На правах рукописи

Гобыш Альбина Владимировна

Моделирование внутренних течений вязкой несжимаемой жидкости методом конечных элементов с использованием противопотоковых схем

05.13.18 – математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ

АВТОРЕФЕРЕТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Новосибирск 2007

Работа выполнена в Новосибирском государственном техническом университете.

Научный руководитель: доктор технических наук,
профессор Элла Петровна Шурина.

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук,
доцент Бердников Владимир Степанович,

доктор физико-математических наук
Федорук Михаил Петрович.

Ведущая организация: Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН,
г. Новосибирск,
проспект Академика М.А. Лаврентьева, 6.

Защита состоится "9" ноября 2007 г. в 9:00 часов на заседании диссертационного совета Д003.046.01 при Институте вычислительных технологий СО РАН по адресу: 6300090, г. Новосибирск, проспект Академика М.А. Лаврентьева, 6.

С диссертацией можно ознакомиться в специализированном читальном зале вычислительной математики и информатики ГПНТБ СО РАН (проспект Академика М.А. Лаврентьева, 6).

Автореферат разослан "8" октября 2007 г.

Ученый секретарь диссертационного совета,
доктор физико-математических наук, профессор Л.Б.Чубаров

Общая характеристика работы

Актуальность работы. Математическое моделирование процессов становится одним из наиболее распространенных методов исследования объектов и явлений различной природы. Широкий круг задач, стоящих перед современной наукой и техникой, связан с решением уравнений движения жидкости. Возникает потребность в моделировании внутренних течений несжимаемой жидкости с преобладанием конвективного переноса в каналах сложной геометрии, являющихся элементами различных технических устройств.

Движение вязкой несжимаемой жидкости описывается уравнениями Навье – Стокса. При изучении движения несжимаемой жидкости необходимо наличие программных реализаций не только сложных моделей, но и более простых приближенных моделей, с помощью которых можно получить предварительное представление о характере течения. В случае больших значений кинематической вязкости или при малых значениях вектора скорости решение уравнений Навье – Стокса может быть заменено решением уравнений Стокса. Решения уравнений Эйлера, описывающих течение идеальной несжимаемой жидкости, могут служить начальным приближением для итерационных методов решения уравнений Навье – Стокса. Поэтому *актуальной* задачей является разработка и программная реализация вычислительных алгоритмов, позволяющих единообразно решать уравнения данного класса задач.

Для решения уравнений Навье – Стокса (Стокса и Эйлера), описывающих течения несжимаемой жидкости, существуют различные численные методы. Одним из распространенных методов аппроксимации несжимаемых течений является метод конечных элементов (МКЭ). Важными требованиями к вычислительным схемам на базе метода конечных элементов являются эффективные способы учета (аппроксимации) уравнения неразрывности и линеаризации конвективных членов в уравнении движения. Поэтому построение вычислительных алгоритмов с указанными свойствами является на сегодняшний день *актуальной* задачей.

Цель работы состоит в моделировании внутренних течений несжимаемой жидкости с преобладанием конвективного переноса в каналах сложной геометрии, являющихся элементами различных технических устройств.

Научная новизна работы.

- Разработана технология реализации противопотоковых схем на неструктурированных сетках с расчетом неизвестных в узлах конечных элементов и серединах их ребер для моделирования течений с преобладанием конвективного переноса. В контексте метода конечных элементов предложен новый способ аппроксимации потоков через границы ячеек двойственной сетки.
- Разработана и программно реализована вычислительная схема на основе смешанных постановок с введением функции штрафа, позволяющая единообразно моделировать стационарные внутренние течения вязкой несжимаемой жидкости (уравнения Навье – Стокса, Стокса) и идеальной несжимаемой жидкости (уравнения Эйлера). Предложен способ учета краевого условия $\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}\big|_{\Gamma}=h$ ($\mathbf{n}$ – вектор нормали к границе Γ, h – заданная функция) в вариационных постановках уравнений Эйлера. Разработана структура данных для хранения элементов матриц системы линейных алгебраических уравнений с расчетом неизвестных компонент вектора скорости и давления в гипервекторе.
- Реализованы стабилизированные схемы Галеркина для моделирования трехмерных течений на тетраэдральном разбиении, в которых используется метод стабилизации давления и в качестве стабилизирующего оператора выбирается конвективная часть исходного оператора.
- Показана зависимость интенсивности вторичного течения от величины сдвига скорости на входе. Определено влияние соотношения узкого и широкого сечений на погрешность вычислений при измельчении сетки в трубопроводах, состоящих из различных конструктивных включений (элементов сужения и расширения).

Обоснованность и достоверность результатов, полученных в диссертации, обеспечивается корректностью постановок рассматриваемых задач и методов их решения, основывается на расчетах широко известных и рекомендуемых тестовых задач и сопоставлении результатов численных расчетов с результатами, полученными другими авторами.

Апробация работы. Созданный комплекс программ внедрен в расчетную практику в Сибирском центре научно-технического обеспечения АНО “Промбезопасность – Сибирь”. Результаты решения задач с доминированием конвекции применяются в учебном процессе на факультете летательных аппаратов Новосибирского государственного технического университета в курсе лекций “Экологические проблемы энергетики” и “Численные методы в задачах экологии”.

Представление работы. Основные результаты работы были представлены и докладывались на: международной конференции молодых ученых по математическому моделированию и информационным технологиям (г.

Новосибирск, 2002 г.); региональной научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых “Наука. Техника. Инновации” (г. Новосибирск, 2002 г.); международной конференции “Вычислительные и информационные технологии в науке, технике и образовании” (г. Усть-Каменогорск, 2003 г.); IV всероссийской конференции молодых ученых по математическому моделированию и информационным технологиям (г. Красноярск, 2003 г.); всероссийской научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых “Наука. Технологии. Инновации” (г. Новосибирск, 2003 г., 2004 г.); международной конференции по вычислительной математике МКВМ-2004 (г. Новосибирск, 2004 г.); V всероссийской конференции молодых ученых по математическому моделированию и информационным технологиям с участием иностранных ученых (г. Новосибирск, 2004 г.); семинарах Новосибирского государственного технического университета, Института вычислительных технологий СО РАН и Института вычислительной математики и математической геофизики СО РАН.

Публикации. По теме диссертации опубликовано 6 работ, в том числе (в скобках в числителе указан общий объем этого типа публикаций, в знаменателе – объем, принадлежащий лично автору) 1 статья в издании, рекомендованном ВАК для представления результатов докторских диссертаций (0.62/0.4 печ. л.), 2 – в трудах международных конференций (0.68/0.5 печ. л.), 3 – в сборниках научных трудов (1.37/1.2 печ. л.).

Личный вклад автора. В публикации [1] автор участвовала в постановке задачи, осуществляла программную реализацию вычислительных алгоритмов и сравнение полученных результатов с конечно-разностным решением рассматриваемых задач. В работе [2] диссертант осуществляла разработку алгоритмов для решения уравнений Навье – Стокса, основанных на методе конечных элементов. В публикации [3] автору принадлежат конструирование и реализация алгоритмов решения задач конвективно-диффузионного переноса с использованием противопотоковых схем. В публикации [6] автор участвовала в постановке задач, проведении расчетов и анализе результатов.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения, списка использованных источников (131 наименование) и приложения. Полный объем диссертации составляет 138 страниц, включая 23 таблицы и 40 иллюстраций.

Автор выражает искреннюю признательность и глубокую благодарность научному руководителю д.т.н., профессору Элле Петровне Шуриной

и к.ф.-м.н., с.н.с. ИВТ СО РАН Нине Юрьевне Шокиной за помощь и поддержку при работе над диссертацией.

Основное содержание работы

Во **введении** обоснована актуальность темы, сформулированы постановка исследуемой проблемы, цели и методы исследований, представлены научная новизна и значимость работы. Анализируются современные подходы в моделировании течений несжимаемой жидкости, их преимущества и недостатки. Кратко описаны структура и основное содержание диссертации по главам.

В диссертационной работе исследованы стационарные, внутренние, однофазные, химически однородные течения. Уравнения Навье – Стокса описывают движение вязкой несжимаемой жидкости. Для полноты исследования явлений в рассмотрение включены уравнения Стокса и Эйлера. В случае больших значений кинематической вязкости или при малых значениях вектора скорости решение уравнений Навье – Стокса может быть заменено решением уравнений Стокса, а решения уравнений Эйлера, описывающие течение идеальной жидкости, могут служить начальным приближением для итерационных методов решения уравнений Навье – Стокса.

Существуют несколько формулировок уравнений движения жидкости: в естественных переменных вектор скорости – давление, в переменных векторный потенциал – вектор вихря, в переменных вектор скорости – вектор вихря. Достоинства и недостатки перечисленных формулировок приведены в работах С. Патанкара, Р. Темама, К. Флетчера, F. Brezzi, M. Fortin, Z.U.A. Warsi и др. Отмечено, что при использовании моделей в естественных переменных вектор скорости – давление на уровне вычислительной схемы возникают трудности корректного учета условия, накладываемого на дивергенцию аппроксимируемого поля скоростей, так называемого дивергентного условия.

На сегодняшний день ведущие позиции при численном решении дифференциальных уравнений занимают сеточные методы. Наиболее популярными для решения уравнений Навье – Стокса, Стокса и Эйлера являются методы конечных разностей, конечных объемов и конечных элементов. Численный анализ вычислительных схем, основанных на МКЭ, представлен в работах Р. Темама, К. Флетчера, F. Brezzi, M. Fortin, T.J.R. Hughes, D. L. Coulliette, M. Koch, L.J.P. Timmermans, T. Tezduyar и др.

Несмотря на ряд достоинств МКЭ при решении задач гидродинамики (например, возможность конструирования конечно-элементных аппроксимаций на неструктурированных сетках), остаются актуальными следующие задачи: выбор базисных функций для компонент вектора скорости и давления, гарантирующих существование и единственность решения; учет нелинейности, связанной с конвективными членами; и выбор способа учета дивергентного условия (способ учета взаимосвязи поля скоростей и давления).

В диссертационной работе представлен обзор схем аппроксимации нелинейности, связанной с конвективными членами в уравнении движения. При доминировании конвекции используются противопотоковые схемы, стабилизированные и разрывные схемы Галеркина. Среди представленных в научной литературе противопотоковых схем выделены схемы с расчетом неизвестных в узлах конечного элемента, серединах его ребер и в центрах конечного элемента.

Несмотря на то, что диссертационная работа посвящена стационарным течениям, проведено исследование разработанных вычислительных схем на нестационарных задачах. В работе представлен обзор схем аппроксимации по времени, используемых при численном решении дифференциальных уравнений: явных, неявных и полунеявных схем. Рассмотрены способы диагонализации матрицы массы в схемах аппроксимации по времени. Преобразование элементов матрицы с целью ее диагонализации применяется для обращения матрицы массы в вычислительных схемах расчета компонент вектора скорости и давления.

В диссертационной работе проведен обзор методов решения системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). Несамосопряженность оператора порождает ряд сложностей при применении многих численных методов. В сеточных методах несамосопряженным операторам, как правило, соответствуют несимметричные матрицы СЛАУ, что затрудняет решение таких систем. Для решения СЛАУ, получаемых при дискретизации нелинейных задач, одними из наиболее эффективных методов являются проекционные методы с использованием проектирования на подпространства Крылова[1].

В **первой главе** сформулированы математические постановки задач о внутренних стационарных течениях вязкой и идеальной несжимаемой жидкости в естественных переменных вектор скорости – давление. На основе этих математических моделей построены вариационные постановки в форме Галеркина, эквивалентные исходным задачам. Глава состоит из трех параграфов.

[1] Saad Y. Iterative methods for sparse linear systems. – PWS Publishing Company, 1996.

В **параграфе 1.1** приведена математическая постановка задачи об установившемся движении вязкой несжимаемой жидкости через ограниченную односвязную область Ω, которая заключается в определении вектора скорости $\mathbf{u}$ и давления p, удовлетворяющих в Ω уравнениям Навье – Стокса:

уравнение движения

$$-\nu\nabla^2\mathbf{u} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f}\,,\ \mathbf{x}\in\Omega\,,$$

уравнение неразрывности

$$\nabla\cdot\mathbf{u} = 0\,,\ \mathbf{x}\in\Omega\,,$$

и краевым условиям на границе области Γ: заданному вектору скорости на входе в область, условиям непротекания на твердых стенках и заданной нормальной компоненте тензора напряжения на выходе. Уравнения Навье – Стокса с введенными на границе области краевыми условиями имеют решение, определяемое с точностью до произвольной постоянной для давления.

В случаях больших значений кинематической вязкости или при малых значениях вектора скорости решение уравнений Навье – Стокса может быть заменено решением уравнений Стокса:

уравнение движения

$$-\nu\nabla^2\mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f}\,,\ \mathbf{x}\in\Omega\,,$$

уравнение неразрывности

$$\nabla\cdot\mathbf{u} = 0\,,\ \mathbf{x}\in\Omega\,,$$

с соответствующими краевыми условиями на границе области.

В **параграфе 1.2** приведена математическая постановка задачи об установившемся протекании идеальной несжимаемой жидкости через ограниченную односвязную область Ω, которая заключается в определении вектора скорости $\mathbf{u}$ и давления p, удовлетворяющих в Ω уравнениям Эйлера:

уравнение движения

$$(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f}\,,\ \mathbf{x}\in\Omega\,,$$

уравнение неразрывности

$$\nabla\cdot\mathbf{u} = 0\,,\ \mathbf{x}\in\Omega\,,$$

и краевым условиям на границе области: заданному вектору скорости на входе в область, условиям непротекания на твердых стенках и заданной нормальной компоненте вектора скорости на выходе.

В **параграфе 1.3** для поставленных задач сформулированы вариационные постановки в форме Галеркина, эквивалентные исходным задачам.

Вторая глава посвящена построению дискретных аналогов вариационных постановок в форме Галеркина, полученных в первой главе. Представлена разработанная вычислительная схема расчета неизвестных компонент вектора скорости и давления в гипервекторе, позволяющая единообразно моделировать стационарные внутренние течения вязкой несжимаемой жидкости (уравнения Навье – Стокса, Стокса) и идеальной несжимаемой жидкости (уравнения Эйлера). Выписаны стабилизированные схемы Галеркина для моделирования трехмерных течений на тетраэдральном разбиении. Построены противопотоковые схемы с расчетом неизвестных в узлах конечных элементов и серединах их ребер. Для аппроксимации потоков через ребра двойственной сетки предложено использовать формулы интегрирования базисных функций по отрезкам медиан конечного элемента. Предложен способ учета краевого условия $\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}\big|_{\Gamma}=h$ ($\mathbf{n}$ – вектора нормали к границе Γ, h – заданная функция) в конечно-элементных аппроксимациях уравнений Эйлера.

В **параграфе 2.1** введены двойственные по отношению к первичной сетке разбиения: 1) разбиение на ячейки, построенные вокруг вершин симплексов первичной сетки; 2) разбиение на ячейки, построенные вокруг середин сторон симплексов первичной сетки.

В **параграфе 2.2** построены дискретные аналоги полученных в первой главе вариационных постановок.

Важным критерием вычислительных схем для моделирования течений вязкой несжимаемой жидкости является эффективность учета условия, накладываемого на дивергенцию аппроксимируемого поля скоростей. В связи с этим требуется введение специальных постановок и выбор функциональных пространств в вариационных постановках. Для корректного учета уравнения неразрывности построены смешанные и стабилизированные конечно-элементные постановки. В стабилизированных конечно-элементных постановках для компонент вектора скорости и давления используются базисные функции одного порядка – кусочно-линейные. В смешанных конечно-элементных постановках базисные функции одного порядка приводят к неустойчивости решения, поэтому выбору базисных функций для смешанных конечно-элементных постановок посвящен следующий параграф второй главы.

В **параграфе 2.3** отмечены допустимые дискретные пространства базисных функций для смешанных конечно-элементных постановок. Пространства выбираются в соответствии с условием Ладыженской – Бабушки – Брецци[2], которое является одним из необходимых условий существования и единственности решения вариационной задачи:

$$\inf_{q^h\in P^h}\left\{\sup_{\mathbf{u}^h\in\mathbf{V}^h}\frac{\left(\nabla\mathbf{v}^h,q^h\right)}{\left\|q^h\right\|\left\|\nabla\mathbf{v}^h\right\|}\right\}\geq\beta>0\,, \qquad (1)$$

где вектор скорости принадлежит пространству $\mathbf{V}^h$, а давление – пространству P^h, β – константа, не зависящая от h, $(\cdot,\cdot)$ – скалярное произведение. Показано, что пары пространств Тейлора – Худа и Крузея – Равьяра соответствуют условию Ладыженской – Бабушки – Брецци.

В **параграфе 2.4** представлены вычислительные схемы расчета неизвестных компонент вектора скорости и давления в гипервекторе. В блочно-матричном виде система уравнений, основанная на смешанной конечно-элементной постановке, для неизвестных компонент вектора скорости $\mathbf{u}^{n+1}$ и давления p^{n+1} имеет вид:

$$\begin{pmatrix}\mathbf{A}+\dfrac{1}{\varepsilon}\mathbf{Q}\mathbf{M}_{\mathbf{p}}^{-1}\mathbf{Q}^{\mathrm{T}} & -\mathbf{Q}\\ \mathbf{Q}^{\mathrm{T}} & \varepsilon\mathbf{M}_{\mathbf{p}}\end{pmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{u}^{n+1}\\ p^{n+1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{Mf}\\ \varepsilon\mathbf{M}_{\mathbf{p}}p^{n}\end{bmatrix}, \qquad (2)$$

где p^0 – заданное начальное приближение давления, $\varepsilon>0$ – штрафной параметр, $n\geq 0$ – шаг итерации, $\mathbf{D}$ – диффузионная матрица, $\mathbf{C}$ – конвективная матрица, матрица $\mathbf{A}=\mathbf{D}+\mathbf{C}$ соответствует аппроксимации уравнений Навье – Стокса, матрица $\mathbf{A}=\mathbf{D}$ – аппроксимации уравнений Стокса, матрица $\mathbf{A}=\mathbf{C}$ – аппроксимации уравнений Эйлера, матрица $\mathbf{Q}$ соответствует дискретному уравнению неразрывности, $\mathbf{M}_{\mathbf{p}}$ – матрица массы в дискретном уравнении неразрывности, $\mathbf{M}$ – матрица массы в дискретном уравнении движения, $\mathbf{f}$ – вектор правой части. Для обращения матрицы массы $\mathbf{M}_{\mathbf{p}}$ выполнена ее диагонализация.

Другим способом учета уравнения неразрывности является алгоритм Удзавы. Матричный вид модифицированного алгоритма Удзавы для нахождения вектора скорости $\mathbf{u}^{n+1}$ и давления p^{n+1} представлен выражениями:

[2] Brezzi F., Fortin M. Mixed and hybrid finite element methods. Springer – Verlag, New York, 1991.

$$
(\mathbf{A} + \frac{1}{\varepsilon}\mathbf{Q}\mathbf{M}_{\mathbf{p}}^{-1}\mathbf{Q}^{\mathrm{T}})\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{M}\mathbf{f} + \mathbf{Q}p^n,
$$
$$
p^{n+1} = p^n - \frac{1}{\varepsilon}\mathbf{M}_{\mathbf{p}}^{-1}\mathbf{Q}^{\mathrm{T}}\mathbf{u}^{n+1}, \qquad (3)
$$

где p^0 – заданное начальное приближение давления, $\varepsilon > 0$ – штрафной параметр, $n \geq 0$ – шаг итерации, матрицы $\mathbf{A}$, $\mathbf{D}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{Q}$, $\mathbf{M}_{\mathbf{p}}$, $\mathbf{M}$ и вектор $\mathbf{f}$ определены в алгоритме (2).

В рассмотренных матричных уравнениях несжимаемое слагаемое штрафуется пропорционально давлению, что дает возможность отдельно получить уравнения для расчета компонент вектора скорости и уравнение для вычисления давления.

Следующие алгоритмы построены на основе стабилизированной схемы Галеркина, в которой введены два члена. Первый член соответствует методу Streamline Upwind Petrov – Galerkin (SUPG), второй – методу стабилизации давления Pressure Stabilization Petrov – Galerkin (PSPG). Стабилизирующие члены входят в постановку с соответствующими параметрами стабилизации, позволяющими регулировать величину искусственной вязкости, добавляемой в уравнения для подавления больших нефизических осцилляций. В диссертационной работе предлагается определять параметр стабилизации в каждой ячейке ее размерами и заданными в ней коэффициентами уравнений.

В блочно-матричном виде метод SUPG/PSPG для решения уравнений Навье – Стокса и Эйлера имеет вид:

$$
\begin{pmatrix} \mathbf{A} + \mathbf{S}_{SUPG} & -\left(\mathbf{Q} + \mathbf{K}_{SUPG}\right) \\ \left(\mathbf{Q} + \mathbf{K}_{PSPG}\right)^{\mathrm{T}} & \mathbf{D}_{PSPG} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(\mathbf{M} + \mathbf{C}^{\mathrm{T}}{}_{SUPG}\right)\mathbf{f} \\ \mathbf{Q}_{PSPG}\mathbf{f} \end{pmatrix}, \qquad (4)
$$

где $\mathbf{u}$ – вектор скорости, p – давление, обозначения матриц $\mathbf{D}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{Q}$, $\mathbf{M}$ введены ранее в (2), $\mathbf{A} = \mathbf{D} + \mathbf{C}$ соответствует аппроксимации уравнений Навье – Стокса, $\mathbf{A} = \mathbf{C}$ – аппроксимации уравнений Эйлера, $\mathbf{f}$ – вектор правой части. Матрицы стабилизации $\mathbf{S}_{SUPG}$, $\mathbf{K}_{SUPG}$, $\mathbf{C}_{SUPG}$ включают параметр стабилизации τ_{SUPG}; матрицы стабилизации $\mathbf{D}_{PSPG}$, $\mathbf{K}_{PSPG}$ содержат параметр стабилизации τ_{PSPG}. Для решения уравнений Стокса используется метод стабилизации давления PSPG, поскольку в уравнения не входят конвективные члены.

Для реализации краевого условия $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}\big|_{\Gamma} = h$ в вариационных постановках уравнений Эйлера предлагается ввести матрицу преобразования

декартовых компонент вектора скорости $\mathbf{u}^h$ в тангенциальную и нормальную компоненты:

$$
\mathbf{u}^h = \sum_{i=1}^{m} \mathbf{T}^{\mathbf{i}} \tilde{\mathbf{u}}_i^h \varphi_i\left(\mathbf{x}\right),
$$

где $\mathbf{T}^{\mathbf{i}} = \begin{pmatrix} \cos\theta^i & -\sin\theta^i \\ \sin\theta^i & \cos\theta^i \end{pmatrix}$ - матрица преобразования, θ^i - угол между осью x и касательным вектором к ребру в i-ом узле, $\tilde{\mathbf{u}}_i^h = \left(u_{n\,i}^h, u_{\tau\,i}^h\right)$ - нормальная и тангенциальная компоненты вектора скорости, m - число расчетных узлов на конечном элементе, $\varphi_i\left(\mathbf{x}\right)$ - базисная функция пространства $\mathbf{V}^h$.

Разработаны конечно-элементные противопотоковые схемы с расчетом неизвестных в узлах и серединах ребер конечных элементов. Для построения противопотоковых схем выполнена модификация дискретного аналога конвективных членов с помощью кусочно-постоянного оператора на ячейке двойственной сетки. В модифицированное выражение введен параметр, который указывает направление вектора скорости относительно внешней нормали к части границы ячейки. Вклады в матрицу конвективных членов вносят те значения в узлах, которые лежат вверх по потоку. Основой аппроксимации потоков в предположении о кусочно-линейном поведении компонент вектора скорости на конечном элементе служит аппарат, основанный на использовании формул интегрирования базисных функций по отрезкам медиан конечного элемента (по ребрам ячеек двойственной сетки).

Таким образом, в диссертационной работе для корректного учета дивергентного условия используются смешанные и стабилизированные постановки и соответствующие им вариационные задачи. Учет конвективных членов выполнен противопотоковыми схемами с расчетом неизвестных в узлах и серединах ребер симплексов сетки и стабилизированными схемами Галеркина.

Третья глава посвящена описанию разработанного комплекса программ, вычислительным экспериментам и анализу их результатов. Глава состоит из трех параграфов.

В **параграфе 3.1** описываются структура комплекса программ, структура данных, его основные модули и функциональные особенности. Разработана структура данных для хранения элементов матриц СЛАУ, в которых неизвестным вектором является гипервектор, включающий компоненты вектора скорости и давления. Исследованы структуры глобальных матриц и их размерности для разных вариационных постановок. Процесс решения задачи разделен на этапы, что позволяет в комплекс программ без особых затрат добавлять новые вычислительные алгоритмы и расширять круг задач.

Параграф 3.2 посвящен тестированию реализованных методов на ряде модельных задач, проведению вычислительных экспериментов на задачах, имеющих практическую ценность.

На двумерной задаче конвекции-диффузии с доминированием конвекции выполнено сравнение следующих методов: метода Петрова – Галеркина стабилизации давления со стабилизацией оператора конвекции в направлении линии тока, метода конечных элементов/конечных объемов, МКЭ и конечно-элементных противопотоковых схем с расчетом неизвестных в узлах и серединах ребер треугольников.

Выполнено сравнение точности решения уравнений конвективно-диффузионного типа для трехмерной задачи, полученного методом конечных элементов и стабилизированным методом конечных элементов. Для этой же тестовой задачи решено нестационарное уравнение конвективно-диффузионного типа. Аппроксимация по времени выполнена схемой Кранка – Николсон.

Программная реализация алгоритмов расчета полей вектора скорости и давления (смешанного метода конечных элементов, алгоритма Удзавы и стабилизированных схем Галеркина) верифицирована на модельных двумерных и трехмерных задачах Навье – Стокса (в стационарном и нестационарном случаях), Стокса и Эйлера. Для алгоритмов, использующих функцию штрафа, определены оптимальные значения штрафного параметра.

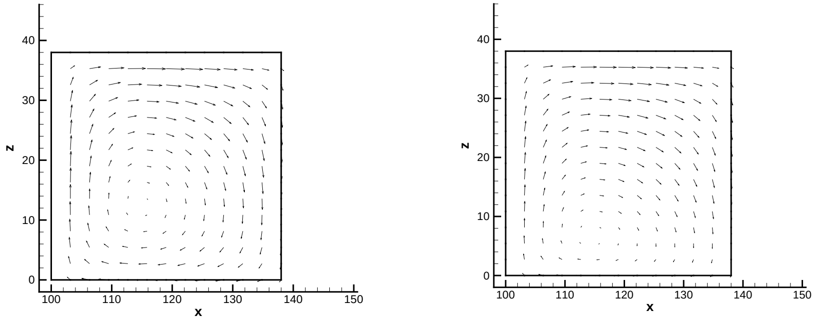
В качестве тестовой задачи численно решена задача о каверне. Наблюдается хорошее совпадение полученных результатов с опубликованными данными[3]. В диссертационной работе приведены результаты расчетов каверны при $\mathrm{Re} = 400, 1000, 2500$.

В **параграфе 3.3** приведены результаты моделирования течений в двумерных и трехмерных криволинейных каналах с разворотом потока на 180 и 270 градусов. Для криволинейного канала с разворотом потока на 180 градусов расчеты выполнены при различном задании сдвига скорости на входе в область, показано возникновение вторичного течения и зависи-

[3] Elias R. N., Coutinho A.L.G.A., Martins M.A.D. Inexact Newton – type methods for non-linear problems arising from the SUPG/PSPG solution of steady incompressible Navier – Stokes equations // J. Braz. Soc. Mech. Sci. & Eng. – 2004. – Vol. XXVI., No. 3 – P. 330-339.

мость интенсивности вторичного течения от величины сдвига скорости на входе (рис. 1).

Сравнение результатов расчетов, полученных в переменных вектор скорости – давление методом конечных элементов и в переменных векторный потенциал – вектор вихря методом конечных разностей[4], показало хорошее согласование.



а) б)

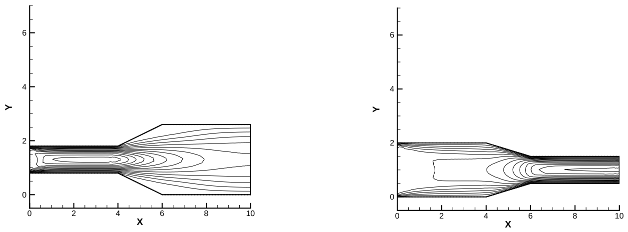
Рис. 1. Проекция вектора скорости на поперечное сечение канала при *y=40*, на входе задан вектор скорости со сдвигом:
а) $u_y = 0,75+0,5z$; б) $u_y = 0,9+0,2z$.

Трубопроводы, используемые в промышленности, представляют собой систему, состоящую из трубы ("русла") и различных конструктивных включений (сужение, расширение и другое). В диссертационной работе приведены результаты моделирования течения в каналах переменного сечения (с расширением и сужением русла). Определено влияние соотношения узкого и широкого сечений на погрешность вычислений при измельчении сетки (рис. 2).

В **приложениях** приводятся компоненты локальных матриц и векторов правых частей, вычисленные на треугольных конечных элементах для кусочно-линейных и кусочно-квадратичных базисных функций, а также на тетраэдральных конечных элементах для кусочно-линейных базисных

[4] Хакимзянов Г.С., Шокин Ю.И., Барахнин В.Б., Шокина Н.Ю. Численное моделирование течений жидкости с поверхностными волнами. – Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2001.

функций. Для полученных в работе вариационных постановок представлены портреты генерируемых матриц СЛАУ.



а) б)

Рис. 2. Линии тока для каналов переменного сечения:
а) расширение русла; б) сужение русла.

В **заключении** сформулированы основные результаты диссертационной работы, выносимые на защиту:

- Разработана технология реализации противопотоковых схем на неструктурированных сетках с расчетом неизвестных в узлах конечных элементов и серединах их ребер для моделирования течений с преобладанием конвективного переноса. В контексте метода конечных элементов предложен новый способ аппроксимации потоков через границы ячеек двойственной сетки.
- Разработана и программно реализована вычислительная схема на основе смешанных постановок с введением функции штрафа, позволяющая единообразно моделировать стационарные внутренние течения вязкой несжимаемой жидкости (уравнения Навье – Стокса, Стокса) и идеальной несжимаемой жидкости (уравнения Эйлера). Предложен способ учета краевого условия $\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}\big|_{\Gamma}=h$ ($\mathbf{n}$ – вектор нормали к границе Γ, h – заданная функция) в вариационных постановках уравнений Эйлера. Разработана структура данных для хранения элементов матриц СЛАУ с расчетом неизвестных компонент вектора скорости и давления в гипервекторе.
- Реализованы стабилизированные схемы Галеркина для моделирования трехмерных течений на тетраэдральном разбиении, в которых используется метод стабилизации давления и в качестве стабилизирующего оператора выбирается конвективная часть исходного оператора.
- Показана зависимость интенсивности вторичного течения от величины сдвига скорости на входе. Определено влияние соотношения узкого и

широкого сечений на погрешность вычислений при измельчении сетки в трубопроводах, состоящих из различных конструктивных включений (элементов сужения и расширения).

Список основных работ по теме диссертации

публикация в издании, рекомендованном ВАК

1. Гобыш А.В., Шокина Н.Ю. Анализ вычислительных схем методов конечных элементов и конечных разностей для моделирования течений несжимаемой жидкости // Вычислительные технологии. – 2006. – Том 11. – № 6. С. 22–31.

публикации в трудах международных конференций

2. Гобыш А.В., Шокина Н.Ю., Шурина Э.П. Анализ вычислительных алгоритмов для уравнений Навье – Стокса, основанных на методе конечных элементов // Труды международной конференции по вычислительной математике МКВМ-2004. Часть 1. – Новосибирск: Изд-во ИВМиМГ СО РАН, 2004. – С. 467–472.
3. Шурина Э.П., Гобыш А.В. Исследование вычислительных схем расчета несжимаемых течений на базе ММКО/МКЭ // Вычислительные технологии (2003, Т. 7), Региональный вестник Востока (2003, Т. 3) – Совместный выпуск по материалам Международной конференции “Вычислительные и информационные технологии в науке, технике и образовании”. Ч. IV. – Новосибирск – Алматы – Усть-Каменогорск. – 2003. – С. 13–17.

публикации в сборниках научных трудов

4. Гобыш А.В. Конечно-элементные аппроксимации уравнений Навье – Стокса на базисных функциях различных порядков // Сборник научных трудов НГТУ. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2005 – Вып. 1(39), С. 101–106.
5. Гобыш А.В. Трехмерные конечно-элементные аппроксимации уравнений Навье – Стокса, Стокса, Эйлера // Сборник научных трудов НГТУ. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2006 – Вып. 1(43). – С. 55–60.
6. Shurina E.P., Gobysh A.V. Comparative analysis of finite element approximation for the Navier – Stokes equations with basis functions of different orders // Bulletin of Novosibirsk Computing Center: Series Numerical Analysis – Novosibirsk: NCC Publisher, 2005. – Iss. 13. – p. 77–86.

Отпечатано в типографии Новосибирского
государственного технического университета
630092, г. Новосибирск, пр. К. Маркса, 20,
тел./факс (383) 346-08-57
формат 84x60x1/16, объем п.л., тираж 100 экз.,
заказ № подписано в печать 03.10.2007 г.