

На правах рукописи

Медведев Сергей Борисович

**ПРИБЛИЖЕННЫЕ МОДЕЛИ
ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОГО ТИПА
С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ**

05.13.18 — математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Новосибирск – 2006

Работа выполнена в Институте вычислительных технологий СО РАН.

**Официальные
оппоненты:** доктор физико-математических наук, профессор
Доброхотов Сергей Юрьевич,
доктор физико-математических наук
Крупчатников Владимир Николаевич,
доктор физико-математических наук, профессор
Фокин Михаил Валентинович

Ведущая организация: Институт океанологии им. П.П. Ширшова
РАН, г. Москва.

Защита диссертации состоится 8-го сентября 2006 г. в 13 часов на заседании специализированного диссертационного совета Д 003.046.01 при Институте вычислительных технологий СО РАН по адресу:
630090, г. Новосибирск, проспект академика М.А.Лаврентьева, 6, конференц-зал ИВТ

С диссертацией можно ознакомиться в специализированном читальном зале вычислительной математики и информатики научного отделения СО ГПНТБ (проспект академика М.А.Лаврентьева, 6.)

Автореферат разослан " " "

2006 г.

Ученый секретарь диссертационного совета
доктор физико-математических наук,
профессор

Л. Б. Чубаров

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Нелинейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений, возникающие при моделировании различных задач естествознания, могут быть эффективно изучены с помощью асимптотических методов. Однако даже для обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами приближенное исследование становится существенно сложнее. Для уравнений в частных производных также развиты эффективные методы исследования. Тем не менее изучение уравнений с переменными коэффициентами требует разработки новых и совершенствование существующих методов.

Все уравнения нелинейной физики являются приближенными моделями и содержатся в некоторой иерархии моделей. С одной стороны это обусловлено приближенным характером физических законов, а с другой стороны многие уравнения были получены как некоторое приближение из некоторых исходных уравнений. Нелинейное уравнение Шредингера и уравнение Кортевега-Де Фриза наиболее известные модельные уравнения, которые возникают в самых разных приложениях. При математическом моделировании задачу приближенного исследования уравнений можно разделить на две подзадачи. Первая состоит в построении точных или приближенных решений для исходных уравнений. Если это невозможно, то возникает подзадача построения более простой модели, которая допускает детальный анализ. В настоящее время оба подхода успешно применяются, и получено множество модельных уравнений.

Однако уравнения с переменными коэффициентами по-прежнему являются трудным предметом для исследования. Трудность обусловлена отсутствием достаточного числа симметрий, которое характерно для уравнений, решаемых точными методами. Поэтому для решения нелинейных уравнений с переменными коэффициентами применяются в основном приближенные методы. Кроме того получение модельных уравнений с переменными коэффициентами является отдельной задачей.

Настоящая диссертационная работа как раз и посвящена актуальной проблеме: исследованию нелинейных уравнений в частных производных с переменными коэффициентами и построению приближенных моделей для них. Поскольку нелинейные уравнения сильно различаются по своим свойствам, в данной работе рассматриваются только уравнения гидродинамического типа, которые возникают при моделировании задач нелинейной физики.

Основная научная проблема, которой посвящена настоящая диссертационная работа, состоит в построении и исследовании приближенных моде-

лей геофизической гидродинамики и нелинейной волоконной оптики, описываемых нелинейными уравнениями в частных производных с переменными коэффициентами. Это построение основано на методе нормальных форм. В данной работе рассматриваются, в основном, уравнения гидродинамического типа, которые возникают при моделировании перечисленных выше задач нелинейной физики.

Цель диссертационной работы состоит в разработке методов построения приближенных моделей, описываемых уравнениями гидродинамического типа с переменными коэффициентами, и анализе их резонансных свойств. В частности, сюда входят:

– развитие и применение метода нормальных форм при построения приближенных моделей для уравнений гидродинамического типа с переменными коэффициентами;

– разделение медленного и быстрого движений для модели вращающейся мелкой воды и изучение динамики быстрых движений для одномерной модели вращающейся мелкой воды;

– построение колмогоровских решений для стационарных кинетических уравнений, описывающих кинетику коротких инерционно-гравитационных волн в рамках модели вращающейся мелкой воды на f -плоскости в средних широтах и на экваториальной бета-плоскости;

– построение и исследование усредненной модели распространения импульсов, описываемых нелинейным уравнением Шредингера с периодически коэффициентами;

– развитие вариационного подхода для малопараметрического описания взаимодействия импульсов.

Методы исследования. В работе используются методы асимптотической теории обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных, методы нормальных форм и усреднения для обыкновенных дифференциальных уравнений. Также используются качественная теория обыкновенных дифференциальных уравнений и гамильтонов формализм для конечномерных и полевых систем.

Научная новизна полученных в диссертационной работе результатов состоит в следующем:

1. Предложены новые обобщения нормальных форм для специальных классов дифференциальных уравнений в частных производных с переменными коэффициентами. Найден новый класс скобок Пуассона, которые асимптотически эквивалентны скобке с нулевой трансверсальной частью.

2. Впервые проведено полное разделение быстрых и медленных движений на основе линеаризованного потенциального вихря для модели вращающейся

мелкой воды с постоянным параметром Кориолиса. Найдено новое уравнение баланса для статической инициализации. Впервые показано, что геострофическое приспособление для одномерной модели вращающейся мелкой воды является полным. Найден критерий формирования сингулярности для различных начальных данных.

3. Впервые получены гамильтоновы и кинетические уравнения для описания инерционно-гравитационных волн в средних широтах и на экваторе. Найдены точные колмогоровские решения для стационарного кинетического уравнения.

4. Впервые найдены условия, при которых нелинейное уравнение Шредингера с периодическими коэффициентами может быть преобразовано в нелинейное уравнение Шредингера с постоянными коэффициентами, и получена усредненная модель для максимального большого диапазона изменений параметров периодических коэффициентов. Предложены новые численные алгоритмы для нахождения решений нелинейного уравнения Шредингера с периодическими коэффициентами и его усредненной модели.

5. Предложен новый вариационный метод получения малопараметрических гамильтоновых моделей для описания взаимодействия импульсов. Найдены точные и численные решения для уравнений, описывающих взаимодействие двух импульсов.

Теоретическая и практическая ценность работы. Диссертация носит теоретический характер. Полученные в ней результаты по развитию и применению метода нормальных форм для уравнений в частных производных с переменными коэффициентами могут быть применены на практике в качестве инструмента математического моделирования и аналитического исследования моделей механики сплошных сред и нелинейной волоконной оптики.

Апробация работы. Основные научные результаты диссертации докладывались и обсуждались на:

– международной конференции "Advanced Mathematics, Computations and Applications" в честь акад. Г.И. Марчука (Новосибирск, Россия, 1995),

– международной школе по нелинейным наукам (Нижний Новгород, Россия, 1995),

– международной конференции "Математические модели и численные методы механики сплошных сред" в честь акад. Н.Н. Яненко (Новосибирск, Россия, 1996),

– Сибирском конгрессе по прикладной и индустриальной математике (Новосибирск, Россия, 1996, 1998),

– научной программе "Математика атмосферы и океана" (Isaac Newton

Institute for Mathematical sciences, Cambridge, UK, 1996),

– конференции в честь проф. В.И. Арнольда (Fields Institute for Mathematical Sciences, Toronto, Canada, 1997),

– конференции "Environmental Fluid Mechanics" в честь проф. О. Филлипса (John Hopkins University, Baltimore, USA, 1998),

– Генеральных ассамблеях Европейского геофизического общества (Nice, France, 1998, 2001),

– международной конференции "Солитоны, коллапсы и турбулентность: достижения, развития и перспективы" в честь проф. В.Е. Захарова (Черноголовка, Россия, 1999),

– научной программе "Геометрия и физика узлов" (Isaac Newton Institute for Mathematical sciences, Cambridge, UK, 2000),

– научной школе "Новые тенденции в турбулентности" в Институте перспективных исследований НАТО (Les Houches, France, 2000),

– программе "Симплектическая геометрия и физика" в Институте чистой и прикладной математики (Los Angeles, USA, 2003)

– международной конференции "Асимптотический анализ и физика атмосферы и океана" (Rome, Italy, 2004).

На различных стадиях выполнения работа обсуждалась на семинарах, руководимых ведущими специалистами, в российских и зарубежных институтах и университетах:

– Институт вычислительных технологий СО РАН (Ю.И. Шокин),

– Институт математики им. Соболева СО РАН (В.С. Белоносов, М.В. Фокин),

– Механико-математический факультет МГУ (В.В. Козлов),

– Физический факультет университета Торонто, Канада (Т.Г. Shepherd),

– Математический институт, Кёльн, Германия (Т. Küpper),

– Департамент прикладной математики и физики, Кэмбридж, Великобритания (М. McIntyre),

– Институт теоретической физики, Дюссельдорф, Германия (К.Н. Spatschek),

– Нормальная школа, Париж, Франция (V. Zeitlin),

– Университет им. П. и М. Кюри, Париж, Франция (Н. Le Treut).

Представленные в диссертации исследования проводились в рамках: Российского фонда фундаментальных исследований – исследовательские проекты 01-01-00959 (руководитель), 03-02-16496 (исполнитель), 95-05-15581 (исполнитель), проекты ведущих научных школ России 04-05-64481 (исполнитель), 00-015-98543 (исполнитель); интеграционного проекта 02-2003 СО РАН

02-2003 (исполнитель); проекта ZN-080-01 Министерства образования РФ, (исполнитель).

Публикации результатов и личный вклад автора. По теме диссертации опубликована 31 работа, список которых приведен в конце автореферата. В совместных работах постановка задач, аналитические выкладки, разработка вычислительных алгоритмов и интерпретация полученных результатов, включенные в диссертацию, принадлежат автору.

Структура и объем диссертации. Работа состоит из введения, четырех глав, заключения, приложений и списка литературы из 235 наименования. Объем диссертации составляет 238 страниц.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Введение носит обзорный характер. Дается анализ имеющихся в литературе результатов, приведено краткое содержание диссертации.

Глава 1 содержит 4 параграфа, в которых дается изложение способов построения и примеры нормальных форм для уравнений в частных производных с переменными коэффициентами.

В **параграфе 1.1** сформулированы и доказаны основные теоремы для уравнений в частных производных с переменными коэффициентами, которые имеют в главном порядке систему линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Рассматривается система уравнений в частных производных

$$\partial u_i(x, t) / \partial t + \lambda_i(x) u_i(x, t) = F_i(x, u), \quad u \in R^l, \quad x \in R^m, \quad (1)$$

с правой частью в следующей форме

$$F_i(x, u) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{0 < \alpha_1 + \dots + \alpha_n} \sum_{j_1, \dots, j_n} f_{\alpha_1 \dots \alpha_n}^{j_1 \dots j_n}(x) D^{\alpha_1} u_{j_1} \dots D^{\alpha_n} u_{j_n}, \quad (2)$$

где $D^\beta = \partial_{x_1}^{\beta_1} \dots \partial_{x_m}^{\beta_m}$, индексы j_1, \dots, j_n нумеруют зависимые переменные u_i , n есть степень нелинейности. Предполагается, что мультииндексы $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ удовлетворяют условиям $0 \leq \alpha_1, \dots, 0 \leq \alpha_n$, что означает отсутствие интегральных членов.

Определение 1 Моном

$$G_i = f_{\alpha_1 \dots \alpha_n}^{j_1 \dots j_n}(x) D^{\alpha_1} u_{j_1} \dots D^{\alpha_n} u_{j_n} \quad (3)$$

называется резонансным в точке x если выполняется следующее равенство

$$\lambda_i(x) = \lambda_{j_1}(x) + \dots + \lambda_{j_n}(x), \quad (4)$$

в противном случае, G_i называется нерезонансным.

Определение 2 Моном G_i называется нерезонансным в окрестности точки x , если G_i – нерезонансный в каждой точке этой окрестности, в противном случае, моном G_i называется резонансным.

Предполагается, что частные производные от u_i , $\lambda_i(x)$, $f_{\alpha_1 \dots \alpha_n}^{j_1 \dots j_n}(x)$ являются малыми

$$D^\beta u_i \sim \epsilon^{|\beta|} u_i, \quad D^\beta \lambda_i \sim \epsilon^{|\beta|} \lambda_i, \quad D^\beta f_{\alpha_1 \dots \alpha_n}^{j_1 \dots j_n}(x) \sim \epsilon^{|\beta|} f_{\alpha_1 \dots \alpha_n}^{j_1 \dots j_n}(x), \quad (5)$$

где ϵ есть малый параметр и $|\beta| = \beta_1 + \dots + \beta_m$ задает норму мультииндекса β . Чтобы упростить обозначения, вместо $\epsilon^{|\beta|} D^\beta$ используется D^β , опуская малый параметр.

Сформулирована и доказана основная теорема.

Теорема 1 *Используя замену переменных $u_i(x) = v_i(x) + B_i$, система (1) может быть преобразована в каноническую форму в окрестности точки x_0*

$$\partial v_i(x, t) / \partial t + \lambda_i(x) v_i(x, t) = W_i(x, u), \quad (6)$$

где все мономы в сумме W являются резонансными в окрестности точки x_0 , и B_i имеет форму (2).

Имеют место следующие важные замечания.

Замечание 1. Если предположить, что производные от λ_i , $f_{\alpha_1 \dots \alpha_n}^{j_1 \dots j_n}(x)$ имеют меньший порядок, чем определено в (5)

$$D^\beta \lambda_i \leq \epsilon^{|\beta|} \lambda_i, \quad D^\beta f_{\alpha_1 \dots \alpha_n}^{j_1 \dots j_n}(x) \leq \epsilon^{|\beta|} f_{\alpha_1 \dots \alpha_n}^{j_1 \dots j_n}(x), \quad (7)$$

тогда необходимо будет отбросить некоторые высшие члены в гомологическом уравнении, и его решение находится аналогично.

Замечание 2. Можно также предполагать слабую нелинейность. Если параметр нелинейности равен ϵ , тогда порядок монома G_i увеличивается на n , и гомологическое уравнение и его решение остаются прежними. Т.о. получается следующее обобщение теоремы Пуанкаре-Дюлака.

Теорема 2 *Система (1), где $F_i(x, u)$ имеет второй порядок малости, может быть преобразована в каноническую форму (6) в окрестности точки x_0 .*

Замечание 3. Можно также рассматривать только слабую нелинейность для системы (1). Тогда могут быть включены отрицательные степени для производных (интегральные операторы) и, таким образом, установлено прямое обобщение теоремы Пуанкаре-Дюлака для слабо нелинейных систем уравнений.

Теорема 3 *Предположим слабую нелинейность и будем считать, что правые части $F_i(x, u)$ системы (1) имеют второй порядок нелинейности, и что порядок производных для членов заданной степени нелинейности является конечным. Тогда система (1) может быть преобразована к канонической форме (6) в окрестности точки x_0 .*

Замечание 4. Все использованные преобразования являются формальными рядами малого параметра ϵ в окрестности данной точки x_0 . Поэтому эти ряды требуют дальнейшего изучения применимости.

Далее рассмотрены конкретные примеры построения нормальных форм.

В первом примере для уравнений мелкой воды во вращающейся системе координат

$$u_t + uu_x + vu_y - fv + gh_x = 0, \quad v_t + uv_x + vv_y + fu + gh_y = 0, \quad (8)$$

$$h_t + (uh)_x + (vh)_y = 0, \quad (9)$$

где u, v – компоненты вектора скорости, h – глубина жидкости, g – ускорение свободного падения, f – параметр Кориолиса, получена нормальная форма Пуанкаре для длинноволновых движений

$$\begin{aligned} \psi_t + if\psi - i\bar{D}f^{-1}ghD\psi - igh\bar{D}(\psi Df^{-1}) - i(\bar{D}gh)(Df^{-1}\psi) \\ - i\psi(Df^{-1})\bar{D}|\psi|^2 - 2i|\psi|^2\bar{D}(\psi Df^{-1}) = 0, \end{aligned} \quad (10)$$

$$h_t + [gh^2/2 + h|\psi|^2, f^{-1}] = 0, \quad (11)$$

где $|\psi|^2 = \psi\bar{\psi}$ и $[f, g] = f_xg_y - f_yg_x = i(Df\bar{D}g - \bar{D}fDg)$ означает Якобиан f и g . Здесь введены обозначения $\psi = (u + iv)/\sqrt{2}$, $\bar{\psi} = (u - iv)/\sqrt{2}$, $D = (\partial_x + i\partial_y)/\sqrt{2}$, $\bar{D} = (\partial_x - i\partial_y)/\sqrt{2}$. Длинноволновое приближение означает, что оператор D мал по сравнению с радиусом Россби. Эти уравнения содержат только резонансные члены второго порядка относительно малого D . Существенно, что параметр Кориолиса f считается положительной функцией от пространственных переменных.

Во втором примере построена нормальная форма Пуанкаре для уравнений мелкой воды на бета плоскости при малой неоднородности и малой нелинейности. Первое означает, что параметр Кориолиса взят в виде линейной функции $f = f_0 + \beta y$, где β считается малым относительно постоянной части f_0 для масштабов движения порядка радиуса Россби $R = c/f_0$. Второе предположение означает, что скорость и отклонение свободной поверхности $z = h - h_0$ являются малыми величинами относительно скорости звука $c = \sqrt{gh_0}$ и высоты покоящейся жидкости h_0 . После преобразования Фурье и диагонализации

главной линейной части нормальная форма первого порядка дается следующими уравнениями с квадратичной нелинейностью

$$\frac{\partial a_{\mathbf{k}}}{\partial t} + i\Omega_{\mathbf{k}}a_{\mathbf{k}} + \int U_{\mathbf{klm}}^{(0)}a_{\mathbf{l}}a_{\mathbf{m}}d\lambda = 0, \quad (12)$$

$$\frac{\partial b_{\mathbf{k}}}{\partial t} + i(\omega_{\mathbf{k}} - iB_{\mathbf{k}}^{22})b_{\mathbf{k}} + \int V_{\mathbf{klm}}^{(0)}a_{\mathbf{l}}b_{\mathbf{m}}d\lambda = 0. \quad (13)$$

В этой форме дисперсионный закон для волн Россби $\Omega_{\mathbf{k}} = -\beta \frac{k_1}{\omega_{\mathbf{k}}}$ возникает в первом порядке, и дисперсионный закон для инерционно-гравитационных волн $\omega_{\mathbf{k}} = \sqrt{f_0^2 + k^2}$ получает анизотропную добавку $-iB_{\mathbf{k}}^{22}$ вследствие неоднородности, описываемой бета членом. Добавка $-iB_{\mathbf{k}}^{22}$ отсутствует в литературе, посвященной уравнениям вращающейся мелкой воды.

Специфическое свойство системы (8)-(9), которым обладает и нормальная форма первого порядка, состоит в отсутствии члена вида $\int U_{\mathbf{klm}}b_{\mathbf{l}}b_{-\mathbf{m}}^*d\lambda$ в уравнении для волн Россби. В общем случае, выражение такого вида описывает усредненное влияние высокочастотных волн на низкочастотные в общих системах для взаимодействия высокочастотных и низкочастотных волн. В системе (8)-(9) инерционно-гравитационные и волны Россби являются высоко- и низко- частотными, соответственно.

Принимая во внимание только резонансные члены второго порядка, после подходящего преобразования получена нормальная форма

$$\begin{aligned} & \frac{\partial a_{\mathbf{k}}}{\partial t} + i \left(\Omega_{\mathbf{k}} - iR_{\mathbf{k}}^{(0)} \right) a_{\mathbf{k}} + \int \left(U_{\mathbf{klm}}^{(0)} + R_{\mathbf{klm}}^{(1)} \right) a_{\mathbf{l}}a_{\mathbf{m}}d\lambda \\ & + \int R_{\mathbf{klm}}^{(2)} b_{\mathbf{l}}b_{-\mathbf{m}}^*d\lambda + \int R_{\mathbf{klmn}}^{(3)} a_{\mathbf{l}}a_{\mathbf{m}}a_{\mathbf{n}}d\mu + \int R_{\mathbf{klmn}}^{(4)} a_{\mathbf{l}}b_{\mathbf{m}}b_{-\mathbf{n}}^*d\mu = 0, \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial b_{\mathbf{k}}}{\partial t} + i \left(\omega_{\mathbf{k}} - iB_{\mathbf{k}}^{22} - iS_{\mathbf{k}}^{(0)} \right) b_{\mathbf{k}} + \int \left(V_{\mathbf{klm}}^{(0)} + S_{\mathbf{klm}}^{(1)} \right) a_{\mathbf{l}}b_{\mathbf{m}}d\lambda \\ & + \int S_{\mathbf{klmn}}^{(2)} a_{\mathbf{l}}a_{\mathbf{m}}b_{\mathbf{n}}d\mu + \int S_{\mathbf{klmn}}^{(3)} b_{\mathbf{l}}b_{\mathbf{m}}b_{-\mathbf{n}}^*d\mu \\ & + \int S_{\mathbf{klmn}}^{(4)} a_{\mathbf{l}}b_{\mathbf{m}}b_{\mathbf{n}}d\mu + \int S_{\mathbf{klmn}}^{(5)} a_{\mathbf{l}}b_{\mathbf{m}}b_{-\mathbf{n}}^*d\mu = 0, \end{aligned} \quad (15)$$

где $\mathbf{n} = (n_1, n_2)$, $d\mu = \delta(\mathbf{k} - \mathbf{l} - \mathbf{m} - \mathbf{n})d\mathbf{l}d\mathbf{m}d\mathbf{n}$. В этой форме бета член генерирует дополнительную собственную нелинейность для волн Россби, медленный член, образованный инерционно-гравитационными волнами и модуляцию инерционно-гравитационных волн на волнах Россби в более высоких порядках. Дополнительная собственная нелинейность волн Россби включает в себя скалярную нелинейность.

Третий пример дает нормальную форму для коротких волн, описываемых уравнениями мелкой воды на экваториальной бета плоскости $f = \beta y$. В полученной нормальной форме, квадратичной по зависимым переменным,

уравнения, описывающие инерционно-гравитационные волны, отделяются от уравнений для волн Россби. Эти уравнения могут быть записаны в гамильтоновой форме в физических переменных

$$\begin{pmatrix} \varphi \\ z \end{pmatrix}_t + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta H / \delta \varphi \\ \delta H / \delta z \end{pmatrix} = 0 \quad (16)$$

с гамильтонианом

$$H = \int \left(\frac{1}{2}(1+z)(\varphi_x^2 + \varphi_y^2) + \frac{1}{2}z^2 + \beta\varphi\Delta^{-1}z_x \right) dx dy. \quad (17)$$

В параграфе 1.2 рассматриваются кососимметричные градиентные системы

$$\dot{y} = K\nabla h = KDy \quad (18)$$

с положительно определенной характеристической функцией h , которая без потери общности имеет вид $h(y) = y_1^2 + \dots + y_n^2$ и кососимметричной матрицей K . Матрица D этом случае совпадает с единичной матрицей. Предположим, что разложение K по степеням y имеет вид $K = K_0 + K_1 + \dots$, где K_0 есть постоянная матрица. Тогда имеет место теорема.

Теорема 4 Пусть характеристическая функция системы (18) является квадратичной и положительно определенной, тогда эта система может быть приведена формальной заменой зависимых переменных к форме

$$\dot{z} = Lz, \quad (19)$$

где в правой части находятся только резонансные члены, и матрица L является кососимметричной.

В качестве примера рассмотрены гидродинамические уравнения для медленных движений неизотермической плазмы, помещенной в магнитное поле \mathbf{H} . Магнитное поле \mathbf{H} направлено вдоль оси z и может зависеть от пространственных переменных.

$$\partial \mathbf{v} / \partial t + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = -e \nabla \varphi / M + [\mathbf{v} \mathbf{\Omega}], \quad \partial \rho / \partial t + \operatorname{div} \rho \mathbf{v} = 0, \quad (20)$$

$$\Delta \varphi = -\frac{4\pi e}{M} (\rho - \rho_0 \exp(e\varphi/T)) \quad (21)$$

где \mathbf{v}, ρ, M — скорость, плотность, масса ионов. φ — потенциал электрического поля и $\mathbf{\Omega} = e\mathbf{H}/Mc$. Температура электронов T и невозмущенная плотность ρ_0 также считаются неоднородными. В однородном случае эта система описывает два типа волн — ионно-звуковые и циклотронные.

В результате получается система, описывающая взаимодействие циклотронных и ионно-звуковых волн с заданной точностью

$$\begin{pmatrix} \partial\psi/\partial t \\ \partial\psi^*/\partial t \\ \partial p/\partial t \\ \partial q/\partial t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} K_{11} & 0 & -K_{31}^* & 0 \\ 0 & K_{22} & -K_{32}^* & 0 \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & -K_{43}^* \\ 0 & 0 & K_{43} & K_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi \\ \psi^* \\ p \\ q \end{pmatrix} = 0, \quad (22)$$

где

$$\begin{aligned} K_{11} &= i\left(f + \frac{\rho_0^{1/2}}{2f} D \frac{c_0^2}{\rho_0} D^* \rho_0^{1/2} + \rho_0^{1/2} D \frac{c_0^2}{\rho_0} D^* \frac{\rho_0^{1/2}}{2f}\right), & K_{31} &= \rho_0^{1/2} \partial_z \frac{\psi^*}{\rho_0} - \left(\partial_z \frac{\psi^*}{\rho_0^{1/2}}\right), \\ K_{22} &= -i\left(f + \frac{\rho_0^{1/2}}{2f} D^* \frac{c_0^2}{\rho_0} D \rho_0^{1/2} + \rho_0^{1/2} D^* \frac{c_0^2}{\rho_0} D \frac{\rho_0^{1/2}}{2f}\right), & K_{32} &= \rho_0^{1/2} \partial_z \frac{\psi}{\rho_0} - \left(\partial_z \frac{\psi}{\rho_0^{1/2}}\right), \\ K_{44} &= \frac{c_0}{\rho_0^{1/2}} D \frac{i\rho_0}{f} D^* \frac{c_0}{\rho_0^{1/2}} - \frac{c_0}{\rho_0^{1/2}} D^* \frac{i\rho_0}{f} D \frac{c_0}{\rho_0^{1/2}}, & K_{33} &= \rho_0^{1/2} \partial_z \frac{p}{2\rho_0} + \frac{p}{2\rho_0} \partial_z \rho_0^{1/2}, \\ K_{43} &= \frac{c_0}{\rho_0^{1/2}} \left(1 - D^* \frac{\rho_0}{2f^2} D \frac{c_0^2}{\rho_0} - D \frac{\rho_0}{2f^2} D^* \frac{c_0^2}{\rho_0} + D^* D d^2\right) \partial_z \rho_0^{1/2} + \frac{c_0}{2\rho_0^{1/2}} \partial_z \frac{q}{c_0} - \frac{q}{3\rho_0} \partial_z \rho_0^{1/2}. \end{aligned}$$

В силу тождества

$$K_{31}\psi + K_{32}\psi^* \equiv 0, \quad (23)$$

воздействие циклотронных волн на ионно-звуковые в данном приближении отсутствует. Для ионно-звуковых волн имеем систему

$$\begin{pmatrix} p_t \\ q_t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} K_{33} & -K_{43}^* \\ K_{43} & K_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = 0. \quad (24)$$

В параграфе 1.3 проведено доказательство асимптотической теоремы Дарбу для непрерывных систем.

Теорема 5 Пусть $w_0(x) = (u_0(x), v_0(x))$ есть произвольная точка на пуассоновом многообразии P . И пусть структурный оператор скобки Пуассона имеет вид

$$J(x; w) = J_0 + J_1 + J_2 + \dots, \quad (25)$$

где

$$J_0 = \begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_n = \begin{pmatrix} A_n & -B_n^T \\ B_n & C_n \end{pmatrix}, \quad n \geq 1,$$

S не зависит от w и имеет обратный оператор R . Тогда подходящая замена переменных в окрестности точки $w_0(x)$ приводит этот структурный оператор к виду

$$J = \begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & T \end{pmatrix}, \quad (26)$$

где T – вырожденный оператор в точке w_0 : $T(w_0) = 0$ и не зависит от переменной u .

В качестве первого примера приведено уравнение, описывающие волны Россби в атмосфере, и дрейфовые волны в плазме. Для функций, быстро убывающих на бесконечности, скобка Пуассона этого уравнения приводится к своей постоянной части.

Второй пример – это структурный оператор скобки Пуассона для уравнений вращающейся мелкой воды в переменных u, v, z

$$J(x, y; u, v, z) = \begin{pmatrix} 0 & -(1 + \xi) & \partial_x \\ 1 + \xi & 0 & \partial_y \\ \partial_x & \partial_y & 0 \end{pmatrix}. \quad (27)$$

После расщепления в первом порядке структурный оператор принимает вид

$$J_0 + J_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \partial_x \xi_1 \partial_y - \partial_y \xi_1 \partial_x \end{pmatrix}. \quad (28)$$

В параграфе 1.4 доказано предложение для специального класса скобок Пуассона, которые могут быть приведены к произведению канонической и нулевой скобок.

Предложение 1 Если скобка Пуассона имеет вид

$$\hat{J}(z; u^1, u^2, v^1) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \sum_{i=1} \begin{pmatrix} \hat{A}_i & -\hat{B}_i^* & -\hat{C}_i^* \\ \hat{B}_i & 0 & 0 \\ \hat{C}_i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (29)$$

где \hat{B}_i, \hat{C}_i не зависят от u^1 , оператор \hat{A}_i является линейным по u^1 , тогда эта скобка может быть преобразована к следующему виду

$$\hat{J}_0(z; u^1, u^2, v^1) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (30)$$

Приведены соответствующие примеры для одной и двух пространственных переменных.

Глава 2 состоит из 3 параграфов, которые посвящены, соответственно: построению медленного многообразия для двумерных уравнений мелкой воды при постоянном параметре Кориолиса в физическом пространстве; построению быстрого и медленных инвариантных многообразий, нормальных форм

Пуанкаре в спектральном пространстве; исследованию фронтального геострофического приспособления в рамках одномерных уравнений мелкой воды.

В параграфе 2.1 рассматриваются безразмерные уравнения вращающейся мелкой воды (8)-(9) при постоянном параметре Кориолиса f . Разделение движений в линейном приближении проводится с помощью замены переменных

$$u = -\frac{\partial\chi}{\partial y} - \frac{\partial\xi}{\partial y} + \frac{\partial\varphi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial\chi}{\partial x} + \frac{\partial\xi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \quad z = \chi + \Delta\xi, \quad (31)$$

где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ – лапласиан. Уравнения в новых переменных принимают вид

$$(1 - \Delta)\frac{\partial\chi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}u(\Delta - 1)\chi + \frac{\partial}{\partial y}v(\Delta - 1)\chi, \quad (32)$$

$$\Delta(1 - \Delta)\frac{\partial\xi}{\partial t} + \Delta(1 - \Delta)\varphi = \frac{\partial}{\partial x}(\Delta(uz) - u\Omega) + \frac{\partial}{\partial y}(\Delta(vz) - v\Omega), \quad (33)$$

$$\Delta\frac{\partial\varphi}{\partial t} - \Delta(1 - \Delta)\xi = -\left(u\frac{\partial\Delta\varphi}{\partial x} + v\frac{\partial\Delta\varphi}{\partial y} + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 2\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x} + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right), \quad (34)$$

где $\Omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$ и u, v, z выражаются с помощью (31).

Для того, чтобы разделить движения в нелинейной части, делается замена следующего вида

$$\chi = \bar{\chi}, \quad \xi = \bar{\xi} + \Xi[\bar{\chi}], \quad \varphi = \bar{\varphi} + \Phi[\bar{\chi}], \quad (35)$$

где $\Xi[\chi], \Phi[\chi]$ являются функциями, аргументы которых есть интегро-дифференциальные операторы от χ .

С точностью до кубических членов находится формальное решение

$$\Xi[\chi] = \Xi_2[\chi] + \Xi_3[\chi] + \dots, \quad \Phi[\chi] = \Phi_2[\chi] + \Phi_3[\chi] + \dots, \quad (36)$$

где

$$\Xi_2[\chi] = 2(1 - \Delta)^{-1}\Delta^{-1}\left(\left(\frac{\partial^2\chi}{\partial x\partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2\chi}{\partial x^2}\frac{\partial^2\chi}{\partial y^2}\right), \quad \Phi_2 = (1 - \Delta)^{-1}\Delta^{-1}[\Delta\chi, \chi],$$

— квадратичные члены и

$$\begin{aligned} \Xi_3[\chi] = \Delta^{-1}(1 - \Delta)^{-1} & \left([\chi, \Delta\Phi_2] + 2\left[\frac{\partial\chi}{\partial x}, \frac{\partial\Phi_2}{\partial x} - \frac{\partial\Xi_2}{\partial y}\right] + 2\left[\frac{\partial\chi}{\partial y}, \frac{\partial\Phi_2}{\partial y} + \frac{\partial\Xi_2}{\partial x}\right] \right) \\ & + \Delta^{-1}(1 - \Delta)^{-2} \left([\Delta(1 - \Delta)^{-1}[\chi, \Delta\chi], \chi] + [\Delta\chi, (1 - \Delta)^{-1}[\chi, \Delta\chi]] \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Phi_3[\chi] = & \Delta^{-1}(1 - \Delta)^{-1} \left((1 - \Delta)[\Delta \Xi_2, \chi] + \Delta[\Xi_2, \chi] + [\Delta \chi, \Xi_2] \right. \\
& + \Delta \left(\frac{\partial}{\partial x} \chi \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \chi \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} \right) - \left(\frac{\partial}{\partial x} \Delta \chi \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \Delta \chi \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} \right) \\
& \left. - 2\Delta^{-1}(1 - \Delta)^{-1} \left(2 \frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (1 - \Delta)^{-1} [\chi, \Delta \chi] \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} (1 - \Delta)^{-1} [\chi, \Delta \chi] - \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (1 - \Delta)^{-1} [\chi, \Delta \chi] \right) \right)
\end{aligned}$$

— кубические члены в разложении.

Таким образом находится уравнение для медленного многообразия $M = \{\chi, \xi, \varphi : \xi = \Xi[\chi], \varphi = \Phi[\chi]\}$ и уравнения движения на нем

$$(1 - \Delta) \frac{\partial \chi}{\partial t} = [\chi, \Delta \chi] + [\Xi, (\Delta - 1)\chi] + \frac{\partial}{\partial x} \Phi(\Delta - 1)\chi + \frac{\partial}{\partial y} \Phi(\Delta - 1)\chi. \quad (37)$$

Далее показано, как знание явных уравнений для медленного многообразия позволяет по-новому решить задачу динамической и статической инициализации. В случае динамической инициализации проектирование начальных полей происходит на медленное многообразие ортогонально быстрым переменным. В случае статической инициализации по заданному начальному полю геопотенциала z получается новое уравнение. Чтобы сравнить это уравнение с обычным уравнением баланса

$$\Delta(z - \psi) + 2 \left(\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) = 0, \quad (38)$$

где $\psi = \chi + \xi$ — функция тока, оставлены только линейные и квадратичные члены и приведены к виду

$$\Delta(z - \psi) + 2 \left(\left(\frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2} \right) = 0, \quad (39)$$

где $\chi = \psi + (1 - \Delta)^{-1}(z - \psi)$ и индекс i отброшен. Следовательно, уравнения (38) и (39) имеют одинаковую линейную часть и нелинейные члены (39) переходят в соответствующие члены (38) на масштабах, много меньших радиуса Россби.

В параграфе 2.2 разделение движений проведено в спектральном виде. Поскольку исходные уравнения мелкой воды имеют постоянные коэффициенты, то эквивалентная система для коэффициентов Фурье имеет вид

бесконечной системы обыкновенных дифференциальных уравнений. К такой системе можно, по крайней мере формально, применить теорию нормальных форм Пуанкаре для обыкновенных дифференциальных уравнений. В Фурье пространстве хорошо видна особенность уравнений мелкой воды, которая состоит в отсутствии резонансного члена, образованного амплитудами быстрых волн в уравнении для медленных волн. Эта особенность приводит к ряду специальных свойств рассматриваемой модели.

После Фурье преобразования и диагонализации получена система

$$\frac{\partial a_{\mathbf{k}}}{\partial t} = \underbrace{U_{\mathbf{klm}}^0 a_l a_m}_{\text{resonant}} + U_{\mathbf{klm}}^+ a_l b_m + U_{\mathbf{klm}}^- a_l b_m^*, \quad (40)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial b_{\mathbf{k}}}{\partial t} + i\omega_{\mathbf{k}} b_{\mathbf{k}} = & V_{\mathbf{klm}}^0 a_l a_m + \underbrace{V_{\mathbf{klm}}^+ a_l b_m}_{\text{resonant}} + V_{\mathbf{klm}}^- a_l b_m^* \\ & + W_{\mathbf{klm}}^0 b_l b_m^* + W_{\mathbf{klm}}^+ b_l b_m + W_{\mathbf{klm}}^- b_l b_m^*, \end{aligned} \quad (41)$$

где все матричные элементы известны, и использована компактная запись.

Для этой системы определено быстрое многообразие, которое является аналогом безвихревого движения в классической гидродинамике невязкой жидкости.

Медленное многообразие не может быть определено так же просто, как быстрое многообразие, потому что уравнение (41) содержит член вида $V_{\mathbf{klm}}^0 a_l a_m$, который играет роль внешней силы и генерирует быструю переменную для любой ненулевой медленной переменной $a_{\mathbf{k}}$. Однако приближенное медленное многообразие может быть построено в предположении слабой нелинейности в любом заданном порядке теории возмущений с помощью следующего предложения.

Предложение 2 *Любой медленный член в форме $V_{k_1 \dots i} a_1 \dots a_i$ может быть исключен из уравнения (41) для быстрой переменной $b_{\mathbf{k}}$.*

При исключении нерезонансных членов в последующих порядках найдено следующее свойство рассматриваемой системы.

Предложение 3 *Уравнение для медленной переменной $a_{\mathbf{k}}$ не содержит медленных членов вида $U_{k_1 \dots n} (b_1 b_2^*) \dots (b_{n-1} b_n^*)$.*

Таким образом показано, что уравнения для медленной переменной $a_{\mathbf{k}}$ в любом порядке содержат лишь собственную нелинейность и модуляцию быстрой переменной $b_{\mathbf{k}}$. Высокочастотная сила, которая могла бы возбуждать медленные движения, отсутствует во всех порядках.

В параграфе 2.3 исследуется проблема нелинейного приспособления локализованных фронтообразных возмущений к состоянию геострофического равновесия (баланса) в рамках уравнений вращающейся мелкой воды без учета зависимости от координаты, проходящей вдоль фронта.

В начале параграфа даны постановка задачи о геострофическом приспособлении и обсуждение известных результатов. Также описаны общие свойства одномерной модели.

Далее, с помощью лагранжева подхода исходная система сводится к одному уравнению для отклонения квазичастиц от своего начального положения $X(x, t) = x + \phi(x, t)$:

$$\ddot{\phi} + f^2\phi + gh'_I \frac{1}{(1 + \phi')^2} + \frac{gh_I}{2} \left[\frac{1}{(1 + \phi')^2} \right]' = fv_I. \quad (42)$$

Это уравнение должно решаться с начальными условиями $\phi(x, 0) = 0$; $\dot{\phi}(x, 0) = u_I(x)$, где u_I – начальное распределение продольной скорости. Случай фронтообразного возмущения соответствует $h_{I,x}$, u_I , v_I с общим компактным носителем.

С помощью непосредственного применения теории возмущений показано, что в модели нет субинерционных захваченных мод, и частотный спектр является непрерывным. Поэтому все начальные $\tilde{\phi}$ возмущения будут рассеиваться, оставляя лишь стационарную часть ϕ_s в окрестности начального возмущения. Скорость релаксации к состоянию приспособления будет зависеть от дальнейших деталей потенциального вихря $Q^{(g)}$. Если присутствуют квазистационарные состояния, т.е. состояния, затухающие только путем тоннелирования суббарьеров, скорость затухания будет экспоненциальной, что хорошо известно из квантовой механики (ср. Мигдал, 1977). В противном случае затухание будет дисперсионным, в соответствии с законом $t^{-\frac{1}{2}}$. Здесь и ниже, "затухание" означает временное уменьшение амплитуды пространственно локализованного возмущения.

Получено уравнение на определение медленного многообразия по начальному потенциальному вихрю

$$-\frac{gH}{f} \frac{d^2h(X)}{dX^2} + h(X) Q(X) = -f. \quad (43)$$

Здесь потенциальный вихрь Q считается функцией X путем обратного отображения $x = x(X, t)$ (или $a = a(X)$):

$$Q(X) = \frac{1}{h_I(x(X))} \left(f + \frac{\partial v_I(x(X))}{\partial x} \right).$$

Для него доказана следующая теорема, которая обеспечивает достаточные условия для существования и единственности медленного многообразия.

Теорема 6 *Для положительного $Q(X)$ с производными на компактных носителях и произвольной постоянной асимптотикой (фронтальный случай) уравнение (43) имеет единственное ограниченное и везде положительное решение $h(X)$ на R .*

Доказательство этой теоремы представлено в отдельном подразделе.

Показано, что 1dRSW модель допускает нелинейные периодические волновые решения с амплитудами, ограниченными сверху некоторым ограничивающим значением. В данном разделе этот факт демонстрируется в лагранжевом описании.

Исследованы разрушение волн и ударные волны в лагранжевых переменных. Проведенный анализ дает следующее:

1. если начальный относительный вихрь $Q - J = \partial_a v$ достаточно отрицательный, разрушение всегда происходит вне зависимости от начальных условий;
2. если относительный вихрь положительный, так же как и производные инвариантов Римана в первоначальный момент, разрушения никогда не происходит.

Следовательно, в контексте приспособления получение ударных волн на антициклонной (отрицательный относительный вихрь) стороне струи должно быть более легким. Поскольку один из инвариантов Римана всегда имеет отрицательную производную для ступенчатых профилей высоты, ударные волны всегда должны получаться путем простого приспособления высоты (без v_I), как наблюдалось при численном моделировании (Kuo & Polvani, 1997). Представляется, что производство ударных волн во время приспособления фронтообразных возмущений неизбежно.

В конце параграфа дано лагранжево описание осесимметричной мелкой воды с помощью радиального уравнения для импульса. Форма этого уравнения аналогична форме найденной в прямоугольном случае; преимущество лагранжевой формулировки применимо также и в этом случае.

В заключительной части параграфа обсуждаются полученные результаты.

Глава 3 посвящена построению колмогоровских решений для кинетических уравнений, описывающих турбулентность коротких инерционно-гравитационных волн.

В параграфе 3.1 приведены стандартные сведения по теории слабой волновой турбулентности для трехволновых и четырехволновых взаимодействий.

В параграфе 3.2 рассмотрены инерционно-гравитационные волны в средних широтах. Для достаточно коротких волн (по сравнению с радиусом Россби) можно приближенно считать, что параметр Кориолиса является постоянным. Это позволяет выделить уравнение для инерционно-гравитационных волн, полагая, что потенциальный вихрь постоянен $q = (f + v_x - u_y)/h = f/h_0$. Уравнения движения для инерционно-гравитационных волн принимают простую гамильтоновскую форму

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\delta H}{\delta \varphi}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\frac{\delta H}{\delta \eta} \quad (2b),$$

где гамильтониан есть $H = H_2 + H_3$,

$$H_2 = \frac{1}{2} \int [(\varphi_x - f\Delta^{-1}\eta_y)^2 + (\varphi_y + f\Delta^{-1}\eta_x)^2 + \eta^2] dx dy,$$

$$H_3 = \frac{1}{2} \int \eta [(\varphi_x - f\Delta^{-1}\eta_y)^2 + (\varphi_y + f\Delta^{-1}\eta_x)^2] dx dy.$$

После перехода к нормальным переменным и исключения трехволнового гамильтониана возникает следующий универсальный гамильтониан

$$H = \int \omega_{\mathbf{k}} |a_{\mathbf{k}}|^2 d\mathbf{k} + \frac{1}{4} \int T_{1234} a_{\mathbf{k}_1}^* a_{\mathbf{k}_2}^* a_{\mathbf{k}_3} a_{\mathbf{k}_4} \delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3 - \mathbf{k}_4) d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 d\mathbf{k}_3 d\mathbf{k}_4.$$

Для коротких волн закон дисперсии становится близким к линейному, но не является масштабно-инвариантным

$$\omega_{\mathbf{k}} \approx ck \left[1 + \frac{1}{2(k\rho)^2} \right]. \quad (44)$$

Трехволновые матричные коэффициенты в этом случае масштабно-инвариантны и совпадают с матричными коэффициентами для потенциальных движений двумерной сжимаемой жидкости. Но четырехволновой матричный элемент не пространственно-инвариантен. Однако, используя преобразование состоящее в растяжении волновых векторов и углов между ними, найдены два стационарных решения кинетического уравнения. Распределение

$$n(k) \propto P^{1/3} k^{-14/3} \quad (45)$$

соответствует постоянному потоку энергии P . Распределение

$$n(k) \propto Q^{1/3} k^{-13/3} \quad (46)$$

соответствует постоянному потоку волн Q . Спектральная плотность энергии будет в этом случае иметь вид $\varepsilon_k = ck^2 n_k$. Локальным является только второе решение. В заключении параграфа полученное решение сравнивается с другими известными спектрами для турбулентных волн в атмосфере.

В параграфе 3.3 рассмотрены инерционно-гравитационные волны на экваторе. Район экватора в атмосфере и океане требует отдельного рассмотрения, потому что вертикальная компонента угловой скорости Земли меняет знак на экваторе. В настоящем параграфе рассмотрены короткие экваториальные волны. Вследствие ограниченной геометрии экваториального волновода динамика экваториальных волн является хорошим кандидатом для применения теории слабой волновой турбулентности, которая требует ансамбля большого числа слабозаимодействующих волн со случайными фазами.

В главе 1 были получены уравнения для коротких инерционно-гравитационных волн (16). В терминах коэффициентов Фурье уравнения для инерционно-гравитационных волн принимают стандартную гамильтонову форму. Гамильтониан в нормальных переменных имеет вид $H = H_2 + H_3$, где

$$H_2 = \int \omega_{\mathbf{k}} |b_{\mathbf{k}}|^2 d\mathbf{k}, \quad \omega_{\mathbf{k}} = k - \frac{\beta k_x}{2k^2}, \quad k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}, \quad (47)$$

и частота $\omega_{\mathbf{k}}$ является положительной для достаточно коротких волн. Добавка H_3 имеет стандартную форму, где в главном порядке по малому параметру неоднородности β матричные элементы имеют вид

$$2U_{123} = V_{123} = \sqrt{18} \frac{k_1(\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3) + k_2(\mathbf{k}_3, \mathbf{k}_1) + k_3(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)}{\sqrt{k_1 k_2 k_3}}. \quad (48)$$

Закон дисперсии инерционно-гравитационных волн не является изотропным или масштабно-инвариантным для каждого направления, поэтому проведен дополнительный анализ получающихся кинетических уравнений. Вид получившихся решений существенно зависит от распадного или нераспадного характера дисперсионного закона. Анализ показал, резонансные триады существуют 1) в относительно широком секторе вокруг оси x в правой полуплоскости \mathbf{k} пространства; 2) в двух достаточно узких сегментах вокруг оси y . За исключением узких сегментов вокруг оси y больше не существует резонансных триад в левой полуплоскости \mathbf{k} пространства. Причем все резонансные триады образуются почти параллельными волновыми векторами. Таким образом получаются различные кинетические уравнения для различных областей фазового пространства в зависимости от того, разрешены или запрещены резонансные триады, соответственно.

В распадном случае применимо кинетическое уравнение с трехволновым интегралом столкновений. Используя преобразование, состоящее из растяже-

ния волновых векторов и углов между ними, найдено стационарное решение кинетического уравнения $N = k^{-3}$. Соответствующая плотность спектральной энергии на единицу k дается выражением $\epsilon_k = \omega_k k N_k = k^{-1}$. Четырехволновой интеграл столкновений факторизован таким же образом в нераспадной области фазового пространства. Найдены два стационарных решения колмогоровского типа: $N = k^{-4}$ и $N = k^{-11/3}$.

В конце параграфа обсуждается западно-восточная асимметрия колмогоровского спектра.

Глава 4 посвящена построению решений и их исследованию для нелинейного уравнения Шредингера (НУШ) с периодическими коэффициентами, описывающего распространение световых импульсов в оптических волоконных линиях передачи информации.

Нелинейное уравнение Шредингера возникает при описании многих физических явлений. Это одно из универсальных уравнений в современной физике. Если коэффициенты постоянны, то нелинейное уравнение Шредингера может быть проинтегрировано методом обратной задачи рассеяния. Однако если возникает потребность в учете неоднородности в коэффициентах, то замечательное свойство интегрируемости исчезает, но тем не менее необходимость в нахождении решений остается. В последующих двух главах уравнение Шредингера рассмотрено в контексте нелинейной волновой оптики, где это уравнение описывает распространение световых импульсов в оптических волокнах.

В параграфе 4.1 выполнено гамильтоново усреднение для нелинейного уравнения Шредингера с периодическими коэффициентами

$$i \frac{\partial A}{\partial z} = \{A, H\} = \frac{\delta H}{\delta A^*} = -d(z) A_{tt} - \epsilon c(z) |A|^2 A, \quad (49)$$

с гамильтонианом

$$H = \int_{-\infty}^{+\infty} (d(z) |A_t|^2 - \epsilon c(z)/2 |A|^4) dt, \quad (50)$$

где функция A есть огибающая электромагнитного поля, периодическая функция $d(z)$ с периодом T_1 описывает дисперсию и T_2 -периодическая функция $c(z)$ описывает колебания мощности, которые возникают за счет наличия потерь и усиления в линии.

После преобразования Фурье и усреднения по z получается уравнение

$$i \frac{\partial \varphi_\omega}{\partial z} - \langle d \rangle \omega^2 \varphi_\omega + \epsilon \int_{-\infty}^{+\infty} T \delta(\omega + \omega_1 - \omega_2 - \omega_3) \varphi_1^* \varphi_2 \varphi_3 d\omega_1 d\omega_2 d\omega_3 = 0. \quad (51)$$

$$T(\Delta\Omega) = \int_0^1 c(z) \exp\{i\Delta\Omega R(z)\} dz, \quad \Delta\Omega = \omega^2 + \omega_1^2 - \omega_2^2 - \omega_3^2. \quad (52)$$

С помощью квазилинейного преобразования это уравнение приводится к нелинейному уравнению Шредингера, если выполняются условия

$$\frac{T(\Delta\Omega) - T(0)}{\Delta\Omega} \ll 1, \quad (53)$$

и совершая обратные преобразования можно найти приближенные решения исходного уравнения (49).

В параграфе 4.2 получены усредненные уравнения для НУШ с периодическими коэффициентами, которые обобщают все известные до этого модели, и имеют максимальный диапазон применимости. Усреднение проводилось методом Боголюбова, и дано сравнение с другими методами усреднения, такими как многомасштабный метод и метод, основанный на технике преобразований Ли.

Для упрощенной версии усредненного уравнения

$$iv_z + \langle d \rangle v_{tt} + \langle c \rangle |v|^2 v = \frac{1}{2} \langle cR^2 \rangle N_2(v), \quad (54)$$

с $\langle d \rangle \sim O(\varepsilon)$, $\langle c \rangle \sim O(\varepsilon)$, и $R \sim O(\rho)$, где

$$N_2(B) := \Delta^2(|B|^2 B) + B^2 \Delta^2 B^* + 2|B|^2 \Delta^2 B - 4B|\Delta B|^2 + 2\Delta(B^2 \Delta B^* - 2|B|^2 \Delta B) + 2B^*(\Delta B)^2, \quad (55)$$

найжены солитонные решения, которые имеют в главном порядке светлый и темный солитон. Для симметричной двухступенчатой дисперсионной карты получено решение в виде светлого солитона ($\langle d \rangle > 0$) уравнения (54)

$$v(z, t) = \eta \sqrt{\frac{2\langle d \rangle}{\langle c \rangle}} \operatorname{sech}(\eta t) e^{i\eta^2 \langle d \rangle z} \left\{ 1 + \frac{16\langle cR^2 \rangle}{3\langle c \rangle} \eta^4 \times \right. \\ \times \left[1 + \operatorname{sech}^2(\eta t) - \frac{19}{8} \operatorname{sech}^4(\eta t) \right] + \frac{64\langle cR^2 \rangle^2}{3\langle c \rangle^2} \eta^8 \left[-\frac{998}{105} + \frac{1024}{105} \operatorname{sech}^2(\eta t) \right. \\ \left. \left. + \frac{509}{70} \operatorname{sech}^4(\eta t) - \frac{10372}{105} \operatorname{sech}^6(\eta t) + \frac{66557}{672} \operatorname{sech}^8(\eta t) \right] \right\}. \quad (56)$$

Для малых значений $\varepsilon \leq 0.01$ усредненный солитон и солитонное решение u очень близки друг к другу и имеют sech -форму.

Для более сильного дисперсионного управления усредненный солитон v теряет свою sech -форму. Рисунок 1 показывает квадрат абсолютной амплитуды v (прерывистая линия) и u (сплошная линия) на логарифмической шкале для $\varepsilon = 0.1$. Функции u и v показывают характерное поведение при сильном дисперсионном управлении. В последнее время, так называемые дисперсионно-управляемые солитоны (ДУ-солитоны) были исследованы только численно и аналитическая форма была неизвестна. На данных рисунках обнаруживаются регулярные понижения с каждой стороны от центра импульса. С помощью использованной здесь теории возмущений было получено до трех понижений с каждой стороны от центра.

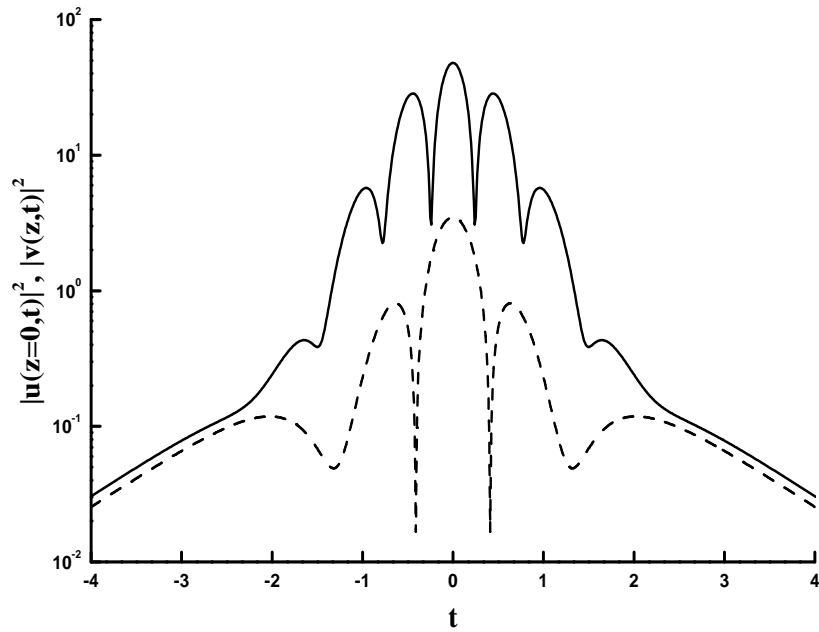


Рис. 1: Квадрат амплитуды $|u(z, t)|^2$ настоящего солитона при $z = 0$ (сплошная линия) и усредненного солитона $|v(z, t)|^2$ (прерывистая линия) в логарифмической шкале для $\varepsilon = 0.1$ и $\eta = 1$.

В конце параграфа дано обсуждение полученных усредненных уравнений и сравнение с другими аналогичными результатами.

В параграфе 4.3 приведено описание численного моделирования усредненного нелинейного уравнения Шредингера (51), описывающего динамику оптических импульсов в оптических линиях связи с переменной дисперсией. Солитонное решение ищется в виде $\phi(\omega, z) = \psi(\omega) \exp(i\lambda^2 z)$.

Для двухступенчатой системы без затухания матричный элемент T является действительной функцией $T = c_0 \sin(s\Delta\Omega)/(s\Delta\Omega)$, где s т.н. напряжение карты и $c(z) = c_0$. Другой важный пример действительного ядра интегрального оператора T – крупномасштабная линия с переменной дисперсией. Для

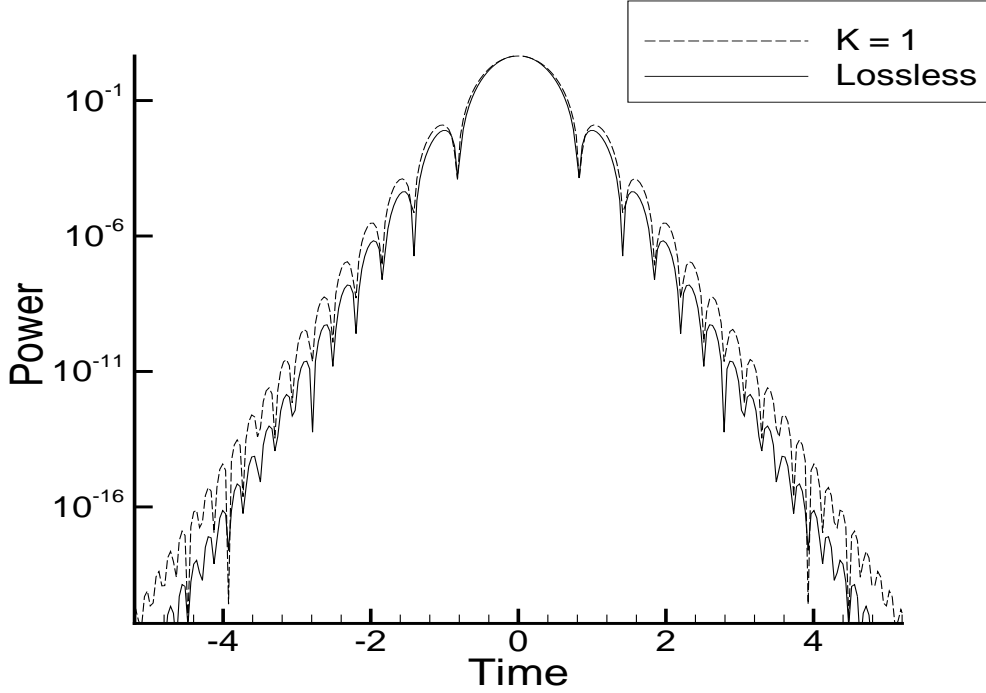


Рис. 2: Прерывистая линия соответствует ДУ-солитону при $K = 1$ (два усилителя на дисперсионном периоде), а сплошная — ДУ-солитону в рамках модели без потерь с $\langle d \rangle = 0.01$.

короткомасштабного управления T имеет комплексный вид.

Для нахождения солитонного решения используется итерационный метод, предложенный Петвиашвили. Идея метода основывается на аппроксимации ядра $T(\Delta\Omega)$ подходящим набором функций. Эта аппроксимация позволяет применить быстрое вычисление сверточных интегралов и уменьшить число операций до $M N \log_2(N)$, где M зависит от аппроксимации $T(\Delta\Omega)$.

Для вычислений рассмотрены два случая дисперсионного управления. В случае крупномасштабного двухступенчатого дисперсионного управления с $L \geq Z_a$ дистанция усиления равна Z_a (км) и $L = 2K \cdot Z_a$ (км), где $K = 1, 2, \dots$. Функция $c(z)$ имеет вид $c(z) = c_0 \exp(-2\gamma z)$, если $0 < z < 1$. Матричный элемент $T(\Delta\Omega)$ для этой системы записывается в виде

$$T(X) = c_0 B(G) \frac{\sin[X K]}{K} \frac{1}{(1 + [2X/\ln G]^2)} \left\{ \frac{\cos[X]}{\sin[X]} + \frac{2 X}{\ln G} \frac{G + 1}{G - 1} \right\}, \quad (57)$$

$$X = \frac{\Delta\Omega Z_a d}{2 L} = \frac{\Delta\Omega d}{4 K}, \quad B(G) = \frac{G - 1}{G \ln G}.$$

При численном моделировании значение коэффициента дисперсии выбиралось $d = 2$. На рисунке 2 представлено распределение мощности точного солитонного решения уравнения (51) для матричного элемента (57). Преры-

вистая линия соответствует ДУ-солитону при $K = 1$ (два усилителя на дисперсионном периоде), а сплошная линия — солитону в рамках модели без потерь. При больших K ($K \gg 30$) форма солитона не меняется и близка к солитонному решению модели без потерь.

Короткомасштабное дисперсионное управление осуществляется при $L \ll Z_a$. При дистанции усиления Z_a , определенной выше, для двухступенчатой дисперсионной карты период компенсации составит $L = Z_a/J$ (км). Матричный элемент $T_{\omega_{123}}$ имеет автомодельную структуру

$$T_{\omega_{123}} = c_0 B(G) \cdot F(a, Z, Y), \quad (58)$$

$$F(a, Z, Y) = \left[1 + \frac{iY}{Z - iY} \left[1 - \frac{Z}{e^Z - 1} \cdot \frac{e^{(1-a)Z + iaY} - 1}{(1-a)Z + iaY} \right] \right] e^{-iaY/2}. \quad (59)$$

Величина B является функцией только коэффициента усиления $G = e^{2\gamma Z_a}$ и не зависит от J . $F(a, Z, Y)$ является функцией от параметра a и комбинации величин $Z = \ln G/J$ и $Y = d\Delta\Omega/J$.

В параграфе 4.4 для описания распространения оптических импульсов в волоконных световодах используется обобщенное нелинейное уравнение Шредингера

$$i \frac{\partial B}{\partial z} + d(z) \frac{\partial^2 B}{\partial t^2} + \sigma(z) |B|^2 B = iG(z)B, \quad (60)$$

где B — комплексная огибающая электромагнитного поля и периодические коэффициенты $d(z)$, $\sigma(z)$, $G(z)$ описывают дисперсию, нелинейность и усиление (потери). Пусть начальные условия для данного уравнения имеют вид $B(t, 0) = B_0(t)$.

Линейная часть уравнения исключается через преобразование

$$B(z, t) = e^{g(z) + i(R(z) + \langle d \rangle z)\Delta} X(z, t), \quad (61)$$

где $g(z) = \int_0^z G(s) ds$, $R(z) = \int_0^z (d(s) - \langle d \rangle) ds$. Уравнение для X принимает форму

$$X_z = ic(z) e^{-i\rho(z)\Delta} \left[\left| e^{i\rho(z)\Delta} X \right|^2 e^{i\rho(z)\Delta} X \right]. \quad (62)$$

Это уравнение решается с помощью простых итераций. Для вычислений делается только одна итерация. Кроме того, для практических приложений представляет интерес нахождение решения в точках $z_n = n$ после n периодов. Для случая, когда периодический член $R(z)$ значительно превышает линейный член $\langle d \rangle z$ в представлении функции $\rho(z) = \langle d \rangle z + R(z)$ можно

сделать еще одно упрощение для решения

$$X(t, z) = B_0(t) + i \int_0^z c(s) e^{-iR(s)\Delta} \left[\left| e^{iR(s)\Delta} B_0(s) \right|^2 e^{iR(s)\Delta} B_0(s) \right] ds + O(\langle d \rangle z). \quad (63)$$

Тогда легко найти решение после n периодов

$$B(t, n) = e^{i\langle d \rangle n \Delta} (B_0(t) + n \Delta X(t)). \quad (64)$$

Первый член в уравнении (64) описывает линейную эволюцию начального решения, а второй дает нелинейную поправку к решению. Отметим, что функция $\Delta X(t)$ описывает нелинейные эффекты. Поправка $\Delta X(t)$ может быть найдена численно для произвольной функции $B_0(t)$ или аналитически для специфических начальных условий $B_0(t)$.

Для начальных данных в виде бесконечной последовательности гауссовых импульсов

$$B_0(t) = \sum_k e^{-p_k t^2 - q_k t - r_k} \quad (65)$$

нелинейная поправка $\Delta X(t)$ вычисляется аналитически, что позволяет проанализировать взаимодействие импульсов от расстояния между ними.

Решения, полученные на основе предложенного алгоритма для решения уравнения Шредингера (60), показали хорошее совпадение с численными решениями, полученными с помощью симметричного метода расщепления по физическим процессам.

В качестве примера были рассмотрены реальные волоконные линии с распределенной накачкой.

Глава 5 содержит 3 раздела, в которых дано описание построения подходящих пробных функций для решения нелинейного уравнения Шредингера вариационным методом.

В данной главе предложен анзац для получения конечномерных уравнений, которые описывают взаимодействия импульсов. При этом предполагается, что исходное уравнение в частных производных имеет вариационную формулировку. Параметрами анзаца являются моменты импульса и коэффициенты тейлоровского разложения фазы.

Рассмотрены два простейших анзаца для описания взаимодействия двух импульсов. В первом случае основными параметрами являются нулевой момент (энергия) импульса и нулевой член в тейлоровском разложении фазы в точке максимума амплитуды импульса. В этом случае удастся построить точное решение для конечномерной системы, описывающей взаимодействие

двух импульсов. Во втором случае берутся первый момент и первый член в разложении фазы. При этом нулевой момент и нулевой член разложения фазы вычисляются аналитически без учета взаимодействия импульсов.

Рассматривается взаимодействие импульсов в гамильтоновой системе

$$i\frac{\partial Y}{\partial z} = \frac{\delta H}{\delta Y^*},$$

которое получается из вариационного принципа

$$S = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{i}{2} Y \frac{\partial Y^*}{\partial z} - \frac{i}{2} Y^* \frac{\partial Y}{\partial z} \right] dt + H \right) dz, \quad (66)$$

где гамильтониан системы H есть функционал от $Y(z, t)$. В качестве основного примера рассмотрено уравнение

$$iY_z + \langle d \rangle Y_{tt} + c(z) e^{-iR_0 \Delta} \left[|e^{iR_0 \Delta} Y|^2 e^{iR_0 \Delta} Y \right] = 0, \quad R_0 = R_0(z), \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial t^2}, \quad (67)$$

которое имеет гамильтониан

$$H = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\langle d \rangle \left| \frac{\partial Y}{\partial t} \right|^2 - \frac{c(z)}{2} |e^{iR_0 \Delta} Y|^4 \right] dt. \quad (68)$$

Нелинейное уравнение Шредингера получается при $R_0 = 0$, $c = c_0$.

В параграфе 5.1 дано описание локализованных импульсов, записанных в полярной форме $Y(z, t) = B(z, t) \exp(i\phi(z, t))$, где $B(z, t)$ и $\phi(z, t)$ есть амплитуда и фаза импульса, с помощью коэффициентов разложения фазы в ряд Тейлора

$$\phi(z, t) = \varphi(z, t - X(z)) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(z) (t - X(z))^n = \sum_{n=0}^{\infty} \phi_n(z) t^n, \quad (69)$$

где $X(z)$ положение центра импульса, и центрированных моментов и импульса

$$M_n(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} B^2(t - X(z))^n dt, \quad P(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} B^2 \frac{\partial \varphi}{\partial t} dt.$$

В результате получается бесконечная система для канонических переменных (P, X) и (M_n, φ_n) .

Рассмотрена простейшая аппроксимация при $\phi(z, t) \approx \varphi_0(z) = \phi_0(z)$ и $B(z, t) = \mu(z) f(z, t - X(z))$, где $f(z, t - X)$ есть произвольная функция такая,

что $\int f^2(z, s)ds = 1$. Используя простейшую аппроксимацию для гамильтониана (68) получен конечномерный гамильтониан

$$H = C_1(z)M_0 - C_2(z)M_0^2, \quad (70)$$

$$C_1(z) = \langle d \rangle \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{df}{dt} \right)^2 dt, \quad C_2(z) = \frac{c(z)}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} |e^{iR_0\Delta} f|^4 dt,$$

который легко интегрируется

$$M_0(z) = M_0(0), \quad \varphi_0(z) = \varphi_0(0) - \int_0^z (C_1(s) - 2C_2(s)M_0) ds.$$

Полученное решение существенно зависит от выбора функции f , поэтому для правильного задания f необходимо использовать априорную информацию. Если коэффициенты $c(z)$ и $R_0(z)$ периодичны с единичным периодом, то периодическое решение получается из общего решения. Коэффициенты C_1 и C_2 зависят от ширины импульса T , поэтому это условие задает связь между шириной T и энергией M_0 для периодического решения.

В параграфе 5.2 рассмотрено взаимодействие двух импульсов в виде $Y = Y_1 + Y_2$. В общем случае импульс характеризуется положением, амплитудой и шириной и соответствующими скоростями изменения этих параметров. Однако в данном параграфе рассмотрена простейшая аппроксимация в предположении, что импульсы неподвижны и имеют постоянную ширину и форму.

$$Y_k(z, t) = b_k(z) f_k(t) \exp\{i\phi_k(z)\}, \quad k = 1, 2, \quad (71)$$

где $f_k(t)$ - форма k -го импульса, $\int f_k^2 dt = 1$ и фаза зависит только от z . Действие для данного представления импульсов имеет вид

$$S = \int \left((b_1^2 + ab_1b_2 \cos(\phi_1 - \phi_2)) \frac{d\phi_1}{dz} + (b_2^2 + ab_1b_2 \cos(\phi_1 - \phi_2)) \frac{d\phi_2}{dz} + \right. \quad (72)$$

$$\left. a \left(\frac{db_1}{dz} b_2 - b_1 \frac{db_2}{dz} \right) \sin(\phi_1 - \phi_2) + H \right) dz, \quad a = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1 f_2 dt, \quad (73)$$

где H - гамильтониан и a - параметр перекрытия импульсов.

Вводя новые переменные r, R, s, S

$$x_1 = r = \phi_1 - \phi_2, \quad x_2 = R = \frac{b_1^2 - b_2^2}{2}, \quad x_3 = s = \phi_1 + \phi_2, \quad x_4 = S = \frac{b_1^2 + b_2^2}{2}$$

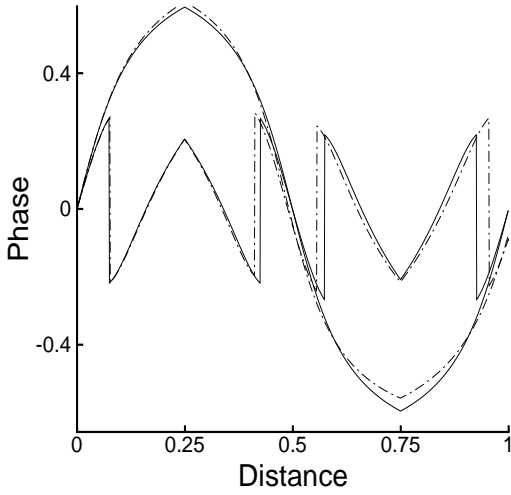


Рис. 3: Сравнение фазы для разных расстояний между импульсами. Более гладкие кривые соответствуют случаю удаленных импульсов.

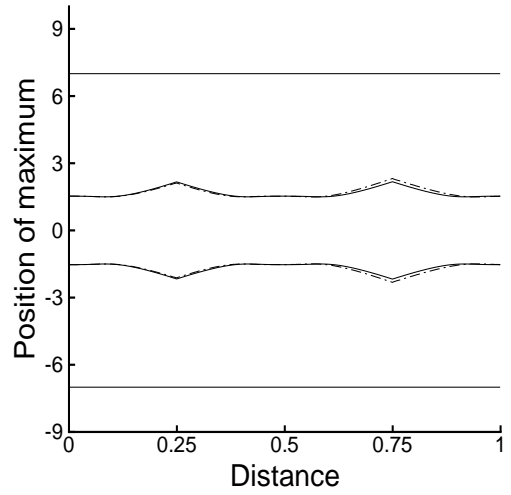


Рис. 4: Сравнение положений максимумов модуля при разных значениях малого параметра. Прямые линии соответствуют отсутствию отклонений максимума для больших расстояний между импульсами.

и преобразуя их подходящим образом, можно записать исходную систему в гамильтоновом виде с гамильтонианом

$$\begin{aligned}
 H = \langle d \rangle & \left(S + \sqrt{S^2 - R^2} \cos(r) (2 \ln a + 1) a \right) + \\
 & + 2c_0(S^2 + R^2) + (c_1 + c_2 \cos(2r))(S^2 - R^2) + \\
 & + 2c_3 \sqrt{S^2 - R^2} (S \cos(\theta) \cos(r) + R \sin(\theta) \sin(r)),
 \end{aligned} \tag{74}$$

полученном из (68). Для этой системы получено точное решение в виде $r = n\pi$, $R = 0$, $S = \text{const}$ и переменная s находится из уравнения

$$\frac{ds}{dz} + \frac{1}{1 + a \cos(n\pi)} \frac{\partial H}{\partial S} = 0,$$

здесь

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial H}{\partial S} = \langle d \rangle & (1 + a \cos(n\pi) + 2a \ln(a) \cos(n\pi)) \\
 & + 2(2c_0 + c_1 + c_2 + 2c_3 \cos(\theta) \cos(n\pi)) S.
 \end{aligned}$$

Условие на периодическое решение легко получается.

Для исследования точности полученного вариационным методом решения было найдено численное решение для исходного уравнения (67). Для сравнения взаимодействия импульсов на далеком и близком расстояниях приведены

рисунки поведения численного и точного решений. Например, на рисунке 3 видно качественное различие поведения фазы. Для разнесенных импульсов фаза ведет себя достаточно гладко. Для близких импульсов фаза импульсов начинают подстраиваться, что приводит к резкому изменению фазы. Рисунок 4 демонстрирует изменения положения максимума для импульсов. Если максимумы разнесенных импульсы двигаются практически независимо, то положение максимумов для близких импульсов расходятся и сближаются синхронно. На представленных рисунках сплошная линия соответствует периодическому решению, полученному вариационным методом и пунктирная линия соответствует численному решению с такими же начальными данными. Все приведенные рисунки показывают достаточно хорошее совпадение указанных решений.

В конце параграфа приведено приближенное решение по малому параметру перекрытия импульсов a .

В параграфе 5.3 также рассматриваются взаимодействия двух импульсов. Решение ищется в виде $Y = Y_1 + Y_2$,

$$Y_k(z, t) = \sqrt{M_{0k}(z)} f_k(z, t - X_k(z)) \exp\{i\phi_{0k}(z) + i\phi_{1k}(z)(t - X_k(z))\}, \quad (75)$$

где $f_k(z, t)$ – форма k -го импульса, $\int f_k^2(z, s) ds = 1$ и $\int s f_k^2(z, s) ds = 0$.

Чтобы уменьшить количество неизвестных параметров, параметры нулевого порядка $(M_{0k}(z), \varphi_{0k}(z))$ находятся из предположения о слабом взаимодействии импульсов. Кроме того рассматриваются только импульсы одинаковой формы

$$Y_k(z, t) = \sqrt{N} f(t - X_k(z)) \exp\{i\phi_k(z, t)\}, \quad k = 1, 2, \quad (76)$$

где $N = M_0$ – постоянная амплитуда импульсов, форма импульсов с шириной T описывается функцией вида $f(t) = \exp(-(t/T)^2/4)/(2\pi)^{1/4}/\sqrt{T}$, $\varphi_k(z, t) = \varphi_{k0}(z) + \varphi_{k1}(z)(t - X_k(z))$ – разложение фаз. При этом нулевой член разложения фазы можно записать в следующем виде $\varphi_{0k}(z) = \varphi_{0k}(0) + \theta(z)/2$, где $\theta(z)$ известная функция и $\theta(0) = 0$.

Перейдя к новым зависимым переменным

$$S = \frac{X_1 + X_2}{2}, \quad R = \frac{X_1 - X_2}{2}, \quad s = \varphi_{11} + \varphi_{21}, \quad r = \varphi_{11} - \varphi_{21}, \quad (77)$$

получается действие

$$S = \int \left(N e^{-\frac{R^2+r^2}{2}} R \cos(r_0 - sR) \frac{dr}{dz} + N r \frac{dR}{dz} + N e^{-\frac{R^2+r^2}{2}} r \sin(r_0 - sR) \frac{ds}{dz} + \right. \\ \left. N \left(s + e^{-\frac{R^2+r^2}{2}} (s \cos(r_0 - sR) + R \sin(r_0 - sR)) \right) \frac{dS}{dz} - \right. \\ \left. N \left(1 + e^{-\frac{R^2+r^2}{2}} \cos(r_0 - sR) \right) \frac{d\theta}{dz} + H \right) dz,$$

где $r_0 = \varphi_{01}(0) - \varphi_{02}(0)$, H – гамильтониан. Поскольку система, получающаяся из этого действия, сохраняет величину

$$P = s + e^{-\frac{R^2+r^2}{2}}(s \cos(r_0 - sR) + R \sin(r_0 - sR)),$$

то ее порядок может быть уменьшен. В результате приближенных преобразований исходная система сводится к канонической гамильтоновой системе с одной парой сопряженных переменных (r, R) .

Для сравнения решений проведены расчеты для импульсов с разными начальными положениями и фазами.

В заключении приведены основные результаты диссертации.

Основные результаты

Содержанием диссертации являются результаты, полученные автором в ходе разработки фундаментальных основ для решения крупной научной проблемы связанной с построением приближенных математических моделей, описываемых уравнениями гидродинамического типа с переменными коэффициентами. В частности получены следующие основные результаты:

1. Разработан фундаментальный метод построения и исследования математических моделей на основе метода нормальных форм для специальных классов моделей, которые описываются дифференциальными уравнениями в частных производных с переменными коэффициентами. Построена нормальная форма Пуанкаре для уравнений в частных производных с переменными коэффициентами и с главной частью в виде линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Построена новая нормальная форма для класса градиентных систем с кососимметричной структурной матрицей и положительной квадратичной характеристической функцией. Доказана теорема об асимптотическом расщеплении скобки Пуассона на невырожденную (симплектическую) скобку Пуассона и вырожденную (транверсальную) скобку Пуассона. В качестве конкретного применения получены и исследованы приближенные математические модели описываемые уравнениями гидродинамического типа.

2. Решена фундаментальная проблема геофизической гидродинамики, связанная с математическим моделированием геострофического приспособления начальных данных для скорости ветра и давления в рамках модели вращающейся мелкой воды с постоянным параметром Кориолиса. В случае зависимости от одной пространственной переменной доказаны существование и единственность для установившегося сбалансированного состояния, показано отсутствие захваченных волн при геострофическом приспособлении, найдены

критерии образования сингулярности. В двумерном случае проведено полное разделение быстрых и медленных движений, построены приближенное инвариантное медленное многообразие и уравнения движения на нем.

3. Предложены математические модели для описания инерционно-гравитационных волн во вращающейся мелкой воде в средних широтах и на экваторе. Найдены точные колмогоровские решения кинетического уравнения для коротких инерционно-гравитационных волн, которые имеют анизотропный спектр близкий к линейному, с помощью применения и развития метода слабой волновой турбулентности.

4. Получены усредненные модели распространения оптических импульсов в волоконных линиях передачи информации, описываемых нелинейным уравнением Шредингера с периодическими коэффициентами, с использованием различных методов усреднения и обоснованы условия применимости. Получены аналитические решения усредненных моделей. Разработан и опробован эффективный численный алгоритм для нахождения периодических локализованных решений усредненной модели. Разработана квазилинейная модель для описания распространения оптических импульсов, описываемых нелинейным уравнением Шредингера с большой вариацией периодических коэффициентов, на основе которой предложен эффективный численно-аналитический метод нахождения решений.

5. Предложен вариационный метод получения малопараметрических гамильтоновых моделей для описания взаимодействия импульсов. Найдено точное решение для модели взаимодействия двух импульсов. Показана применимость построенных моделей для математического моделирования взаимодействия двух импульсов.

Публикации автора по теме диссертации.

Основные публикации в ведущих рецензируемых журналах:

- [1] Медведев С. Б. Асимптотическая нормальная форма скобки Пуассона для одномерных моделей жидкости // Вестник Новосибирского государственного университета. – 2005. – Т. 5. – Вып. 4. – С. 3-12.
- [2] Medvedev S.B., Zeitlin V. Weak turbulence of short equatorial waves // Physics Letters A. – 2005. – V. 342. – P. 269-290.
- [3] Медведев С. Б. Теорема Дарбу для распределенных гамильтоновых систем // Вестник Новосибирского государственного университета. – 2004. – Т.4. – Вып.1. – С. 37-55.

- [4] Курикалова М. А., Медведев С. Б. Вариационный подход для описания взаимодействия импульсов: положение и импульс // Вестник Новосибирского государственного университета. – 2004. – Т. 4. – Вып. 1. – С. 30-46.
- [5] Медведев С. Б., Федорук М. П. Квазилинейная теория нелинейного уравнения Шредингера с периодическими коэффициентами // Письма в ЖЭТФ. – 2004. – Т. 79. – Вып. 1. – С. 19-24.
- [6] Медведев С. Б. Нормальные формы для градиентных систем с кососимметричной структурной матрицей // Вычислительные технологии. – 2003. – Т. 8. – № 6. – С. 60–69.
- [7] Курикалова М. А., Медведев С. Б., Федорук М. П. Использование вариационного подхода для описания взаимодействия оптических импульсов в волоконных линиях связи // Вычислительные технологии. – 2003. – Т. 8. – Специальный выпуск – С. 77-85.
- [8] Turitsyn S. K., Shapiro E. G., Medvedev S. B., Fedoruk M. P., Mezentsev V. K. Physics and mathematics of dispersion-managed optical solitons // Comptes Rendus Physique. – 2003. – V. 4, – Iss. 1. – P. 145-161.
- [9] Курикалова М. А., Медведев С. Б. Вариационный подход для описания взаимодействия импульсов: энергия и фаза // Вестник Новосибирского государственного университета. – 2003. – Т. 3. – Вып. 1. – С. 37-55.
- [10] Wingen A., Spatschek K. H., Medvedev S. B. Averaged dynamics of optical pulses described by a nonlinear Schrodinger equation with periodic coefficients // Physical Review E. – 2003. – V. 68. – N. 4. – P. 046610-21.
- [11] Le Sommer J., Medvedev S., Plougoonven R., Zeitlin V. Singularity formation during relaxation of jets and fronts toward the state of geostrophic equilibrium // Communications in Nonlinear Sciences and Numerical Simulations. – 2003. – V. 8. – Issues 3-4. – P. 415-442.
- [12] Zeitlin V., Medvedev S., Plougoven R. Frontal geostrophic adjustment, slow manifold and nonlinear wave phenomena in one-dimensional rotating shallow water. Part 1. Theory // Journal of Fluid Mechanics. – 2003. – V. 481. – P. 269-290.
- [13] Medvedev S. B., Styrina O. V., Musher S. L., Fedoruk M. P. Path-averaged optical soliton in double-periodic dispersion-managed systems // Phys. Rev. E. – 2002. – V. 66. – N. 6. – P. 0666071-0666076.

- [14] Medvedev S. B., Shapiro E. G., Fedoruk M. P., Turitsyna E. G. The theory of optical communication lines with a short-scale dispersion management // ЖЭТФ. – 2002. – Т. 121. – Вып. 5. – С. 1040-1050.
- [15] Turitsyn S. K., Turitsyna E. G., Medvedev S. B., Fedoruk, M. P. Averaged model and integrable limits in nonlinear double-periodic Hamiltonian systems // Phys. Rev. E. – 2000. – V. 61. – N. 3. – P. 3127-3132.
- [16] Medvedev S. B. The slow manifold for the shallow water equations on f-plane // Journal of the Atmospheric Sciences. – 1999. – V. 56. – P. 1050-1054.
- [17] Medvedev S. B., Turitsyn, S. K. Hamiltonian averaging and integrability in nonlinear systems with periodically varying dispersion // Письма в ЖЭТФ. – 1999. – Т. 69. – Вып. 7. – С. 465-470.
- [18] Medvedev S. B. Poincare normal forms for partial differential equations // Proc. R. Soc. Lond. A. – 1999. – V. 455. – Iss. 1991. – P. 4061-4075.
- [19] Falkovich G., Kuznetsov E., Medvedev S. Nonlinear interaction between long inertio-gravity and Rossby waves // Nonlinear Processes in Geophysics. – 1994. – V. 1. – No. 2/3. – P. 168-171.
- [20] Falkovich G. E., Medvedev S. B. Kolmogorov-like spectrum for turbulence of inertial-gravity waves // Europhysics Letters. – 1992. – V. 19. – N. 4. – P. 279-284.

Дополнительные публикации в сборниках и трудах конференций:

- [21] Курикалова М.А., Медведев С.Б., Федорук М.П. Квазилинейная теория нелинейного уравнения Шредингера для волоконно-оптических линий связи с периодическими параметрами // Сборник трудов международной конференции по вычислительной математике МКВМ - 2004.(21-25 июня 2004г., Академгородок, Новосибирск, Россия). – С. 537-543.
- [22] Shtyrina O., Medvedev S., Fedoruk M. Dispersion-managed soliton for path-averaged model of optical fiber communication line // Proceedings of International Conference on Computational Mathematics. Novosibirsk, 2002. – V. 2. – P. 697-703.
- [23] Medvedev S. B. Normal form and initialization for rotating shallow water // Annales Geophysicae. – 2001. – V.3. – P. 8138.
- [24] Turitsyn S., Doran N., Turitsyna E., Shapiro E., Medvedev S., Fedoruk M. Averaged model and integrable limits in nonlinear double-periodic

- Hamiltonian systems // Massive WDM and TDM Solution Transmission Systems, (ed. A. Hasegawa). – Kluwer Academic Publishers, 2000. – P. 235-251.
- [25] Медведев С. Б. Нормальные форма для уравнений в частных производных // Тезисы докладов Третьего Сибирского Конгресса по прикладной и индустриальной математике, Новосибирск, 1998. – С. 137.
- [26] Medvedev S. B. Normal forms for shallow water equations// Annales Geophysicae. – 1998. – Supplement IV to V. 16. – P. 1127.
- [27] Medvedev S. B. Normal forms for PDEs // Book of Abstracts. John Hopkins Conference in Environmental Fluid Mechanics. USA, Baltimore, 1998. P. 110-111.
- [28] Медведев С. Б. Нормальная форма уравнений мелкой воды на бета плоскости // Тезисы докладов Второго Сибирского Конгресса по прикладной и индустриальной математике, Новосибирск, 1996. – С. 287.
- [29] Медведев С. Б. Нормальная форма уравнений мелкой воды для длинноволновой аппроксимации // Тезисы докладов международной конференции "Математические модели и численные методы в механике континуума". Новосибирск, 1996, – С. 391.
- [30] Medvedev S. B. Two examples of normal forms for the shallow water equations // Nonlinear Waves. Synchronization and Patterns. Part 2. Edited by M. I. Rabinovich, M. M. Sushchik and V. D. Shalfeev. – Nizhny Novgorod: Nizhny Novgorod University Press, 1996. – P. 162-166.
- [31] Medvedev S. B. On slow manifold of the shallow water equations // "Advanced Mathematics, Computations and Applications", International Conference, Novosibirsk, 20-25 June, 1995. Abstracts. 1995. – P. 235-236.

Подписано в печать
Формат бумаги 60 × 86 × 1/16
Тираж 100 экз.

2006
Объем 1,25 п. л.
Заказ №

Отпечатано в издательском центре ОИИ СО РАН
630090, г. Новосибирск, проспект академика Лаврентьева, 6