

ЯВНЫЕ И НЕЯВНЫЕ ЧЕБЫШЕВСКИЕ ФИЛЬТРЫ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ*

В. И. ЛЕБЕДЕВ

РНЦ “Курчатовский институт”,

Институт вычислительной математики РАН, Москва, Россия

e-mail: nucrest@inm.ras.ru

К. В. УШАКОВ

Институт вычислительной математики РАН, Москва, Россия

e-mail: ushakovkv@mail.ru

A family of explicit and implicit Chebyshev filters is constructed including filters taking into account the properties of various classes of problems. They are used in a set of computations. A method of regularization using pseudodifference operators is suggested.

1. Явные чебышевские фильтры

Цифровые фильтры широко применяются для обработки сигналов и экспериментальных данных, улучшения условий устойчивости численных методов [1]. Они позволяют решать такие задачи, как численные интегрирование, дифференцирование, экстраполяция, разделение сигналов, а также удаление из массива данных выбранных частотных составляющих, в частности, обусловленных вычислительными погрешностями. Наиболее простыми в применении являются явные цифровые фильтры, результат действия которых на фильтруемый массив u представляет собой взвешенную сумму элементов с конечным шаблоном $\{c_j\}_{j=-n_1}^{j=n_2}$:

$$u_n^F = \sum_{j=-n_1}^{n_2} c_j u_{n+j}.$$

Для применения такого фильтра потребуется задать краевые условия, например продолжить массив u нулем на необходимое количество дополнительных узлов.

Пусть на отрезке $[-\pi, \pi]$ введена равномерная сетка с шагом $h = \frac{\pi}{N+1}$ и исходный массив представляется дискретным рядом Фурье

$$u_n = \sum_{k=-N}^N a_k e^{iknh}.$$

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 05-01-00582) и программы РАН “Теоретические проблемы современной математики” (проект “Оптимизация вычислительных алгоритмов решения задач математической физики”).

© Институт вычислительных технологий Сибирского отделения Российской академии наук, 2006.

Зададим симметричный трехточечный фильтр формулой

$$u_n^F = S(q)(u)_n = qu_n + 0.5(1 - q)(u_{n-1} + u_{n+1}), \quad (1)$$

тогда, как несложно убедиться, базисные функции $\Phi_k(n) = e^{iknh}$ будут собственными функциями этого фильтра (без учета граничных условий) с собственными значениями

$$\eta(k) = (q - (1 - q) \cos r_k \pi), \quad r_k = (N + 1 - k)/(N + 1).$$

Функция $\eta(k)$ представляет собой переходную функцию фильтра, показывающую, на какой коэффициент умножается при фильтрации та или иная спектральная составляющая массива. Если теперь рассмотреть суперпозицию двух явных фильтров, то ее переходная функция будет произведением переходных функций этих фильтров. Можно построить симметричный явный чебышевский фильтр второго порядка, представляющий собой суперпозицию

$$Fu = S(q_2)[S(q_1)u] \quad (2)$$

двух фильтров вида (1) с параметрами, подобранными так, чтобы переходная функция обладала свойством альтернанса на некотором отрезке вблизи правой границы шкалы волновых чисел. Например, для случая $N = 512$ возьмем $q_1 = 0.4979269399$ и $q_2 = 0.487605860$. Переходная функция соответствующего фильтра представлена на рис. 1 (кривая 2). Она обладает свойством альтернанса с отклонением от нуля на величину $\varepsilon = 10^{-4}$ в трех точках на крайней правой десятой части шкалы волновых чисел, приведенной к единице. Для сравнения приведена переходная функция фильтра $S(0.5)$ (кривая 1). Видно, что чебышевский фильтр второго порядка по сравнению с простым фильтром первого порядка обладает заметно лучшими характеристиками в части подавления высокочастотных составляющих массива данных, однако при этом несколько хуже пропускает низкочастотные составляющие.

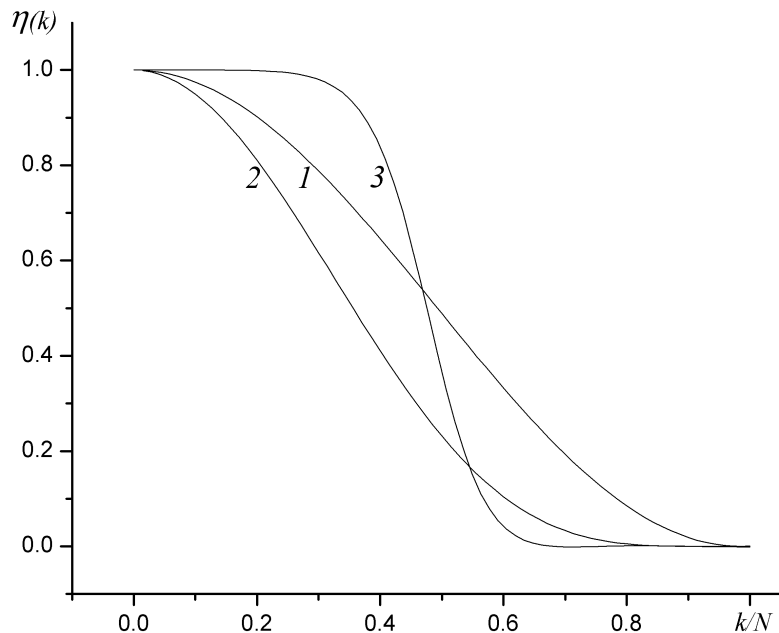


Рис. 1. Переходные функции: 1 — явного фильтра первого порядка; 2 — явного чебышевского фильтра второго порядка; 3 — неявного чебышевского фильтра третьего порядка.

Фильтр (2) применялся при численном решении смешанной задачи для уравнения Бюргера с малым коэффициентом ν :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial \varphi(u)}{\partial x} &= \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(u, t), \\ u(0, t) = u(1, t) &= 0, \quad u(x, 0) = u_0(x), \\ 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq t \leq T. \end{aligned} \tag{3}$$

Расчеты велись по формуле центральных разностей с точностью $O(h^6 + \nu h^4)$:

$$\begin{aligned} \frac{4}{5} \frac{du_i}{dt} + \frac{1}{10} \left(\frac{du_{i+1}}{dt} + \frac{du_{i-1}}{dt} \right) + \frac{1}{30h} \{17[\varphi(u_{i+1}) - \varphi(u_{i-1})] - [\varphi(u_{i+2}) - \varphi(u_{i-2})]\} = \\ = \frac{\nu}{60h^2} [56(u_{i+1} + u_{i-1}) + (u_{i+2} + u_{i-2}) - 114u_i] + \frac{4}{5} f(u_i, t) + \frac{1}{10} [f(u_{i+1,t}) + f(u_{i-1,t})], \end{aligned} \tag{4}$$

$$i = 1, 2, \dots, n, \quad u_{-1} = u_0 = u_{n+1} = u_{n+2} = 0.$$

Пусть $\varphi(u) = u^2/2, f(u, t) = 0, \nu = 5 \cdot 10^{-5}, n = 512, T = 4$, а при $t = 0$ положим $u_i = 0$ для $i = 1, \dots, 49, 151, \dots, 349, 451, \dots, 512, u_i = 1$ для $i = 50, \dots, 150$ и $u_i = -0.5$ для $i = 350, \dots, 450$. Тогда $h^2 = 3.8 \cdot 10^{-6}, \nu \simeq 13h^2$. Интегрирование по времени производилось с помощью программы DUMKA [2] с обращением методом прогонки трехдиагональной матрицы при производных по времени. На рис. 2 последовательно показаны решения (4) при $t = 0, 0.2, 0.5, 0.7, 1, 2, 3, 4$, сглаженные только при выводе на печать фильтром (2). Отдельно изображен график нефильтрованного решения при $t = 0.2$. Графики решений показывают, что уравнения (4) правильно передают взаимодействия передних и задних фронтов разрывных решений задачи (3), не размывая их, а эффект Гиббса сглажен благодаря алгоритму фильтрации.

Рассмотрим теперь плохо обусловленную задачу Коши для системы нелинейных дифференциальных уравнений с l -периодическими граничными условиями для функций и их производных по времени:

$$\begin{aligned} u_{tt} &= 9c^2 u_{xx} + A(v_x^3)_x, \\ v_{tt} &= c^2 v_{xx} + 3A(u_x v_x^2)_x, \end{aligned} \tag{5}$$

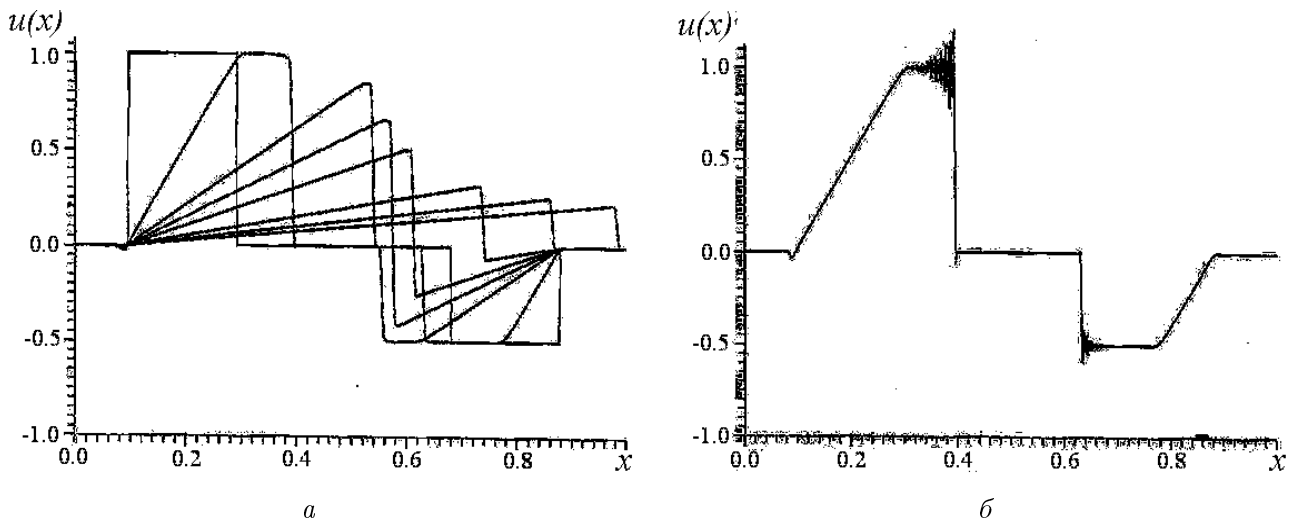


Рис. 2. Фильтрованные (а) и нефильтованное (б) решения смешанной задачи для уравнения Бюргера.

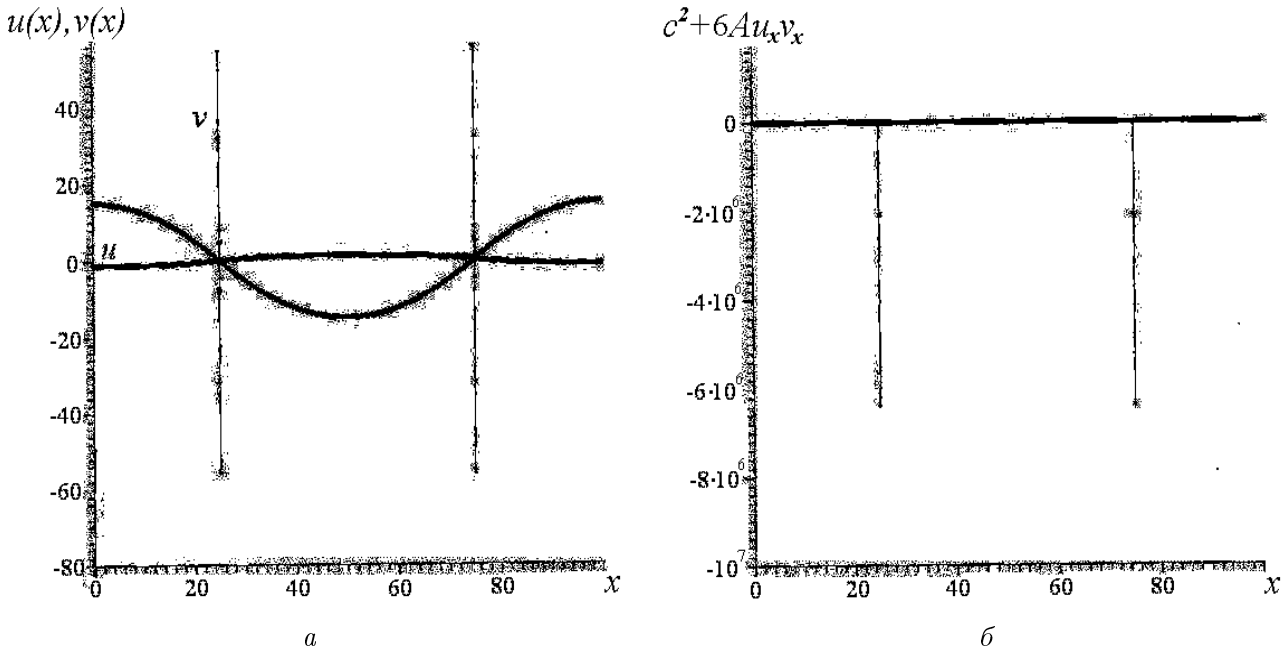


Рис. 3. Решение задачи (5) (а) и коэффициент при v_{xx} в ее втором уравнении (б).

где $u = u(x, t)$, $v = v(x, t)$, $u|_{t=0} = u_0$, $v|_{t=0} = v_0$, $u_t|_{t=0} = u_1$, $v_t|_{t=0} = v_1$, $0 < x < l$, $t > 0$. Эта система уравнений описывает взаимодействие двух акустических мод в кристаллической решетке с отношением скоростей 1 : 3 и параметрической неустойчивостью [3]. Первые слагаемые в правых частях уравнений указывают на то, что (5) — нелинейная гиперболическая система. Однако правая часть второго уравнения может быть представлена в виде суммы $(c^2 + 6Au_x v_x)v_{xx} + 3Au_{xx}v_x^2$. Поэтому если через некоторое время станет выполняться неравенство $c^2 + 6Au_x v_x < 0$, то второе уравнение станет эллиптическим, что приводит к возникновению сингулярностей в решении.

Возьмем $l = 100$, $c = 1$, $A = 0.6$, $u_0 = -20 \cos(2\pi x/l)$, $v_0 = 50 \cos(2\pi x/l)$, $u_1 = 0$, $v_1 = \cos(2\pi x/l)$. При решении системы методом прямых обнаруживается резкое ухудшение гладкости решения при $t \approx 0.08655$. Норма решения резко возрастает в окрестности точек $x = l/4$, $3l/4$, сингулярности при этом напоминают по форме производную δ -функции. На рис. 3 приведены графики решения и коэффициента при второй производной v_{xx} во втором уравнении системы (5).

Для преодоления этого эффекта к правой части системы (5) применен фильтр типа (2). При использовании такой фильтрации решение становится гладким и гладко меняющимся со временем, а норма решения — ограниченной.

2. Неявные чебышевские фильтры

Наряду с явными цифровыми фильтрами построено семейство неявных чебышевских операторных фильтров, требующих решения системы уравнений для получения фильтрованного массива. Их переходная функция оказывается ближе к единице в области малых волновых чисел по сравнению с переходной функцией явных фильтров и обладает легко регулируемой в широких пределах длиной отрезка альтернанса в области больших волновых чисел. При этом фильтрация может производиться по собственным функциям некоторого

оператора, учитывающего характер решаемой задачи, и с точностью до функции из ядра такого оператора.

Пусть $0 < \eta < 1, \delta > 0$ — заданные числа. Пусть также L, D вместе с D^{-1} — линейные ограниченные в пространстве H фильтруемых элементов операторы, (ν_i, ψ_i) — собственные пары оператора L :

$$L\psi_i = \nu_i\psi_i, \quad 0 \leq \nu_i \leq 1, \quad \nu_i \leq \nu_{i+1},$$

причем ψ_i образуют базис в H . Пусть \tilde{L}^n — расширение оператора $L^n, n \geq 1$, без учета граничных условий. Подлежащий фильтрации элемент $w \in H$ представим в виде $w = u+v$, где $Dv \in \ker \tilde{L}^n$. Считая Dv “гладким” элементом, фильтрации подвергнем лишь элемент $Du \in H$, для которого справедливо представление

$$Du = \sum_i \bar{u}_i \psi_i, \tag{6}$$

где коэффициенты \bar{u}_i зависят от выбора v . Поэтому, если это возможно, определим элемент v так, чтобы частичные суммы в (6) достаточно быстро стремились к своему пределу. Это позволит ослабить возникающий при фильтрации эффект Гиббса.

Элементу u поставим в соответствие отфильтрованный элемент $Du^F \in H$, определяемый как решение уравнения

$$(P_n(L) + \delta L^n)Du^F = P_n(L)Du. \tag{7}$$

Здесь P_n — многочлен степени $n \geq 1$ вида

$$P_n(t) = \prod_{i=1}^n (1 - \gamma_i t),$$

параметры γ_i которого определяются ниже согласно предполагаемым характеристикам строящегося фильтра. Тогда для коэффициентов Du_i^F в представлении

$$Du^F = \sum_i u_i^F \psi_i = \sum_i F_n(\nu_i) \bar{u}_i \psi_i \tag{8}$$

функция $F_n(t)$ равна

$$F_n(t) = \frac{1}{1 + \delta t^n / P_n(t)} = \frac{1}{1 + \delta / Q_n(1/t)},$$

где

$$Q_n(z) = \prod_{i=1}^n (z - \gamma_i), \tag{9}$$

при этом $F_n(0) = 1, F_n^{(k)}(0) = 0, k = 1, \dots, n-1$. Определим параметры γ_i многочлена $P_n(t)$ так, чтобы функция $F_n(t)$ была мала в окрестности $t = 1$. Точнее, пусть $F_n(1) = (-1)^n \eta$, тогда

$$Q_n(1) = \frac{\eta \delta}{(-1)^n - \eta}. \tag{10}$$

Из (9) следует, что коэффициент при z^n в $Q_n(z)$ равен единице. Определим из условий (9) и (10) $Q_n(z)$, требуя, чтобы после замены переменной z на $x = (z - 1 - a)/a$ многочлен

$Q_n(z)$ являлся приведенным к отрезку $[1, 1 + 2a]$ многочленом Чебышева первого рода $T_n(x)$ [4]. Из этих условий определим

$$a = \left(\frac{2^{n-1}\eta\delta}{(1 - (-1)^n\eta)} \right)^{1/n}.$$

Тогда параметры γ_i многочлена $P_n(t)$ равны

$$\gamma_i = 1 + a(1 - x_i), \quad i = 1, \dots, n,$$

где x_i — корни многочлена $T_n(x)$, определяющиеся по формуле $x_i = \cos \theta_i$, $\theta_i = \frac{2i-1}{2n}\pi$. Переходная функция такого фильтра для многочлена третьей степени при $\eta = 0.001$, $\delta = 1$ приведена на рис. 1 (кривая 3).

Заметим, что вид функции $F_n(t)$ не зависит от типа оператора L и его собственных элементов ψ_i , но от них зависит разложение (6), а следовательно, u^F . Может возникнуть проблема с постановкой ненулевых граничных условий в уравнениях (7), (8). Поэтому запишем уравнение для поправки $\Phi = Du - Du^F$:

$$(P_n(L) + \delta L^n)\Phi = \delta L^n Du \quad (11)$$

с однородными краевыми условиями, требуя, чтобы $\Phi \equiv 0$ при $Du \in \ker \tilde{L}^n$. Например, в некоторых дополнительных для Φ граничных узлах сетки можно положить $\Phi = 0$, $L^k \Phi = 0$, $k = 1, \dots, n-1$.

Простейшими примерами операторов L , заданных на внутренних узлах сетки, являются

$$L_{\pm} \Phi_k = 0.5\Phi_k \pm \frac{0.5(p_k \Phi_{k+1} + q_k \Phi_{k-1})}{p_k + q_k}, \quad k = 1, \dots, m, \quad \Phi_0 = \Phi_{m+1} = 0, \quad (12)$$

для одномерных сеток, аналогично

$$L_{\pm} \Phi_{k,j} = 0.5\Phi_{k,j} \pm \frac{0.125(p\Phi_{k,j+1} + q\Phi_{k,j-1} + r\Phi_{k+1,j} + s\Phi_{k-1,j})}{p + q + r + s} \quad (13)$$

для двумерных сеток, $p_k, q_k, p, q, r, s > 0$, и т. д. ($L_+ = I - L_-$). Операторы типа L_- ориентированы на дифференциальные задачи математической физики, а L_+ — на сглаживание решений плохо обусловленных уравнений. Имея дополнительную информацию о классе подлежащих фильтрации функций, можно путем подбора коэффициентов в L_{\pm} выбрать подходящую для этого класса систему собственных функций и тем самым улучшить алгоритм фильтрации. Например, для одномерных задач, связанных с диффузией и конвекцией, характерным для некоторого b является оператор

$$L_b = \frac{d^2}{dx^2} + b \frac{d}{dx} = \exp(-bx) \frac{d}{dx} \exp(bx) \frac{d}{dx},$$

ему соответствует [2] разностный на сетке $x_k = kh$ оператор

$$L_- \Phi_k = 0.5\Phi_k - 0.25 \left(\exp\left(\frac{bh}{2}\right) \Phi_{k+1} + \exp\left(-\frac{bh}{2}\right) \Phi_{k-1} \right) \times \left(\exp\left(\frac{bh}{2}\right) + \exp\left(-\frac{bh}{2}\right) \right)^{-1}.$$

Собственные функции операторов L_b, L_{\pm} имеют вид $\exp(-0.5bx \pm i\omega x)$. Аналогичные формулы справедливы для двумерных операторов. Отметим, что в [5] исследованы неявные фильтры при

$$L\Phi_k = L_- \Phi_k = 0.5\Phi_k - 0.25(\Phi_{k-1} + \Phi_{k+1}), \quad k = 1, \dots, m,$$

$P_n(L) = (I - L)^n, D = I$. В этом случае $\ker \tilde{L}^n$ состоит из всех многочленов до степени $2n - 1$ включительно. Тогда в представлении элемента $w = (w_1, \dots, w_m)$ в виде $w_k = u_k + v_k$ можно положить Dv_k равным многочлену степени $2n - 1$. Например, при $n = 3$ полагаем v_k равным

$$g_5(k) = \frac{1}{2} (Dw_1 + Dw_m + (Dw_1 - Dw_m)y(x_k)), \quad k = 1, \dots, m,$$

где

$$y(x) = \frac{15}{8} \left(x - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 \right), \quad x_k = \frac{m + 1 - 2k}{m - 1}, \quad y(\pm 1) = \pm 1, \quad y'(\pm 1) = y''(\pm 1) = 0.$$

Тогда $u_1 = u_m = 0$. Оператор D в (7) для сеточных задач может быть реализован как деление на так называемую форм-функцию, характерную для решаемой практической задачи. Например, в случае задач ядерной физики ею может являться экспоненциальная функция.

Преимущество приведенного алгоритма фильтрации — это осуществимость за $O(m)$ действий вместо не менее $O(m \log m)$, требуемых при использовании быстрого преобразования Фурье. При обработке серии массивов одинаковой длины часть вычислений (матрица и часть коэффициентов обобщенной прогонки для системы (11)) может быть оформлена в виде отдельной подпрограммы, вызываемой один раз. Такая реализация оказывается полезной, например, при построении многомерных фильтров в виде комбинации одномерных, что является более простым подходом по сравнению с (13). Переходная функция двумерного фильтра представлена на рис. 4, а.

С помощью фильтра (7) обработан ряд тестовых задач и экспериментальных данных. Например, на рис. 4, б приведены графики исходной функции (суммы функции-ступеньки и двух синусоид) и результата ее обработки с помощью фильтра порядка $n = 3$ с $v = g_5$.

Заметим также, что полученная поправка Φ представляет собой результат применения к исходному массиву Du низкочастотного фильтра с переходной функцией, равной

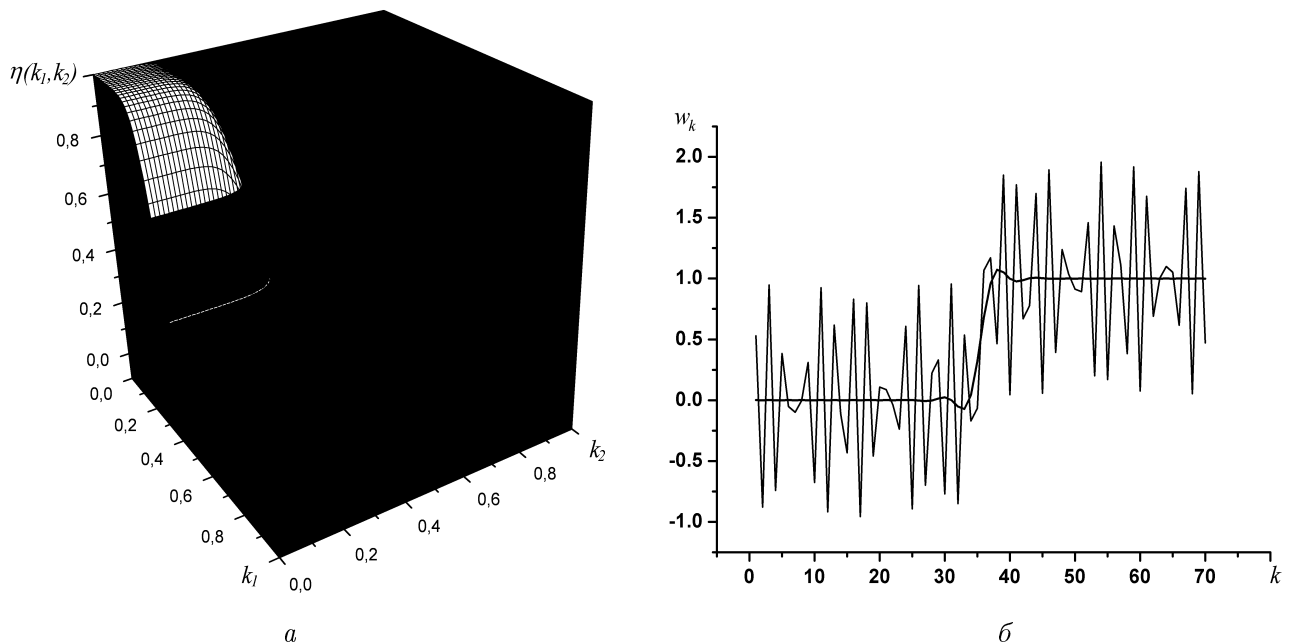


Рис. 4. Переходная функция двумерного фильтра (а) и тестовая задача со ступенькой (б).

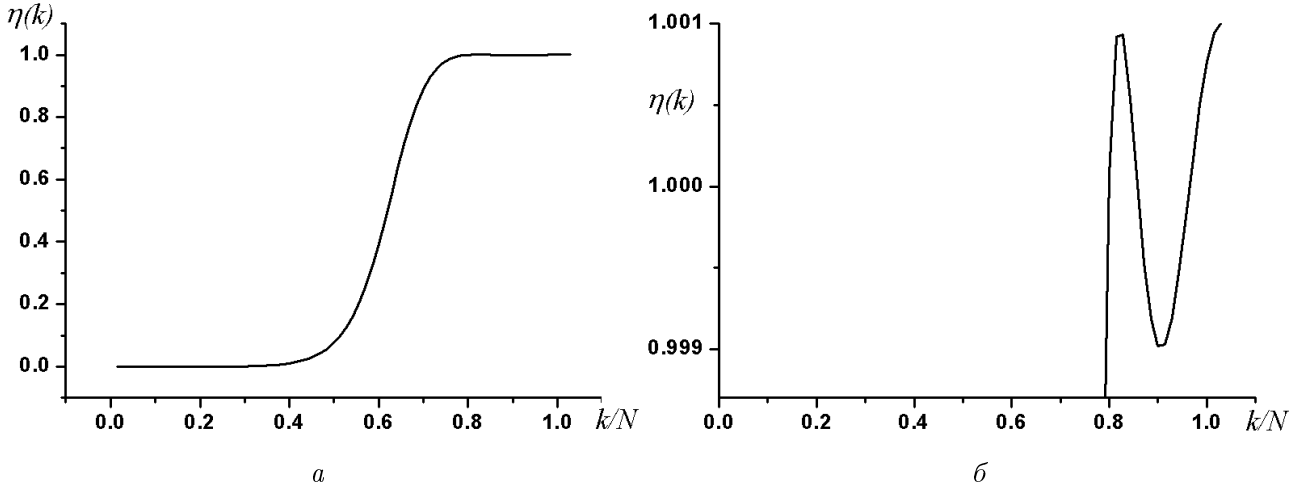


Рис. 5. Переходная функция низкочастотного фильтра (а) и часть ее графика в увеличенном по оси ординат масштабе (б).

$1 - F_n(\nu_i)$. Ее график для случая $\eta = 0.001, \delta = 0.1$ изображен на рис. 5. Также на этом рисунке приведена в увеличенном по оси ординат масштабе правая часть графика, обладающая свойством альтернанса.

3. Псевдоразностные операторы

Цифровая фильтрация может также применяться для снижения жесткости вычислительных задач. В работе [6] для решения методом прямых линейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений в области $\Omega \subset R^m$

$$\frac{du}{dt} = -Au + f, \quad u|_{t=0} = u_0, \quad 0 \leq t \leq T,$$

предложен метод регуляризации с помощью особого типа фильтра — линейного псевдоразностного оператора:

$$\frac{du}{dt} = -R(t, \tau(t))q(u). \quad (14)$$

Здесь A — разностный аналог эллиптического дифференциального оператора в области Ω с нулевыми граничными условиями; $q(u)$ — его продолжение на некоторую прямоугольную область $P^m \subset R^m$, равное нулю вне области Ω ; $R(t, \tau(t))$ — линейный псевдоразностный оператор, зависящий от параметра $\tau(t)$ и являющийся аналогом некоторого псевдодифференциального оператора. Аналогичные операторы исследовались С.Л. Соболевым для построения конечно-разностных аппроксимаций дифференциальных операторов [7]. Соответствующие конечно-разностные операторы при этом не обладают конечным носителем.

Пусть $\omega = \omega(x, t), r(x) \neq 0$ — сеточные функции на P^m . Введем класс псевдоразностных операторов с помощью формулы

$$R(t, \tau(t))\omega = r^{-1}(x)F^{-1}(S(s, t, \tau(t))F(r(x)\omega(x))),$$

где $v(s) = F(\omega(x))$ — m -мерное дискретное преобразование Фурье в P^m , $\omega(x) = F^{-1}(v(s))$ — обратное к нему преобразование, а $S(s, t, \tau(t))$ — символ псевдоразностного оператора,

обладающий свойством $S \rightarrow 1$ при $\tau \rightarrow 0$, например, $S = (1 + \alpha\tau|s|^2)^{-1}$. Будем искать решение задачи (14) с помощью циклов из явных шагов метода Эйлера с переменной длиной τ_{k+1} [2]:

$$u_{k+1} = u_k - \tau_{k+1}R(t_k, \tau(t_k))q(u_k). \quad (15)$$

Анализ эффективности регуляризации (14) упрощается в случае, когда операторы R и A коммутируют. В этом случае с помощью метода (15) могут быть реализованы известные неявные схемы и некоторые методы расщепления. Этот метод входит в пакет DUMKA. Численные эксперименты показали, что для некоторых задач он позволяет существенно ускорить счет.

Список литературы

- [1] ХЕММИНГ Р.В. Цифровые фильтры. М.: Недра, 1987.
- [2] ЛЕБЕДЕВ В.И. Явные разностные схемы для решения жестких задач с комплексным или разделимым спектром // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2000. Т. 40, № 12. С. 1801–1812.
- [3] КАЦНЕЛЬСОН М.И., ТРЕФИЛОВ А.В. Коллективные явления в динамике решетки и механизмы возникновения структурной неустойчивости // Физика металлов и металловедение. 1987. Т. 64, № 4. С. 629–642.
- [4] ЛЕБЕДЕВ В.И. Экстремальные многочлены и методы оптимизации вычислительных алгоритмов // Мат. сб. 2004. Т. 195, № 10. С. 21–66.
- [5] RAYMOND W.H. High-order low-pass implicit tangent filters for use in finite area calculations // Mon. Wea. Rev. 1988. Vol. 116. P. 2132–2141.
- [6] ЛЕБЕДЕВ В.И. Extremal polynomials, pseudo-difference operators, and stable explicit schemes for the solution of stiff nonstationary problems of mathematical physics // Proc. of the Intern. Conf. on Comp. Math. Pt I. Novosibirsk, 2002.
- [7] СОБОЛЕВ С.Л. Введение в теорию кубатурных формул. М.: Наука, 1974.

Поступила в редакцию 15 сентября 2006 г.