^h(\theta_1, \theta_2) L^h(\theta_1, \theta_2)$$

будет более близким к 1, чем $D(\theta_1, \theta_2)$. В результате более тщательного подбора и тестирования рекомендуется более эффективный оператор сглаживания со следующим индексом:

$$\widetilde{M}^h(\theta_1, \theta_2) = M^h(\theta_1, \theta_2) + \frac{1}{8}(1 - \cos(\theta_1 + \theta_2))(1 - \cos(-\theta_1 + \theta_2)).$$

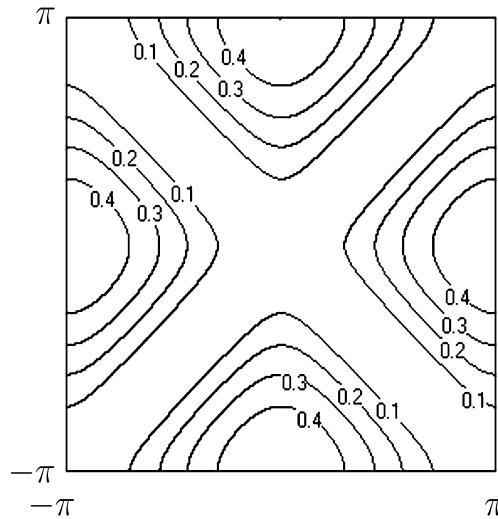


Рис. 1. График функции $|1 - D(\theta_1, \theta_2)|$, максимум равен 0.5 в серединах сторон.

График функции

$$\left| 1 - \tilde{D}(\theta_1, \theta_2) \right| = \left| 1 - \frac{1}{L\sqrt{2}h(\theta_1, \theta_2)} \tilde{M}^h(\theta_1, \theta_2) L^h(\theta_1, \theta_2) \right|$$

изображен на рис. 2.

Этому индексу $\tilde{M}^h(\theta_1, \theta_2)$ соответствует следующий шаблон оператора \tilde{M}^h :

$$\frac{1}{32} \times \begin{pmatrix} & & 1 & & \\ & -2 & 4 & -2 & \\ 1 & 4 & 20 & 4 & 1 \\ & -2 & 4 & -2 & \\ & & 1 & & \end{pmatrix}. \quad (21)$$

Замечание 2. В соответствии с нечетным продолжением сеточных функций через границу (см. замечание 1) оператор \tilde{M}^h в приграничных узлах можно трансформировать так, что будут использованы лишь известные значения. Например, $f_{i,n} = 0$, а $f_{i,n+1} = -f_{i,n-1}$. Поэтому шаблон \tilde{M}^h в узле $z_{i,n-1}$ можно записать в виде

$$\frac{1}{32} \times \begin{pmatrix} 1 & 4 & 19 & 4 & 1 \\ & -2 & 4 & -2 & \\ & & 1 & & \end{pmatrix} \begin{matrix} n-1 \\ n-2 \\ n-3 \end{matrix}.$$

$i-2 \quad i-1 \quad i \quad i+1 \quad i+2$

В углах он трансформируется еще сильнее, например:

$$\frac{1}{32} \times \begin{pmatrix} 1 & 4 & 18 \\ & -2 & 4 \\ & & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} n-1 \\ n-2 \\ n-3 \end{matrix}.$$

$n-3 \quad n-2 \quad n-1$

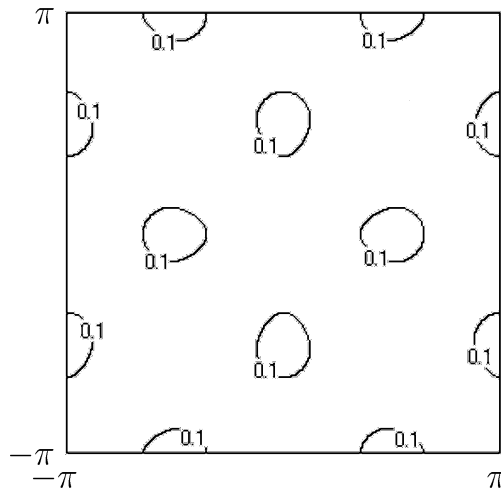


Рис. 2. График функции $|1 - \tilde{D}(\theta_1, \theta_2)|$, максимум равен 0.12 в узлах $(\pi j/2, \pi k/2)$, где $j + k$ — нечетно.

3. Вычислительный эксперимент

Рассмотрим задачу (3)–(4). Положим $n = 32, h = 1/32$ и проведем вычислительный эксперимент с заданной сеточной функцией

$$u_{j,k} = \sin(\pi i h r) \sin(\pi j h s), \quad i, j = 0, 1, \dots, n. \quad (22)$$

Она является сеточной модой Фурье с частотами $(\pi h r, \pi h s)$, которые мы будем брать для различных целых $r, s = 1, 2, \dots, n - 1$. Правая часть $f_{i,j}^h$ уравнения (3) вычисляется прямой подстановкой решения u^h в оператор L^h . Для оценки точности решения будет использоваться дискретная L_2 -норма

$$\|u^h\|_{L_2} = \sqrt{h^2 \sum_{i,j=1}^{31} (u_{i,j}^h)^2}.$$

В качестве начального приближения v_1^h возьмем нулевую сеточную функцию. После этого реализуем процедуру Increase (h, v_1^h, f^h, v_2^h) по формулам (8)–(11). В итоге мы получим новое приближение v_2^h , для которого вычислим отношение

$$\delta_{M^h} = \frac{\|u^h - v_2^h\|_{L_2}}{\|u^h - v_1^h\|_{L_2}}. \quad (23)$$

Значения этой величины являются коэффициентом подавления ошибки в результате применения одного V-цикла в двухсеточной реализации. Ее значения для различных r и s приведены в табл. 1. Таблица 2 содержит верхнюю оценку этой величины

$$|(1 - D(\theta_1, \theta_2))| + |(1 - D(\theta_1 + \pi, \theta_2 + \pi))|,$$

вычисленную по методике фурье-анализа (12) – (19).

Из сопоставления таблиц видно, что практические коэффициенты подавления ошибки, естественно, лучше теоретических оценок и достигают наибольшего значения в углах таблицы.

Т а б л и ц а 1

$r \setminus s$	1	10	16	22	31
1	0	0.1439	0.2981	0.3632	0.3584
10	0.1439	0	0.0622	0.1638	0.3632
16	0.2981	0.0622	0	0.0622	0.2981
22	0.3632	0.1638	0.0622	0	0.1439
31	0.3584	0.3632	0.2981	0.1439	0

Т а б л и ц а 2

$r \setminus s$	1	10	16	22	31
1	0	0.2162	0.4952	0.7744	0.9952
10	0.2162	0	0.1544	0.4718	0.7744
16	0.4952	0.1544	0	0.1544	0.4952
22	0.7744	0.4718	0.1544	0	0.2162
31	0.9952	0.7744	0.4952	0.2162	0

Т а б л и ц а 3

$r \setminus s$	1	10	16	22	31
1	0	0.1116	0.1483	0.0798	0
10	0.1116	0	0.0173	0	0.0798
16	0.1483	0.0173	0	0.0173	0.1483
22	0.0798	0	0.0173	0	0.1116
31	0	0.0798	0.1483	0.1116	0

Т а б л и ц а 4

$r \setminus s$	1	10	16	22	31
1	0	0.1676	0.2464	0.1702	0
10	0.1676	0	0.0428	0	0.1702
16	0.2464	0.0428	0	0.0428	0.2464
22	0.1702	0	0.0428	0	0.1676
31	0	0.1702	0.2464	0.1676	0

После этого вычисления были повторены с помощью процедуры Increase, в которой оператор M^h был заменен на оператор \tilde{M}^h в формуле (9). Таблица 3 содержит значения величины $\delta_{\tilde{M}^h}$, вычисленной по аналогии с (23), а табл. 4 — теоретическую верхнюю оценку этой величины, определенную по методу Фурье-анализа.

На этот раз теоретические оценки гораздо ближе к практическим коэффициентам подавления, а их максимум меньше 0.25, что существенно меньше максимума в двух первых таблицах.

Поскольку сеточные функции (22) представляют собой ортогональный базис, то ввиду линейности двухсеточного метода уточнения коэффициент подавления ошибки не превышает $q < 0.15$ для любого сеточного решения в сеточном аналоге нормы L_2 .

Для многосеточного метода рекуррентный учет ошибки в сеточной L_2 -норме подсчитывается путем оценки суммы [6]

$$q + q^2 + \dots + q^{m-1},$$

где m — число сеток. В нашем случае имеем

$$q + q^2 + \dots + q^{m-1} \leq q + q^2 + \dots = q/(1 - q).$$

Таким образом, множитель подавления ошибки в многосеточном V-цикле для этого метода не хуже 0.1764.

Подсчет арифметических операций показывает, что их количество пропорционально числу неизвестных на самой мелкой сетке с множителем 35, что меньше числа операций для пяти с половиной простых итераций на той же сетке.

Список литературы

- [1] БАХВАЛОВ Н.С. О сходимости одного релаксационного метода при естественных ограничениях на эллиптический оператор // ЖВМ и МФ. 1966. Т. 6, № 5. С. 861–883.
- [2] ФЕДОРЕНКО Р.П. Релаксационный метод решения разностных эллиптических уравнений // ЖВМ и МФ. 1961. Т. 1, № 5. С. 922–927.
- [3] ФЕДОРЕНКО Р.П. О скорости сходимости одного итерационного процесса // ЖВМ и МФ. 1964. Т. 4, № 5. С. 559–564.
- [4] BRIGGS W.L., HENSON V.E., MCCORMICK S.F. A Multigrid Tutorial. Second Edition. Philadelphia: SIAM, 1999.
- [5] DISKIN B. Multigrid solvers on decomposed domains. Thesis for the M.Sc. degree, Department of Applied Mathematics and Computer Science. The Weizmann Institute of Science, 1993.
- [6] ШАЙДУРОВ В.В. Многосеточные методы конечных элементов. М.: Наука, 1989.
- [7] HACKBUSCH W. Multi-Grid Methods and Applications. Berlin: Springer, 1985.
- [8] ОЛЬШАНСКИЙ М.А. Лекции и упражнения по многосеточным методам. М.: Изд-во ЦПИ при механико-мат. фак. МГУ, 2003.

*Поступила в редакцию 5 февраля 2004 г.,
в переработанном виде — 27 февраля 2004 г.*