

# О ПОДХОДАХ К ЧИСЛЕННОМУ МОДЕЛИРОВАНИЮ ОПОЛЗНЕВОГО МЕХАНИЗМА ГЕНЕРАЦИИ ВОЛН ЦУНАМИ\*

Ю. И. ШОКИН, Л. Б. ЧУБАРОВ

*Институт вычислительных технологий СО РАН, Новосибирск, Россия*  
e-mail: shokin@ict.nsc.ru, chubarov@ict.nsc.ru

In this work we present the results obtained in numerical studies of landslide mechanism of tsunami generation on the basis of a complex of multi-parameter calculations.

## Введение

Работы в области численного моделирования волн цунами, инициированные академиком Н.Н. Яненко в 1974 году, первоначально были сосредоточены на изучении распространения этих волн по океану и их наката на берег. Впоследствии под руководством авторов настоящей статьи и при их непосредственном участии в рамках крупных международных и национальных проектов решались разнообразные фундаментальные и прикладные задачи волновой гидродинамики. В настоящей статье излагаются результаты исследования оползневого механизма генерации волн цунами. Для изучения закономерностей волнообразования необходимо исследовать зависимость характеристик этого процесса от основных параметров задачи: длины и ширины оползня, глубины его залегания, закона движения. Эта необходимость инициировала комплекс многопараметрических расчетов, выполненных с помощью иерархии моделей волновой гидродинамики, включающей уравнения мелкой воды в приближениях, учитывающих нелинейные и дисперсионные эффекты, и полные уравнения гидродинамики идеальной жидкости.

В последние годы активно обсуждаются результаты вычислительных и лабораторных экспериментов, воспроизводящих механизм генерации волн цунами движением недеформируемого твердого тела по склону дна. В работах [1, 2] показано, что такой подход при надлежащей параметризации представляет адекватную схематизацию реальных оползневых процессов в широком диапазоне изменения определяющих характеристик. В статьях [2–5] исследовалась возможность использования приближенных математических моделей гидродинамики для описания оползневого механизма генерации поверхностных волн, при

---

\*Работа выполнена при финансовой поддержке Президентской программы “Ведущие научные школы РФ” (грант № НШ-9886.2006.9), Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 05-05-64460, № 06-05-64869), Программы комплексных интеграционных исследований СО РАН (грант № 2006-2.12), Программы междисциплинарных интеграционных исследований СО РАН (гранты № 2006-28, № 2006-113).

© Институт вычислительных технологий Сибирского отделения Российской академии наук, 2006.

этом анализировалась необходимость учета вертикальной структуры течения. Было показано, что для детального количественного и качественного описания явления в обширных водоемах на продолжительное время следует привлекать модели волновой гидродинамики, хорошо описывающие дисперсию и отражающие неоднородность процесса в вертикальном направлении. Что касается полной модели, то в работах [2–4] была продемонстрирована возможность ее использования в качестве “эталонной”, дающей решения, наиболее близкие к результатам лабораторного эксперимента. Однако ее применение для серийных расчетов представляется пока слишком дорогостоящим.

## 1. Схемы модельной акватории и оползневых механизмов

Для изучения генерации волн цунами движущимся оползнем была использована модельная акватория, схема которой представлена на рис. 1. Предполагается, что в начальный момент вода покоится, точка уреза совпадает с началом декартовой системы координат  $xOz$ . В прибрежной зоне акватории дно состоит из склона, образующего с горизонтом угол  $\varphi$ , в точке  $x_* = h_{\text{const}} \cot(\varphi)$  эта зона сопрягается с морской частью акватории постоянной глубины ( $h_{\text{const}}$  — глубина невозмущенной жидкости). Рассматриваются модели оползней, перемещающихся как недеформируемое твердое тело (все точки движутся одинаково). Такой модельный оползень располагается на склоне, и его верхняя поверхность отстоит от уровня невозмущенной жидкости на величину (см. [7])

$$h(x, t) = x \tan \varphi - \Delta h \frac{\left[ 1 + \tanh \left( \frac{x - x_c(t)}{S} + b \right) \right] \left[ 1 - \tanh \left( \frac{x - x_c(t)}{S} - b \right) \right]}{[1 + \tanh(b)]^2}. \quad (1)$$

Здесь  $\Delta h$  — максимальная толщина оползня;  $S = \cos \varphi / 2$  — параметр, характеризующий крутизну поверхности оползня; величина  $b$  равна расстоянию между точками перегиба кривой, задающей верхнюю поверхность оползня;  $x_c(t)$  — координата точки максимальной толщины тела;  $x_{c0}$  — ее начальное положение; величина  $d$  характеризует заглубление оползня до начала движения.

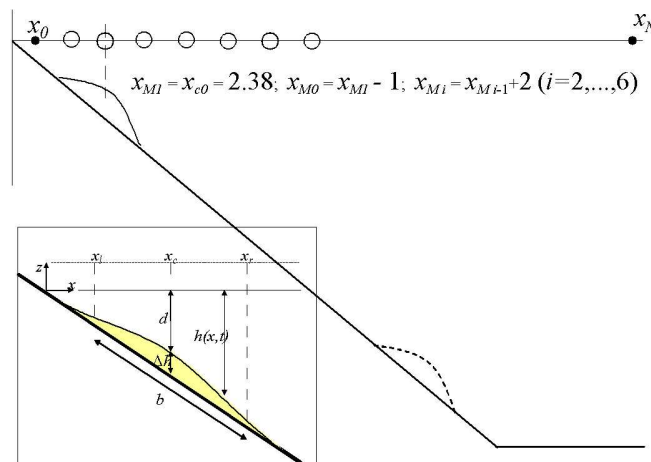


Рис. 1. Схема модельной акватории и фрагмент с указанием параметров оползня.

Границы расчетной области располагаются в точках с координатами  $x_0 = 1.0$ ,  $x_N = 41.0$ , вычисления продолжаются до момента времени  $t_{\text{final}} = 50.0$ . На левой границе модельной акватории предполагается наличие вертикальной непроницаемой стенки, правая граница предполагается открытой. При постановке краевых задач для математического моделирования на этих границах ставятся условия непротекания и свободного прохода. Для фиксации результатов моделирования установлены семь расчетных мареографов с координатами:  $x_{M0} = x_{c0} - 1$ ,  $x_{M1} = x_{c0} = 2.38$ ,  $x_{Mi} = x_{M_{i-1}} + 2$ ,  $i = 2, \dots, 6$ .

При математическом моделировании обычно ограничиваются двумя модельными видами оползней, в англоязычной литературе называемыми слайдами (slide) и слампами (slump) [3]. Оползень типа “слайд” можно определить как тонкий слой грунта, поступательно продвигающийся на большие расстояния. В работах [2, 3] описан следующий закон движения слайда:  $s(t) = s_0 \ln[\cosh(t/t_0)]$ . При естественных физических условиях начальное ускорение и конечную установившуюся скорость можно определить в виде  $a_0 = 0.3g \sin(\varphi)$ ,  $u_t = 1.16\sqrt{bg \sin(\varphi)}$  соответственно. Тогда характерные время и расстояние вычисляются следующим образом:  $t_0 \equiv u_t/a_0$ ,  $s_0 \equiv u_t^2/a_0 \equiv u_t t_0$  [1–3]. Как показано в работе [2], при этих предположениях простое уравнение  $s(t) = a_0 t^2/2$  обеспечивает хорошую аппроксимацию начального разгона тела, после чего движение становится равномерным и продолжается вплоть до окончания расчетов или остановки оползня по какой-либо причине.

Оползни второго вида (“слампы”) продвигаются на угол  $\phi$  по дуге окружности радиуса  $R$  с центром в некоторой точке. Полагая значение  $\phi$  малым, а  $R$  — относительно большим, эту дугу вследствие ее малой кривизны можно приблизить отрезком прямой.

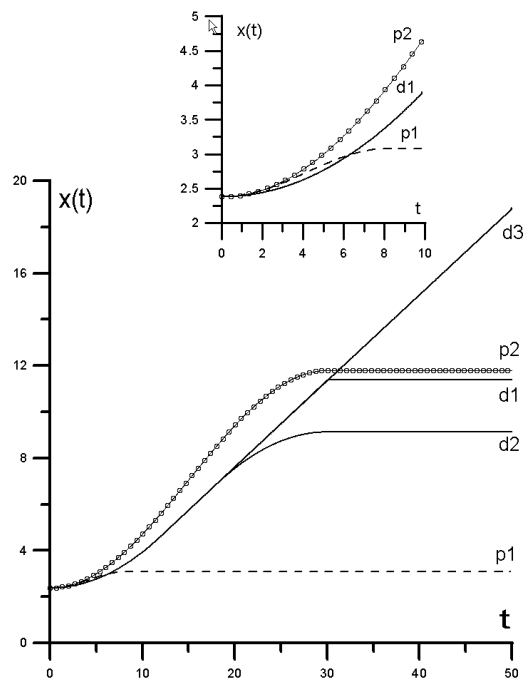


Рис. 2. Типы движения оползня: “слайд 1” (d1) — разгон, равномерное движение, остановка, покой; “слайд 2” (d2) — разгон, равномерное движение, торможение, покой; “слайд 3” (d3) — разгон, равномерное движение; “сламп 1” (p1) — разгон, торможение, покой; “сламп 2” (p2) — разгон, торможение, покой. На врезке — увеличенный фрагмент рисунка, иллюстрирующий особенности движений типа “сламп”.

Тогда закон движения можно аппроксимировать формулой  $s(t) = s_0[1 - \cos(t/t_0)]$ , где  $s_0 = 0.5R\phi$ ,  $t_0 = 1.84\sqrt{R/g}$ ; время движения равно  $\pi t_0$ .

В статье для изучения перестройки волновых процессов при торможении и остановке оползня воспроизведены волновые режимы, порожденные различными вариантами указанных выше двух типов оползневых механизмов (рис. 2). Так, для слайда изучены случай внезапной остановки тела во время равномерного движения и вариант, когда замедление происходило постепенно, вплоть до остановки. Когда закон движения предусматривал резкую остановку или завершение этапа торможения, за исключением одного случая, этот этап наступал в момент  $t_{\text{stop}} = 30.0$ .

В тех случаях, когда это не оговаривается специально, для моделирования оползневых движений используются следующие значения параметров:  $\Delta h = 0.05$ ,  $b = 1.0$ ,  $h_{\text{const}} = 2.3$ ,  $x_{c0} = 2.38$ ,  $\varphi = 6^\circ$ ,  $g = 1.0$ ,  $R = 2.0$ ,  $\phi = 0.35$ . Более детально упомянутые типы движений изложены в [15].

## 2. Математические модели

В работе используется иерархия моделей, учитывающих изменение во времени донной поверхности: линейные и нелинейные модели мелкой воды, слабо нелинейные дисперсионные модели, полученные в [8] и совпадающие в случае ровного дна с известными моделями Мея — Меоте и Перегринна [11, 12], упрощенные варианты моделей Грина — Нагди [13] и Нвогу [14], одно- и двухслойные нелинейно-дисперсионные модели (НЛД) Лью — Линетта [6], а также полная модель течения идеальной жидкости [9]. Подробное описание упомянутых моделей приведено в [15].

Попытки построения моделей с дисперсионными соотношениями, наилучшим образом аппроксимирующими дисперсионное соотношение полной модели, привели авторов работы [6] к результату, полученному за счет уточненного воспроизведения вертикального профиля скорости. При этом удалось улучшить также учет линейных и нелинейных эффектов. Вывод этой модели потребовал введения параметров, управляющих аппроксимационными свойствами дисперсионных кривых. Эти параметры определяют толщины виртуальных слоев, на которые разбивается исходный слой воды. Таким образом возникают и виртуальные (условные) границы раздела. Авторами опубликованы результаты для  $(2N - 1)$ -й параметрической модели ( $N$ -слойная), но для проведения вычислительных экспериментов используются одно- и двухслойные модели. При определенных условиях “однослойная” модель сводится к уравнениям нелинейно-дисперсионной модели Нвогу.

## 3. Вычислительные алгоритмы

В качестве численных алгоритмов применялись простые, но эффективные конечно-разностные схемы. Для гиперболических систем использован численный метод, построенный на базе схемы Мак-Кормака. Для нелинейно-дисперсионных уравнений разработаны схемы второго порядка аппроксимации, содержащие ряд управляющих параметров, позволяющих избирательно применять процедуру сглаживания. Для численного решения уравнений Нвогу и Лью — Линетта использовался конечно-разностный аналог схемы Адамса четвертого порядка аппроксимации по времени и пространству [10]. В случае нелинейно-дисперсионных уравнений соответствующая схема обладает вторым порядком

аппроксимации по пространству. Для аппроксимации полной гидродинамической модели применялись схемы на криволинейной сетке, адаптирующейся к геометрии расчетной области [9].

## 4. Вычислительные эксперименты

Для сравнения различных моделей проведена серия вычислительных экспериментов, воспроизводящих волновые режимы, порожденного оползнями типа “слайд 1” и “сламп 1”. На рис. 3–9 в различных комбинациях приведены графики мареограмм, рассчитанных в первой и седьмой (последней) точках записи. Именно здесь наиболее полно проявляются характерные особенности волновых полей. Первый мареограф записывает волну, распространяющуюся к берегу, а седьмой — в мористую часть акватории. Как показывают графики (см. рис. 3), при законе движения оползня “слайд 1” в первую точку вначале приходит волна понижения, ассоциируемая с этапом разгона, за которой следует длинная и пологая волна повышения, связанная с этапом равномерного движения. И, наконец, наступает момент, когда почти одновременно появляются волны, порожденные резкой остановкой оползня и отражением от береговой стенки (см. рис. 3, *а*). Эти эффекты подтверждаются мареограммами второй точки (см. рис. 3, *б*), в которой волны “остановки” и “отражения” полностью разделены. Следует обратить внимание и на штриховые линии графиков, соответствующие движению “сламп 1”, которое отличается иным законом разгона и отсутствием этапов равномерного движения и мгновенной, резкой остановки, что приводит к отсутствию волн “равномерного движения” и “остановки”.

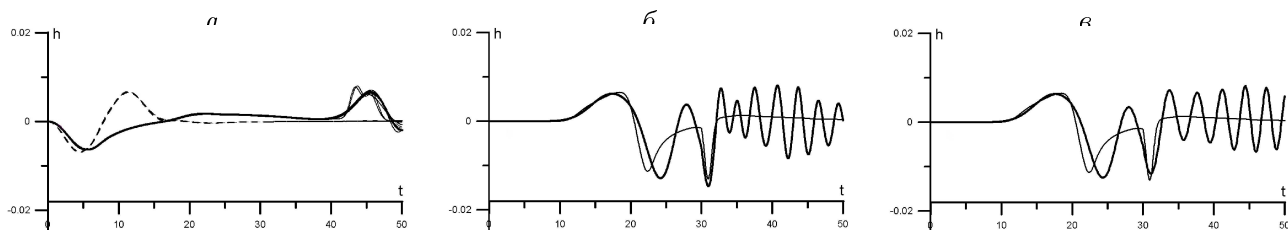


Рис. 3. Результаты, рассчитанные с использованием всех моделей для вариантов движения оползня “слайд 1” (сплошные кривые) и “сламп 1” (штриховые) в первой (*а*) и второй (*б*) точках. На фрагменте (*в*) приведены результаты, рассчитанные в седьмой точке по линейной (значки) и нелинейной теории мелкой воды.

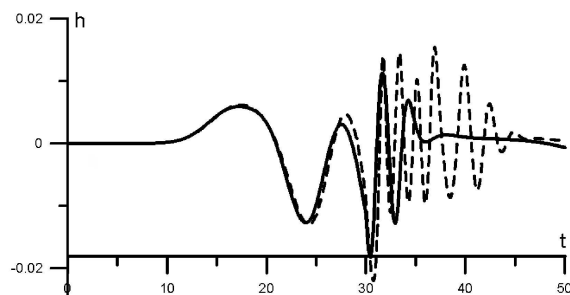


Рис. 4. Результаты, рассчитанные для варианта движения оползня “сламп 1” с использованием всех моделей в седьмой точке. Значками отмечены результаты, полученные по линейной модели мелкой воды.

Таким образом, в прибрежной зоне даже самые простые математические модели приводят к неразличимым результатам, разве что за исключением волн “остановки” и “отражения”, особенно отчетливо воспроизводимых моделью мелкой воды. Принципиальное отличие волн, распространяющихся в попутном оползнию направлении, иллюстрирует рис. 3, в, на котором приведены мареограммы, рассчитанные в седьмой мареографной точке по линейным и нелинейным уравнениям теории мелкой воды. Сюда первой приходит волна повышения, за ней следует волна понижения, связанная с прохождением тыловой зоны оползня (как для движения “слайд 1”, так и для движения “сламп 1”), завершается мареограмма (для движения “слайд 1”) резкой волной понижения — волной “равномерного движения и остановки”. В случае “сламп 1” таких эффектов нет. Для этого типа движения (см. рис. 4) все модели и в удаленной, седьмой, точке также приводят к близким результатам, т.е. оползень — “сламп 1” порождает волновые движения, лишенные ярко выраженных вертикальных эффектов, хотя на фоне волны, прекрасно воспроизводимой простейшими моделями, хорошо видны мелкомасштабные осцилляции, связанные с дисперсионными эффектами. Для поиска ответа на вопрос о выборе наиболее адекватной приближенной модели следует обратиться к анализу мареограмм, рассчитанных для закона движения “слайд 1” в удаленной (мористой) точке. С этой целью следует сначала рассмотреть результаты, рассчитанные по НЛД-моделям с линейными дисперсионными членами (см. рис. 5). Как видно, учет дисперсии, даже в ее линейном представлении, приводит к существенному усложнению волнового режима при одновременном сохранении базовых характеристик. Заметна близость результатов, полученных по моделям Перегринна и Грина — Нагди (их линейные аналоги совпадают).

Для определения важности учета нелинейных дисперсионных членов следует сначала рассмотреть результаты, полученные по НЛД-моделям с нелинейной дисперсией, в сравне-

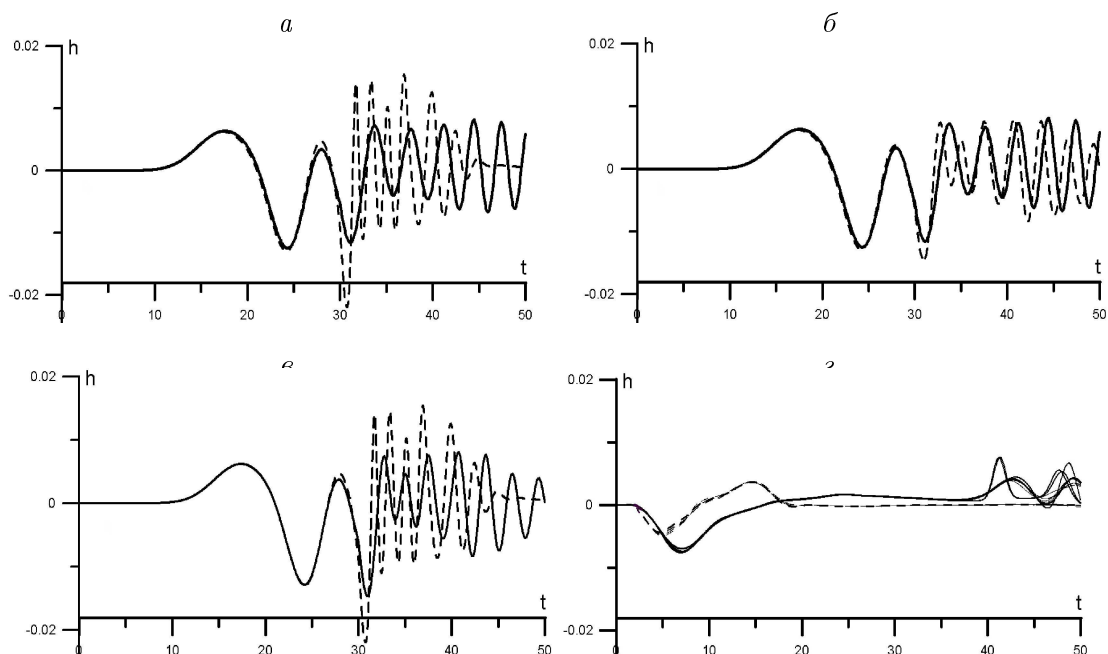


Рис. 5. Результаты, рассчитанные для оползня, движущегося по закону “слайд 1” в седьмой точке по НЛД-моделям с линейной дисперсией: *a* — Модель Мея — Меете; *б* — модель Нвогу; *в* — модель Перегринна; *г* — модель Грина — Нагди. Для сравнения приведены результаты, рассчитанные с использованием модели нелинейной мелкой воды (тонкие линии).

нии с результатами, полученными по нелинейной модели теории мелкой воды (см. рис. 6), а затем сопоставить их с результатами, рассчитанными с помощью полной модели. Уже предварительный анализ мареограмм подтверждает плодотворность подхода Лью — Линетта и возрастание точности воспроизведения исследуемого процесса при увеличении числа “слоев”.

Наглядное представление о количественном и качественном выражении важности учета нелинейной дисперсии можно получить, сравнивая (см. рис. 7) результаты, рассчитанные по исходной (нелинейная дисперсия) и упрощенной (линейная дисперсия) моделям Нвогу. Обе модели одинаково описывают значительную по продолжительности часть волнового процесса и существенно различаются в моделировании диспергирующего волнового следа. Окончательный этап анализа, приводящий к выбору модели для последующих исследований, состоит в сравнении перспективных НЛД-моделей с полной (см. рис. 8); рис. 8, *а* и 8, *б* с очевидностью указывают на двухслойную модель Лью — Линетта и на целесообразность использования ее упрощенного варианта (однослойный) для исследования начальных стадий рассматриваемых явлений. На рис. 8, *в* представлены результаты сравнения упомянутых НЛД-моделей.

Исследование характеристик волновых режимов, обусловленных особенностями механизмов их генерации, выполнялось с использованием двухслойной модели Лью — Линетта. С целью выделения эффектов нелинейной дисперсии аналогичные расчеты проводились в рамках нелинейной теории мелкой воды (см. рис. 9). Как видно из рисунков, в начале движения в сторону берега уходит небольшая волна понижения. Перед телом образуется волна повышения, которая во время разгона, оставаясь постоянной по амплитуде, уве-

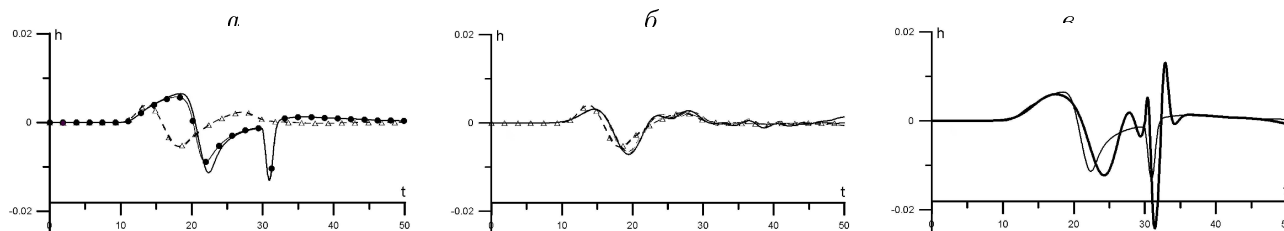


Рис. 6. Результаты, рассчитанные для оползня, движущегося по закону “слайд 1” в седьмой точке по НЛД-моделям с нелинейной дисперсией и полной модели: *а* и *б* — однослойная и двухслойная модели Лью — Линетта; *в* — полная модель. Для сравнения приведены результаты, рассчитанные с использованием модели нелинейной мелкой воды (тонкие кривые).

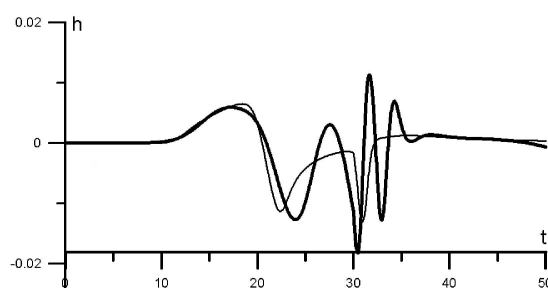


Рис. 7. Эффект нелинейной дисперсии: результаты, рассчитанные для оползня, движущегося по закону “слайд 1” в седьмой точке по НЛД-моделям с линейной и нелинейной дисперсией. Модели Нвогу с нелинейной (однослойная модель Лью — Линетта, штриховая кривая) и линейной (сплошная кривая) дисперсией.

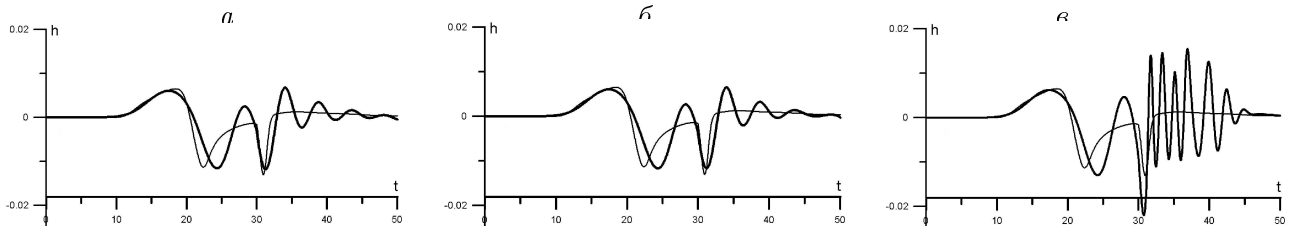


Рис. 8. Мареограммы, рассчитанные для оползня, движущегося по закону “слайд 1” в седьмой точке. Оценка точности НЛД-моделей с нелинейной дисперсией (штриховая кривая): *a* — однослойная, *б* — двухслойная модели Лью — Линетта в сравнении с результатами, полученными с помощью полной модели (сплошные кривые); *в* — однослойная (штриховая) и двухслойная (сплошная кривая) модели.

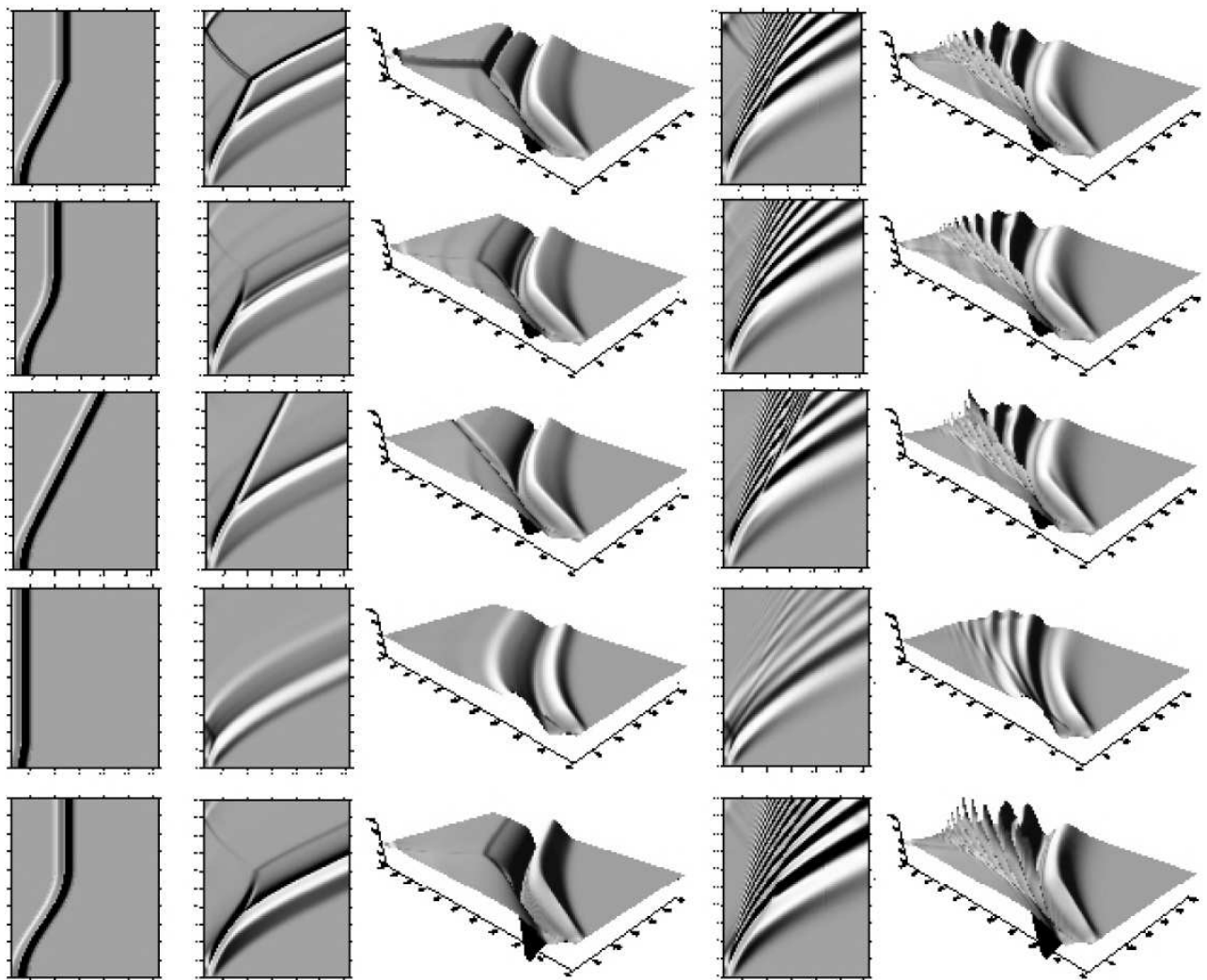


Рис. 9. Волновые режимы, генерируемые оползнями, движущимися по различным законам движения: первый ряд — “слайд 1”, второй — “слайд 2”, третий — “слайд 3”, четвертый — “сламп 1”, пятый — “сламп 2”. Первая колонка — движение оползня (вид сверху), вторая и третья — результаты, рассчитанные с помощью нелинейной модели теории мелкой воды, третья и четвертая — по двухслойному варианту модели Лью — Линетта. По горизонтальной оси отложено расстояние, а по вертикальной — время.



личивает свою длину за счет того, что передний ее фронт уходит в сторону глубокой воды со скоростью  $\sqrt{gh}$ , а задний — перемещается вместе с оползнем. При равномерном движении оползня эта волна отделяется и уходит вперед. Образовавшаяся волна понижения сопровождает оползень, а в случае резкой его остановки она также отделяется от тела и уходит в мористом направлении. Такая остановка генерирует волну повышения, распространяющуюся в сторону мелководья.

Каждая перестройка движения приводит к генерации систем волн, распространяющихся к берегу и от него с различными амплитудами и характерными горизонтальными размерами. Наиболее ярко указанные выше эффекты проявляются при законе движения “слайд 1”, вариант “слайд 2” демонстрирует эффект отсутствия резкой остановки, а “слайд 3” показывает проявление эффекта длительного равномерного движения. Тип движения “сламп 1” характеризуется высокой эффективностью волнообразования при даже кратковременном этапе разгона по траектории. При этом рост длительности этого этапа (“сламп 2”) приводит к росту амплитуд волн, уходящих в мористом направлении, в то время как амплитуда волны, распространяющейся в сторону берега, оказывается больше при коротком разгоне (“сламп 1”). Двухслойная модель в целом воспроизводит те же эффекты, но за счет дисперсии демонстрирует более сложную картину течения с цугом волн, распространяющихся в зону большой глубины. При этом перестройка волнового режима в моменты изменения закона движения тела также усложняется.

Заключительный раздел настоящей работы посвящен определению зависимости характеристик волновых режимов от геометрических параметров оползня (тип движения “слайд 3”). Для исследования зависимости от толщины оползня (рис. 10) рассматривались значения  $\Delta h = 0.01$  и  $\Delta h = 0.1$ . Расчеты проводились с использованием двухслойной модели Лью — Линетта, а также полной модели, линейной и нелинейной моделей теории мелкой воды. Мареограммы показывают, что характеристики волнового режима изменяются одинаково как для волн, распространяющихся к берегу, так и для волн, зарегистрированных

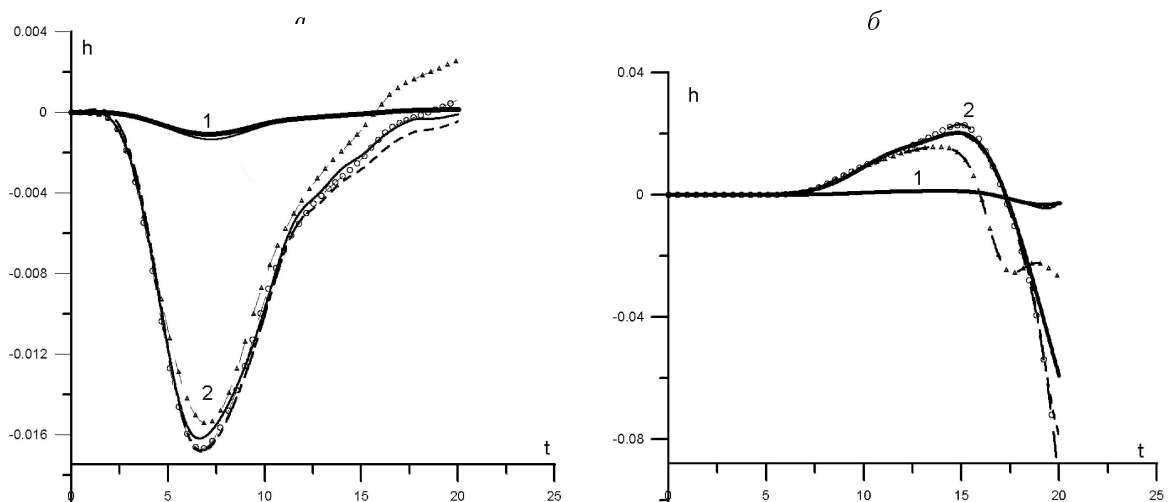


Рис. 10. Зависимость характеристик волнового режима от толщины оползня: кривые 1 — толщина равна 0.01, кривые 2 — 0.1; мареограммы рассчитаны для движения оползня типа “слайд 3” в первой (а) и четвертой (б) точках; результаты получены с помощью различных моделей: полная (сплошные кривые), НЛД-модели Лью — Линетта (одно- и двухслойная) — штриховые, нелинейная мелкая вода — штрихпунктир с кружками, линейная мелкая вода — штрихпунктир с треугольниками.

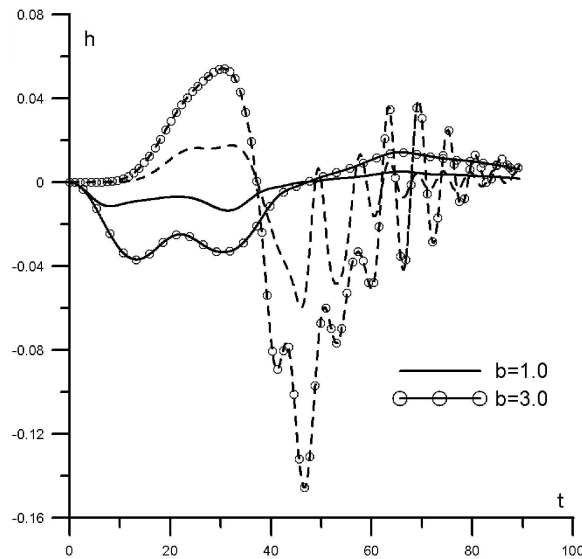


Рис. 11. Зависимость характеристик волнового режима от длины оползня:  $b = 1.0$  и  $b = 3.0$  (значки),  $x_c = 4.38$ , толщина = 0.05; мареограммы рассчитаны для движения оползня типа “слайд 3” в первой (сплошные кривые) и четвертой (штриховые) точках; результаты получены с помощью двухслойной НЛД-модели Лью — Линетта.

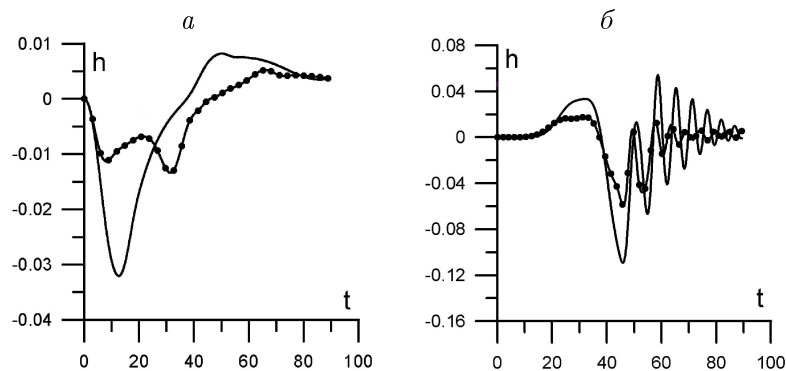


Рис. 12. Зависимость характеристик волнового режима от заглубления центра масс оползня:  $x_c = 2.38$  (линии без значков),  $x_c = 4.38$  (линии со значками),  $b = 1.0$ , толщина = 0.05; мареограммы рассчитаны для движения оползня типа “слайд 3” в первой (а) и пятой (б) точках; результаты получены с помощью двухслойной НЛД-модели Лью — Линетта.

в мористой точке (увеличение амплитуды), при этом преобладают нелинейные эффекты, что приводит к резкому выделению результатов, рассчитанных по линейной модели. Увеличение длины оползня от 1.0 до 3.0 (рис. 11) вызывает рост амплитуды с сохранением основных тенденций во всех точках. Изменение заглубления центра масс (рис. 12), при котором его начальная горизонтальная координата изменяется с  $x_c = 2.38$  до  $x_c = 4.38$ , приводит к усложнению волнового процесса в прибрежной точке с одновременным уменьшением амплитуды волны, в мористой точке также уменьшаются амплитуды колебаний, но частотные характеристики сохраняются.

## Заключение

Исследование оползневой механизма генерации волн цунами в прибрежных акваториях непосредственно связано с изучением особенностей волн, порожденных движением наносов, сосредоточенных в устьях больших рек. Такие движения могут быть порождены даже слабыми землетрясениями, не способными инициировать сейсмические механизмы генерации волны цунами. Основными результатами работы являются сравнительное изучение различных приближенных моделей волновой гидродинамики и определение двухслойной модели Лью — Линетта, как наиболее адекватной математической модели для решения задач указанного круга. С помощью этой модели, в частности, исследованы зависимости основных характеристик волновых режимов от законов движения оползня, а также от его геометрических параметров.

Авторы искренне благодарят С.А. Бейзель, З.И. Федотову и Г.С. Хакимзянова, сотрудничество с которыми внесло решающий вклад при подготовке настоящей статьи.

## Список литературы

- [1] GRILLI S.T., WATTS P. Modeling of waves generated by moving submerged body. Applications to underwater landslide // Eng. Analysis With Boundary Elements. 1999. Vol. 23. P. 645–656.
- [2] WATTS P., IMAMURA F., GRILLI S.T. Comparing model simulations of three benchmark tsunami generation cases // Sci. of Tsunami Hazards. 2000. Vol. 18. N 2. P. 107–123.
- [3] WATTS P., GRILLI S.T., KIRBY J.T. ET AL. Landslide tsunami case studies using a Boussinesq model and a fully nonlinear tsunami generation model // Natural Hazards and Earth System Sci. 2003. Vol. 3, N 5. P. 391–402.
- [4] Елецкий С.В., Майоров Ю.Б., Максимов В.В. и др. Моделирование генерации поверхностных волн перемещением фрагмента дна по береговому склону // Совместный вып. журн. “Вычисл. технологии” и журн. “Вест. КазНУ им. Аль-Фараби”. Сер. математика, механика, информатика. № 3(42). Казахстан, Алматы, 2004. Т. 9, ч. II. С. 194–206.
- [5] ЧУБАРОВ Л.Б., ФЕДОТОВА З.И., ЕЛЕЦКИЙ С.В. Численное моделирование генерации волн движением оползня // Тр. Междунар. конф. по вычисл. математике. Ч. II. Новосибирск: ИВМиМГ СО РАН, 2004. С. 753–758.
- [6] LYNETT P.J., LIU P.L.-F. A two-layer approach to water wave modeling // Proc. Royal Society of London. A. 2004. Vol. 460. P. 2637–2669.
- [7] LYNETT P.J., LIU P.L.-F. A numerical study of submarine-landslide-generated waves and run-up // Proc. Royal Society of London. A. 2002. Vol. 458. P. 2885–2910.
- [8] ДОРФМАН А.А., ЯГОВДИК Г.И. Уравнения приближенной нелинейно дисперсионной теории длинных волн, возбуждаемых перемещениями дна и распространяющихся в бассейне переменной глубины // Числ. методы механики сплошной среды: Сб. науч. тр. / АН СССР, Сиб. отд-ние, ВЦ, ИТПМ. 1977. Т. 8, № 1. С. 36–48.
- [9] ЧИСЛЕННОЕ моделирование течений жидкости с поверхностными волнами / Г.С. Хакимзянов, Ю.И. Шокин, В.Б. Баряхнин, Н.Ю. Шокина. Новосибирск, 2001. 393 с.

- [10] WEI G., LIU J.T.-F. A time-dependent numerical code for extended Boussinesq equations // J. Waterway, Port, Coastal and Ocean Engng. 1995. Vol. 120. P. 251–261.
- [11] MEI C.C., LE MEHAUTE B. Note on the equations of long waves on uneven bottom // J. Geophys. Res. 1966. Vol. 72, N 2. P. 393–400.
- [12] PEREGRINE D.H. Long waves on a beach // J. Fluid Mech. 1967. Vol. 27, pt 4. P. 815–827.
- [13] GREEN A.E., NAGHDI D.M. A derivation of equations for wave propagation in water at variable depth // J. Fluid Mech. 1976. Vol. 78, pt 2. P. 237–246.
- [14] NWOGU O. Alternative form of Boussinesq equations for near shore wave propagation // J. Waterway, Port, Coastal and Ocean Engng. 1993. Vol. 119. P. 618–638.
- [15] ШОКИН Ю.И., ФЕДОТОВА З.И., ХАКИМЗЯНОВ Г.С. и др. Моделирование генерации цунами движением оползня с учетом вертикальной структуры течения // Тр. VIII Всерос. конф. “Современные методы математического моделирования природных и антропогенных катастроф”, Кемерово, Россия, 26–28 октября 2005 г. 2006 (в печати).

*Поступила в редакцию 4 апреля 2006 г.*