

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Механико-математический факультет
Кафедра математического моделирования

Г. С. Хакимзянов, Л. Б. Чубаров, П. В. Воронина

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Учебное пособие

Рекомендовано Федеральным государственным автономным образовательным учреждением высшего профессионального образования «Московский физико-технический институт (государственный университет)» в качестве учебного пособия для студентов, обучающихся в бакалавриате по специальности 010800 «Механика и математическое моделирование».
Регистрационный номер рецензии 2567 от 15 октября 2013 г. МГУП

Новосибирск
2014

ББК В185.121
УДК 519.85+519.688+521
Х 162

Рецензент д-р физ.-мат. наук С. Г. Черный

Издание подготовлено в рамках реализации *Программы развития государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Новосибирский государственный университет»* на 2009–2018 годы.

Хакимзянов Г.С.

Х 162 Математическое моделирование : учеб. пособие / Г. С. Хакимзянов, Л. Б. Чубаров, П. В. Воронина ; Новосиб. гос. ун-т. — Новосибирск: РИЦ НГУ, 2014. — 263 с.

ISBN 978-5-4437-0074-8

Учебное пособие соответствует программе курса лекций «Математическое моделирование», который читается на втором курсе механико-математического факультета НГУ. В пособии излагаются универсальные методологические подходы, позволяющие строить математические модели изучаемых объектов на основе использования фундаментальных законов природы, вариационных принципов, иерархических цепочек, метода аналогий. Представлены примеры построения и анализа математических моделей в биологии, экономике, в задачах поддержки принятия решений. Приведена общая математическая модель движения сплошных сред, представлены специальные модели, описывающие движения жидкостей, газов, деформируемых тел. Формулируются задачи, которые необходимо решить на семинарских занятиях.

ББК В185.121

УДК 519.85+519.688+521

© Новосибирский государственный университет, 2014

© Г. С. Хакимзянов, Л. Б. Чубаров, П. В. Воронина, 2014

ISBN 978-5-4437-0074-8

Оглавление

Введение	9
Глава 1. ОБЩИЕ ПРИНЦИПЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ	13
§ 1.1. Построение математической модели	13
1.1.1. Качественное описание явления.	13
1.1.2. Математическая модель.	13
1.1.3. Законы сохранения.	15
1.1.4. Вариационные принципы.	17
1.1.5. Метод аналогий.	21
1.1.6. Иерархия моделей.	22
1.1.7. Исследование модели.	23
Задачи	24
§ 1.2. Общие требования к вычислительным алгоритмам	26
1.2.1. Переход к дискретной модели.	26
1.2.2. Точность алгоритма.	29
1.2.3. Устойчивость алгоритма.	30
1.2.4. Экономичность алгоритма.	30
1.2.5. Параллелизуемость алгоритма.	31
1.2.6. Связь алгоритма с архитектурой ЭВМ.	31
1.2.7. Исследование алгоритма.	32
Задачи	33
§ 1.3. Некоторые принципы разработки программ	34
1.3.1. Проектирование программы.	34
1.3.2. Программирование модулей.	36
1.3.3. Отладка и тестирование программы.	37
1.3.4. Проведение расчетов и анализ результатов.	39
1.3.5. Принятие решения.	40

Глава 2. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ В БИОЛОГИИ, ЭКОЛОГИИ, ЭКОНОМИКЕ, В ЗАДАЧАХ ПОДДЕРЖКИ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ	41
§ 2.1. Модели динамики численности изолированных популяций	41
2.1.1. Модель Мальтуса.	41
2.1.2. Модель Ферхюльста — Пирла.	43
2.1.3. Обобщение модели Ферхюльста — Пирла.	44
Задачи	45
§ 2.2. Модели межвидового соперничества популяций	46
2.2.1. Модель межвидовой конкуренции.	46
2.2.2. Модель Лотки — Вольтерра.	51
2.2.3. Другие модели двухвидовых взаимодействий.	57
Задачи	58
§ 2.3. Обобщенные модели взаимодействия популяций	60
2.3.1. Проблема устойчивости.	60
2.3.2. Устойчивость по Ляпунову.	61
2.3.3. Модель Колмогорова.	66
2.3.4. Контрпример.	75
Задачи	78
§ 2.4. Простейшие математические модели экономических процессов	79
2.4.1. Простейшая модель экономического роста.	79
2.4.2. Исследование макроэкономического равновесия.	83
2.4.3. Биолого-экономическая аналогия на примере модели Лотки — Вольтерра.	87
Задачи	89
§ 2.5. Математическое моделирование в задачах поддержки принятия решений	90
2.5.1. Задачи принятия оптимальных решений.	90
2.5.2. Принцип Парето.	98
2.5.3. Подходы к решению многоцелевых задач.	103
Задачи	107
Глава 3. АКСИОМЫ МЕХАНИКИ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ	108
§ 3.1. Аксиоматика сплошной среды	108
3.1.1. Аксиома пространства-времени.	108
3.1.2. Аксиома материального континуума.	109
§ 3.2. Движение сплошной среды	111
3.2.1. Аксиома движения.	111
3.2.2. Лагранжево и эйлерово описания сплошной среды.	113

	Задачи	115
§ 3.3.	Силовые и энергетические характеристики сплошной среды	117
§ 3.4.	Замыкающие соотношения и интегральные законы сохранения	119
3.4.1.	Замыкающие соотношения для сил.	119
3.4.2.	Замыкающие энергетические соотношения.	122
3.4.3.	Интегральные законы сохранения.	123

Глава 4. НЕКОТОРЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ АЛГЕБРЫ, МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА И ТЕОРИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ **124**

§ 4.1.	Векторные пространства	124
4.1.1.	Векторные пространства.	124
4.1.2.	Скалярные произведения и нормы.	125
4.1.3.	Базисы и кобазисы.	126
4.1.4.	Немые индексы.	127
4.1.5.	Ковариантные и контравариантные компоненты. . .	128
	Задачи	128
§ 4.2.	Линейные отображения	129
4.2.1.	Пространство линейных отображений.	129
4.2.2.	Изометрия нормированных пространств.	130
4.2.3.	Матрица линейного отображения.	130
4.2.4.	След матрицы и линейного отображения.	131
4.2.5.	Инварианты матриц и линейных отображений. . . .	132
4.2.6.	Сопряженные, самосопряженные (симметричные), антисимметричные и ортогональные отображения. . .	133
4.2.7.	Свертка отображений.	134
4.2.8.	Векторное произведение.	134
	Задачи	136
§ 4.3.	Тензоры	137
4.3.1.	Определения.	137
4.3.2.	Примеры тензоров.	138
4.3.3.	Изоморфизм $\mathbb{T}^2(\mathbf{R}^m) \sim \mathcal{L}(\mathbf{R}^m)$	138
	Задачи	139
§ 4.4.	Скалярные, векторные и тензорные поля	140
4.4.1.	Непрерывные поля.	140
4.4.2.	Дифференцируемые поля.	140
4.4.3.	Производные по направлению и частные производные. Матрица Якоби.	141
4.4.4.	Дивергенция векторного поля.	142
4.4.5.	Дивергенция тензорного поля.	142

4.4.6.	Формулы Гаусса — Остроградского.	143
4.4.7.	Оператор Лапласа.	144
	Задачи	144
§ 4.5.	Обыкновенные дифференциальные уравнения	145
4.5.1.	Задача Коши.	145
4.5.2.	Уравнение в вариациях.	146
4.5.3.	Формула Эйлера.	146

Глава 5.	ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ЗАКОНЫ	
	СОХРАНЕНИЯ	148
§ 5.1.	Дифференциальный аналог закона сохранения массы . . .	148
5.1.1.	Области определения и соглашения о гладкости. . .	148
5.1.2.	Общая схема преобразования интегральных законов.	149
5.1.3.	Полная производная.	150
5.1.4.	Перестановка дифференцирования и интегрирования.	150
5.1.5.	Уравнение неразрывности.	151
	Задачи	152
§ 5.2.	Закон сохранения импульса	153
5.2.1.	Новая форма записи интегрального закона сохране-	
	ния импульса.	153
5.2.2.	Тензор напряжений.	154
5.2.3.	Закон сохранения импульса.	157
5.2.4.	Закон сохранения момента импульса.	158
5.2.5.	Симметричность тензора напряжений.	159
	Задачи	160
§ 5.3.	Уравнение притока тепла	161
5.3.1.	Вектор потока тепла.	161
5.3.2.	Тензор скоростей деформации.	161
5.3.3.	Уравнение притока тепла.	162
	Задачи	163
§ 5.4.	Дифференциальная модель	
	сплошной среды	164

Глава 6.	ТЕРМОДИНАМИКА СПЛОШНОЙ СРЕДЫ	165
§ 6.1.	Первое начало термодинамики	165
6.1.1.	Термодинамические эффекты в сплошных средах. .	165
6.1.2.	Параметры состояния.	166
6.1.3.	О числе параметров состояния для сплошных сред.	167
6.1.4.	Полная система определяющих параметров.	169
6.1.5.	Процессы и циклы.	170
6.1.6.	О взаимодействии системы с внешними объектами.	171

6.1.7.	Закон сохранения энергии — первое начало термодинамики.	172
6.1.8.	Внутренняя энергия системы.	174
6.1.9.	Термодинамическое равновесие.	175
§ 6.2.	Энтропия. Второе начало термодинамики	176
6.2.1.	Количество теплоты.	177
6.2.2.	Абсолютная температура и энтропия.	178
6.2.3.	Второе начало термодинамики.	178
§ 6.3.	Аксиомы термодинамики	179
6.3.1.	Основная аксиома термодинамики.	179
6.3.2.	Аксиома локального равновесия.	179
6.3.3.	Неравенство Клаузиуса — Дюгема.	180
6.3.4.	Аксиома Фурье.	181

Глава 7. ДЕФОРМАЦИЯ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ И ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ УРАВНЕНИЯ

182

§ 7.1.	Тензоры деформации и скоростей деформации	182
7.1.1.	Деформация сплошной среды.	182
7.1.2.	Тензор деформации Лагранжа.	183
7.1.3.	Тензор деформации Эйлера.	185
7.1.4.	Скорость деформации.	185
	Задачи	185
§ 7.2.	Определяющие уравнения	186
7.2.1.	Принцип причинности.	186
7.2.2.	Принцип пространственной локализации.	186
7.2.3.	Системы отсчета.	187
7.2.4.	Принцип независимости от системы отсчета.	189
7.2.5.	Индифферентность основных тензоров.	189
7.2.6.	Пример: жидкости и газы.	191
7.2.7.	Пример: упругие тела.	192
7.2.8.	Пример: определяющее уравнение для вектора потока тепла.	193
§ 7.3.	Изотропные функции	193
7.3.1.	Изотропные функции.	193
7.3.2.	Представление симметричных функций.	194
7.3.3.	Представление изотропных тензорных функций.	195
7.3.4.	Представление изотропных скалярных функций	199
7.3.5.	Представление изотропных векторных функций	199
7.3.6.	Еще раз о законе Фурье.	200

Глава 8. МОДЕЛИ ЖИДКОСТЕЙ	202
§ 8.1. Замыкание (DM)-модели жидкости	202
8.1.1. Основное уравнение состояния.	202
8.1.2. Однородность уравнения состояния.	202
8.1.3. Аксиомы относительно уравнения состояния.	204
8.1.4. Первая замкнутая модель жидкости.	205
§ 8.2. Классическая модель жидкости	206
8.2.1. Аксиома линейности.	206
8.2.2. Уравнения классической модели жидкости.	207
§ 8.3. Модели несжимаемой жидкости	208
8.3.1. Несжимаемая жидкость.	208
8.3.2. Об уравнении притока тепла.	210
8.3.3. Модель идеальной жидкости.	211
Задачи	212
Ответы, указания, решения	213
Библиографический список	241
Дополнительная литература	244
Персоналии	245
Предметный указатель	259

*Светлой памяти
Рустяма Рафаэловича Ахмерова
посвящается...*

Введение

Сущность методологии математического моделирования состоит в замене исходного объекта его образом — математической моделью и дальнейшем изучении модели, например, с помощью реализуемых на компьютерах вычислительных алгоритмов. Этот метод познания сочетает в себе многие достоинства теории и эксперимента [31]. Работа не с самим объектом (явлением, процессом), а с его моделью дает возможность безболезненно, относительно быстро и без существенных затрат исследовать его свойства и поведение в любых мыслимых ситуациях (преимущества теории). В то же время эксперименты с моделями объектов позволяют при поддержке современной вычислительной техники и численных алгоритмов подробно изучать объекты в достаточной полноте, недоступной чисто теоретическим подходам (преимущество эксперимента). Методология математического моделирования бурно развивается, охватывая все новые сферы — от разработки технических систем до анализа сложнейших социальных и экономических процессов.

Элементы математического моделирования использовались с самого начала появления точных наук, второе их развитие пришлось на конец 40-х — начало 50-х годов XX века и было обусловлено, по крайней мере, двумя причинами. Первая из них — появление ЭВМ, расширившее возможности исследований. Вторая — национальные программы СССР и США по созданию новых видов вооружений, которые не могли быть реализованы традиционными методами. Математическое моделирование блестяще справилось с этой задачей: ядерные взрывы, полеты ракет и спутников были предварительно «осуществлены» с помощью математических моделей на ЭВМ.

В настоящее время начинается третий этап развития математического моделирования с привлечением новых возможностей информационного общества. Без владения информационными ресурсами нельзя думать о решении важных проблем, стоящих перед мировым сообществом. Однако исходная, «сырая» информация зачастую мало что дает для анализа и прогноза, для принятия решений и контроля за их исполнением. Нужны надежные способы переработки такого информационного «сырья» в го-

товый «продукт», т. е. в точное знание. Математическое моделирование может и должно стать интеллектуальным ядром информационных технологий, всего процесса информатизации общества.

Сама постановка вопроса о математическом моделировании какого-либо объекта порождает четкий план действий. Его можно условно разбить на три этапа: разработка модели, выбор алгоритма, создание программы (рис. 1). На первом этапе выбирается (или строится) эквивалент объекта, отражающий в математической форме его свойства — законы, которым он подчиняется, связи, присущие составляющим его частям, и т. д. Математическая модель (или ее фрагменты) исследуется теоретическими методами, что позволяет получить важные предварительные знания об объекте.

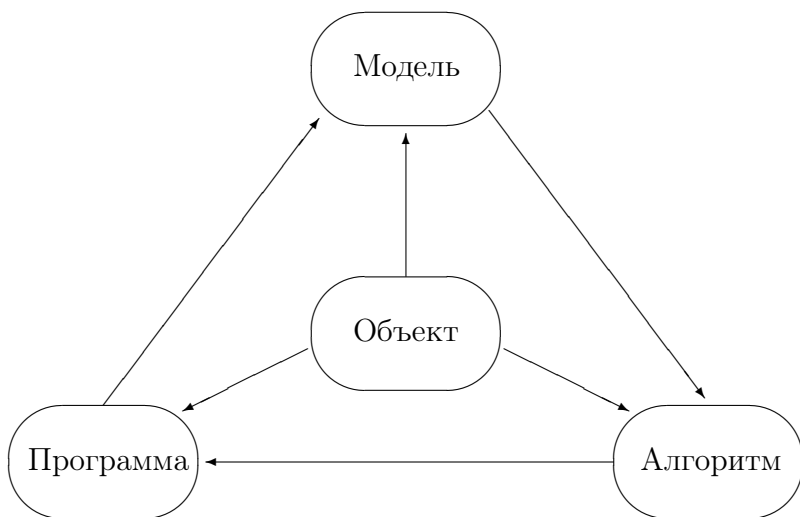


Рис. 1. Элементы математического моделирования

Второй этап — выбор (или разработка) алгоритма для реализации модели на компьютере. Модель представляется в форме, удобной для применения численных методов, определяется последовательность вычислительных и логических операций, которые нужно произвести, чтобы найти искомые величины с заданной точностью. Вычислительные алгоритмы должны не искажать основные свойства модели и, следовательно, исходного объекта, быть экономичными и адаптирующимися к особенностям решаемых задач и используемых компьютеров.

На третьем этапе создаются программы, «переводящие» модель и алгоритм на доступный компьютеру язык. К ним также предъявляются требования экономичности и адаптивности.

Создав триаду «модель—алгоритм—программа», исследователь получает в руки универсальный, гибкий и недорогой инструмент, который вначале отлаживается, тестируется в «пробных» вычислительных экспериментах. После того как адекватность (достаточное соответствие) триады исходному объекту удостоверена, с моделью проводятся разнообразные и подробные «опыты», дающие все требуемые качественные и количественные свойства и характеристики объекта. Процесс моделирования сопровождается улучшением и уточнением по мере необходимости всех компонентов триады.

Основным препятствием для широкого использования математического моделирования в науке, технике, управлении является недостаток квалифицированных специалистов. Требования, предъявляемые к специалисту в области математического моделирования, весьма высоки и вместе с тем противоречивы. С одной стороны, он должен быть профессионалом, глубоко понимающим достаточно узкую конкретную область исследований. С другой стороны, ему часто приходится выступать как ученому, который видит проблему в целом и способен уточнить, а иногда и радикально изменить постановку задачи, предложенную физиками, химиками или биологами. Работа в области математического моделирования предполагает своеобразный стиль мышления, в котором глубина и конкретность сочетаются с широтой и пониманием общих идей. Поэтому изучение методологии математического моделирования должно занимать важное место в современном университетском образовании.

В основу настоящего пособия положен материал лекций полугодового основного курса «Математическое моделирование», сопровождаемого семинарами, который в течение ряда лет читается на механико-математическом факультете НГУ в четвертом семестре. У студентов-второкурсников математических специальностей университетов за плечами имеются лишь немногие пройденные курсы (математического анализа, алгебры, вычислительных методов линейной алгебры, другие вводные курсы), поэтому мы постарались изложить материал в форме, максимально доступной для этой категории студентов и одновременно побуждающей их к необходимости усвоения последующих основных и специальных курсов, поскольку верная стратегия математического моделирования различных объектов может быть намечена только при хорошем представлении об имеющемся инструментарии и основных достижениях в каждой из компонент упомянутой выше триады.

В пособии излагаются основные принципы построения математических моделей, вычислительных алгоритмов и реализующих их программ, приводятся примеры элементов математического моделирования в биологии, экономике, управлении. Далее выписывается общая математическая модель движения сплошных сред в виде интегральных законов сохранения, и обсуждаются вопросы получения из нее специальных моделей, описывающих движения жидкостей, газов, деформируемых тел. Для лучшего усвоения лекционного материала некоторые параграфы завершаются формулировкой задач, которые необходимо решить на семинарских занятиях. Часть задач снабжена указаниями и подробными решениями. Список литературы не претендует на полноту. В нем приведены наиболее простые и доступные источники.

В пособии использована трехиндексная нумерация формул и задач для семинарских занятий (номер главы, номер параграфа в главе, номер формулы или задачи в параграфе), сквозная нумерация утверждений (лемм, теорем) и рисунков. Доказательство утверждений завершается значком «■».

В заключение хочется выразить сердечную благодарность всем нашим коллегам, общение с которыми на семинарах академика Николая Николаевича Яненко в 60–80-х годах XX века постепенно привело к выстраиванию методологии метода математического моделирования. Концепция математического моделирования получила дальнейшее развитие в научной школе академика Юрия Ивановича Шокина, которая была включена в Президентскую программу поддержки ведущих научных школ Российской Федерации (грант № НШ-5006.2014.9) и повлияла на подбор материала для настоящего пособия.

Особую признательность авторы выражают безвременному ушедшему из жизни Рустяму Рафаэловичу Ахмерову, блестяще читавшему курс «Математическое моделирование» в 90-х годах прошлого века на механико-математическом факультете НГУ. Предложенный им стиль изложения материала, связанного с построением моделей сплошной среды, использован в соответствующих главах настоящего пособия.

Глава 1.

ОБЩИЕ ПРИНЦИПЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

§ 1.1. Построение математической модели

1.1.1. Качественное описание явления. Одно из оснований материалистического мировоззрения составляет тезис о неисчерпаемости мира и каждой его части [39], о том, что любое явление природы неисчерпаемо в своей сложности. Это значит, что в одном конкретном исследовании учесть специфику всех сторон явления (объекта) невозможно, поэтому при построении математической модели следует вначале дать качественное описание явления, стремясь определить и выделить факторы, наиболее существенные с точки зрения поставленной исследовательской задачи, пренебрегая факторами второстепенными, т. е. описание, фиксирующее одно и игнорирующее многое другое, описание, оставляющее от нашего «настоящего», слишком сложного и запутанного, совсем немного.

Такое разделение на главные и второстепенные факторы выполняется на основе имеющихся знаний о реальном явлении. Однако надо иметь в виду, что из-за неполноты этих знаний после проведения всей цепочки математического моделирования, возможно, потребуется пересмотр математической модели, иногда даже кардинальный: может оказаться, что факторы процесса, считавшиеся второстепенными, на самом деле равнозначны главным, выявятся новые факторы, доминирующие лишь в ограниченном диапазоне определяющих параметров и т. д.

1.1.2. Математическая модель. Далее в соответствии с выбранным качественным описанием объекта формируется его математическая модель — задача, в которой в математической форме отражаются основные свойства объекта. На этом этапе моделирования качественное описание объекта переходит в количественное: выбираются переменные, описывающие движение, системы отсчета и единиц измерения, выписываются системы уравнений (алгебраических, дифференциальных или интегро-дифференциальных), устанавливающих связи между этими переменными

ми. Здесь термин «движение» употребляется в широком смысле — изменение вообще, а сами объекты могут быть совершенно различными по своей природе и назначению: физические, биологические или социальные явления, технологические процессы, механизмы или конструкции.

Надо иметь в виду, что само явление не зависит от выбора системы отсчета, но его описание зависит от такого выбора. Например, в механике чаще всего используются инерциальные системы отсчета, в любой из которых материальная точка, не испытывающая каких-либо внешних воздействий, движется равномерно и прямолинейно. Однако при исследовании сложных явлений бывает удобнее описывать их в неинерциальных системах отсчета, например, в системе координат, жестко связанной с вращающимся телом.

Системы единиц измерения можно выбирать по-разному, причем связь между величинами, характеризующими объект (получаемые из законов природы или иных соображений), не должны изменяться при изменении единиц измерения. Например, второй закон Ньютона

$$F = ma, \quad (1.1.1)$$

где F — сила, a — ускорение, m — масса, в системе СИ записывается точно так же, как и в системе СГС. Важным моментом на этом этапе является применение процедуры обезразмеривания (масштабирования) величин, переход от размерных к безразмерным величинам [32], поскольку в результате масштабирования может выясниться, что поведение объекта определяется меньшим числом параметров, чем предполагалось при его качественном описании.

На уровне неживой материи одними из главных методов получения уравнений модели являются методы, основанные на использовании законов сохранения или вариационных принципов [14, 19, 22, 23, 32]. Эти законы и принципы не выделяют единственного движения, поэтому нужны дополнительные принципы отбора для выделения реального движения из множества мысленно допустимых. Например, необходима постановка граничных условий, а для нестационарных задач — еще и начальных данных. Кроме того, в результате различного рода допущений при описании объекта уравнения модели могут содержать произвольные параметры или функции. Эти подлежащие определению функции входят в так называемые замыкающие соотношения модели. Например, при получении моделей, описывающих течения газа, кроме законов сохранения вещества, импульса, момента импульса, энергии необходимы еще зависимости давления, коэффициентов вязкости и теплопроводности от плотности и температуры, а также другие замыкающие соотношения. Они фиксируются с большей или

меньшей точностью с помощью физических измерений. В качестве примера можно привести уравнение Клапейрона

$$p = \rho RT,$$

которое используется в качестве замыкающего соотношения в модели идеального газа. Здесь p — давление, ρ — плотность, T — температура, R — газовая постоянная, определяемая химическим составом газа.

На уровне живой материи все принципы отбора движений, справедливые для неживой материи, сохраняют свою силу. Поэтому и здесь процесс моделирования начинается с записи законов сохранения или вариационных принципов. Однако почти все взаимодействия в живой материи имеют особенность, которую называют «обратной связью»: некоторые эффекты процесса возвращаются к своему источнику или к предыдущей стадии, в результате чего усиливаются или ослабляются. Поэтому при описании биологических систем следует основываться на указанных принципах отбора и системе обратных связей [4, 28].

На общественном уровне организации материи возникает совершенно новое явление — трудовая деятельность. Поэтому при получении моделей в этой трудноформализуемой области сложнейших процессов, зависящих от сознательного вмешательства самих людей, следует пользоваться терминами трудовой деятельности, экономическими, финансовыми и другими принципами отбора реальных «движений» [10, 16, 35], методом аналогий [31].

1.1.3. Законы сохранения. Законы сохранения массы, импульса, энергии многократно подтверждены опытами, их обоснованность не вызывает сомнений, поэтому они используются в качестве основных принципов построения моделей механики твердых или деформируемых тел. Заметим, что смысл закона сохранения не сводится целиком к запрету на изменение массы, импульса, энергии и т. п., поскольку закон сохранения представляет собой некоторое утверждение, раскрывающее возможность вполне определенного изменения количественных характеристик исследуемых свойств. Так например, для изолированной системы материальных точек закон сохранения импульса гласит, что импульс такой системы не изменяется со временем, а для неизолированной (при наличии внешних сил, воздействий) — скорость изменения импульса равна сумме всех действующих на систему внешних сил [24], т. е. импульс может меняться со временем.

Законы сохранения нашли применение при выводе математических моделей не только в механике, но и во многих других предметных областях.

Общая математическая формулировка закона сохранения выглядит следующим образом [4]:

$$\frac{d\Phi}{dt} = F. \quad (1.1.2)$$

Здесь t — время,

$$\Phi = \sum_k \varphi^k, \quad \varphi^k = \varphi^k(\varphi_1^k, \dots, \varphi_s^k),$$

$\varphi_s^k = \varphi_s^k(t, x_1, \dots, x_n)$ — количественная характеристика некоторого свойства k -го элемента системы (например, масса, кинетическая энергия, внутренняя энергия и т. п.), x_i ($i = 1, \dots, n$) — заданные признаки индивидуальности элемента системы (например, его координаты). Причина изменения F называется воздействием.

Если число элементов системы настолько велико, что признаки индивидуальности, свойства элементов системы, воздействия принимают все значения из допустимых интервалов, а все искомые функции являются непрерывными, то искомая характеристика системы представляется в виде

$$\Phi = \int_{\omega} \varphi d\omega, \quad (1.1.3)$$

где ω — произвольный выделенный объем пространства переменных x_i , (состоящий при всех t из одних и тех же признаков x_i), φ — плотность распределения величины Φ . Воздействие F складывается из объемного воздействия

$$G = \int_{\omega} g d\omega$$

на каждый элемент системы и поверхностного воздействия

$$\Sigma = \int_S \sigma_n dS,$$

которое передается всей системе через границу S объема ω . Здесь g — плотность объемного воздействия, σ_n — плотность распределения поверхностного воздействия.

Следовательно, для *непрерывных систем* закон сохранения (1.1.2) за-

пишется в виде

$$\frac{d}{dt} \int_{\omega} \varphi d\omega = \int_{\omega} g d\omega + \int_S \sigma_n dS, \quad (1.1.4)$$

при этом конкретный вид законов сохранения получается после определения величин φ , σ_n и g для конкретной исследуемой проблемы.

В приложениях возникает необходимость изучения классов движений, более широких по сравнению с классом непрерывных движений. Если в области определения движения существует некоторая гиперповерхность, на которой допускается скачкообразное изменение решения и вне которой решение непрерывно, то соответствующее движение называется движением с сильным разрывом. Величины разрывов не могут быть произвольными, они удовлетворяют некоторым соотношениям, которые называются уравнениями сильного разрыва. Эти соотношения выводятся из законов сохранения.

1.1.4. Вариационные принципы. Еще один метод построения математических моделей связан с вариационными принципами. Вариационный принцип гласит, что из всех возможных движений изучаемого объекта в действительности реализуется только то, на котором некоторая связанная с объектом величина достигает своего экстремального значения.

Поясним вкратце суть вариационного принципа, рассмотрев движение некоторой механической системы. При использовании вариационного принципа движение описывается при помощи так называемого конфигурационного пространства, построенного из обобщенных координат q , обобщенных скоростей \dot{q} и времени t . Основными понятиями этой теории, в которой движение во все моменты времени полностью определяется набором величин $q(t)$ и $\dot{q}(t)$, являются понятия функции Лагранжа \mathcal{L} и действия по Гамильтону S .

Функция Лагранжа $\mathcal{L} = \mathcal{L}(q(t), \dot{q}(t))$ равна разности кинетической и потенциальной энергии, действие S определяется как функционал

$$S(q) = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} dt,$$

который каждой функции $q(t)$, определенной на отрезке $[t_1, t_2]$ ставит в соответствие некоторое действительное число. Согласно принципу Гамильтона на реальном движении действие должно быть минимально (вообще —

экстремально), что выражается равенством

$$\delta S = 0. \quad (1.1.5)$$

Здесь символом δ обозначена математическая операция варьирования. Более подробно равенство (1.1.5) может быть записано следующим образом:

$$\left. \frac{d}{d\varepsilon} \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} \left(q + \varepsilon\varphi, \frac{d(q + \varepsilon\varphi)}{dt} \right) dt \right|_{\varepsilon=0} = 0, \quad (1.1.6)$$

где $\varphi(t)$ — произвольная функция, обращающаяся в нуль при $t = t_1$ и $t = t_2$, $\varepsilon\varphi(t)$ — вариация величины $q(t)$. Уравнение (1.1.6) и дает искомого модель.

Приведем пример получения простейшей математической модели с помощью вариационного принципа. В настоящее время одним из перспективных направлений развития энергетики является создание волновых энергетических станций, использующих механическую энергию поверхностных волн. В этом направлении ведутся интенсивные лабораторные исследования и предлагаются разнообразные аналитические методы расчета отдельных элементов станций [33]. Считается несомненным, что вычислительный эксперимент на основе адекватных математических моделей позволит детально воспроизвести картину воздействия волн на рабочие элементы станций.

Здесь мы рассмотрим простейшую модельную установку, в которой набегающие волны воздействуют на подвижную стенку, при перемещении которой энергия волн преобразуется в механическую энергию устройства, вырабатывающего электроэнергию. Для описания взаимодействия волн со стенкой можно перейти к задаче о волновом движении жидкости в области с подвижной вертикальной стенкой, которая прикреплена пружинами к неподвижному блоку (рис. 2) и перемещение которой определяется волновыми нагрузками, восстанавливающей силой пружин, силами трения, сопротивления воды и другими силами.

Отметим, что аналогичная модельная задача возникает при изучении поведения упругих стенок больших конструкций, подверженных воздействию поверхностных волн. Здесь также необходимо решать связанную задачу гидроупругости, поскольку деформации стенок зависят от волнового давления, которое, в свою очередь, зависит от упругих свойств стенок, при этом следует учитывать нестационарность и нелинейность происходящих процессов. Подобного рода задачи возникают и при конструировании подвижных волнозащитных стенок для нефтедобывающих морских плат-

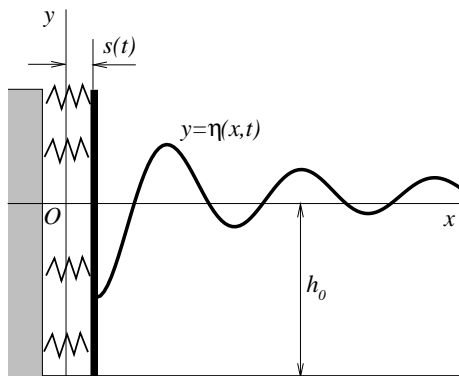


Рис. 2. Схема взаимодействия поверхностных волн с упруго закрепленной вертикальной стенкой

форм и плавучих аэродромов.

Пусть положение стенки определяется горизонтальной координатой $s(t)$, при этом координата $s = 0$ соответствует положению стенки при ненагруженном состоянии пружин (см. рис. 2).

Согласно закону Ньютона (1.1.1) уравнение горизонтального перемещения стенки имеет вид

$$m\ddot{s} = -ks + F, \quad (1.1.7)$$

где m — масса стенки, k — коэффициент жесткости пружин, восстанавливающая сила пружин $-ks$ выделена отдельно, а суммарное действие всех остальных сил обозначено как F .

При получении математической модели вариационным методом рассмотрим простейшую ситуацию, когда на стенку действует единственная сила — сила упругости пружин ($F \equiv 0$). Тогда функция Лагранжа, равная разности кинетической и потенциальной энергий, примет вид

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}\dot{s}^2 - \frac{k}{2}s^2,$$

действие —

$$S(s) = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{m}{2}\dot{s}^2 - \frac{k}{2}s^2 \right) dt,$$

а действие на вариациях $\varepsilon\varphi(t)$ величины $s(t)$ запишется как

$$S(s + \varepsilon\varphi) = \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{m}{2} \left(\frac{d}{dt}(s + \varepsilon\varphi) \right)^2 - \frac{k}{2} (s + \varepsilon\varphi)^2 \right] dt.$$

Следовательно, в нашем примере уравнение (1.1.6) можно записать в таком виде

$$\begin{aligned} 0 &= \left. \frac{dS(s + \varepsilon\varphi)}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left[m \left\{ \frac{ds}{dt} \frac{d\varphi}{dt} + \varepsilon \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \right\} - k (s\varphi + \varepsilon\varphi^2) \right] dt \Bigg|_{\varepsilon=0} = \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left[m \frac{ds}{dt} \frac{d\varphi}{dt} - ks\varphi \right] dt. \end{aligned}$$

Поскольку пробная функция φ равна нулю в моменты t_1 и t_2 , то с учетом формулы интегрирования по частям

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{ds}{dt} \frac{d\varphi}{dt} dt = - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d^2s}{dt^2} \varphi dt$$

приходим к следующей окончательной форме уравнения (1.1.6) для рассматриваемого примера:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[m \frac{d^2s}{dt^2} + ks \right] \varphi dt = 0.$$

Вследствие произвольности функции φ получаем, что равенство нулю возможно только в том случае, когда выражение в квадратных скобках равно нулю во все моменты времени $t \in (t_1, t_2)$:

$$m\ddot{s} = -ks, \tag{1.1.8}$$

т. е. когда движение стенки описывается уравнением, совпадающим с уравнением (1.1.7) (при $F \equiv 0$), полученным на основе закона Ньютона.

Решение уравнения (1.1.8)

$$s(t) = \alpha \sin \omega t + \beta \cos \omega t \quad (1.1.9)$$

описывает гармонические колебания стенки с частотой $\omega = \sqrt{k/m}$, при этом значения множителей α и β определяются из начальных данных: положения $s(0)$ стенки в начальный момент времени и ее скорости $\dot{s}(0)$.

Ниже, в задаче 1.1.1 предлагается получить другие, более интересные чем (1.1.8), модели исследуемого объекта.

Отметим, что сформулированные применительно к какому-либо классу явлений вариационные принципы позволяют единообразно строить математические модели не только механических, но и физических, химических, биологических и иных процессов.

1.1.5. Метод аналогий. Математическое моделирование — это наиболее универсальная, высшая форма метода моделирования, успешно применяемого в науке. Физическое моделирование как средство познания явлений природы и как средство конструирования было известно уже давно. Самой простой формой физического моделирования можно считать механическое моделирование, когда изучение интересующего объекта заменяется изучением его модели меньшего или большего масштаба в лабораторных установках. Например, при наблюдении геометрических и динамических критериев подобия [32] обтекание уменьшенной модели самолета в аэродинамической трубе воспроизводит с достаточной точностью картину полета самолета в атмосфере. Более сложный вид физического моделирования — аналоговое моделирование, когда устанавливается аналогия между двумя различными физическими процессами (например, аналогия между процессами теплопроводности и электропроводности) и процессы одной природы моделируются процессами совершенно другой физической природы.

Такая аналогия имеет место и при математическом моделировании, что выражается в том, что небольшое число сравнительно простых математических моделей дает ключ к пониманию и исследованию огромного количества различных явлений. Так например, потенциал электрического поля, создаваемого зарядами на проводящей поверхности, и температурное поле в теле, поверхность которого имеет заданную температуру, описываются одним и тем же дифференциальным уравнением. То обстоятельство, что многообразные физические процессы могут быть охвачены сравнительно малым количеством математических моделей, говорит об универсальности последних, следующей из универсальности исходных предположений об этих процессах, и является одной из причин успеха математического моделирования.

В огромном числе случаев при попытке построить модель какого-либо объекта либо невозможно прямо указать законы сохранения или вариационные принципы, которым он подчиняется, либо, с точки зрения наших сегодняшних знаний, вообще нет уверенности в существовании подобных законов, допускающих математическую формулировку. К таким объектам относятся, например, системы с заметным вмешательством людей, в частности экономические системы.

Одним из плодотворных подходов к построению моделей такого рода объектов является использование аналогий с уже изученными явлениями: методы и результаты, разработанные и накопленные при математическом моделировании одних явлений, переносятся «по аналогии» на широкие классы совсем других процессов. Например, известны механико-экономические аналогии (использование идеи «насыщения»: скорость роста со временем какой-либо величины пропорциональна произведению текущего значения этой величины на разность между ее предельным и текущим значениями, использование законов сохранения, переходов с микро- на макроуровень), термодинамико-экономические аналогии (представления о стационарных процессах, равновесных состояниях, переход от дискретной к непрерывной модели) и др. Применение подобных аналогий позволяет глубже понять принципиальные свойства трудноформализуемых объектов.

1.1.6. Иерархия моделей. Развитие науки XX века показало необходимость построения множества различных моделей для описания одного явления или объекта, создания альтернативных картин реальности. Оптимально выбираемый уровень моделирования существенно зависит от его целей: не обязательно использовать модель высокого уровня, существенно более затратную по компьютерным ресурсам, если в этом нет практической необходимости. Но и в противном случае построение математических моделей сразу во «всей полноте», с учетом всех факторов, существенных для его поведения, не бывает оправданным.

Более результативным оказывается подход, реализующий принцип «от простого к сложному», когда после достаточно подробного изучения не очень сложной модели делается следующий шаг — отказ от одного или нескольких упрощающих предположений, идеализирующих изучаемый объект. При этом возникает цепочка (иерархия) все более полных моделей, каждая из которых обобщает предыдущие, включая их в качестве частного случая. Путь «от простого к сложному» дает возможность поэтапно изучать все более реалистичные модели и сравнивать их свойства.

Иерархия математических моделей часто строится и по противополож-

ному принципу «от сложного к простому», «от общего к частному». В этом случае реализуется путь «сверху вниз» — из достаточно общей и сложной модели при соответствующих упрощающих предположениях и конкретизациях рассматриваемого объекта, определяемых протекающими в нем процессами, его геометрией и т. д., получается последовательность все более простых (но имеющих уменьшающуюся область применимости) моделей. Такой подход позволяет сразу установить некоторые общие свойства объекта, конкретизируя и дополняя их в частных ситуациях. Длина образующейся при этом цепочки может быть весьма значительной.

Большинство реальных процессов и соответствующих им математических моделей нелинейны. Тем не менее, линейные модели, получающиеся из нелинейных при особых упрощающих предположениях (линеаризации) и справедливые лишь для описания малых изменений характеристик объекта, также должны быть включены в иерархию математических моделей, поскольку они просты для исследования и могут служить первым приближением к реальности. Например, предполагая, что толщина струны много меньше ее длины, что она имеет постоянную линейную плотность, амплитуда колебаний значительно меньше длины струны и что можно пренебречь продольными смещениями и скоростями участков струны, мы приходим к линейной модели, приближенно описывающей малые поперечные движения точек струны. Разумеется, линеаризованная модель не дает исчерпывающей картины процесса, но из нее можно извлечь ряд сведений, полезных для более полного исследования.

Таким образом, иерархические цепочки могут содержать линейные и нелинейные модели, стационарные и нестационарные модели, модели, отличающиеся типом используемых в них дифференциальных уравнений (уравнения гиперболического, параболического, эллиптического типов, а также смешанного типа), модели многомерные и одномерные и т. д. Дополнительные вариации построенных моделей связаны с различными вариантами краевых условий и других входных данных. При построении и анализе любой модели всегда полезно знать ее место в общей иерархии моделей изучаемого объекта [31]. Это дает возможность правильно оценивать область применимости и четко осознавать связи с моделями других уровней, т. е. способствует более глубокому пониманию исследуемых явлений.

1.1.7. Исследование модели. Одним из важных моментов является исследование получившейся модели. Поскольку получающиеся модели, как правило, представляют собой сложные системы уравнений, допускающие интегрирование (получение решения в конечном виде) только в исключительных случаях, жизненно важно развитие методов их исследо-

вания. Здесь можно выделить так называемые качественные методы, составляющие огромную часть современной математики — совокупность методов, позволяющих делать те или иные заключения о решениях, не зная точного их выражения. Сюда включаются методы исследования существования и единственности решения, его устойчивости, асимптотического поведения, анализа размерностей, группового анализа моделей и т. п. Такой теоретический анализ позволяет на следующем этапе моделирования — конструировании вычислительных алгоритмов — разрабатывать качественные численные методы и заранее прогнозировать особенности численного решения.

Вместе с тем, необходимо развивать и совершенствовать аналитическую технику, искать специальные классы решений. Знание точных решений, хотя бы в некоторых частных случаях, позволяет выполнить предварительную проверку качества вычислительного алгоритма, ибо без такой проверки нельзя понять, что отражают результаты вычислительного эксперимента — реальные свойства объекта или же некоторые побочные эффекты самой вычислительной процедуры. Использование компьютеров при поиске аналитических выражений для решения и, вообще, при проведении аналитических вычислений существенно расширяет возможности исследования математических моделей. К настоящему времени созданы десятки специальных программных систем (Reduce, Maple, Mathematica и др.) для выполнения всевозможных аналитических преобразований.

Отметим, что многие явления описываются такими математическими моделями, разработка теории которых находится пока в начальной стадии и о решении которых мало что известно. Тем не менее, запросы практики заставляют решать и такие задачи.

ЗАДАЧИ

1.1.1. Используя закон Ньютона (1.1.1) и принцип «от простого к сложному», построить иерархию математических моделей, описывающих движение подводного оползня по плоскому откосу (рис. 3). Считать, что оползень представляет собой твердое тело известной формы и движется под действием сил тяжести и Архимеда, сил сопротивления воды и трения о дно. Выписать и исследовать аналитические решения моделей. Придумать возможные обобщения рассмотренных моделей, приводящие ко все более полному описанию явления.

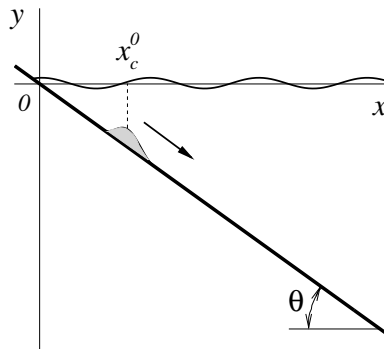


Рис. 3. Схема движения подводного оползня по плоскому откосу

1.1.2. Для уравнения (1.1.8) рассмотрим задачу Коши со следующими начальными данными при $t = 0$:

$$s(0) = a > 0, \quad \dot{s}(0) = 0. \quad (1.1.10)$$

При этих условиях решение (1.1.9) уравнения (1.1.8) запишется в виде

$$s(t) = a \cos \omega t, \quad (1.1.11)$$

где $\omega = \sqrt{k/m}$. Используя закон Ньютона (1.1.7), построить новую математическую модель, описывающую движение вертикальной стенки (см. рис. 2) не только под воздействием упругой силы пружин (как в модели (1.1.8)), но и дополнительной внешней силы, равной $-F_0 \cos \omega_1 t$ и обусловленной давлением на стенку периодических поверхностных волн. Здесь ω_1 — частота волновой силы.

Исследовать решение полученной модели при тех же начальных данных (1.1.10). Предложить дальнейшие обобщения модели, дающие более реалистическую картину процесса.

§ 1.2. Общие требования к вычислительным алгоритмам

На основании построенных математических моделей реального объекта выполняется следующий этап математического моделирования — создание вычислительного алгоритма, включающий в себя его разработку и анализ свойств, что составляет содержание огромного раздела современной математики — вычислительной математики [29]. Рассмотрим некоторые общие принципы конструирования и обоснования вычислительных алгоритмов, предназначенных для использования на современных ЭВМ.

1.2.1. Переход к дискретной модели. Поскольку компьютер оперирует только с дискретным представлением информации, то общим для всех численных методов является сведение математической задачи к конечномерной. Это чаще всего достигается дискретизацией (аппроксимацией) исходной задачи, т. е. переходом от функций непрерывного аргумента к функциям дискретного аргумента, переходом от непрерывного представления математической задачи (аналитическое, дифференциальное, интегро-дифференциальное представление) к ее дискретному аналогу. Например, если в исходной задаче фигурировала функция $u(x, y)$, определенная в области непрерывного изменения аргументов x и y , то в дискретной задаче будет использоваться функция $u(x_j, y_j)$, определенная на конечном множестве точек (узлов) (x_j, y_j) ($j = 1, \dots, N$), которое называется расчетной сеткой. Очевидно, что сеточную функцию $u_j = u(x_j, y_j)$ можно рассматривать как вектор (u_1, u_2, \dots, u_N) конечномерного пространства размерности N .

Расчетная сетка является дискретным представлением области решения. Методам построения сеток для двумерных и трехмерных областей посвящено огромное количество научных статей, число которых стремительно растет и в настоящее время, поскольку нерешенных проблем здесь еще очень много [11, 12, 38, 40]. Широко применяются структурированные (регулярные) сетки с четырехугольными ячейками на плоскости (рис. 4, *a*) и шестигранными в пространстве. Регулярная сетка представляет собой упорядоченный по «сеточным направлениям» набор узлов. Большое распространение на практике получили и неструктурированные (нерегулярные) сетки, особенностью которых является произвольное расположение узлов сетки в области решения (рис. 4, *б*), произвольное в том смысле, что отсутствуют выраженные сеточные направления и число ячеек, содержащих каждый конкретный узел, может меняться от узла к узлу.

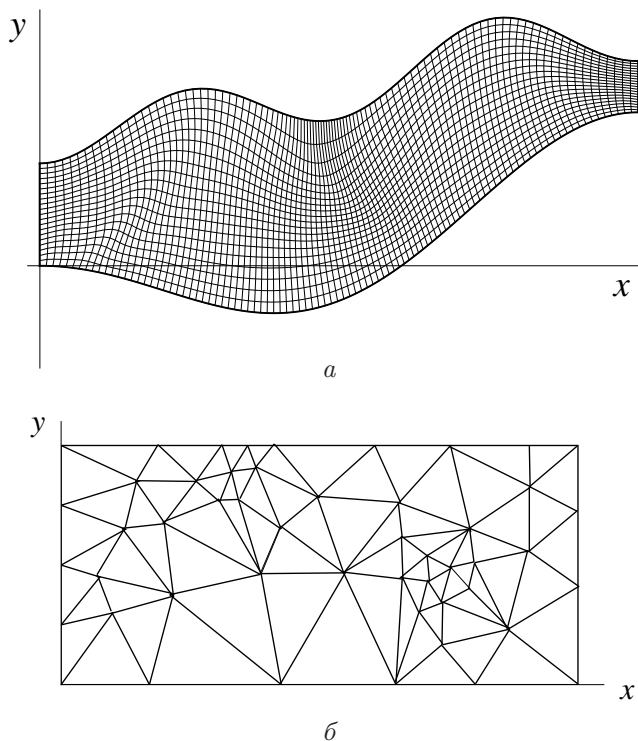


Рис. 4. Расчетные сетки: *a* — регулярная (структурированная);
б — неструктурированная

Используются также гибридные сетки, объединяющие регулярные сетки в одних подобластях области решения с нерегулярными в других. «Хорошая» сетка должна учитывать особенности решения, сгущаясь в окрестности этих особенностей, а при решении нестационарных задач являться еще и подвижной, адаптирующей к подвижным особенностям решения [37].

Отметим, что в последнее время появились оригинальные вычислительные алгоритмы, для выполнения которых сетка не требуется. Они получили название бессеточных методов.

Существует множество методов перехода от непрерывного представления математической модели к ее дискретному представлению: метод конечных разностей, метод конечных объемов, метод конечных элементов, спектральные методы и др. [13, 21, 29, 30, 36].

Метод конечных разностей основан на замене производных, входящих в исходные уравнения, их дискретными (разностными) аналогами на структурированных сетках. Например, при дискретизации уравнения (1.1.8) методом конечных разностей на равномерной по времени сетке $t_j = j\tau$ ($j = 0, \dots, N$) с количеством узлов $(N + 1)$ и шагом $\tau = T/N$ получается разностное уравнение

$$m \frac{s_{j+1} - 2s_j + s_{j-1}}{\tau^2} = -ks_j, \quad j = 1, \dots, N - 1 \quad (1.2.1)$$

относительно сеточной функции s_j , являющейся на временном промежутке $[0, T]$ приближением для решения $s(t)$ уравнения (1.1.8).

В методе конечных объемов используется интегральная формулировка законов сохранения (1.1.4), которая записывается для совокупности контрольных объемов (обычно для ячеек как структурированных, так и неструктурированных сеток). Дискретный аналог законов сохранения получают путем вычисления всех входящих в формулировку интегралов по каким-либо квадратурным формулам.

В методе конечных элементов искомое приближенное решение раскладывается по конечной системе финитных кусочно-полиномиальных базисных функций и требуется, чтобы невязка решения была ортогональна всем базисным функциям. Таким образом, решение исходной задачи сводится к системе алгебраических уравнений (САУ), линейных (СЛАУ) или нелинейных (СНАУ), относительно коэффициентов разложения. Построение базисных функций тесно связано с выбранной расчетной сеткой, вернее, с ее ячейками, которые в этом методе называются конечными элементами. В качестве конечных элементов выступают отрезки в одномерной области, треугольники или четырехугольники — в двумерной, тетраэдры или призмы — в трехмерной. Метод конечных элементов получил широкое распространение при выводе дискретных моделей в механике деформируемого твердого тела.

Спектральные методы предполагают использование взаимно ортогональных базисных функций, не являющихся финитными. Искомое решение раскладывается в ряд по этим функциям, и конечный отрезок ряда подставляется в исходные уравнения. В результате происходит полная алгебраизация исходной задачи, ее отображение в САУ для определения коэффициентов разложения. Для областей простой формы спектральный метод дает высокую точность даже при сравнительно небольшом числе базисных функций.

Заменяв математическую модель на дискретную, мы должны быть уверены в том, что при увеличении числа узлов (числа базисных функций)

решение дискретной задачи приближается в некотором смысле к решению исходной задачи. Близость этих решений во многом (но не полностью) определяется способом аппроксимации, «близостью» математической модели и аппроксимирующей ее дискретной модели. Строгие доказательства аппроксимируемости непрерывной задачи ее дискретным представлением существуют лишь для ограниченного числа задач, линейных или квазилинейных. Для большинства нелинейных задач таких теорем нет, и нет даже надежды, что они будут получены в обозримом будущем. Вследствие этого необходим очень тщательный и строгий контроль свойств разрабатываемого алгоритма всеми доступными способами.

Заметим, что некоторые задачи изначально формулируются в дискретной форме, например, в виде САУ относительно неизвестных величин (см. § 2.5). Для таких задач этап перехода к дискретной модели не нужен, поэтому после формулировки математической модели и ее исследования сразу приступают к разработке вычислительного алгоритма.

1.2.2. Точность алгоритма. После дискретизации исходной задачи надо построить вычислительный алгоритм, т. е. указать последовательность арифметических и логических действий, выполняемых на ЭВМ и дающих за конечное число операций (шагов) решение дискретной задачи. Полученное решение принимается за приближенное решение исходной математической задачи.

Как правило, для одной и той же дискретной модели можно предложить множество вычислительных алгоритмов. И это обстоятельство не может не настораживать, поскольку довольно очевидно, что среди большого разнообразия алгоритмов не все одинаковы по своим качествам. Есть алгоритмы «хорошие» и «плохие», и нужно уметь отличать одни от других, причем делать это, не тратя времени и труда на программирование и расчеты, а заранее, априори. Для этого нужно сформулировать критерии для оценки качества вычислительных алгоритмов.

Основное требование, предъявляемое к вычислительному алгоритму, — это требование точности. Оно означает, что вычислительный алгоритм должен давать приближенное решение построенной или выбранной математической модели с заданной точностью $\varepsilon > 0$ за конечное число действий $Q(\varepsilon)$. Алгоритм должен быть реализуемым, т. е. давать решение дискретной задачи за допустимое машинное время. Для почти всех алгоритмов время решения задачи возрастает при повышении точности, т. е. при уменьшении ε .

Решение дискретной задачи не совпадает с решением исходной, оно является приближенным решением, решением с погрешностью. Можно выде-

лить две основные причины возникновения погрешности численного решения. Во-первых, при замене исходной задачи дискретной возникает погрешность дискретизации (аппроксимации). Например, заменяя в уравнении (1.1.8) производную \ddot{s} разностной производной, фигурирующей в левой части разностного уравнения (1.2.1), мы допускаем погрешность дискретизации, имеющую при $\tau \rightarrow 0$ порядок τ^2 . Второй вид погрешности — ошибки округления — связан с конечной разрядностью чисел, представляемых в ЭВМ. Ошибки округления могут существенно повлиять на точность приближенного решения и даже на самую возможность его вычисления на ЭВМ.

1.2.3. Устойчивость алгоритма. При каждом вычислении на ЭВМ появляются ошибки округления. В зависимости от алгоритма эти ошибки могут в процессе вычислений неограниченно нарастать либо не накапливаться. В первом случае алгоритм называют неустойчивым, во втором — устойчивым. Например, если в некотором алгоритме вычисляются члены геометрической прогрессии $b_{n+1} = b_n q$ ($n = 1, 2, \dots$) со знаменателем $q > 1$ и при вычислении первого члена была допущена ошибка δ , т. е. вместо b_1 было получено значение $\bar{b}_1 = b_1 + \delta$, то эта ошибка скажется и при вычислении b_{n+1} : вместо истинного значения мы получим значение

$$\bar{b}_{n+1} = \bar{b}_1 q^n = b_{n+1} + \delta \cdot q^n,$$

отличающееся от b_{n+1} накопленной погрешностью $\delta \cdot q^n$, которая быстро возрастает при $n \rightarrow \infty$.

Другой пример. С точки зрения теоретической математики конструктивность теоремы о существовании и единственности решения СЛАУ, основанной на правиле Крамера, неоспорима. Однако алгоритм, основанный на формулах Крамера, не обладает устойчивостью при его использовании для вычислений на ЭВМ. Кроме того, для него не выполняется требование получения решения за разумное количество операций (для вычисления определителей требуется порядка $N!$ действий, где N — число неизвестных). Поэтому для поиска решения СЛАУ на ЭВМ применяются другие — устойчивые алгоритмы, основанные на методах исключения и итерационных методах. Известны и иные алгоритмы, эффективные с теоретической точки зрения, но неприемлемые с точки зрения машинной арифметики.

1.2.4. Экономичность алгоритма. Естественно добиваться, чтобы число действий $Q(\varepsilon)$ (и тем самым машинное время решения задачи) было минимально. Для любой задачи можно предложить много алгоритмов. При их использовании одинаковая точность ε может достигаться за

разное число действий. Предположим, что решение дискретной задачи является вектором (u_1, u_2, \dots, u_N) конечномерного пространства размерности N . Если число арифметических действий для нахождения одной компоненты решения «слабо» зависит или вообще не зависит от общего числа неизвестных, то алгоритм называется экономичным. Таким образом, экономичный алгоритм требует выполнения числа действий, пропорционального размерности N конечномерного пространства, которому принадлежит решение дискретной задачи. Следовательно, алгоритм Крамера не относится к классу экономичных (требуется порядка $N!$ действий), как и метод исключения Гаусса в общем случае ($\approx N^3$ действий), а вот знакомый нам метод прогонки является экономичным (число действий пропорционально N).

1.2.5. Параллелизуемость алгоритма. Желательно, чтобы вычислительный алгоритм наряду с упомянутыми характеристиками, такими как точность, устойчивость, экономичность, обладал и свойством параллелизуемости, т. е. позволял распараллеливать себя. Возможность сегментации сложного вычислительно процесса на значительное число простых и относительно независимых процессов, время от времени обменивающихся между собой входными и выходными данными, открывает путь к конструированию компьютерных программ параллельного счета [6]. Разумеется, при этом возникают дополнительные проблемы, связанные с большими потоками информации между процессами.

Если сложный алгоритм удастся представить в виде ряда хорошо изученных и надежных алгоритмов решения простых задач, то такие элементарные алгоритмы называются вычислительными модулями, а сама процедура выделения модулей — модульным анализом алгоритма [17]. Проводя модульный анализ алгоритма, мы получаем возможность рассматривать сложный алгоритм как последовательное выполнение относительно простых вычислительных модулей. Кроме того, модульная декомпозиция алгоритма существенно облегчает его распараллеливание, а «последовательная» программа, созданная на основе алгоритма, имеющего модульную структуру, может быть легко адаптирована для ЭВМ с параллельными процессорами в виде «параллельной».

1.2.6. Связь алгоритма с архитектурой ЭВМ. При разработке алгоритма необходимо «заглядывать вперед»: отчетливо представлять себе тип компьютерных систем, на которых предполагается базировать создаваемый вычислительный комплекс. С одной стороны, вычислительные модули должны конструироваться таким образом, чтобы они были «инвариантны» относительно изменений системного программного обеспечения

ЭВМ и ее конфигурации (вычислительной платформы). С другой стороны, необходимо учитывать ограниченность различных уровней памяти ЭВМ, ограничения на слишком большие и малые числа (разрядность) и даже такие нюансы, как аппаратная реализация машинных команд и используемые на конкретной машине методы округления. Такой учет может существенно повысить эффективность алгоритма, но одновременно усложнить перенос готового программного продукта на другие вычислительные системы.

Вычислительные программы надо создавать так, чтобы они умели самостоятельно анализировать особенности конкретной вычислительной среды (платформы) и с учетом результатов такого анализа оптимизировать свою структуру. Попытка реализации такой технологии была предпринята в системе OLYMPUS и впоследствии развита в отечественном продукте САФРА [7].

1.2.7. Исследование алгоритма. Так же как и в случае математической модели, в отношении ее дискретного аналога и вычислительного алгоритма имеется возможность выбора, поскольку одной и той же математической модели могут быть поставлены в соответствие различные дискретные модели, а одной и той же дискретной модели — различные алгоритмы для поиска ее решения. Поэтому важную роль играет исследование свойств алгоритмов, в результате которого может быть сделан выбор.

Исследование начинается с изучения вопроса о корректности дискретной задачи: существует ли решение, является ли оно единственным и как оно зависит от входных данных. Для некоторых не очень сложных задач корректность удается установить с помощью методов функционального анализа.

Одним из главных вопросов является вопрос о сходимости приближенного решения к точному. Иногда решение этого вопроса удается свести к исследованию аппроксимации исходной дискретной модели и устойчивости алгоритма.

Весьма важной проблемой рассматриваемого этапа математического моделирования является проблема постановки начальных условий в дискретной модели, соответствующих начальным условиям исходной нестационарной задачи: неудачная постановка этих условий может замедлить скорость сходимости приближенного решения к точному при измельчении сетки (см. задачи 1.2.1 и 1.2.2). Такой же вывод справедлив в отношении аппроксимации краевых условий. При использовании итерационных методов удачный выбор стартовых значений может существенно снизить затраты компьютерного времени, неудачный — значительно их увеличить

или даже вообще не обеспечить получение искомого решения.

Важным требованием, предъявляемым к дискретной модели, является то, что ее решение должно обладать как можно большим числом свойств, присущих решению математической модели. Если для последней выполняются законы сохранения, то необходимо исследование по проверке выполнения аналогичных законов сохранения и для дискретной модели. Если в исходной модели решение положительно (температура, плотность), то необходимо исследовать на положительность и приближенное решение. Если из каких-то соображений известно, что решение математической модели является монотонно возрастающей функцией, то необходимо добиваться, чтобы и приближенное решение обладало этим же свойством, и т. п.

В настоящее время известен обширный арсенал средств для исследования дискретных моделей и вычислительных алгоритмов. Эти средства основаны на достижениях теории численных методов и «чистой» математики, а эффективное их использование требует высоких интеллектуальных усилий и больших знаний в широком диапазоне научных дисциплин. В теории численных методов многое сделано, но еще больше предстоит сделать. Пока теория отстает от потребностей практики, которая зачастую за неимением достаточно развитой теории вынуждена обращаться к эмпирике, предшествующему опыту, к «здоровому смыслу» и интуиции.

ЗАДАЧИ

1.2.1. Дифференциальное уравнение (1.1.8) аппроксимируем разностным уравнением (1.2.1), а начальные условия (1.1.10) — разностными начальными условиями:

$$s_0 = a, \quad \frac{s_1 - s_0}{\tau} = 0. \quad (1.2.2)$$

С помощью непосредственной проверки показать, что при малых шагах τ сеточная функция

$$s_j = \alpha \sin j\varphi + \beta \cos j\varphi, \quad j = 0, \dots, N, \quad (1.2.3)$$

где $\varphi = \arccos(1 - \tau^2\omega^2/2)$, $\tau = T/N$, $0 < T < \infty$, α и β — произвольные действительные числа, является общим решением уравнения (1.2.1). Найти решение s_j дискретной задачи (1.2.1), (1.2.2) и показать, что при малых

значениях τ для погрешности решения выполняется оценка

$$\max_{j=0,\dots,N} |s_j - s(t_j)| \leq C\tau \quad (1.2.4)$$

с постоянной C , не зависящей от τ . Здесь $s(t)$ — решение (1.1.11) задачи (1.1.8), (1.1.10).

1.2.2. Немного подправим начальные условия (1.2.2) дискретной задачи:

$$s_0 = a, \quad \frac{s_1 - s_0}{\tau} = -\tau \frac{a\omega^2}{2}. \quad (1.2.5)$$

Найти решение s_j новой дискретной задачи (1.2.1), (1.2.5) и показать, что при малых значениях τ погрешность решения удовлетворяет оценке

$$\max_{j=0,\dots,N} |s_j - s(t_j)| \leq C_1\tau^2 \quad (1.2.6)$$

с постоянной C_1 , не зависящей от τ . Таким образом, небольшое изменение разностных начальных условий повлекло за собой существенный рост скорости сходимости приближенного решения к точному: вместо сходимости с первым порядком по τ получили второй порядок сходимости.

§ 1.3. Некоторые принципы разработки программ

Вычислительный алгоритм отображает дискретную модель на множество действий, которые должны быть выполнены на ЭВМ. Запись этих действий на языке, понятном машине, выполняется на следующем этапе математического моделирования — этапе разработки программы (кодирования). Этот этап является «материализацией» проведенных ранее стадий интеллектуальных разработок и связан не только с написанием текста программы: здесь происходит проектирование, написание, отладка и тестирование программ, проведение расчетов и анализ результатов, принятие решений о дальнейшей доработке программ или их сдаче в эксплуатацию.

1.3.1. Проектирование программы. Если программа пишется одним автором для иллюстрации, например, эффективности разработанного им нового алгоритма, то никаких жестких требований к программе

здесь не возникает, поскольку такая программа является одноразовым продуктом, причем недолговечным, и используется она лишь самим автором. Другое дело — большие программы для решения крупных научных проблем. Такие программы создаются коллективами высококвалифицированных программистов, требуют больших временных затрат, предполагается, что они будут долго эксплуатироваться «сторонними пользователями», поэтому подобного рода программы обязательно должны пройти стадию проектного обоснования. Далее пойдет речь именно о таких программах.

Современные большие программы представляют собой пакеты прикладных программ (ППП), позволяющие решать не одну, а целый класс задач из определенной предметной области и предназначенные для исследования объекта на основе различных математических и дискретных моделей с помощью различных вычислительных алгоритмов.

При проектировании программы разрабатываются схемы счета, которые устанавливают последовательность выполнения отдельных модулей в конкретных задачах, и схемы обмена данными между модулями. На этом этапе разрабатываются также структуры входных и выходных данных.

Управляющие и информационные связи, зафиксированные в схемах счета, реализуются в специальной программе, конструирование и разработка которой ориентированы на два принципиальных момента. Первый — это создание комфортных условий для пользователя, цель которого — изучение явления, а не работа с программными кодами. Пользователю должны быть созданы условия для формирования своей задачи: ввода определяющих параметров и, если это необходимо, создания своей конфигурации схемы счета. Второй задачей является построение по параметрам, введенным пользователем, исполняемого задания и запуск расчета.

При проектировании схем обмена данными между модулями принимается во внимание, что в каждом модуле описываются данные, которые могут быть трех категорий: входные, выходные и внутренние (локальные). Первые две категории имеют смысл вне модуля и потому могут быть названы глобальными данными.

При проектировании программы следует иметь в виду, что на организацию вычислительного процесса, на эффективность процессов обмена данными самое непосредственное влияние оказывает аппаратура. Особую роль играет проектирование использования памяти ЭВМ, которая может иметь весьма сложную многоуровневую структуру. Так, многопроцессорные вычислительные системы делятся на системы с распределенной и общей памятью. Одна из конфигураций суперкомпьютера — кластер, представляющий собой сеть из многих процессоров, у каждого из которых есть своя оперативная память. Эта распределенная память доступна всем про-

цессорам, но только через относительно медленную соединительную шину, вследствие чего растут коммуникационные потери и увеличивается время решения задачи. Альтернативная архитектура ЭВМ предусматривает множество процессоров с одной общей оперативной памятью. Такой компьютер имеет меньшие коммуникационные потери при вычислениях, но его создание резко усложняется и дорожает при увеличении числа процессоров. Отдельный процессор может содержать несколько арифметических устройств (ядер) со сверхбыстрыми регистрами памяти, на которых размещаются числа, участвующие в арифметических операциях, а также очень быструю память ограниченного объема (кэш). Конечно же компьютер обязательно содержит и дисковую (внешнюю) память, очень большую, но слишком медленную, которая используется в процессе решения задачи только при исключительном дефиците оперативной памяти, поскольку это катастрофически снижает производительность расчетов.

Обмен данными должен быть оптимизирован и сведен до минимума в силу того, что он требует больших дополнительных расходов процессорного времени, каналов пересылки данных и т. п.

1.3.2. Программирование модулей. Модульность является основным принципом построения программных систем. Упомянутые выше вычислительные модули определялись как функционально законченные фрагменты вычислительного алгоритма. Программный модуль — это отдельная функционально законченная программная единица, некоторым образом идентифицируемая и используемая в программе, как правило, неоднократно. Модульный анализ позволяет выполнять раздельное программирование выделенных частей проекта программы и раздельную отладку программных модулей.

Очень ответственным моментом следует считать выбор языка программирования. Этот выбор делается между проблемно-ориентированными языками высокого уровня и языками низкого уровня, типа автокода (*assembler*). Первые учитывают специфику задачи и процесса программирования. Они удобны для разработчика, сокращают сроки создания программ, уменьшают количество ошибок, делают программу наглядной. Автокоды позволяют обеспечить высокое качество объектной программы, т. е. программы, полученной после трансляции. Это свойство автокодов связано с тем, что они отражают специфику конкретной вычислительной машины и позволяют наиболее полно использовать ее аппаратные возможности. Иногда применяют двухстадийное программирование: сначала программа пишется на языке высокого уровня, а затем, после получения работающего варианта, она (или отдельные ее фрагменты) переписывается на автокоде.

Процесс программирования должен строиться по итерационному принципу, когда сначала кодируются наиболее содержательные, жизненно необходимые части алгоритма, а дополнение деталями и сервисными возможностями происходит постепенно.

При программировании не следует забывать, что программные модули должны удовлетворять некоторым принципиальным требованиям, например, таким, как расширяемость, адаптивность и переносимость. Свойство расширяемости предполагает гибкость создаваемых конструкций: дополнение программного комплекса новыми модулями не должно приводить к переработке уже имеющихся. Принцип максимальной автономии всех модулей должен быть заложен в первоначальном проекте и в дальнейшем соблюдаться неукоснительно.

Адаптивность программного модуля подразумевает его способность оптимально настраиваться на существующие аппаратные ресурсы и максимально полно их использовать. В особенности свойство адаптивности важно при создании компьютерного инструментария, ориентированного на параллельные вычисления на суперкомпьютерах. Существующее сегодня множество суперкомпьютеров весьма неоднородно как по своей архитектуре, так и по числу процессорных элементов. В идеале свойство адаптивности должно гарантировать производительность программного комплекса, близкую к пиковой на любой вычислительной платформе, что, конечно же, недостижимо на практике, но должно являться направлением развития программного обеспечения.

Переносимость — способность модуля к функционированию в программной и аппаратной среде с вариацией ее свойств. Крайне желательно, чтобы модуль функционировал в разных программно-аппаратных средах не только устойчиво, но и абсолютно одинаково, вплоть до совпадения знаков в последних порядках мантисс получаемых цифровых данных. При этом опасны не глобальные отказы, причины которых практически всегда легко обнаруживаются и устраняются, а малозаметные отклонения данных от контрольных значений. Зачастую такие отклонения вычислители с недостаточным опытом считают несущественными, но на самом деле это грозный признак того, что результаты математического моделирования неверны.

1.3.3. Отладка и тестирование программы. Особое внимание при разработке программ для больших задач следует уделить отладке. Различают три вида отладочных работ: синтаксическую отладку, арифметическую и методическую.

Синтаксические ошибки возникают при неправильном употреблении

конструкций используемого языка программирования и легко устраняются в ходе соответствующей отладки. Используемые в настоящее время языки программирования с хорошей диагностикой значительно упростили этот вид отладки.

Арифметическая отладка должна убедить программиста в полном соответствии вычислительного алгоритма и составленной программы. На этом пути могут встретиться очень большие трудности, возникающие при отладке древовидного алгоритма, так как число возможных путей выполнения программы может оказаться очень большим и проверить их окажется невозможным. Тогда проверяют только отдельные наиболее вероятные ветви.

Основной метод арифметической отладки — это встроенные отладочные выдачи, позволяющие проследить путь работы программы, а также соответствие результатов тестовому варианту. К настоящему времени разработаны специальные вспомогательные программы — разнообразные диалоговые отладчики, прерывающие работу программы в нужных местах и обеспечивающие вывод интересующей информации.

Методическая отладка в корне отличается от предыдущих; она предназначена для совместной отладки алгоритма и дискретной модели. Здесь используются разнообразные приемы. Помимо отладочных вставок и выдач, помимо диалоговых отладчиков, предусматривается проведение заранее спланированных экспериментов, проверка заранее подобранных утверждений, проверка на тестах.

В качестве тестов могут быть использованы модельные задачи, имеющие аналитическое решение, задачи меньшей размерности, для которых уже есть работающие программы. При решении уравнений иногда задают готовое решение, подставляют его в уравнение, получают правую часть, а затем с этой правой частью находят численно известное решение. Есть тесты, основанные на другой математической модели. Можно проверять одну дискретную модель с помощью другой и т. д. При этом осуществляется так называемый внешний контроль алгоритма.

Внутренний контроль — это вид отладки, основанный на проверке известных утверждений о свойствах алгоритма и модели. Некоторые тесты связаны с проверкой законов сохранения, формулировки которых для различных отраслей знаний достаточно разнообразны. Результаты численного эксперимента не должны противоречить этим формулировкам. Контроль за точностью выполнения законов сохранения определяет степень пригодности выбранных математических моделей описания явления. Абсолютно бессмысленно совершенствовать численный алгоритм и компьютерную программу, когда законы сохранения выполняются с недостаточной точ-

ностью. В то же время следует особо подчеркнуть, что этот вид контроля является необходимым, но не достаточным. Широко распространенной ошибкой является «переоценка» законов сохранения, когда их контроль становится единственным способом верификации программы. Иногда алгоритмы (и программы) выдают неверные результаты, несмотря на хорошую точность выполнения законов сохранения.

К внутреннему контролю также относится верификация программ по главным алгоритмическим параметрам. Например, для конечно-разностных схем ими являются шаги сетки. Сильная зависимость численного решения от числа узлов сетки при их небольшом количестве является естественной и не вызывает опасения и неприятия, если эта зависимость исчезает при измельчении сетки. Если же при большом числе узлов эта зависимость не исчезает и решение продолжает меняться при все большем измельчении сетки, то это тревожный симптом низкого качества созданного алгоритма.

1.3.4. Проведение расчетов и анализ результатов. Завершающая стадия математического моделирования — проведение расчетов на ЭВМ — имеет сходство с экспериментом натурным. Только если в лаборатории экспериментатор с помощью специально построенной установки задает вопросы природе, то специалисты по вычислительному эксперименту с помощью ЭВМ ставят эти вопросы математической модели. Причем в современных физических экспериментах со сложными объектами или процессами, протекающими в экспериментальных условиях, каждое измерение температуры, плотности, скорости и т. д. дается с большим трудом. Зачастую нужную информацию приходится извлекать из косвенных данных. Точность полученных результатов порой невелика.

Иное дело — вычислительный эксперимент. ЭВМ в процессе расчета может выдавать любую информацию, представляющую интерес для исследователя. Конечно, точность этой информации определяется достоверностью самой модели. Именно по этой причине в серьезных прикладных исследованиях никогда не начинают вести производственные расчеты сразу же, по только что написанной программе. Им всегда предшествуют периоды отладки программы, о которых говорилось выше. Только после проведения этой длительной кропотливой работы в вычислительном эксперименте наступает фаза прогноза — с помощью математического моделирования предсказывается поведение исследуемого объекта в условиях, где эксперименты пока не проводились или где они вообще невозможны.

Если результатом моделирования какого-либо процесса являются всего несколько чисел, то их обработка не вызывает затруднений. Если же

результат представляется миллионами чисел, то возникает проблема его осмысления (интерпретации) и хранения (архивирования и каталогизации). Частичное решение проблемы состоит в организации цифровых таблиц в специальной форме, максимально облегчающей анализ полученных данных. Эти таблицы могут быть размещены в базах данных долгосрочного хранения, системы управления которыми могут существенно оптимизировать процесс анализа результатов.

Но даже при использовании хорошо организованных баз данных гигантский объем чисел, получаемых при компьютерном моделировании, приводит к затруднениям при анализе результатов. В связи с этим используются графические системы, обеспечивающие визуализацию полученной цифровой информации, что в особенности важно на первых этапах анализа при общем (качественном) исследовании решения задачи. Табличная же информация служит для поддержки графической и позволяет провести уточнение анализа в отношении количественных (численных) значений результатов расчета.

1.3.5. Принятие решения. Анализ результатов расчетов приводит к одному из выводов: или становится ясна необходимость уточнения моделей и алгоритмов, или результаты, пройдя проверку на разумность и надежность, передаются заказчику и «идут в дело». Однако чаще всего выясняются какие-либо необычные формы протекания изучаемого процесса, неожиданные режимы работы проектируемой установки, в результате чего появляется желание уточнить те или иные детали процесса. Тогда математическая модель модифицируется, как правило, усложняется, и начинается новый цикл вычислительного эксперимента.

* * *

В этой главе мы показали, что математическое моделирование реализуется в виде некоторой технологической цепочки отображений, в начале которой находится изучаемый объект, а в конце — расчет на ЭВМ и анализ полученных результатов. Эффективная реализация этой цепочки в условиях многообразия изучаемых объектов, коллективов исполнителей, многообразия программ и конфигураций ЭВМ составляет предмет математической технологии в терминологии, предложенной академиком Н. Н. Яненко, или вычислительного эксперимента (по академику А. А. Самарскому).

Глава 2.

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ В БИОЛОГИИ, ЭКОЛОГИИ, ЭКОНОМИКЕ, В ЗАДАЧАХ ПОДДЕРЖКИ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ

§ 2.1. Модели динамики численности изолированных популяций

В § 1.1 была подчеркнута важность поиска решения задачи в аналитической форме, поскольку это решение, возможно, поможет ответить на вопрос о пригодности построенной модели для описания реального объекта. Приведем соответствующие примеры.

2.1.1. Модель Мальтуса. Динамика численности популяции, т. е. изменение со временем t общего количества $N(t)$ живых особей в популяции в связи с рождаемостью, смертностью, борьбой за существование — один из важнейших вопросов развития популяций. Простейшей «физической» (биологической в данном случае) моделью численности отдельной популяции является модель, в основе которой лежат следующие предположения: популяция является изолированной, ресурсы питания для нее неограничены, а прирост поголовья пропорционален количеству существующих в данный момент времени особей. Таким образом, если $N(t)$ и $N(t + \Delta t)$ — численности популяции в близкие моменты времени t и $t + \Delta t$ соответственно, то $N(t + \Delta t) - N(t) = \varepsilon N(t)\Delta t$, где $\varepsilon = \alpha - \beta$, $\alpha > 0$ — коэффициент рождаемости, $\beta > 0$ — коэффициент смертности. При принятом допущении о том, что для развития популяции ничто не мешает, рождаемость будет не ниже смертности, поэтому можно считать, что $\varepsilon \geq 0$, вследствие чего величина ε называется *врожденной скоростью естественного роста популяции*. На этапе построения физической модели необходимо также указать соглашения о виде коэффициентов α и β . Например, можно предположить, что $\alpha = \text{const}$, $\beta = \text{const}$. Завершается этот этап постановкой задачи: требуется рассчитать численность популяции в

произвольный момент времени $t > 0$, если в начальный момент времени $t = 0$ ее численность известна.

Далее строится математическая модель, соответствующая выбранной физической модели. Разумеется, что численность популяции $N(t)$ является целочисленной разрывной функцией времени. Однако если предположить, что популяция является достаточно многочисленной, то вместо разрывной функции $N(t)$ можно использовать непрерывную функцию $x(t)$, у которой целая часть $[x(t)]$ значения в каждый момент времени совпадает со значением $N(t)$ численности популяции в тот же момент времени. Тогда мы можем написать равенство

$$\frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} = \varepsilon x(t),$$

которое при дополнительном предположении о том, что функция $x(t)$ является не только непрерывной, но и дифференцируемой, переходит в обыкновенное дифференциальное уравнение относительно неизвестной функции $x(t)$:

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon x, \quad t > 0. \quad (2.1.1)$$

В результате получается математическая модель Мальтуса, соответствующая построенной выше простейшей физической модели: требуется найти решение уравнения (2.1.1), удовлетворяющее начальному условию

$$x(0) = x_0, \quad (2.1.2)$$

где x_0 — начальная численность популяции.

Решение задачи Коши (2.1.1), (2.1.2) имеет вид

$$x(t) = x_0 e^{\varepsilon t}. \quad (2.1.3)$$

Из этой формулы видно, что при $\alpha = \beta$ численность популяции остается постоянной: $x(t) \equiv x_0$ для всех $t \geq 0$. Однако даже при небольшом положительном значении коэффициента ε с течением времени происходит все большее и большее отклонение функции $x(t)$ от начального значения x_0 и численность популяции неограниченно растет по экспоненте при $t \rightarrow \infty$ (рис. 5). Это обстоятельство и послужило основанием для опасений Мальтуса о грядущем перенаселении Земли со всеми вытекающими отсюда последствиями.

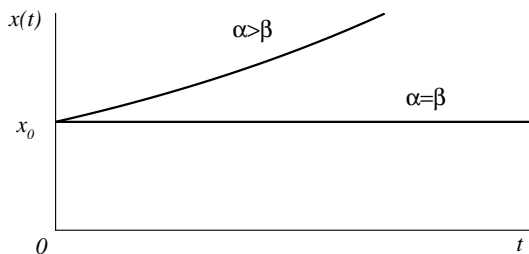


Рис. 5. Изменение численности изолированной популяции в модели Мальтуса

Очевидно, что рассмотренная математическая модель не соответствует реальности, поскольку во всех существующих популяциях неограниченного роста их численности не наблюдается. Поэтому необходимо вновь вернуться к физической модели и заняться ее модификацией.

2.1.2. Модель Ферхюльста — Пирла. Более близкое к реальности описание развития популяции дает модель Ферхюльста — Пирла, в которой учитывается уменьшение скорости роста изолированной популяции вследствие внутривидовой конкурентной борьбы за место, пищу и т. п. Таким образом, можно модифицировать исходную физическую модель, учитывая в ней конкурентную борьбу. Как это отразится на математической модели? Внутривидовая борьба тем выше, чем больше количество встреч между особями, а количество встреч пропорционально произведению x , т. е. x^2 . Поэтому скорость εx прироста численности уменьшается на величину, пропорциональную x^2 , и уравнение динамики численности популяции запишется в виде

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon x - \gamma x^2. \quad (2.1.4)$$

Здесь $\varepsilon = \text{const} > 0$ — врожденная скорость роста численности популяции, а величина $\gamma = \text{const} > 0$ называется *коэффициентом внутривидовой конкуренции*.

Хотя уравнение (2.1.4) является нелинейным, решение задачи Коши (2.1.4), (2.1.2) выписывается в аналитической форме

$$x(t) = \frac{x_0 x_* e^{\varepsilon t}}{x_* + x_0 (e^{\varepsilon t} - 1)}, \quad t \geq 0, \quad (2.1.5)$$

где $x_* = \varepsilon/\gamma$. Из формулы (2.1.5) следует, что при $x_0 = x_*$ численность популяции не меняется: $x(t) \equiv x_0$. Если же $x_0 < x_*$, то численность популяции возрастает, приближаясь при $t \rightarrow \infty$ к значению x_* , но никогда не достигая его, т. е. численность популяции не возрастает беспредельно, как в модели Мальтуса, а ограничена сверху. Поэтому величина x_* называется *максимальной численностью популяции, возможной в данных условиях существования*. В случае $x_0 > x_*$ численность популяции уменьшается, монотонно приближаясь к значению x_* (рис. 6).

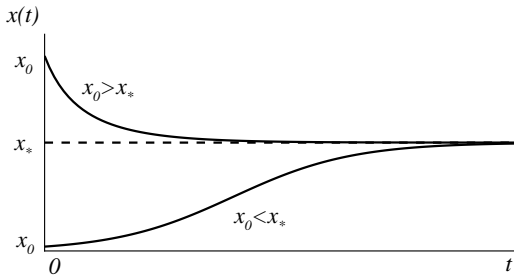


Рис. 6. Изменение численности изолированной популяции в модели Ферхюльста — Пирла

2.1.3. Обобщение модели Ферхюльста — Пирла. Модель Ферхюльста — Пирла допускает различные обобщения. Например, можно учесть, что некоторое количество $f > 0$ особей поступает в популяцию из соседнего ареала, а часть $g > 0$ истребляется охотниками. Тогда популяцию уже нельзя считать изолированной, но уравнение, описывающее динамику ее численности, будет аналогично уравнению (2.1.4), отличаясь от последнего лишь наличием новых слагаемых f и g :

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon x - \gamma x^2 + f - g. \quad (2.1.6)$$

Величина g может задаваться постоянной или зависящей от общей численности популяции: $g(t) = \delta x(t)$. Представляет практический интерес и модель, описывающая сезонный характер охоты. В этом случае множитель δ будет зависеть от времени и должен быть задан в виде некоторой периодической по переменной t функции. Возможны и другие механизмы, влияющие на численность. Учтем, например, сезонный характер размножения популяции. Тогда коэффициент рождаемости α будет функцией от

переменной t . Коэффициент смертности β также может быть переменным. Можно также учесть возрастную структуру популяции, случайные возмущения и многие другие факторы, влияющие на численность исследуемой популяции.

Таким образом, учитывая на этапе физической постановки задачи все большее и большее количество процессов, влияющих на численность популяции, мы приходим к иерархии математических моделей, для которых получить решение в аналитической форме, как правило, не удастся. Но некоторые характеристики решения можно изучить путем качественного исследования их свойств, например, таких, как гладкость, зависимость решения от начальных данных, поведение при $t \rightarrow \infty$ и в окрестности некоторых особых точек и т. п. Для получения же количественных характеристик нам неминуемо придется перейти к следующим этапам математического моделирования — построению и исследованию дискретных моделей, разработке и исследованию численных алгоритмов, созданию и тестированию программ, проведению расчетов и анализу их результатов.

ЗАДАЧИ

2.1.1. Для изолированной популяции рыб исследовать динамику ее численности на основе математической модели

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon x - \gamma x^2 - g, \quad t > 0, \quad (2.1.7)$$

$$x(0) = x_0 > \varepsilon/\gamma,$$

где $g = \text{const} > 0$ — заданная квота отлова, не зависящая от численности популяции. Не приведет ли такая стратегия вылова к исчезновению популяции?

2.1.2. Исследовать поведение при $t \rightarrow \infty$ решения задачи (2.1.7), если установлена относительная квота отлова, зависящая от численности популяции, т. е. $g(t) = \delta x(t)$, где $\delta = \text{const} > 0$.

§ 2.2. Модели межвидового соперничества популяций

Как было отмечено в § 1.1, очень важное значение в математическом моделировании имеет качественный анализ решения поставленной задачи: существует ли решение, будет ли оно единственным, как на него влияют начальные данные и входные параметры задачи, как оно ведет себя в окрестности особых точек и т. д. Свойства решения, обнаруженные при этом исследовании, могут оказаться полезными на всех этапах математического моделирования.

2.2.1. Модель межвидовой конкуренции. Рассмотрим некоторый ограниченный ареал, в котором обитают популяции двух видов с численностями $x(t)$ и $y(t)$. Будем считать, что в условиях неограниченного питания и отсутствия хищников каждый вид развивался бы по экспоненте, т. е. согласно уравнениям модели Мальтуса:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \varepsilon_1 x, & \varepsilon_1 &= \text{const} > 0, \\ \frac{dy}{dt} &= \varepsilon_2 y, & \varepsilon_2 &= \text{const} > 0, \end{aligned} \tag{2.2.1}$$

где ε_i ($i = 1, 2$) — врожденные скорости роста популяций. Однако в реальности запасы пищи ограничены, ее выедание приводит к голоданию и, как следствие, к уменьшению скоростей роста популяций.

Далее будем предполагать, что рассматриваемые здесь два вида конкурируют друг с другом за одну и ту же пищу и количество пищи, потребляемой за единицу времени представителями обоих видов, выражается некоторой неотрицательной функцией $g(x, y)$, такой, что $g(0, 0) = 0$ и $g \rightarrow \infty$ при неограниченном росте хотя бы одного из аргументов. Ясно, что с увеличением g скорость роста популяций должна уменьшаться, поэтому вместо уравнений Мальтуса (2.2.1) следует использовать следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= (\varepsilon_1 - \gamma_1 g) x, \\ \frac{dy}{dt} &= (\varepsilon_2 - \gamma_2 g) y, & t > 0, \end{aligned} \tag{2.2.2}$$

где γ_i ($i = 1, 2$) — положительные постоянные, которые называются *коэффициентами чувствительности к недостатку корма*. Предполагается,

что в начальный момент времени известны численности обеих популяций:

$$x(0) = x_0 > 0, \quad y(0) = y_0 > 0. \quad (2.2.3)$$

Видим, что полученная система уравнений (2.2.2) является нелинейной. Поэтому поиск аналитического решения этой системы с произвольной функцией $g(x, y)$ затруднителен или вообще невозможен. В таком случае мы должны постараться выполнить, как указывалось в гл. 1, качественное исследование свойств решения, не используя его аналитического представления.

Ради простоты далее будем рассматривать случай линейной функции g :

$$g(x, y) = m_1 x + m_2 y, \quad (2.2.4)$$

где m_i ($i = 1, 2$) — положительные постоянные. Тогда решение $x(t)$, $y(t)$ задачи Коши (2.2.2), (2.2.3), (2.2.4) существует и единственно [25]. Покажем, что функции $x(t)$ и $y(t)$ принимают строго положительные значения. Предположим, что это не так, и одна из компонент решения становится равной нулю в некоторой точке $t_0 > 0$, например, $y(t_0) = 0$. При этом вторая компонента принимает в этот момент времени некоторое значение \tilde{x}_0 . Тогда мы можем считать, что функции $x(t)$, $y(t)$ являются решением задачи Коши для системы (2.2.2) с начальными данными:

$$x(t_0) = \tilde{x}_0, \quad y(t_0) = 0. \quad (2.2.5)$$

Легко проверить, что этим же начальным данным (2.2.5) удовлетворяет еще одно решение системы (2.2.2):

$$\tilde{x}(t) = \frac{\tilde{x}_0 x_* e^{\varepsilon_1(t-t_0)}}{x_* + \tilde{x}_0 (e^{\varepsilon_1(t-t_0)} - 1)}, \quad \tilde{y}(t) \equiv 0,$$

где $x_* = \varepsilon_1 / (\gamma_1 m_1)$. Тем самым мы получили противоречие с теоремой о единственности решения. Следовательно, если заданы положительные начальные данные (2.2.3), то функции $x(t)$ и $y(t)$ могут принимать только положительные значения.

Покажем теперь, что численность обеих популяций ограничена при всех $t > 0$.

Предположим противное, и пусть, например, функция $y(t)$ может принимать какие угодно большие значения. Тогда найдется промежуток времени, на котором функция $y(t)$ возрастает и принимает значения большие, чем $y_* = \varepsilon_2 / (\gamma_2 m_2)$. Однако из уравнения для функции y мы получаем,

что

$$\frac{dy}{dt} = (\varepsilon_2 - \gamma_2(m_1x + m_2y))y < (\varepsilon_2 - \gamma_2m_2y)y = \gamma_2m_2(y_* - y)y < 0,$$

т. е. функция $y(t)$ убывает на этом промежутке. Полученное противоречие доказывает, что компоненты $x(t)$, $y(t)$ решения рассматриваемой задачи Коши (2.2.2), (2.2.3) являются ограниченными функциями времени.

Качественное исследование решений поставленной задачи позволяет обнаружить и другие, более интересные их свойства [9]. Рассмотрим один частный случай, когда

$$\frac{\varepsilon_1}{\gamma_1} > \frac{\varepsilon_2}{\gamma_2}. \quad (2.2.6)$$

Неравенство (2.2.6) выполняется, например, когда в первой популяции коэффициент естественного роста ε_1 больше, чем во второй, а коэффициенты чувствительности к недостатку корма у них одинаковые. Неравенство (2.2.6) может выполняться и в том случае, когда первая популяция растет медленнее, но и чувствительность к недостатку корма у нее значительно меньшая, чем у второй популяции.

Не выписывая аналитического решения задачи (2.2.2), (2.2.4), (2.2.3), покажем, что при условии (2.2.6) численность второй популяции будет стремиться к нулю при $t \rightarrow \infty$. С этой целью перепишем уравнения (2.2.2):

$$\frac{\gamma_2}{x} \frac{dx}{dt} = \varepsilon_1\gamma_2 - \gamma_1\gamma_2g,$$

$$\frac{\gamma_1}{y} \frac{dy}{dt} = \varepsilon_2\gamma_1 - \gamma_1\gamma_2g,$$

из первого вычтем второе:

$$\frac{\gamma_2}{x} \frac{dx}{dt} - \frac{\gamma_1}{y} \frac{dy}{dt} = \varepsilon_1\gamma_2 - \varepsilon_2\gamma_1$$

и проинтегрируем последнее уравнение с учетом начальных условий (2.2.3):

$$\frac{x^{\gamma_2}}{y^{\gamma_1}} = \frac{x_0^{\gamma_2}}{y_0^{\gamma_1}} e^{(\varepsilon_1\gamma_2 - \varepsilon_2\gamma_1)t}.$$

При условии (2.2.6) правая часть этого равенства неограниченно возрастает с ростом времени. Следовательно, таким же свойством обладает и левая его часть. Но функция x^{γ_2} ограничена сверху некоторой постоянной, поэтому неограниченный рост левой части последнего равенства возможен

только, если $y(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Отсюда следует вывод о том, что вторая популяция с течением времени исчезает.

А как ведет себя численность первой популяции при условии (2.2.6)? Пока мы знаем только, что она ограничена некоторой постоянной. Рассмотрим для определенности случай, когда в начальный момент времени численность первой популяции подчиняется неравенству

$$x_0 < x_* = \frac{\varepsilon_1}{\gamma_1 m_1}. \quad (2.2.7)$$

Тогда и во все последующие моменты времени функция $x(t)$ будет ограничена сверху числом x_* . В самом деле, если это не так, то найдется некоторый момент времени $t_0 > 0$, такой, что функция $x(t)$, возрастая, впервые примет значение x_* , т. е.

$$\frac{dx}{dt}(t_0) \geq 0, \quad x(t_0) = x_*.$$

В таком случае из первого уравнения системы (2.2.2), учитывая положительность значения $y(t_0)$, получаем, что

$$0 \leq \frac{dx}{dt}(t_0) = [\varepsilon_1 - \gamma_1 (m_1 x(t_0) + m_2 y(t_0))] x(t_0) < [\varepsilon_1 - \gamma_1 m_1 x_*] x_* = 0,$$

т. е. $0 \leq dx/dt(t_0) < 0$. Это противоречие и доказывает, что при условии (2.2.7) неравенство $x(t) < x_*$ выполняется для всех $t \geq 0$.

Теперь покажем, что численность первой популяции не только ограничена сверху постоянной x_* , но и неограниченно приближается к этой постоянной при $t \rightarrow \infty$. Предположим противное: существует положительное число $\bar{x} < x_*$, такое, что $x(t) < \bar{x}$ при всех t . Возьмем произвольное малое число δ , удовлетворяющее неравенству

$$0 < \delta < \frac{m_1}{m_2} (x_* - \bar{x}). \quad (2.2.8)$$

Тогда найдется момент времени t_0 , такой, что для всех $t \geq t_0$ будет верна оценка $y(t) < \delta$.

Пусть $x(t_0) = \tilde{x}_0$. Из первого уравнения системы (2.2.2), учитывая неравенства $x(t) < \bar{x}$, $y(t) < \delta$, получаем, что

$$\left. \frac{dx}{dt} \right|_{t \geq t_0} = [\varepsilon_1 - \gamma_1(m_1x + m_2y)]x > [\varepsilon_1 - \gamma_1 m_1 \bar{x} - \gamma_1 m_2 \delta]x = Cx,$$

где

$$C = \gamma_1 m_1 \left(x_* - \bar{x} - \frac{m_2}{m_1} \delta \right) > 0.$$

Умножив обе части полученного неравенства на функцию $e^{-C(t-t_0)}$, приходим к дифференциальному неравенству

$$\left. \frac{du}{dt} \right|_{t \geq t_0} > 0,$$

где

$$u(t) = x(t)e^{-C(t-t_0)}.$$

Таким образом, функция $u(t)$ монотонно возрастает при $t > t_0$. Поэтому

$$u(t) > u(t_0) = \tilde{x}_0, \quad t > t_0,$$

или

$$x(t) > \tilde{x}_0 e^{C(t-t_0)}, \quad t > t_0,$$

т. е. функция $x(t)$ неограниченно возрастает при $t \rightarrow \infty$. Это противоречит доказанному выше факту об ограниченности решения $x(t)$. Значит, действительно численность первой популяции будет стремиться при $t \rightarrow \infty$ снизу к предельному значению x_* .

Итак, на основе качественного анализа решений задачи Коши (2.2.2)–(2.2.4) нам удалось установить, что при выполнении условий (2.2.6), (2.2.7) численность первой популяции стабилизируется на некотором уровне, а вторая популяция исчезает. Отметим еще раз, что эти важные выводы мы сделали без привлечения формул, описывающих точное решение задачи.

Из установленных свойств следует очень интересный вывод. Если в некоторой многочисленной популяции случайно появляется совсем небольшое количество мутантов с такой же врожденной скоростью роста, как у остальных особей ($\varepsilon_1 = \varepsilon_2$), но легче переносящих голод ($\gamma_1 < \gamma_2$), то со временем мутанты полностью вытеснят домутантный вид.

2.2.2. Модель Лотки — Вольтерра. Рассмотрим математическую модель совместного существования двух биологических видов (популяций) типа «хищник–жертва». Предположим, что единственным фактором, ограничивающим размножение жертв, является давление на них со стороны хищников, а размножение хищников ограничивается количеством добытой ими пищи (количеством жертв). Тогда в отсутствие хищников численность жертв $x(t)$ должна расти экспоненциально с относительной скоростью α , а численность хищников $y(t)$ в отсутствие жертв — экспоненциально убывать с относительной скоростью β , т. е. величины $x(t)$, $y(t)$ будут описываться в этом случае уравнениями Мальтуса:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \alpha x, \\ \frac{dy}{dt} &= -\beta y.\end{aligned}\tag{2.2.9}$$

Здесь $\alpha = \text{const} > 0$ и $\beta = \text{const} > 0$ — коэффициенты рождаемости жертв и смертности хищников соответственно.

«Соперничество» жертвы с хищником выражается в изменении численности жертв, которая, в свою очередь, сказывается на численности хищников. Пусть $V(x)$ — количество (или биомасса) жертв, потребляемых одним хищником за единицу времени, причем k -я часть полученной с этой биомассой энергии расходуется на воспроизводство, а остальная тратится на поддержание основного обмена. Таким образом, скорость прироста жертв будет уменьшена на величину $V(x)y$, а прирост хищников будет определяться величиной $kV(x)y$. Следовательно, уравнения системы «хищник–жертва» можно записать в виде

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \alpha x - V(x)y, \\ \frac{dy}{dt} &= y(kV(x) - \beta).\end{aligned}\tag{2.2.10}$$

Функцию $V(x)$ называют *трофической функцией хищника* и именно ее определяют в экспериментальных работах. Характер этой функции таков, что она асимптотически приближается к некоторому конечному положительному значению при большой численности жертв, отражая тем самым факт насыщения хищников при $x \rightarrow \infty$. При малых значениях x , когда почти все жертвы становятся добычей хищников, которые всегда голодны и насыщения у которых не наступает (ситуация довольно обычная в природе), трофическую функцию можно считать линейной функцией чис-

ленности жертв, т. е. $V(x) = mx$. В настоящем параграфе мы рассмотрим именно этот случай. Кроме того, предположим, что $k = \text{const}$. Тогда система уравнений (2.2.10) запишется в форме уравнений Лотки — Вольтерра

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \alpha x - mxy, \\ \frac{dy}{dt} &= kmxy - \beta y,\end{aligned}\tag{2.2.11}$$

из которых по начальным данным (2.2.3) определяются численности популяций в любой момент времени $t > 0$.

Поскольку правые части уравнений (2.2.11) имеют ограниченные частные производные по x и y в любом прямоугольнике плоскости Oxy , то задача Коши (2.2.11), (2.2.3) имеет единственное решение, причем бесконечно дифференцируемое. Однако выписать это решение в аналитической форме весьма затруднительно ввиду нелинейности системы уравнений (2.2.11). Поэтому можно опять обратиться к качественному исследованию свойств решения.

Мы продемонстрируем сейчас приемы качественного анализа, отличные от тех, которые использовались в задаче о межвидовом соперничестве популяций при оспаривании одной и той же пиццы (см. п. 2.2.1). Первый прием связан с переходом к записи задачи в безразмерных величинах. Система уравнений (2.2.11) зависит от четырех параметров: α , β , k , m . Каждый из них влияет на вид решения, осложняя его исследование. Попытаемся перейти к безразмерным величинам с тем, чтобы количество определяющих параметров уменьшилось. Как было указано в гл. 1 (при обсуждении общих принципов построения и исследования математических моделей), переход к безразмерным величинам позволяет исследовать не одно решение, а целый класс подобных решений.

Итак, пусть

$$\xi = \frac{km}{\beta}x, \quad \eta = \frac{m}{\alpha}y, \quad \tau = \alpha t, \quad p = \frac{\beta}{\alpha}.\tag{2.2.12}$$

Тогда уравнения Лотки — Вольтерра (2.2.11) запишутся в виде системы уравнений

$$\begin{aligned}\frac{d\xi}{d\tau} &= \xi(1 - \eta), \\ \frac{d\eta}{d\tau} &= p\eta(\xi - 1)\end{aligned}\tag{2.2.13}$$

с единственным параметром $p > 0$. Если нам удастся выяснить свойства решения $\xi(\tau)$, $\eta(\tau)$ при некотором одном значении параметра p , то, основываясь на заданном преобразовании растяжения (2.2.12), мы сможем предсказать поведение решения $x(t)$, $y(t)$ системы (2.2.11) сразу для всех допустимых значений параметров k и m и любых α и β , удовлетворяющих равенству $\beta/\alpha = p$. Таким образом, переход к безразмерным величинам действительно целесообразен при изучении качественного поведения решений.

Другой прием связан с исследованием равновесных состояний. Система уравнений (2.2.13) имеет одно положение равновесия с положительными значениями ξ и η — стационарное, не зависящее от времени τ решение:

$$\xi(\tau) \equiv \xi_* = 1, \quad \eta(\tau) \equiv \eta_* = 1. \quad (2.2.14)$$

Таким образом, если в начальный момент времени $\tau = 0$ искомые переменные ξ , η принимают значения ξ_* , η_* , то и во все последующие моменты времени будут выполняться равенства (2.2.14). Это означает, что особая точка (ξ_*, η_*) отвечает равновесной численности жертв и хищников: прирост жертв за счет рождаемости полностью уравновешивается деятельностью хищников, а прирост хищников — их естественной смертностью.

Выписать формулы для нестационарных решений не удастся. Однако можно проанализировать поведение решений в фазовой плоскости. Напомним, что решение задачи Коши для уравнений (2.2.13) с начальными данными

$$\xi(0) = \xi_0, \quad \eta(0) = \eta_0 \quad (2.2.15)$$

можно интерпретировать геометрически как кривую в трехмерном пространстве $O\xi\eta\tau$, проходящую через точку $(\xi_0, \eta_0, 0)$ и составленную из точек $(\xi(\tau), \eta(\tau), \tau)$ («график решения»).

При другой геометрической интерпретации рассматривается кривая на плоскости $O\xi\eta$, составленная из точек с координатами $(\xi(\tau), \eta(\tau))$, при этом время τ является параметром. Эта кривая является проекцией графика решения на плоскость $O\xi\eta$ и называется *фазовой траекторией*, а плоскость $O\xi\eta$ называется *фазовой плоскостью*.

Чтобы понять временную динамику функций $\xi(\tau)$, $\eta(\tau)$, исследуем поведение решения нелинейной системы (2.2.13) в плоскости переменных ξ , η , т. е. исследуем поведение фазовых траекторий.

Для этого второе уравнение поделим на первое:

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{p\eta(\xi-1)}{\xi(1-\eta)}, \quad (2.2.16)$$

и преобразуем полученное уравнение к виду

$$\frac{1-\eta}{\eta} d\eta = p \frac{\xi-1}{\xi} d\xi.$$

Интегрируя последнее уравнение с учетом положительности значений ξ и η , получаем соотношение

$$\ln \eta - \eta = p(\xi - \ln \xi) + C,$$

или

$$\ln \eta - \ln e^\eta = p(\ln e^\xi - \ln \xi) + C,$$

в котором постоянная C из правой части определяется по начальным значениям (2.2.15). Таким образом, уравнение (2.2.16), или, что то же самое, система (2.2.13), имеет первый интеграл вида

$$\Psi(\xi, \eta) = C_1 > 0, \quad (2.2.17)$$

где

$$\Psi(\xi, \eta) = \left(\frac{\xi}{e\xi}\right)^p \frac{\eta}{e^\eta}. \quad (2.2.18)$$

Для каждого фиксированного значения

$$C_1 = \left(\frac{\xi_0}{e\xi_0}\right)^p \frac{\eta_0}{e^{\eta_0}}$$

интегралу (2.2.17) соответствует вполне определенная фазовая траектория системы (2.2.13), которая совпадает с линией уровня C_1 функции Ψ и проходит через точку (ξ_0, η_0) . На рис. 7, а изображен график функции

$$\zeta = \Psi(\xi, \eta) \quad (2.2.19)$$

с несколькими линиями уровня. Соответствующие им фазовые траектории изображены на рис. 7, б. Поскольку в области $\xi > 0$, $\eta > 0$ функция Ψ принимает максимальное значение лишь в одной точке ($\Psi_{\max} = 1/e^{p+1}$ в точке покоя $\xi_* = 1$, $\eta_* = 1$), то линии уровня функции Ψ являются замкнутыми кривыми. Следовательно, и фазовые траектории будут замкнутыми кривыми, охватывающими точку покоя. Отсюда следует вывод о том, что функции $\xi(\tau)$, $\eta(\tau)$ будут периодическими функциями от переменной τ , поскольку фазовая траектория, проходящая через точку (ξ_0, η_0) , вновь пройдет через эту же точку через некоторое время. Отме-

тим также, что для разных начальных данных (2.2.15) периоды колебаний численностей будут разными [2].

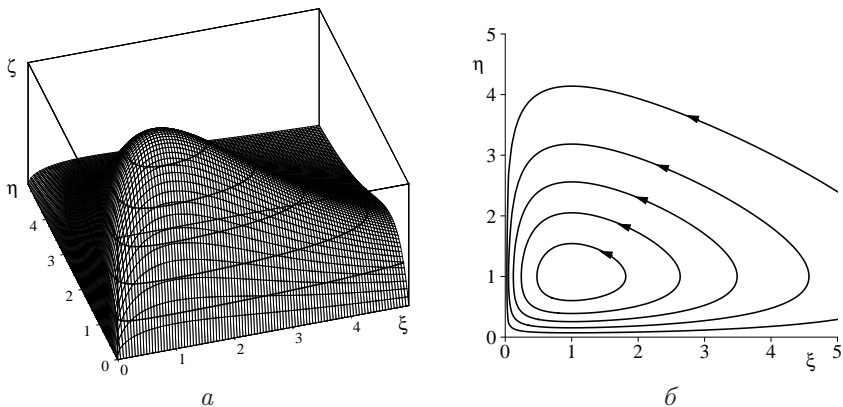


Рис. 7. Решение системы уравнений (2.2.13):
 а — график функции (2.2.19); б — фазовые траектории; $p = 0, 5$

Определим теперь направление движения точки (ξ, η) по фазовой траектории при возрастании времени. Пусть $\eta < 1$. Тогда из первого уравнения системы (2.2.13) следует, что $d\xi/d\tau > 0$, т. е. функция $\xi(\tau)$ возрастает со временем при движении по нижней части фазовой траектории (на рис. 7, б — это часть траектории, состоящая из точек, у которых вторая координата $\eta < 1$). Из того же уравнения получаем, что при $\eta > 1$ функция $\xi(\tau)$ будет убывать ($d\xi/d\tau < 0$). Аналогично определяется знак производной $d\eta/d\tau$. Тем самым получаем, что с течением времени точка (ξ, η) движется по фазовой траектории в направлении против часовой стрелки (на рис. 7, б направление движения по фазовым траекториям изображено стрелками).

Биологическое содержание задачи подтверждает выявленное свойство решений математической модели. В самом деле, возьмем некоторые начальные данные (2.2.15), соответствующую им фазовую траекторию и начнем рассмотрение с момента времени, когда численность хищников наименьшая. На траектории (см. рис. 7, б) этому моменту времени будет соответствовать самая низшая ее точка с координатами $\xi = 1, \eta = \eta_{\min} < 1$. В этот момент для развития жертв создались самые благоприятные условия (хищников очень мало), поэтому численность жертв растет, но вместе с этим начинается и рост численности хищ-

ников (в математической модели этот процесс описывается движением по нижней части фазовой траектории вправо). В некоторый момент времени хищников становится столько ($\eta = 1$), что они выедают ровно весь прирост жертв, т. е. в этот момент времени численность жертв достигает своего максимума ξ_{\max} , и далее она начинает уменьшаться (начинается движение по верхней части траектории влево), а численность хищников продолжает расти. Наконец, хищников становится так много ($\eta = \eta_{\max} > 1$), а жертв так мало ($\xi = 1$), что вместе с уменьшением количества жертв начинает уменьшаться и численность хищников. Такое продолжается вплоть до момента времени, когда численность жертв достигает своего минимума ξ_{\min} и малое количество хищников ($\eta = 1$) позволяет жертвам начать увеличение своей численности (начинается движение по нижней части фазовой траектории вправо).

Таким образом, рассматриваемая модель описывает сколь угодно долгое сосуществование обеих популяций с периодическим колебанием их численностей. Амплитуды этих колебаний

$$a_1 = \xi_{\max} - \xi_{\min}, \quad a_2 = \eta_{\max} - \eta_{\min} \quad (2.2.20)$$

зависят как от начальных численностей популяций, так и от определяющих параметров модели (см. задачу 2.2.2). В некоторых случаях амплитуда a_1 колебаний численности жертв может быть больше амплитуды a_2 колебаний численности хищников, в других — наоборот (ср. рис. 7, б и 8).

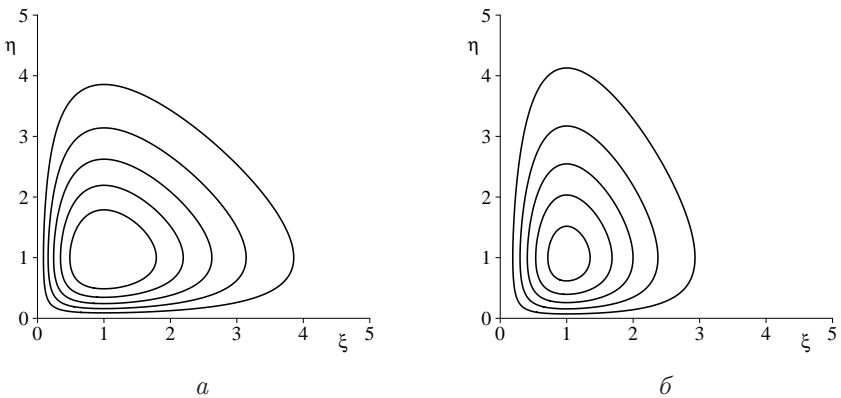


Рис. 8. Фазовые траектории решений системы уравнений (2.2.13):

$$a - p = 1; \quad б - p = 2$$

При этом всегда колебания численностей совершаются не в фазе: экстремальному значению функции $\xi(\tau)$ соответствует среднее по периоду значение функции $\eta(\tau)$ и наоборот, а средние по периоду значения этих функций совпадают с равновесными значениями (2.2.14) (см. задачу 2.2.3).

Заметим, что мы выполнили качественный анализ решений системы уравнений (2.2.13) относительно безразмерных величин. Используя формулы преобразования (2.2.12), можно восстановить картину взаимодействия популяций в исходных переменных. Например, истинная (в размерных величинах) амплитуда колебаний численности жертв будет вычисляться по формуле

$$x_{\max} - x_{\min} = \frac{\beta}{km} a_1,$$

в которой используется безразмерная амплитуда a_1 (2.2.20).

2.2.3. Другие модели двухвидовых взаимодействий. Рассмотренная модель Лотки — Вольтерра (2.2.11) допускает многочисленные обобщения. Например, можно учесть внутривидовую конкуренцию жертв за общую пищу, подобно тому, как это делалось в п. 2.2.1. Тогда математическая модель будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= (\alpha - my - \gamma x) x, \\ \frac{dy}{dt} &= (kmx - \beta) y, \\ x(0) &= x_0, \quad y(0) = y_0, \end{aligned} \tag{2.2.21}$$

где

$$\gamma = \text{const} > 0, \quad \alpha > \frac{\gamma\beta}{km}. \tag{2.2.22}$$

В квадранте $x > 0, y > 0$ эта система имеет единственную точку покоя:

$$x_* = \frac{\beta}{km}, \quad y_* = \frac{\alpha km - \gamma\beta}{km^2}. \tag{2.2.23}$$

Если учесть, что конкурентная борьба может быть и между хищниками, то модель (2.2.21) модифицируется в следующую:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= (\alpha - my - \gamma_1 x) x, \\ \frac{dy}{dt} &= (kmx - \beta - \gamma_2 y) y, \\ x(0) &= x_0, \quad y(0) = y_0,\end{aligned}\tag{2.2.24}$$

где

$$\gamma_1 = \text{const} > 0, \quad \gamma_2 = \text{const} > 0, \quad \alpha > \frac{\gamma_1 \beta}{km}.\tag{2.2.25}$$

Эта система также имеет одну точку покоя

$$x_* = \frac{\alpha \gamma_2 + m \beta}{\gamma_1 \gamma_2 + km^2}, \quad y_* = \frac{\alpha km - \gamma_1 \beta}{\gamma_1 \gamma_2 + km^2}\tag{2.2.26}$$

в положительном квадранте $x > 0, y > 0$. Отметим, что фазовые траектории решений этих двух моделей уже могут и не быть замкнутыми.

Более точные математические описания двухвидовых взаимодействий учитывают сложные картины взаимодействия как по времени, так и в пространстве: неравномерность распределения численности популяций на занимаемых территориях, временное запаздывание между рождением особей и их зрелостью, внешние воздействия и т. п. Для поиска решений таких сложных задач приходится использовать численные методы, но, как показали разобранные выше примеры, предварительный качественный анализ свойств решений надо выполнить обязательно, поскольку он может дать ценную информацию о характерных особенностях решений. Эту информацию можно использовать, например, при тестировании численных алгоритмов.

З А Д А Ч И

2.2.1. Показать, что уравнения (2.2.2), (2.2.4), зависящие от шести параметров $\varepsilon_i, \gamma_i, m_i$ ($i = 1, 2$), можно записать в виде системы уравнений

$$\begin{aligned}\frac{d\xi}{d\tau} &= \varepsilon \left(1 - \xi - \frac{\eta}{p} \right) \xi, \\ \frac{d\eta}{d\tau} &= (1 - p \xi - \eta) \eta\end{aligned}\tag{2.2.27}$$

с двумя параметрами $\varepsilon = \varepsilon_1/\varepsilon_2$, $p = \varepsilon\gamma_2/\gamma_1$, если ввести безразмерные величины:

$$\xi = \frac{x}{x_*}, \quad \eta = \frac{y}{y_*}, \quad \tau = \varepsilon_2 t, \quad (2.2.28)$$

где $x_* = \varepsilon_1/\gamma_1 m_1$, $y_* = \varepsilon_2/\gamma_2 m_2$. Для значений параметров

$$\varepsilon = 1, \quad p > 1 \quad (2.2.29)$$

выполнить качественный анализ решений задачи Коши для уравнений (2.2.27) с начальными данными:

$$0 < \xi(0) = \xi_0 < 1, \quad \eta(0) = \eta_0 > 0. \quad (2.2.30)$$

2.2.2. Используя первый интеграл (2.2.17) системы (2.2.13), определить амплитуды колебаний (2.2.20) решений $\xi(\tau)$ и $\eta(\tau)$ и характер зависимости величин a_1 , a_2 от значений параметра p и начальных данных (2.2.15).

2.2.3. Доказать, что для решений системы уравнений (2.2.13) средние по периоду значения численностей $\xi(\tau)$ и $\eta(\tau)$ не зависят от начальных данных (2.2.15) и равны равновесным значениям $\xi_* = 1$, $\eta_* = 1$.

2.2.4. Записать систему уравнений (2.2.21), зависящую от пяти параметров, в новых переменных

$$\xi = \frac{x}{x_*}, \quad \eta = \frac{y}{y_*}, \quad \tau = \alpha t \quad (2.2.31)$$

с использованием лишь двух новых безразмерных параметров:

$$p = \frac{\beta}{\alpha} > 0, \quad 0 < q = \frac{\gamma\beta}{km\alpha} < 1.$$

Величины x_* , y_* определены в формуле (2.2.23).

§ 2.3. Обобщенные модели взаимодействия популяций

Если построенная математическая модель оказалась нелинейной и столь сложной, что выполнить качественный анализ ее решений не удастся, то может оказаться полезным исследование линейного аналога модели. Здесь показывается, что во многих случаях результат такого исследования может дать подсказку о поведении решения исходной нелинейной модели.

2.3.1. Проблема устойчивости. В структуре сообществ многих видов выделяются трофические (пищевые) уровни — группы видов, между которыми невозможны прямые пищевые связи. Уровней может быть несколько. Виды, принадлежащие одному уровню, находятся обычно либо в состоянии конкуренции в борьбе за жизненные ресурсы, либо в коалиции в использовании ресурсов. Основные трофические уровни наземных сообществ — это, как правило, продуценты (растения, аккумулирующие энергию света и вещества субстрата), первичные консументы (травоядные) и вторичные консументы (хищники, питающиеся травоядными). В некоторых случаях возможна более длинная цепь.

Теоретический анализ динамики сообщества n видов, находящихся на одном трофическом уровне, опирается на систему обыкновенных дифференциальных уравнений относительно функций $x_i(t)$, аппроксимирующих численности видов:

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, \dots, x_n, t), \quad i = 1, \dots, n, \quad (2.3.1)$$

где функции f_i определяются структурой видовых взаимоотношений и их количественными показателями. Имеющие биологический смысл решения системы (2.3.1) принадлежат положительному октанту n -мерного евклидова пространства ($x_i \geq 0$).

Если в уравнениях (2.3.1) скорости роста численностей видов описываются линейными, а самолимитирование и взаимовлияние видов — квадратичными членами, не зависящими явным образом от t , то получаются так называемые *вольтерровские модели динамики сообщества n видов*:

$$\frac{dx_i}{dt} = \left(\varepsilon_i - \sum_{j=1}^n \gamma_{ij} x_j \right) x_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad (2.3.2)$$

где ε_i — врожденная скорость роста n -го вида в отсутствие всех остальных видов, коэффициенты γ_{ij} ($i \neq j$) отражают характер и интенсивность влияния j -го вида на i -й, γ_{ii} — показатель внутривидового взаимодействия для i -го вида. Матрицу $\Gamma = \|\gamma_{ij}\|$, отражающую структуру связей сообщества, называют *матрицей сообщества*.

Система уравнений вида (2.3.2) уже рассматривалась нами при изучении вопроса об изменении численностей двух видов в процессе конкурентной борьбы между ними за одну и ту же пищу. Это была система уравнений (2.2.2), для которой удалось исследовать свойства решений, выполнив качественный анализ системы. Ясно, что таким путем нам будет трудно исследовать решение в случае системы (2.3.2) из n уравнений. В общем случае не поможет и анализ решений в фазовом пространстве, ведь теперь оно n -мерное.

Между тем в экологии весьма актуальна проблема изучения устойчивости, стабильности экосистем в окрестности их равновесных состояний. С проблемой устойчивости связаны вопросы эксплуатации природных популяций и сообществ, оценки пределов загрязнения среды, прогноз последствий осуществления тех или иных природо-хозяйственных мероприятий. Устойчивость к случайным воздействиям, в результате которых система скачком переходит из одного состояния в другое и развивается в дальнейшем из этого нового состояния, можно интерпретировать на уровне математической модели как устойчивость решения к изменениям начальных данных. Особенно важным является понимание поведения популяций вблизи особых точек или особых решений. И здесь подсказку во многих случаях может дать изучение решений линейных аналогов систем (2.3.1), поскольку для исследования линейных моделей имеются хорошо развитые математические методы. Об этом уже говорилось в гл. 1: линеаризация и исследование решений линейных моделей являются одними из необходимых элементов анализа нелинейных математических моделей. Ниже будет рассмотрен соответствующий пример, а также указан контрпример, показывающий, что иногда линейная модель неправильно предсказывает поведение решения нелинейной модели.

2.3.2. Устойчивость по Ляпунову. Итак, нас будет интересовать вопрос об устойчивости решения системы (2.3.1) на бесконечном интервале по времени к возмущениям начальных данных. Запишем уравнения (2.3.1) в векторной форме

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t), \quad t \in (0, \infty) \quad (2.3.3)$$

и рассмотрим для них задачу Коши:

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \quad (2.3.4)$$

где $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$, $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_n)^T$. Далее мы предполагаем, что решение этой задачи существует при всех $t > 0$ и для всех \mathbf{x}_0 из некоторой области пространства R^n .

Если бы мы решали задачу на конечном временном промежутке, то при малом изменении начальных данных (2.3.4) решение $\mathbf{x}(t)$ также изменилось бы на этом промежутке незначительно. Это следует из известной теоремы о непрерывной зависимости решения от начальных данных [26]. Но по-другому обстоит дело, если мы ищем решение на бесконечном временном интервале. Для некоторых систем их решения ведут себя так, что малым отклонениям начальных данных соответствуют решения, которые могут оказаться как угодно далекими друг от друга при $t \rightarrow \infty$.

Пусть $\mathbf{x}_*(t)$ — решение уравнения (2.3.3), соответствующее начальному условию

$$\mathbf{x}_*(0) = \mathbf{x}_{*,0}, \quad (2.3.5)$$

а $\mathbf{x}(t)$ — другое решение с начальным условием (2.3.4).

Определение. Решение $\mathbf{x}_*(t)$ называется устойчивым по Ляпунову, если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta > 0$, что из неравенства для начальных данных

$$\|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_{*,0}\| < \delta \quad (2.3.6)$$

следует справедливое при всех $t \geq 0$ неравенство для решений

$$\|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_*(t)\| < \varepsilon. \quad (2.3.7)$$

В противном случае решение $\mathbf{x}(t)$ называется неустойчивым.

Здесь

$$\|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_*(t)\| = \max_{i=1, \dots, n} |x_i(t) - x_{*,i}(t)|,$$

$x_{*,i}$ — i -я компонента вектор-функции \mathbf{x}_* .

Определение. Если решение $\mathbf{x}_*(t)$ не только устойчиво, но и удовлетворяет условию

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_*(t)\| = 0 \quad (2.3.8)$$

при $\|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_{*,0}\| < \delta_1$, где δ_1 — некоторое положительное число, то решение $\mathbf{x}_*(t)$ называется асимптотически устойчивым.

Во многих задачах математической экологии правая часть системы уравнений не зависит от времени, т. е. уравнение (2.3.3) выглядит как

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}). \quad (2.3.9)$$

Такие системы называются *автономными*. Например, автономной является система уравнений (2.3.2), а также все системы уравнений, рассмотренные в § 2.2. Для автономных систем представляет интерес изучение устойчивости постоянных решений $\mathbf{x}_*(t) \equiv \mathbf{x}_* = \text{const}$. Поскольку для постоянного решения выполняется равенство $d\mathbf{x}_*/dt = 0$, то оно называется *точкой покоя*, а состояние биологической системы, соответствующее точке покоя, называется *состоянием равновесия*. Для поиска точек покоя необходимо решить уравнение

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_*) = 0. \quad (2.3.10)$$

В качестве примера рассмотрим автономную систему уравнений Лотки — Вольтерра в безразмерном виде (2.2.13). Переобозначив зависимые переменные, перепишем эти уравнения в виде (2.3.9) с использованием вектор-функций

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{pmatrix} x(1-y) \\ p(x-1)y \end{pmatrix}. \quad (2.3.11)$$

Уравнение (2.3.10) имеет в данном случае несколько решений и для одного из решений — точки покоя (2.2.14) — мы установили, что фазовые траектории в ее окрестности являются замкнутыми кривыми, соответствующими начальным данным (2.3.4) при $\mathbf{x}_0 \neq \mathbf{x}_*$.

Из рис. 7, б видно, что если точка \mathbf{x}_0 , через которую проходит фазовая траектория, не сильно отклоняется от точки покоя $\mathbf{x}_* = (1, 1)$, то и вся фазовая траектория не сильно удаляется от нее. Этот факт можно доказать и с помощью строгих математических выкладок, которые свидетельствуют о том, что рассматриваемое постоянное решение \mathbf{x}_* будет устойчивым по Ляпунову (но не асимптотически устойчивым). Такого рода точка по-

коя называется *центром*, а замкнутые фазовые траектории, окружающие центр, называются *циклами*.

Линеаризуем теперь уравнения Лотки — Вольтерра, введя отклонения

$$\tilde{x}(t) = x(t) - x_*, \quad \tilde{y}(t) = y(t) - y_* \quad (2.3.12)$$

компонент решения $\mathbf{x}(t)$ от компонент $x_* = 1$, $y_* = 1$ точки покоя \mathbf{x}_* и считая эти отклонения столь малыми, что можно пренебречь величинами \tilde{x}^2 , $\tilde{x}\tilde{y}$ и \tilde{y}^2 . Тогда вместо нелинейной системы уравнений (2.3.9), (2.3.11) получаем следующую систему из двух линейных уравнений с постоянными коэффициентами:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathcal{A}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_*), \quad (2.3.13)$$

где

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ p & 0 \end{pmatrix}.$$

Поскольку собственные значения $\lambda_{1,2}$ матрицы \mathcal{A} являются чисто мнимыми числами:

$$\lambda_1 = -i\sqrt{p}, \quad \lambda_2 = i\sqrt{p}, \quad (2.3.14)$$

то решение линейных уравнений (2.3.13), соответствующее начальным данным

$$x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0, \quad (2.3.15)$$

запишется следующим образом [25]:

$$\begin{aligned} x(t) &= x_* + (x_0 - x_*) \cos(\sqrt{p} t) - \frac{y_0 - y_*}{\sqrt{p}} \sin(\sqrt{p} t), \\ y(t) &= y_* + (y_0 - y_*) \cos(\sqrt{p} t) + (x_0 - x_*) \sqrt{p} \sin(\sqrt{p} t). \end{aligned} \quad (2.3.16)$$

Видим, что решение является периодическим с периодом $T = \frac{2\pi}{\sqrt{p}}$. Кроме того, колебания численностей совершаются не в фазе: экстремальным значениям функции $x(t)$ соответствует равновесное значение $y_* = 1$ функции $y(t)$ и наоборот (рис. 9). Таким образом, указанные свойства одинаковы как для решения нелинейных уравнений Лотки — Вольтерра, так и для решения их линейного аналога (2.3.13).

Кроме того, точка \mathbf{x}_* , как решение линейных уравнений (2.3.13), устой-

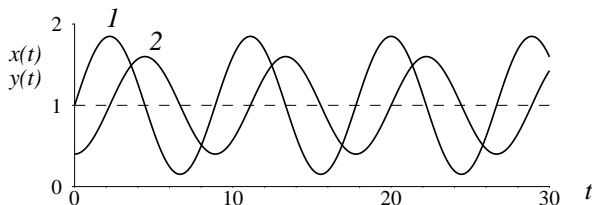


Рис. 9. Интегральные кривые (2.3.16): 1 — $x(t)$; 2 — $y(t)$. $x_* = 1$; $y_* = 1$; $x_0 = 1$; $y_0 = 0, 4$; $p = 0, 5$. Положение равновесия изображено штриховой линией

чива по Ляпунову (но не асимптотически), поскольку малые отклонения начальных данных (2.3.15) от точки покоя \mathbf{x}_* дают и малые отклонения от нее решения, что следует непосредственно из формул (2.3.16). Таким образом, по свойству устойчивости рассматриваемые нелинейные уравнения и их линеаризации (2.3.13) идентичны.

Для линейных уравнений (2.3.13) очень просто получить уравнение фазовых траекторий. Это можно сделать разными способами, например, исключением времени из формул решения (2.3.16). В самом деле, разрешая эти уравнения относительно $\sin(\sqrt{p} t)$ и $\cos(\sqrt{p} t)$ и используя основное тригонометрическое тождество, получаем уравнение

$$(x - x_*)^2 + \frac{(y - y_*)^2}{p} = C, \quad (2.3.17)$$

где

$$C = (x_0 - x_*)^2 + \frac{(y_0 - y_*)^2}{p}.$$

Фазовые траектории решений линейной задачи (2.3.13), (2.3.15) являются эллипсами (рис. 10). И хотя они не совпадают с фазовыми траекториями нелинейной задачи (ср. рис. 7, б и рис. 10, а, а также рис. 8, б и рис. 10, б), эти траектории гомеоморфны, т. е. одни переходят в другие при подходящем взаимно-однозначном непрерывном отображении. Поэтому можно считать, что и по форме фазовых траекторий сравниваемые системы эквивалентны.

И наконец, для обеих рассматриваемых систем точка покоя имеет один и тот же тип — является центром, а фазовые траектории в обоих случаях являются циклами.

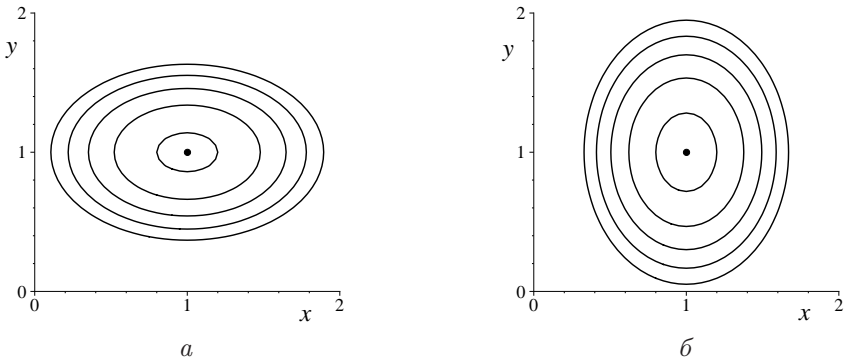


Рис. 10. Фазовые траектории решений линейной системы уравнений:
 $a - p = 0,5$; $b - p = 2$

Таким образом, если бы мы ничего не знали об устойчивости точки покоя и ее типе для нелинейной системы (2.3.9), (2.3.11), тем не менее, мы дали бы правильный ответ, исследуя устойчивость точки \mathbf{x}_* для линейных уравнений (2.3.13), поскольку оказалось, что эти системы *качественно эквивалентны*: при некотором взаимно-однозначном отображении «фазовый портрет» первой системы переходит в «фазовый портрет» второй и наоборот.

2.3.3. Модель Колмогорова. В настоящее время существует большое число моделей типа «хищник–жертва» более общих [28], чем математическая модель Лотки — Вольтерра (2.2.11). Одной из них является модель Колмогорова

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= a(x)x - V(x)y, \\ \frac{dy}{dt} &= K(x)y, \end{aligned} \quad (2.3.18)$$

которую можно записать в виде автономной системы (2.3.9), если ввести вектор-функции:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{pmatrix} a(x)x - V(x)y \\ K(x)y \end{pmatrix}. \quad (2.3.19)$$

В рассматриваемой модели коэффициент $a(x)$ связан с приростом жертв, $K(x)$ — хищников, $V(x)$ — трофическая функция. Напомним, что в

модели Лотки — Вольтерра (2.2.11) трофическая функция и функция $K(x)$ зависели от x линейно. Теперь же вид функций $a(x)$, $V(x)$ и $K(x)$ не конкретизируется, однако при выводе уравнений для придания решениям биологического смысла делаются некоторые качественные предположения о характере зависимости этих функций от переменной x :

— функции $a(x)$, $V(x)$, $K(x)$ определены при всех $x \geq 0$ и непрерывно дифференцируемы;

— в отсутствие хищников коэффициент $a(x)$ естественного прироста жертв монотонно убывает с возрастанием их численности, переходя от положительных значений к отрицательным:

$$a'(x) < 0, \quad a(0) > 0 > a(\infty); \quad (2.3.20)$$

это условие отражает наличие в популяции жертв внутривидовой борьбы за ограниченные ресурсы (пищевой и другие);

— с ростом численности жертв коэффициент естественного прироста хищников монотонно возрастает, переходя от отрицательных значений (при недостатке пищи) к положительным:

$$K'(x) > 0, \quad K(0) < 0 < K(\infty); \quad (2.3.21)$$

— число жертв, потребляемых одним хищником за единицу времени, положительно, а в отсутствие жертв это число равно нулю:

$$V(x) > 0 \text{ при } x > 0, \quad V(0) = 0. \quad (2.3.22)$$

Система уравнений (2.3.18) имеет несколько точек покоя. Все они находятся путем решения уравнения (2.3.10). Исследуем на устойчивость одну из точек покоя, а именно точку $\mathbf{x}_* = (x_*, y_*)$, первая координата x_* которой является корнем уравнения $K(x) = 0$ (в силу предположения (2.3.21) корень существует, причем единственный), т. е.

$$x_* = K^{-1}(0) > 0, \quad (K(x_*) = 0), \quad (2.3.23)$$

а вторая задается формулой

$$y_* = \frac{a(x_*)x_*}{V(x_*)}. \quad (2.3.24)$$

Из формул (2.3.23), (2.3.24) следует, что точка \mathbf{x}_* будет лежать в положительном квадранте ($x > 0, y > 0$), только если

$$a(x_*) > 0. \quad (2.3.25)$$

Это условие будем считать выполненным.

В силу общности системы (2.3.18) трудно сказать что-либо определенное относительно устойчивости положения равновесия, поэтому в предположении малости отклонений (2.3.12) заменим нелинейную систему (2.3.9), (2.3.19) линейной:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_*) + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}_*)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_*),$$

которая в силу равенства $\mathbf{f}(\mathbf{x}_*) = 0$ примет вид уравнения (2.3.13)

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_*) \quad (2.3.26)$$

с матрицей Якоби:

$$\mathbf{A} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}_*) \equiv \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(\mathbf{x}_*) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(\mathbf{x}_*) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(\mathbf{x}_*) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(\mathbf{x}_*) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma & -V(x_*) \\ K'(x_*)y_* & 0 \end{pmatrix},$$

где

$$\sigma = a'(x_*)x_* + a(x_*) - V'(x_*)y_*. \quad (2.3.27)$$

Линейная модель (2.3.26) получена с использованием формулы Тейлора для представления вектор-функции $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ в окрестности точки \mathbf{x}_* , при этом в разложении оставлены слагаемые (2.3.12) лишь первого порядка малости. Поэтому модель (2.3.26) называется моделью *первого порядка аппроксимации*, или *первого приближения* по отношению к нелинейной модели (2.3.9). При изучении тонких свойств решений нелинейных уравнений иногда оказывается целесообразным использование приближений второго и более высокого порядков аппроксимации.

Исследуем устойчивость указанной точки покоя для системы линейных уравнений (2.3.26), выписав в конечном виде решение, соответствующее начальным данным (2.3.4).

Вид решения существенно зависит от собственных значений $\lambda_{1,2}$ мат-

рицы \mathcal{A} , которые являются корнями характеристического уравнения

$$\lambda^2 - \sigma\lambda + \mu = 0, \quad (2.3.28)$$

где $\mu = V(x_*)K'(x_*)y_*$. Отметим, что в силу условий (2.3.21), (2.3.22), (2.3.25) будет справедливо неравенство

$$\mu > 0. \quad (2.3.29)$$

Обозначим через $d = \sigma^2 - 4\mu$ дискриминант квадратного уравнения (2.3.28) и рассмотрим случай, когда он положителен, т. е. пусть

$$\sigma < -2\sqrt{\mu} \text{ или } \sigma > 2\sqrt{\mu}. \quad (2.3.30)$$

В этом случае корни уравнения (2.3.28)

$$\lambda_1 = \frac{\sigma - \sqrt{d}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{\sigma + \sqrt{d}}{2} \quad (2.3.31)$$

будут вещественными и различными, поэтому общее решение системы (2.3.26) задается формулой [25]:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_* + C_1 e^{\lambda_1 t} \mathbf{r}_1 + C_2 e^{\lambda_2 t} \mathbf{r}_2, \quad (2.3.32)$$

где \mathbf{r}_i ($i = 1, 2$) — правые собственные векторы матрицы \mathcal{A} , соответствующие собственным значениям λ_i , например:

$$\mathbf{r}_1 = \begin{pmatrix} V(x_*) \\ \lambda_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}_2 = \begin{pmatrix} V(x_*) \\ \lambda_1 \end{pmatrix}. \quad (2.3.33)$$

Поскольку собственные векторы \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2 линейно независимы, то постоянные C_1 , C_2 однозначно определяются через начальные данные (2.3.4) посредством решения системы линейных алгебраических уравнений:

$$C_1 \mathbf{r}_1 + C_2 \mathbf{r}_2 = \mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_*. \quad (2.3.34)$$

Из условия (2.3.29) следует, что собственные значения λ_1 и λ_2 одного знака, а в силу равенства $\lambda_1 + \lambda_2 = \sigma$ их знак совпадает со знаком числа σ . Учитывая неравенства (2.3.30), получаем, что при $\sigma < -2\sqrt{\mu}$ оба собственных значения отрицательны, поэтому

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_*\| = 0,$$

т. е. точка покоя будет в этом случае асимптотически устойчивой. Если же $\sigma > 2\sqrt{\mu}$, то приходим к выводу о том, что решение (2.3.32) неограниченно удаляется от точки покоя при $t \rightarrow \infty$, вследствие чего точка \mathbf{x}_* является неустойчивой.

На рис. 11 показаны графики решения (2.3.32) для некоторой начальной точки \mathbf{x}_0 , а на рис. 12 изображены фазовые траектории для различных начальных точек \mathbf{x}_0 .

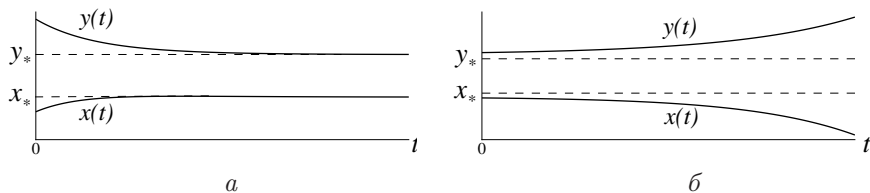


Рис. 11. Интегральные кривые (2.3.32):
 $a - \lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$; $b - \lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$

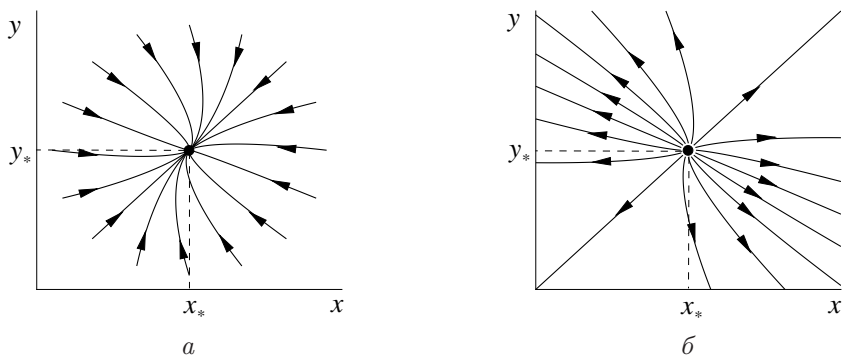


Рис. 12. Фазовые траектории, соответствующие решениям (2.3.32) линейной системы уравнений (2.3.26) в случае различных действительных собственных значений (2.3.31): $a - \lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$; $b - \lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$

Видно, что в случае отрицательных собственных значений λ_i ($i = 1, 2$) все траектории собираются при $t \rightarrow \infty$ в точке покоя \mathbf{x}_* , которая называется в этом случае *устойчивым узлом*. Для положительных собственных значений — наоборот: точки $\mathbf{x}(t)$ движутся по фазовым траекториям, удаляясь от положения равновесия, поэтому оно называется *неустойчивым*

узлом.

Пусть теперь $d = 0$, т. е.

$$\sigma = \pm 2\sqrt{\mu}. \quad (2.3.35)$$

Тогда характеристическое уравнение имеет кратный корень

$$\lambda = \frac{\sigma}{2} \neq 0 \quad (2.3.36)$$

и решение задачи (2.3.26), (2.3.4) запишется как [25]

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_* + \left(\mathcal{I} + t(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I}) \right) e^{\lambda t} (\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_*), \quad (2.3.37)$$

где \mathcal{I} — единичная матрица. Из этой формулы видно, что при $\sigma = -2\sqrt{\mu}$ рассматриваемая точка покоя асимптотически устойчива, а при $\sigma = 2\sqrt{\mu}$ неустойчива. Графики компонент решения (2.3.37) показаны на рис. 13, а фазовые траектории — на рис. 14. В случае кратного корня фазовые траектории, так же как и для простого корня, приближаются или удаляются от точки покоя в зависимости от того, $\lambda < 0$ или $\lambda > 0$. Соответственно точка покоя называется устойчивым или неустойчивым *вырожденным узлом*.

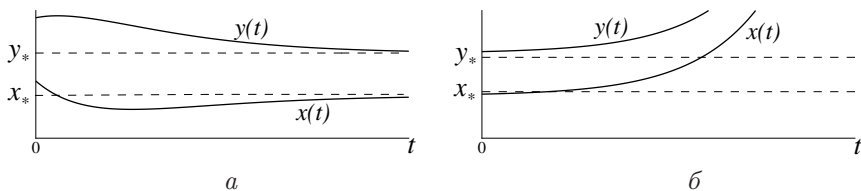


Рис. 13. Интегральные кривые (2.3.37): $a - \lambda < 0$; $b - \lambda > 0$

Наконец, рассмотрим последний случай $d < 0$, который имеет место при выполнении условий:

$$-2\sqrt{\mu} < \sigma < 2\sqrt{\mu}. \quad (2.3.38)$$

В этом случае корни характеристического уравнения являются комплексно сопряженными числами

$$\lambda_1 = \bar{\lambda}, \quad \lambda_2 = \lambda \equiv \frac{\sigma + i\sqrt{|d|}}{2}, \quad (2.3.39)$$

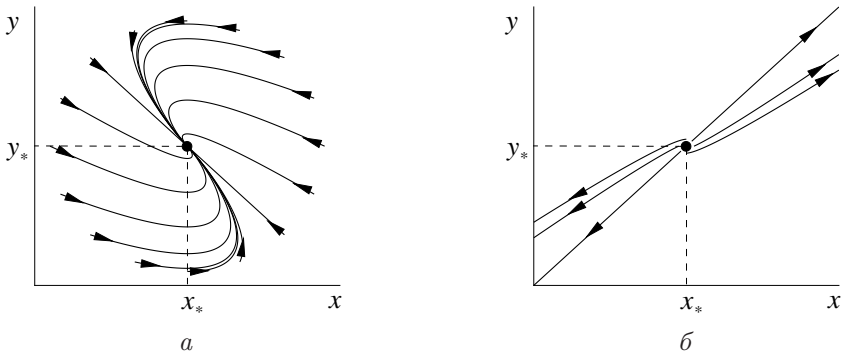


Рис. 14. Фазовые траектории, соответствующие решениям (2.3.37) линейной системы уравнений (2.3.26) в случае кратного собственного значения (2.3.36): $a - \lambda < 0$; $b - \lambda > 0$

им соответствуют линейно независимые собственные векторы

$$\mathbf{r}_1 = \bar{\mathbf{r}}, \quad \mathbf{r}_2 = \mathbf{r} \equiv \begin{pmatrix} V(x_*) \\ \bar{\lambda} \end{pmatrix}, \quad (2.3.40)$$

при этом

$$\mathcal{A}\mathbf{r} = \lambda \mathbf{r}, \quad \mathcal{A}\bar{\mathbf{r}} = \bar{\lambda} \bar{\mathbf{r}}$$

и общее решение системы (2.3.26) имеет вид [25]

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_* + C_1 \operatorname{Re}(e^{\lambda t} \mathbf{r}) + C_2 \operatorname{Im}(e^{\lambda t} \mathbf{r}). \quad (2.3.41)$$

Поскольку

$$e^{\lambda t} = e^{\sigma t/2} \left(\cos \frac{\sqrt{|d|} t}{2} + i \sin \frac{\sqrt{|d|} t}{2} \right), \quad (2.3.42)$$

то из формулы (2.3.41) следует, что при $-2\sqrt{\mu} < \sigma < 0$ точка покоя \mathbf{x}_* будет асимптотически устойчивым решением, при $0 < \sigma < 2\sqrt{\mu}$ — неустойчивым, а при $\sigma = 0$ — устойчивым, но не асимптотически.

На рис. 15 показаны графики компонент решения (2.3.41) для некоторой фиксированной начальной точки \mathbf{x}_0 в случае $\operatorname{Re} \lambda \neq 0$. Видно, что функции $x(t)$, $y(t)$ являются колеблющимися функциями, при этом ам-

плитуда колебаний уменьшается, если $\text{Re } \lambda < 0$, и увеличивается, если вещественная часть комплексного корня λ положительна.

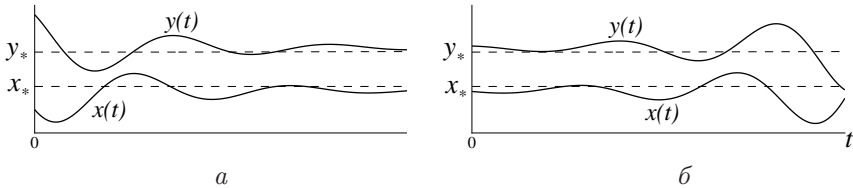


Рис. 15. Интегральные кривые (2.3.41): $a - \text{Re } \lambda < 0$; $b - \text{Re } \lambda > 0$

На рис. 16 изображены фазовые траектории в случае $\text{Re } \lambda \neq 0$. Они имеют вид спиралей, закрученных против часовой стрелки, при этом траектории приближаются к точке покоя или удаляются от нее в зависимости от знака действительной части числа λ . Соответственно точка покоя называется *устойчивым фокусом*, если $\text{Re } \lambda < 0$, и *неустойчивым фокусом*, если $\text{Re } \lambda > 0$.

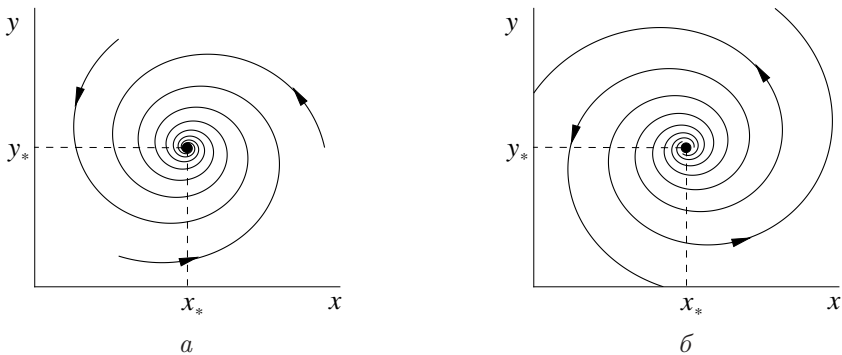


Рис. 16. Фазовые траектории, соответствующие решениям (2.3.41) линейной системы уравнений (2.3.26) в случае комплексных собственных значений (2.3.39): $a - \text{Re } \lambda < 0$; $b - \text{Re } \lambda > 0$

Наконец, если $\text{Re } \lambda = 0$ (т. е. $\sigma = 0$), то с учетом формул (2.3.40), (2.3.42) получаем следующие выражения для компонент решения (2.3.41):

$$\begin{aligned}
 x(t) &= x_* + (x_0 - x_*) \cos pt - (y_0 - y_*) \frac{V(x_*)}{p} \sin pt, \\
 y(t) &= y_* + (y_0 - y_*) \cos pt + (x_0 - x_*) \frac{p}{V(x_*)} \sin pt,
 \end{aligned}
 \tag{2.3.43}$$

где $p = \frac{\sqrt{|d|}}{2}$, $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$ — начальная точка интегральной кривой. Таким образом, компоненты решения (2.3.43) являются периодическими функциями, соответствующие им фазовые траектории — эллипсами, описываемыми уравнениями

$$\frac{(x - x_*)^2}{CV(x_*)/p} + \frac{(y - y_*)^2}{Cp/V(x_*)} = 1,$$

где

$$C = \frac{(x_0 - x_*)^2}{V(x_*)/p} + \frac{(y_0 - y_*)^2}{p/V(x_*)},$$

а точка покоя — *центром*. Такой тип точки покоя нам уже встречался при исследовании линеаризованных уравнений Лотки — Вольтерра (см. п. 2.3.2).

Суммируя результаты исследований всех возможных случаев (2.3.30), (2.3.35), (2.3.38), можно сказать, что точка покоя \mathbf{x}_* асимптотически устойчива при $\sigma < 0$, неустойчива при $\sigma > 0$, устойчива, но не асимптотически при $\sigma = 0$. Для рассматриваемой задачи этот результат можно переформулировать так: если $\operatorname{Re} \lambda_i < 0$ ($i = 1, 2$), то имеем асимптотически устойчивую точку покоя, если $\operatorname{Re} \lambda_i > 0$ — неустойчивую, при $\operatorname{Re} \lambda_i = 0$ устойчивую, но не асимптотически.

Итак, мы выполнили полное исследование поведения решения модели первого приближения (2.3.26) в окрестности рассмотренной точки покоя \mathbf{x}_* .

Можно ли утверждать, что решение нелинейной модели (2.3.18) ведет себя аналогично решению линейной модели? Оказывается, что в некоторых случаях такое утверждение будет верным. Оно основывается на теоремах Ляпунова, формулировку одной из которых мы здесь приведем.

Теорема 1 (Об устойчивости точки покоя). *Если корни характеристического уравнения системы первого приближения (2.3.26) имеют*

отрицательные вещественные части, то точка покоя \mathbf{x}_ нелинейной системы (2.3.9) асимптотически устойчива. Если хоть один корень имеет положительную вещественную часть, то точка покоя неустойчива.*

Таким образом, основываясь на этой теореме, можно утверждать, что при любых значениях параметра (2.3.27), кроме $\sigma = 0$, поведение решения нелинейной модели Колмогорова (2.3.18) в окрестности точки покоя будет такое же, как в линейной модели (2.3.26): оба решения будут одновременно либо асимптотически устойчивыми, либо неустойчивыми, точка покоя будет либо узлом, либо фокусом для обеих моделей.

Что же касается случая $\sigma = 0$, то приведенная теорема не дает ответа на вопрос о соответствии свойств решений линейной и нелинейной моделей в окрестности точки покоя.

2.3.4. Контрпример. Мы установили, что изучение свойств решений линейной модели может дать в некоторых случаях ясное представление о качественном поведении решения нелинейной модели. Для модели Колмогорова (2.3.18) остались невыясненными лишь свойства решения при значении параметра $\sigma = 0$, т. е. когда корни характеристического уравнения (2.3.28) линейной системы (2.3.26) являются чисто мнимыми числами.

Нельзя ли сказать, что и для нелинейных уравнений точка покоя будет, как и в линейной модели, центром, а фазовые траектории — циклами? Вспомним, что для нелинейной модели Лотки — Вольтерра (2.3.9), (2.3.11) мы получили соответствие по типу точки покоя и форме фазовых траекторий с системой линейных уравнений (2.3.13), причем корни характеристического уравнения последней системы были чисто мнимыми числами (2.3.14). Но оказывается, что в общем случае при наличии чисто мнимых корней характеристического уравнения такого соответствия уже может и не быть. Приведем соответствующий пример.

Автономная система уравнений

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -py - x(x^2 + y^2), \\ \frac{dy}{dt} &= px - y(x^2 + y^2) \end{aligned} \tag{2.3.44}$$

с параметром $p = \text{const} > 0$ имеет единственную неподвижную точку $\mathbf{x}_* = (0, 0)$ и может быть проинтегрирована аналитически для любых начальных данных:

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 = (x_0, y_0). \tag{2.3.45}$$

В самом деле, введем полярные координаты

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi \quad (2.3.46)$$

и перейдем в системе (2.3.44) к новым зависимым переменным $r = r(t)$ и $\varphi = \varphi(t)$:

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dt} \cos \varphi - \frac{d\varphi}{dt} r \sin \varphi &= -pr \sin \varphi - r^3 \cos \varphi, \\ \frac{dr}{dt} \sin \varphi + \frac{d\varphi}{dt} r \cos \varphi &= pr \cos \varphi - r^3 \sin \varphi. \end{aligned}$$

Разрешив эту систему относительно производных, получим простые уравнения

$$\frac{dr}{dt} = -r^3, \quad \frac{d\varphi}{dt} = p,$$

которые имеют решение

$$r(t) = \sqrt{\frac{1}{2t + 1/r_0^2}}, \quad \varphi(t) = pt + \varphi_0, \quad (2.3.47)$$

где числа r_0 и φ_0 однозначно определяются заданными начальными данными (2.3.45):

$$x_0 = r_0 \cos \varphi_0, \quad y_0 = r_0 \sin \varphi_0.$$

Подставляя найденные функции (2.3.47) в формулы (2.3.46), приходим к следующему виду решения нелинейной задачи (2.3.44), (2.3.45):

$$\begin{aligned} x(t) &= \sqrt{\frac{1}{2t + 1/r_0^2}} \cos(pt + \varphi_0), \\ y(t) &= \sqrt{\frac{1}{2t + 1/r_0^2}} \sin(pt + \varphi_0). \end{aligned}$$

На рис. 17, *a* изображены фазовые траектории этих решений при значении параметра $p = 1$. Видим, что для нелинейной системы уравнений (2.3.44) точка покоя является устойчивым фокусом, при этом фазовые траектории стремятся к точке покоя медленнее, чем траектории решений вида (2.3.41) с экспоненциальными множителями.

Теперь в окрестности точки покоя рассмотрим первое приближение си-

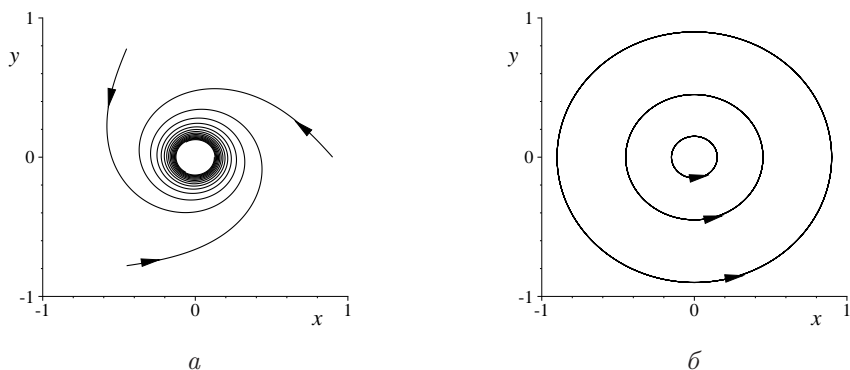


Рис. 17. Фазовые траектории: *a* — соответствующие решениям нелинейной системы уравнений (2.3.44); *б* — линейного приближения (2.3.48)

стемы (2.3.44):

$$\frac{dx}{dt} = \mathcal{A}x, \quad (2.3.48)$$

где

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & -p \\ p & 0 \end{pmatrix}.$$

Матрица \mathcal{A} имеет чисто мнимые комплексно сопряженные собственные значения

$$\lambda_1 = -ip, \quad \lambda_2 = ip,$$

поэтому согласно формуле (2.3.41) для компонент решения задачи (2.3.48), (2.3.45) получаем выражения вида (2.3.43):

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 \cos pt - y_0 \sin pt, \\ y(t) &= y_0 \cos pt + x_0 \sin pt. \end{aligned} \quad (2.3.49)$$

Отсюда следует, что фазовые траектории, соответствующие решениям (2.3.49) линейной системы, являются концентрическими окружностями (см. рис. 17, *б*) $x^2 + y^2 = x_0^2 + y_0^2$ с центром в точке покоя и не имеют ничего общего с фазовыми траекториями исходной нелинейной задачи. Таким образом, в данном случае нелинейная модель и ее линейный аналог не являются качественно эквивалентными, и по свойствам решения линейного

приближения оказалось невозможным правильно предсказать поведение решения исходной нелинейной задачи. Отметим, что это можно сделать, используя приближения более высокого порядка [3].

Итак, на простых примерах мы убедились, что линейные аналоги исходных нелинейных математических моделей могут дать полезную, хотя и не всегда полную, информацию об изучаемых реальных явлениях. Иногда (это зависит от цели исследования) применение лишь линейных моделей может привести к положительному результату, но надо всегда помнить, что они имеют ограниченную область применимости, границы которой определяются путем сравнения с результатами, полученными по более полным моделям. При всех недостатках линейные модели обязательно должны быть включены в иерархическую цепочку математических моделей, предназначенных для исследования реальных объектов.

З А Д А Ч И

2.3.1. В п. 2.3.2 мы установили, что точка покоя $x_* = (1, 1)$ является устойчивым решением типа *центр* системы уравнений Лотки — Вольтерра (2.3.9), (2.3.11) с положительным параметром $p > 0$. Используя первое приближение этой системы, исследовать на устойчивость другие точки покоя.

2.3.2. В п. 2.3.3 мы установили, что при $\sigma \neq 0$ точка покоя x_* , координаты x_* , y_* которой определены в формулах (2.3.23), (2.3.24), является узлом или фокусом, устойчивым или неустойчивым решением модели Колмогорова (2.3.18). Используя линейное приближение этой модели, исследовать на устойчивость другие точки покоя.

2.3.3. Запишем систему уравнений (2.2.21) в безразмерных переменных (2.2.31) и переобозначим новые переменные ξ , η и τ вновь как x , y и t . В результате получим автономную систему (см. ответ задачи 2.3.4)

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= (1 - qx)x - (1 - q)xy, \\ \frac{dy}{dt} &= p(x - 1)y, \end{aligned} \tag{2.3.50}$$

где $p = \text{const} > 0$, $0 < q = \text{const} < 1$. Используя первое приближение этой системы, исследовать на устойчивость все точки покоя и нарисовать эскизы фазовых траекторий.

2.3.4. Перепишем систему (2.2.27) в привычных обозначениях:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \varepsilon \left(1 - x - \frac{y}{p} \right) x, \\ \frac{dy}{dt} &= (1 - p x - y) y.\end{aligned}\tag{2.3.51}$$

Здесь ε и p — параметры, удовлетворяющие условиям $\varepsilon = \text{const} > 0$, $p = \text{const} > 0$, $p \neq 1$. Используя первое приближение, исследовать на устойчивость все точки покоя нелинейной системы уравнений (2.3.51) и нарисовать эскизы фазовых траекторий.

§ 2.4. Простейшие математические модели экономических процессов

В первой главе (см. п. 1.1.5) было отмечено, что очень часто одинаковыми или «похожими» уравнениями описываются процессы и явления из самых разных сфер окружающего мира. Поэтому методы, разработанные для математического моделирования одних явлений, относительно легко, «по аналогии», могут быть перенесены на широкие классы совсем других процессов. В настоящем параграфе приводятся примеры биолого-экономических аналогий.

2.4.1. Простейшая модель экономического роста. В среднем по времени реальный доход страны, как правило, растет. Бывают периоды, когда он падает (периоды рецессий), но в долгосрочном аспекте происходит рост. Экономический рост — актуальнейшая проблема макроэкономики — раздела экономической теории, в котором изучаются проблемы экономики в целом: экономический рост, кризисы, инфляция, безработица и т. д.

Рассмотрим динамику отдельной экономики в долгосрочном периоде, считая, что ее состояние в любой момент времени t описывается совокупностью следующих величин: $D(t)$ — объем конечного продукта (доход), $C(t)$ — фонд непродовольственного потребления, $S(t)$ — фонд накопления, $y(t)$ — объем трудовых ресурсов (здесь — число работающих), $X(t)$ — объем капитальных ресурсов (все имеющиеся средства производства, используемые в производстве товаров и услуг).

Предполагается, что конечный продукт полностью используется на потребление и накопление, т. е. $D = C + S$, при этом фонд накопления S составляет заданную часть s от конечного продукта, поэтому

$$\begin{aligned} S &= sD, \\ C &= (1 - s)D, \end{aligned} \tag{2.4.1}$$

где $s = \text{const}$, $0 < s < 1$. Будем считать, что износ капитальных ресурсов пропорционален их объему, и фонд накопления полностью расходуется на инвестиции, покрывающие изнашившийся капитал, и инвестиции, идущие на прирост капитала:

$$S = \delta \cdot X + \frac{dX}{dt}, \tag{2.4.2}$$

где $\delta = \text{const}$, $0 < \delta < 1$.

Предполагается, что численность рабочих, капитал и объем конечного продукта связаны между собой с помощью *производственной функции* $f(x)$:

$$D = yf(x), \tag{2.4.3}$$

где $x = X/y$ — *капиталовооруженность рабочей силы*, $x \geq 0$, $f(0) = 0$, $f'(x) > 0$.

Тогда с учетом формул (2.4.1) и (2.4.3) уравнение (2.4.2) запишется как

$$syf(x) = \delta \cdot X + \frac{dX}{dt},$$

или

$$\frac{1}{y} \frac{dX}{dt} = sf(x) - \delta x. \tag{2.4.4}$$

В силу равенства

$$X = xy \tag{2.4.5}$$

получаем, что

$$\frac{dX}{dt} = x \frac{dy}{dt} + y \frac{dx}{dt},$$

поэтому уравнение (2.4.4) можно переписать как

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{x}{y} \frac{dy}{dt} + sf(x) - \delta x. \tag{2.4.6}$$

Кроме того, предположим, что численность рабочих экспоненциально

возрастает с относительной скоростью $\varepsilon = \text{const} > 0$:

$$\frac{dy}{dt} = \varepsilon y. \quad (2.4.7)$$

Тогда уравнение (2.4.6) можно переписать в следующем окончательном виде:

$$\frac{dx}{dt} = sf(x) - (\delta + \varepsilon)x. \quad (2.4.8)$$

Задав начальные данные

$$x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0 \quad (2.4.9)$$

и найдя решение $x(t)$, $y(t) = y_0 e^{\varepsilon t}$ задачи Коши (2.4.7)–(2.4.9), по формуле (2.4.5) определяем объем капитальных ресурсов, по формуле (2.4.3) — доход, по формулам (2.4.1) — фонды потребления и накопления.

Рассмотрим наиболее простой случай, когда производственная функция является линейной:

$$f(x) = mx, \quad m = \text{const} > 0. \quad (2.4.10)$$

Тогда уравнение для капиталовооруженности (2.4.8) принимает вид

$$\frac{dx}{dt} = (sm - \delta - \varepsilon)x, \quad (2.4.11)$$

т. е. оно совпадает с уравнением (2.1.1) модели Мальтуса. Поэтому приведенная экономическая модель будет обладать теми же недостатками, что и биологическая модель Мальтуса.

В теории экономического роста наиболее часто используется другая производственная функция — функция Кобба — Дугласа [35]:

$$f(x) = mx^\alpha, \quad m = \text{const} > 0, \quad 0 < \alpha = \text{const} < 1. \quad (2.4.12)$$

Для такой функции уравнение (2.4.8) запишется как уравнение Бернулли:

$$\frac{dx}{dt} = smx^\alpha - (\delta + \varepsilon)x. \quad (2.4.13)$$

Точка равновесия

$$x_* = \left(\frac{sm}{\varepsilon + \delta} \right)^{1/(1-\alpha)} > 0 \quad (2.4.14)$$

является устойчивой и $x(t) \rightarrow x_*$ при $t \rightarrow \infty$. В последнем свойстве можно убедиться и непосредственно, найдя предел при $t \rightarrow \infty$ точного решения задачи (2.4.13), (2.4.9):

$$x(t) = \left[x_*^{1-\alpha} + (x_0^{1-\alpha} - x_*^{1-\alpha}) e^{-(\delta+\varepsilon)(1-\alpha)t} \right]^{1/(1-\alpha)}. \quad (2.4.15)$$

Поскольку численность работающих $y(t)$ со временем возрастает, то из формулы (2.4.3) следует, что в состоянии равновесия капиталовооруженности $x = x_*$ выпуск конечного продукта растет, фонды потребления и накопления увеличиваются (см. формулы (2.4.1)), объем капитальных ресурсов (2.4.5) также растет, т. е. имеет место рост экономики, хотя производительность труда D/y при $x = x_*$ не меняется.

Из формулы (2.4.14) видно, что устойчивый уровень капиталовооруженности x_* прямо пропорционален принятой норме сбережения s и величине коэффициента m в производственной функции, но обратно пропорционален темпу роста работающих и норме амортизационных отчислений δ . Считая параметры m , α , ε и δ неизменными, выясним, при какой норме накопления будет поддерживаться максимально возможное среднедушевое потребление $c = C/y$ в состоянии устойчивого равновесия $x = x_*$ растущей экономики. Используя формулы (2.4.1), (2.4.3), (2.4.12), получаем, что

$$c(s) = \frac{C}{y} = \frac{(1-s)D}{y} = \frac{(1-s)yf(x_*)}{y} = (1-s)mx_*^\alpha,$$

поэтому

$$\frac{\partial c}{\partial s} = -mx_*^\alpha + (1-s)m\alpha x_*^{\alpha-1} \frac{\partial x_*}{\partial s}.$$

Учитывая выражение (2.4.14), приходим к выводу о том, что $\partial c / \partial s = 0$ при $s = \alpha$. Таким образом, наиболее высокий уровень благосостояния работающих достигается при норме накопления $s = \alpha$. Устойчивый уровень капиталовооруженности x_* , при котором достигается максимально возможное потребление, называется *уровнем, соответствующим Золотому правилу накопления*.

Ясно, что рассмотренная модель экономического роста не способна объ-

яснить многие наблюдаемые в экономике явления, поэтому она нуждается в усовершенствовании подобно тому, как использовавшиеся на первых этапах простейшие математические модели Мальтуса и Ферхюльста — Пирла, описывающие развитие биологических популяций, получили дальнейшее уточнение в более поздних моделях Лотки — Вольтерра, Колмогорова и др. Несовершенство экономической модели (2.4.13) привело к созданию целой иерархии моделей экономического роста [35], на которых базируется управление современной экономикой.

2.4.2. Исследование макроэкономического равновесия. Рассмотрим теперь динамику экономики в застойный период, в состоянии, близком к макроэкономическому равновесию. Равновесие означает, что в экономике сложились количественные пропорции, обеспечивающие устойчивое сочетание товарных и денежных потоков, стабильность цен, равенство спроса и предложения для всех ресурсов. Разумеется, что такого абсолютного равновесия никогда не бывает, поэтому макроэкономическое равновесие нужно рассматривать как некоторый абстрактный модельный идеал, полезный при исследовании проблемы поведения экономической системы в окрестности точки равновесия. Для изучения этой проблемы воспользуемся более сложной, чем в п. 2.4.1, математической моделью.

Будем считать, что износ капитала пропорционален не только его объему, но и числу работающих, т. е. вместо уравнения (2.4.2) будем использовать следующее:

$$S = \delta \cdot Xy + \frac{dX}{dt}. \quad (2.4.16)$$

Тогда аналог уравнения (2.4.6) запишется как

$$\frac{dx}{dt} = -x \frac{1}{y} \frac{dy}{dt} + sf(x) - \delta xy. \quad (2.4.17)$$

В состоянии застоя для численности рабочих уже не будет экспоненциального роста, она либо постоянна, либо меняется в некоторых пределах в большую или меньшую сторону. Будем считать, что в отсутствие фонда потребления ($C = 0$) рабочие уходят с производства и их численность экспоненциально убывает с относительной скоростью $\beta = \text{const} > 0$:

$$\frac{dy}{dt} = -\beta y.$$

Если же величина C положительна, то k -я часть этого фонда ($k = \text{const}$, $0 < k < 1$) расходуется на воспроизводство рабочей силы и поддержание численности работающих. Таким образом, можно предположить, что численность работающих подчиняется уравнению

$$\frac{dy}{dt} = kC - \beta y$$

или

$$\frac{dy}{dt} = k(1-s)D - \beta y,$$

которое с учетом равенства (2.4.3) принимает вид

$$\frac{dy}{dt} = [k(1-s)f(x) - \beta]y. \quad (2.4.18)$$

Тогда уравнение (2.4.17) запишется как

$$\frac{dx}{dt} = -x[k(1-s)f(x) - \beta] + sf(x) - \delta xy. \quad (2.4.19)$$

Сначала рассмотрим линейную производственную функцию (2.4.10). В этом случае систему уравнений (2.4.18), (2.4.19) можно записать в следующей форме:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= a(x)x - V(x)y, \\ \frac{dy}{dt} &= K(x)y, \end{aligned} \quad (2.4.20)$$

где

$$K(x) = k(1-s)mx - \beta, \quad a(x) = sm - K(x), \quad V(x) = \delta x. \quad (2.4.21)$$

Видим, что полученная система полностью совпала с системой уравнений модели Колмогорова (2.3.18), при этом условия (2.3.20)—(2.3.22) очевидно выполняются. Основываясь на результатах исследования модели Колмогорова (см. п. 2.3.3), можно сделать некоторые выводы о поведении рассматриваемой экономической системы.

В положительном квадранте система (2.4.20) имеет единственную точку покоя, при этом ее координаты вычисляются по формулам (2.3.23) и (2.3.24):

$$x_* = \frac{\beta}{k(1-s)m}, \quad y_* = \frac{sm}{\delta}. \quad (2.4.22)$$

Выражения для коэффициентов характеристического уравнения (2.3.28)

$$\sigma = -\beta, \quad \mu = s\beta m \quad (2.4.23)$$

свидетельствуют о том, что его корни имеют отрицательные вещественные части при любых допустимых значениях параметров, поэтому точка покоя будет устойчивым узлом, вырожденным устойчивым узлом или устойчивым фокусом, а фазовые траектории будут подобны траекториям, изображенным соответственно на рис. 12, *a*, 14, *a* или 16, *a*. Следовательно, экономическая система будет при $t \rightarrow \infty$ всегда приближаться к своему равновесному состоянию, причем либо без колебаний (как на рис. 11, *a* или 13, *a*), либо с затухающими колебаниями (см. рис. 15, *a*).

Теперь возьмем более близкую к реальности производственную функцию Кобба — Дугласа (2.4.12). Тогда система уравнений (2.4.18), (2.4.19) примет такой вид:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -xK(x) + smx^\alpha - V(x)y, \\ \frac{dy}{dt} &= K(x)y, \end{aligned} \quad (2.4.24)$$

где

$$K(x) = k(1-s)mx^\alpha - \beta, \quad V(x) = \delta x. \quad (2.4.25)$$

Точка покоя этой системы имеет координаты

$$x_* = \left(\frac{\beta}{k(1-s)m} \right)^{1/\alpha}, \quad y_* = \frac{sm}{\delta} x_*^{\alpha-1}. \quad (2.4.26)$$

Нетрудно показать, что и для производственной функции (2.4.12) точка покоя всегда устойчива и является либо узлом, либо фокусом (см. задачу 2.4.2).

Рассмотрим теперь влияние параметров k и s на показатели x_* и y_* , при этом остальные параметры будем считать заданными и неизменными. Из рис. 18 видно, что если параметр k зафиксировать, то при возрастании параметра s капиталовооруженность рабочей силы будет возрастать, а численность работающих будет сначала увеличиваться, а затем, начиная с некоторого значения s , уменьшаться. Если зафиксировать параметр s , то при возрастании параметра k капиталовооруженность падает, а численность работающих растет (рис. 19), т. е. показатели x_* и y_* являются противоречивыми: увеличение первого из них ведет к уменьшению второго и наоборот.

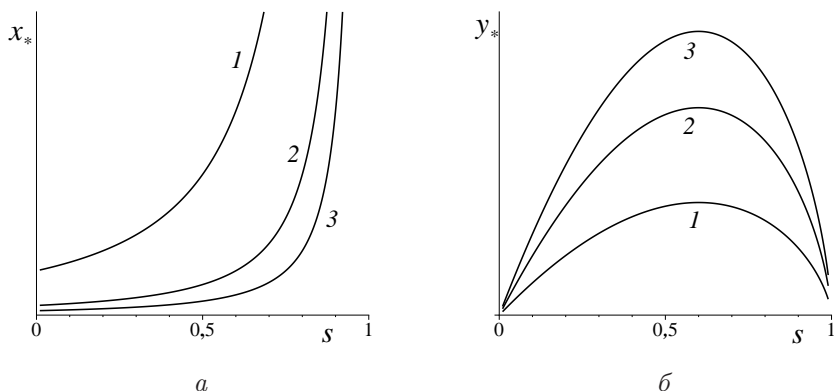


Рис. 18. Графики зависимости от параметра s : а — капиталовооруженности x_* ; б — численности работающих y_* при значении параметра k , равном 0,2 (1); 0,5 (2); 0,8 (3); $\alpha = 0,6$

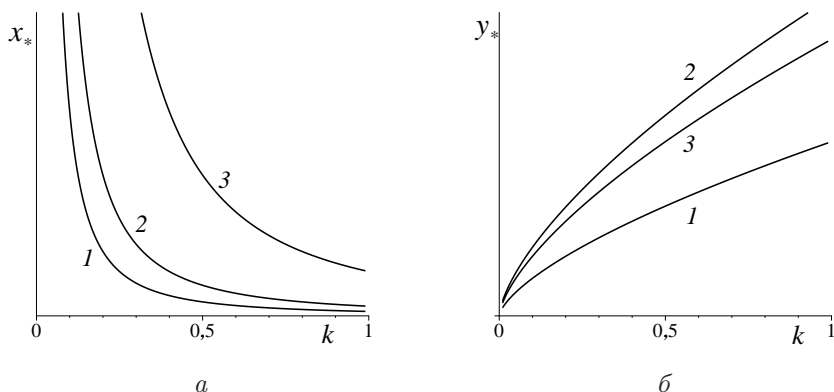


Рис. 19. Графики зависимости от параметра k : а — капиталовооруженности x_* ; б — численности работающих y_* при значении параметра s , равном 0,2 (1); 0,5 (2); 0,8 (3); $\alpha = 0,6$

Предположим, что мы хотим добиться высокого уровня капиталовооруженности и занятости одновременно. Зададимся вопросом, нельзя ли подобрать параметры k и s так, чтобы для них и капиталовооруженность x_* , и численность работающих y_* принимали максимальные значения? Пусть точки (k, s) принадлежат прямоугольнику, изображенному на рис. 20, а. Тогда точки (x_*, y_*) заполняют область, изображенную серым цветом на

рис. 20, б.

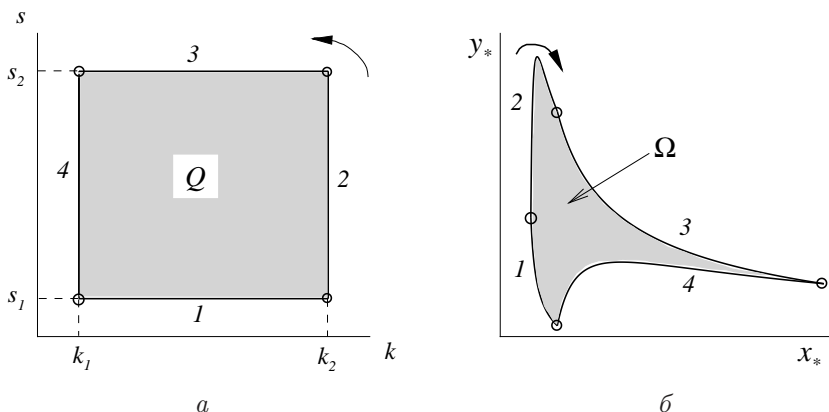


Рис. 20. Области изменения: *а* — параметров k и s ; *б* — капиталовооруженности $x_*(k, s)$ и численности работающих $y_*(k, s)$; $\alpha = 0,6$

Видно, что одновременно максимальное значение обоих показателей x_* , y_* не достигается ни в одной точке (k, s) . Таким образом, в задаче оптимизации показателей x_* , y_* нужны некоторые дополнительные критерии или экспертные оценки. Некоторые подходы к решению подобного рода задач обсуждаются в следующем параграфе.

2.4.3. Биолого-экономическая аналогия на примере модели Лотки — Вольтерра. Среди всех экономических ресурсов, используемых в производстве товаров и услуг, наиболее важным является труд, который, в отличие от обычных товаров, покупается не для удовлетворения потребителя, а для того, чтобы производить конкретную продукцию. Спрос на рабочую силу в общем виде отражает потребность экономики в определенном количестве работников на каждый данный момент времени. На стороне спроса выступают работодатели, а предложение представлено действующими и потенциальными работниками, чье решение о поступлении на работу зависит от предлагаемой зарплаты.

Пусть $x(t)$ — зарплата и $y(t)$ — число занятых работников в момент времени t . Будем считать, что при отсутствии работников зарплата растет экспоненциально с относительной скоростью α , а при отсутствии зарплаты численность работников экспоненциально убывает с относительной скоростью β , т. е. величины $x(t)$, $y(t)$ описываются в этих экстремальных случаях уравнениями

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \alpha x, \\ \frac{dy}{dt} &= -\beta y.\end{aligned}\tag{2.4.27}$$

Здесь $\alpha = \text{const} > 0$, $\beta = \text{const} > 0$.

Далее будем предполагать, что при наличии y работников темп α роста зарплаты уменьшается на величину my , пропорциональную текущей численности работников, где $m = \text{const} > 0$, а при наличии зарплаты x темп β изменения численности работающих возрастает на величину γx ($\gamma = \text{const} > 0$), пропорциональную величине зарплаты. При этих предположениях система уравнений (2.4.27) модифицируется в следующую:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= (\alpha - my)x, \\ \frac{dy}{dt} &= (\gamma x - \beta)y.\end{aligned}\tag{2.4.28}$$

Видим, что полученная система уравнений полностью идентична системе уравнений Лотки — Вольтерра (2.2.11). Основываясь на выполненном в п. 2.2.2 анализе, можно сделать некоторые выводы относительно динамики зарплаты и численности работающих. Например, в положительном квадранте существует единственная точка равновесия:

$$x_* = \frac{\beta}{\gamma}, \quad y_* = \frac{\alpha}{m}.\tag{2.4.29}$$

Эта точка имеет тип *центр*, фазовые траектории являются циклами, наподобие изображенных на рис. 7, б и 8. Если в начальный момент времени зарплата и численность работающих не совпадают с равновесными значениями (2.4.29), то функции $x(t)$, $y(t)$ являются периодическими, при этом их средние по периоду значения совпадают с равновесными (см. задачу 2.2.3). Интересной особенностью является и то, что в некоторые моменты времени зарплата может быть максимальной, а число работающих меньше максимально возможного и наоборот, зарплата может быть средней, но за нее в этот момент времени работают все потенциально возможные работники.

Таким образом, хотя сущность рассмотренных биологических и экономических явлений различна, построенные модели оказались идентичными. Это свидетельствует о важнейшем свойстве математических моделей — их универсальности, которая является следствием универсальности принципов описания окружающего мира и широко используется при

изучении объектов самой разнообразной природы.

З А Д А Ч И

2.4.1. Считая параметры m , β , k и δ неизменными, выяснить влияние нормы накопления s на характер приближения экономической системы, описываемой в рамках модели (2.4.20), (2.4.21), к своему состоянию равновесия (2.4.22).

2.4.2. Показать, что при любых допустимых значениях параметров α , β , k , s , m , δ точка покоя (2.4.26) является либо устойчивым узлом, либо устойчивым фокусом системы уравнений (2.4.24).

2.4.3. Считая параметры α , β , m , δ состояния равновесия (2.4.26) фиксированными, исследовать характер зависимости от параметров k и s капитала X , конечного продукта D и среднедушевого потребления $c = (1 - k)C/y_*$.

2.4.4. Если параметры α , β , m , δ считать фиксированными, а точку (k, s) принадлежащей прямоугольнику Q (см. рис. 20, *a*), то уравнения (2.4.26) будут описывать отображение

$$x_* = x_*(k, s), \quad y_* = y_*(k, s) \tag{2.4.30}$$

области Q на область Ω переменных x_* , y_* , показанную на рис. 20, *б*. Доказать невырожденность этого отображения. Объяснить, почему при отображении (2.4.30) обход границы области Q против часовой стрелки соответствует обходу границы области Ω по часовой (на рис. 20 соответствующие направления обходов указаны стрелками).

§ 2.5. Математическое моделирование в задачах поддержки принятия решений

Для многих сложных проблем математические модели формулируются сразу в дискретной форме, например, в виде систем алгебраических уравнений и неравенств для большого числа неизвестных величин. Как было сказано в § 1.2, при разработке эффективных алгоритмов численного решения таких задач возникает множество специфичных вопросов, требующих глубокого изучения с привлечением знаний из широкого спектра математических дисциплин. Некоторые из этих проблем рассматриваются на конкретных примерах в настоящем параграфе.

2.5.1. Задачи принятия оптимальных решений. Практическая потребность общества в научных основах принятия решений возникла уже давно. В последние годы в связи со значительным усложнением функций управления во всех областях человеческой деятельности задачи о принятии оптимальных решений стали особенно актуальными. В этих сложных задачах имеется, как правило, несколько противоречивых целей и критериев, поэтому выбор наиболее рационального решения из множества допустимых альтернатив решений становится весьма сложной проблемой [16]¹. Основные методы теории принятия решений излагаются в курсе «Исследование операций» (см., напр., [10]), здесь же на нескольких примерах будут рассмотрены математические модели некоторых простейших ситуаций и обозначены подходы к решению возникающих задач.

Пример 1. Перевозчики должны доставить продукцию (товар) со складов I и II с запасами $a_1 = 70$, $a_2 = 50$ потребителям A и B с потребностями $b_1 = 80$ и $b_2 = 60$. За единицу перевезенной продукции со склада I потребителю A перевозчики получают вознаграждение, равное 6, с того же склада, но потребителю B — 8 и т. д., как указано на схеме (рис. 21, а).

Необходимо определить оптимальный (с точки зрения перевозчиков) план перевозок (x_1, x_2, x_3, x_4) , при котором транспортная компания получит наибольшее вознаграждение за свою работу, т. е. такой план, при котором целевая функция

$$f = 6x_1 + 6x_2 + 8x_3 + 5x_4 \quad (2.5.1)$$

¹В книге известных американских авторов R. Keeney и H. Raiffa развивается методология принятия решений, основывающаяся на использовании функций полезности. Рассматривается большое количество приложений описываемых методов к задачам принятия решений, связанных с выбором мест расположения аэропорта и электростанции, деловой деятельностью, медицинской диагностикой и т. п.

будет принимать наибольшее значение с учетом ограничений:

$$x_1 + x_4 \leq 80, \quad x_2 + x_3 \leq 60, \quad (2.5.2)$$

$$x_1 + x_3 \leq 70, \quad x_2 + x_4 \leq 50, \quad (2.5.3)$$

$$x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, 3, 4. \quad (2.5.4)$$

В приведенных формулах через x_1 обозначено количество единиц товара, перевезенного со склада *I* потребителю *A*, x_2 — со склада *II* потребителю *B* и т. д., как изображено на рис. 21, *a*. Эти переменные должны принимать неотрицательные значения, что отражено в неравенствах (2.5.4). Неравенства (2.5.2) означают, что в пункты назначения будет доставлено продукции не больше их потребностей, а неравенства (2.5.3) — количество вывозимой с каждого склада продукции не превышает ее запаса.

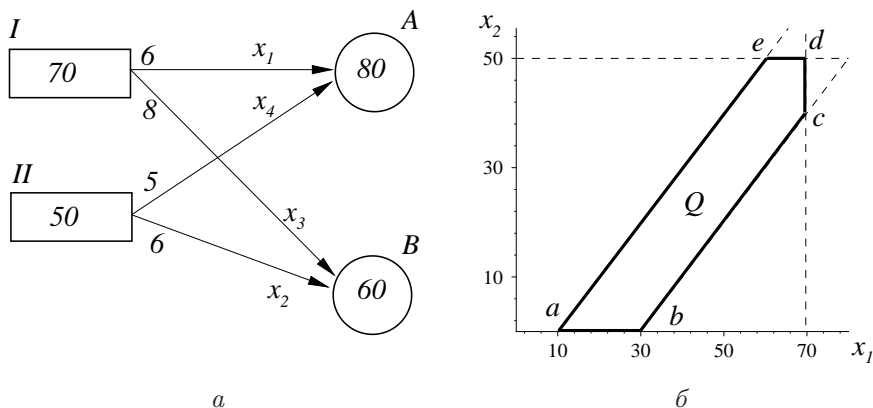


Рис. 21. Задача определения оптимального плана перевозок: *a* — схема перевозок грузов; *б* — область допустимых значений переменных x_1, x_2

Видим, что полученная задача существенно отличается от рассмотренных ранее: здесь нет дифференциальных уравнений и начальных условий, но появились ограничения на искомые величины в виде систем линейных неравенств. Поэтому алгоритмы решения здесь будут совершенно иными, нежели алгоритмы решения начально-краевых задач для дифференциальных уравнений. Поставленная задача рассматривается в рамках *линейного программирования* — математической дисциплины, изучающей методы нахождения наибольшего (или наименьшего) значения линейной функции нескольких переменных, которые удовлетворяют конечному чис-

лу линейных уравнений и неравенств. Ясно, что метод прямого перебора всех возможных вариантов здесь неприемлем: уж слишком много может быть таких вариантов в реальных ситуациях, когда число поставщиков и потребителей измеряется сотнями.

Для нашего примера мы можем довести решение до конца, не прибегая к использованию общих методов. В самом деле, очевидно, что функция (2.5.1) может принимать максимальное значение только при условии полного вывоза запасов, поэтому неравенства (2.5.3) можно сразу заменить на равенства

$$x_1 + x_3 = 70, \quad x_2 + x_4 = 50,$$

из которых следует, что

$$x_3 = 70 - x_1, \quad x_4 = 50 - x_2. \quad (2.5.5)$$

В результате задача (2.5.1)—(2.5.4) может быть переписана как

$$f(x_1, x_2) = 810 - 2x_1 + x_2, \quad (2.5.6)$$

$$0 \leq x_1 \leq 70, \quad 0 \leq x_2 \leq 50, \quad 10 \leq x_1 - x_2 \leq 30. \quad (2.5.7)$$

Область допустимых значений переменных x_1, x_2 , т. е. всех решений системы неравенств (2.5.7), показана на рис. 21, б. Поскольку эта область является многоугольником, то линейная функция (2.5.6) может достигать своего максимального значения только в его вершинах a, b, c, d или e . Непосредственными вычислениями убеждаемся, что это будет вершина a . Таким образом, максимальное вознаграждение $f = 790$ получается при плане перевозок

$$x_1 = 10; \quad x_2 = 0; \quad x_3 = 60, \quad x_4 = 50. \quad (2.5.8)$$

Ясно, что использованный здесь прием определения наибольшего значения целевой функции путем сравнения ее значений во всех предварительно определенных вершинах многоугольной области Q допустимых значений трудно реализовать для задач со многими складами и многими потребителями, поскольку в общем случае Q является многогранником, его граница представляет собой довольно сложный объект в многомерном пространстве, координаты вершин которого определить непросто.

На следующем примере попытаемся пояснить, как можно обобщить предложенный метод решения задачи.

Пример 2. Со складов *I* и *II* с запасами $a_1 = 70$, $a_2 = 50$ потребителям *A* и *B* с потребностями $b_1 = 80$ и $b_2 = 60$ доставляется некоторая продукция, при этом единица привезенной со склада *I* продукции продается в пункте *A* за 8 у. е., а в пункте *B* — за 5 у. е. Продукция со склада *II* продается в пункте *A* за 6 у. е., а в пункте *B* — за 4 у. е. (рис. 22, *a*). Необходимо определить оптимальный (с точки зрения продавцов) план перевозок (x_1, x_2, x_3, x_4) , при котором будет достигнута максимальная выгода от продаж:

$$f = 8x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 6x_4 \rightarrow \max. \tag{2.5.9}$$

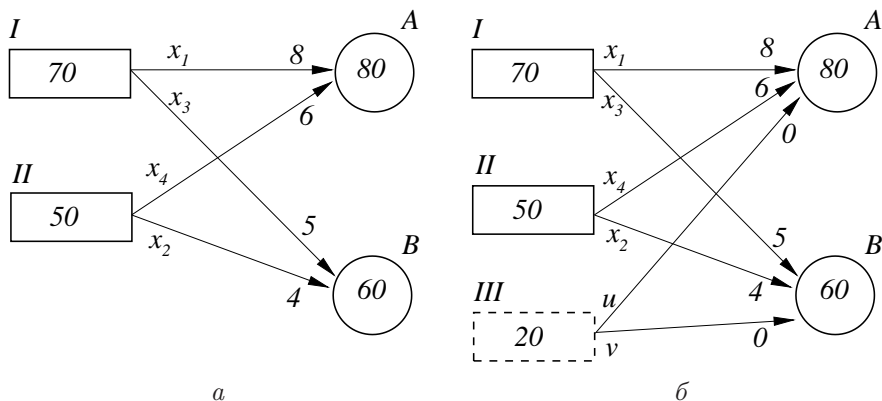


Рис. 22. Схемы постановки задач: *a* — о получении максимальной выгоды от продаж; *б* — задачи с фиктивным складом

Область допустимых значений переменных x_i ($i = 1, 2, 3, 4$) задается в этой задаче следующей системой ограничений:

$$x_1 + x_4 \leq 80, \quad x_2 + x_3 \leq 60, \quad (\text{неполное удовлетворение потребителей}) \tag{2.5.10}$$

$$x_1 + x_3 = 70, \quad x_2 + x_4 = 50, \quad (\text{полный вывоз запасов}) \tag{2.5.11}$$

$$x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, 3, 4. \quad (\text{неотрицательность объемов продаж}) \tag{2.5.12}$$

Решение этой задачи можно получить, так же как и в предыдущем

примере, переходом с помощью равенств (2.5.5) к целевой функции

$$f(x_1, x_2) = 650 + 3x_1 - 2x_2, \quad (2.5.13)$$

которую требуется максимизировать на пятиугольнике, изображенном на рис. 21, б. Вычисляя значения функции (2.5.13) в вершинах этого многоугольника, убеждаемся, что максимальное значение $f = 780$ достигается в вершине с, что соответствует оптимальному решению

$$x_1 = 70; \quad x_2 = 40; \quad x_3 = 0, \quad x_4 = 10. \quad (2.5.14)$$

Приведем теперь алгоритм, которым можно воспользоваться для решения задачи в общем случае большого числа поставщиков и потребителей. Рассмотренные в примерах 1 и 2 задачи называются *открытыми* по той причине, что в них не соблюдается баланс запасов и потребностей: наблюдается дефицит, нехватка запасов. В общем алгоритме вначале происходит переход к *закрытой* задаче, в которой этот баланс соблюдается. В нашей задаче для этого достаточно ввести *фиктивный склад III* с запасом продукции $a_3 = 20$, равным дефициту (на рис. 22, б фиктивный склад изображен прямоугольником с штриховым контуром), и фиктивные объемы u и v вывоза продукции с этого склада. Считается, что продукция с этого склада «продается» в пунктах потребления по цене 0 у. е., поскольку этого товара фактически не существует. Тогда целевая функция будет иметь тот же вид (2.5.9), а система четырех ограничений (2.5.10), (2.5.11) трансформируется в систему пяти уравнений относительно шести неизвестных (см. обозначения на рис. 22, б):

$$\begin{array}{ll} x_1 + x_4 + u = 80, & \text{(полное удовлетворение} \\ x_2 + x_3 + v = 60, & \text{потребителей)} \\ x_1 + x_3 = 70, & \text{(полный} \\ x_2 + x_4 = 50, & \text{вывоз} \\ u + v = 20. & \text{запасов)} \end{array} \quad (2.5.15)$$

Среди неотрицательных решений системы уравнений (2.5.15) требуется найти то, которое доставляет максимальное значение линейной функции (2.5.9).

Если бы у нас была закрытая задача с m складами и n потребителями, то система типа (2.5.15) содержала бы $(m + n)$ уравнений относительно (mn) неизвестных. Оказывается, что такая система может быть приведена к виду, в котором $(m + n - 1)$ неизвестных выражаются через остальные, причем свободные члены этих выражений неотрицательны. В нашем слу-

чае мы можем на основе системы (2.5.15) написать, например, следующие выражения:

$$\begin{aligned}x_1 &= 10 + x_2 + v, \\x_3 &= 60 - x_2 - v, \\x_4 &= 50 - x_2, \\u &= 20 - v.\end{aligned}\tag{2.5.16}$$

Неизвестные x_1, x_3, x_4, u , находящиеся в левой части системы (2.5.16), называются *базисными*, остальные — x_2 и v — *свободными*. С учетом выражений (2.5.16) целевую функцию (2.5.9) также можно представить через свободные переменные:

$$f = 680 + x_2 + 3v.\tag{2.5.17}$$

Полагая теперь все свободные переменные равными нулю

$$x_2 = 0, \quad v = 0,\tag{2.5.18}$$

получаем значения базисных переменных:

$$x_1 = 10, \quad x_3 = 60, \quad x_4 = 50, \quad u = 20,\tag{2.5.19}$$

и значение $f = 680$. Полученное допустимое решение (2.5.18), (2.5.19) служит начальным приближением при поиске оптимального решения с помощью итерационного *симплекс-метода* [34].

Первое итерационное приближение ищется путем перехода к другим базисным переменным с таким расчетом, чтобы значение функции f увеличилось. Из выражения (2.5.17) следует, что значение f можно увеличить, если увеличить значения свободных переменных x_2 и v . В простейшем варианте симплекс-метода увеличивают значение одной из свободных переменных, а остальные не меняют. Оставим $v = 0$, а значение x_2 увеличим, но так, чтобы значения базисных переменных не стали отрицательными числами. Из выражений (2.5.16) следует, что значение x_2 может быть увеличено до 50 (но не более, иначе x_4 станет отрицательным). Итак, возьмем $x_2 = 50$. Тогда получим новое допустимое решение:

$$x_1 = 60, \quad x_2 = 50, \quad x_3 = 10, \quad u = 20, \quad x_4 = 0, \quad v = 0.\tag{2.5.20}$$

Этому решению соответствуют базисные переменные x_1, x_2, x_3, u (положительные компоненты решения (2.5.20)) и свободные переменные x_4, v (нулевые компоненты решения (2.5.20)), при этом $f = 730$, т. е. значение целевой функции на решении (2.5.20) действительно стало больше, чем на начальном приближении (2.5.18), (2.5.19).

Для поиска следующего итерационного приближения нужно на основе системы (2.5.15) выписать выражения новых базисных переменных через новые свободные:

$$\begin{aligned}x_1 &= 60 - x_4 + v, \\x_2 &= 50 - x_4, \\x_3 &= 10 + x_4 - v \\u &= 20 - v\end{aligned}\tag{2.5.21}$$

и новое выражение для целевой функции (2.5.9):

$$f = 730 - x_4 + 3v.\tag{2.5.22}$$

Из последнего выражения следует, что увеличить значение функции f можно за счет увеличения только свободной переменной v . Поэтому, оставив $x_4 = 0$, из системы (2.5.21) получаем, что максимальным значением v может быть $v = 10$ (не более, иначе x_3 станет отрицательным). В результате получаем новое итерационное приближение:

$$x_1 = 70, \quad x_2 = 50, \quad u = 10, \quad v = 10, \quad x_3 = 0, \quad x_4 = 0\tag{2.5.23}$$

и соответствующее ему значение $f = 760$.

Для новых базисных переменных x_1, x_2, u, v и целевой функции получаем выражения:

$$\begin{aligned}x_1 &= 70 - x_3, \\x_2 &= 50 - x_4, \\u &= 10 - x_4 + x_3, \\v &= 10 + x_4 - x_3,\end{aligned}\tag{2.5.24}$$

$$f = 760 - 3x_3 + 2x_4.\tag{2.5.25}$$

Видно, что значение целевой функции можно увеличить до $f = 780$, заменив в решении (2.5.23) $x_4 = 0$ на положительное значение $x_4 = 10$ (больше нельзя, так как при $x_4 > 10$ формулы (2.5.24) дают отрицательное значение для переменной u). Соответствующее допустимое решение имеет вид

$$x_1 = 70, \quad x_2 = 40, \quad x_4 = 10, \quad v = 20, \quad x_3 = 0, \quad u = 0.\tag{2.5.26}$$

Перейдем к следующему шагу итерационного процесса. Для новых базисных переменных x_1, x_2, x_4, v имеем выражения:

$$\begin{aligned}x_1 &= 70 - x_3, \\x_2 &= 40 + u - x_3, \\x_4 &= 10 - u + x_3, \\v &= 20 - u,\end{aligned}\tag{2.5.27}$$

а целевая функция запишется через свободные переменные как

$$f = 780 - x_3 - 2u.\tag{2.5.28}$$

Отличие от предыдущих итерационных шагов заключается в том, что теперь увеличение значений свободных переменных x_3 и u ведет не к увеличению, а к уменьшению значений целевой функции, т. е. максимальное значение f может достигаться только при $x_3 = 0, u = 0$. Тем самым, решение (2.5.26) окончательное, и на этом шаге итерационный процесс завершается. Значение $v = 20$ фиктивной переменной v означает, что в пункте B будет наблюдаться недопоставка соответствующего объема.

Заметим, что полученное на последнем шаге решение (2.5.26) совпало с решением (2.5.14), полученным (благодаря простоте рассматриваемой задачи) непосредственно, в «лоб». Будет ли и в общем случае симплекс-метод сходиться к оптимальному решению, и получим ли мы оптимальное решение за конечное число шагов или это бесконечный итерационный процесс? При решении нашей задачи мы взяли в качестве начального приближения допустимое решение (2.5.18), (2.5.19). А если взять другое, придем ли мы опять к тому же оптимальному решению или выйдем на другое? Получим ли результат за разумное время и не произойдет ли «зацикливания» алгоритма с периодическим повторением промежуточных решений без выхода на окончательное, оптимальное решение? А как влияют на сходимость ошибки округления при вычислениях на компьютере? Хватит ли оперативной памяти для размещения всех данных большой задачи? Таким образом, на рассмотренном примере мы видим, что при разработке алгоритмов численного решения сложных задач возникает множество специфических вопросов и проблем, требующих глубокого изучения. Эти и подобные проблемы рассматриваются в обязательных курсах «Вычислительные методы линейной алгебры», «Методы вычислений», «Исследование операций» и др.

2.5.2. Принцип Парето. В рассмотренных задачах имелась одна целевая функция, которую требовалось максимизировать на допустимом множестве решений. На практике очень часто возникают *многокритериальные задачи*: имеется вектор-функция целей (критериев, показателей) $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \dots, f_n(\mathbf{x}))$ и требуется выбрать наиболее выгодный вариант решения $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_l)$ из области Q допустимых решений, на котором все критерии достигают своего максимального значения. В большинстве случаев невозможно указать решение, приводящее к оптимальным значениям всех критериев одновременно, так как они зачастую соответствуют достижению противоречивых целей. Поэтому приходится принимать некоторое компромиссное решение и первое, что нужно для этого сделать, — попытаться сократить множество исходных вариантов, исключив из анализа заведомо плохие варианты решений. Рассмотрим один из подходов к решению этой проблемы, основанный на *принципе Парето*.

Предположим, что сделан некоторый выбор $\mathbf{x}^* \in Q$ и существует другой выбор $\hat{\mathbf{x}} \in Q$, такой, что для всех критериев f_i имеют место неравенства

$$f_i(\hat{\mathbf{x}}) \geq f_i(\mathbf{x}^*), \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.5.29)$$

В этом случае говорят, что решение $\hat{\mathbf{x}}$ безусловно лучше, чем решение \mathbf{x}^* , а решение \mathbf{x}^* безусловно (или заведомо) хуже, чем решение $\hat{\mathbf{x}}$. Все безусловно плохие решения следует сразу исключить из рассмотрения. В результате этой *безусловной оптимизации* останутся только те векторы \mathbf{x}^* , для которых не существует такого $\hat{\mathbf{x}}$, что для всех критериев удовлетворяются неравенства (2.5.29). Таким образом, какие бы два из оставшихся векторов мы не сравнили, любой из них будет лучше другого хотя бы по одному критерию.

Множество P_Q всех оставшихся векторов называется *множеством Парето*, и в качестве компромиссного решения следует брать какой-либо вектор \mathbf{x} из множества P_Q . Это правило и называется принципом Парето. Отметим, что принцип Парето не выделяет единственного решения, он только сужает множество альтернатив. Окончательный выбор остается за лицом, принимающим решение.

Пример 3. Перевозчики должны доставить продукцию со складов I и II с запасами $a_1 = 70$, $a_2 = 50$ потребителям A и B с потребностями $b_1 = 80$ и $b_2 = 60$, а продавцы должны продать всю привезенную продукцию. За единицу перевезенной продукции перевозчики получают вознаграждение, указанное на рис. 21, a , а продавцы — доход, указанный на рис. 22, a . Цель перевозчиков — максимизировать функцию (2.5.1), продавцов — (2.5.9). Предположим, что лицо, принимающее решение, должно сделать такой

выбор объемов перевозок, чтобы по возможности максимально удовлетворить цели перевозчиков и продавцов.

Рассматриваемая задача является двухкритериальной. Обозначим критерии (2.5.1) и (2.5.9) через f_1 и f_2 соответственно. С учетом равенств (2.5.6), (2.5.13) мы можем написать, что

$$\begin{aligned} f_1(\mathbf{x}) &= 810 - 2x_1 + x_2 \quad \rightarrow \quad \max, \\ f_2(\mathbf{x}) &= 650 + 3x_1 - 2x_2 \quad \rightarrow \quad \max, \end{aligned} \tag{2.5.30}$$

где $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in Q$, Q — область допустимых решений, определяемая системой ограничений (2.5.7) и изображенная на рис. 21, б.

Уравнения (2.5.30) определяют отображение области допустимых решений на множество достижимости Ω в плоскости критериев: каждому решению $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in Q$ соответствует своя точка $\mathbf{f} = (f_1, f_2) \in \Omega$ (рис. 23). В частности, вершины многоугольника Q переходят при этом отображении в вершины многоугольника Ω (см. таблицу).

Соответствие вершин многоугольников Q и Ω при отображении (2.5.30)

Вершины области Q	x_1	x_2	Вершины множества Ω	f_1	f_2
a	10	0	a'	790	680
b	30	0	b'	750	740
c	70	40	c'	710	780
d	70	50	d'	720	760
e	60	50	e'	740	730

Из таблицы видно, что если лицо, принимающее решение, выбирает вариант a , то перевозчики получают наибольшую выгоду, а продавцы — наименьшую, а при выборе варианта c — наоборот. Таким образом, имеет место противоречивость целей (2.5.30), вследствие чего лицо, принимающее решение, оказывается перед необходимостью искать компромисс, и одним из путей, облегчающих поиск наиболее приемлемого для всех участников решения, является построение множества Парето.

Возьмем, например, решение $b \in Q$ и определим все заведомо худшие, чем b , решения $\mathbf{x} \in Q$. Для этого через точку $b' = (750, 740) \in \Omega$ проведем прямые $f_1 = 750$ и $f_2 = 740$, которые выделяют некоторое подмножество $\Omega_{b'}$ (изображено серым цветом на рис. 23, б) в множестве достижимости. Согласно уравнениям (2.5.30) прообразами этих прямых в плоскости $x_1 O x_2$

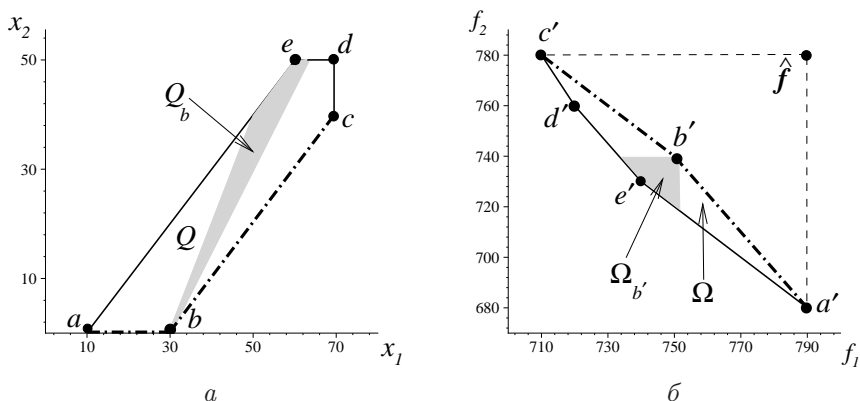


Рис. 23. Многокритериальная задача о перевозках: a — множество Парето (линия abc) в области Q допустимых решений; b — его образ (линия $a'b'c'$) при отображении (2.5.30) во множество достижимости Ω

будут прямые, заданные уравнениями

$$-2x_1 + x_2 + 60 = 0, \quad 3x_1 - 2x_2 - 90 = 0.$$

Эти прямые пересекают в области Q подмножество решений Q_b (оно отмечено серым цветом на рис. 23, a), при этом образом множества Q_b при отображении (2.5.30) будет множество $\Omega_{b'}$. Поскольку решения $x \in Q_b$ отображаются в точки $f \in \Omega_{b'}$, имеющие координаты $f_1 \leq 750$ и $f_2 \leq 740$, то все эти решения являются безусловно не лучшими, по сравнению с решением b , и их можно исключить из дальнейшего рассмотрения, т. е. от множества Q_b оставить для дальнейшего анализа единственную точку b . Отметим, что точка e , попавшая в Q_b , тоже относится к плохим решениям, в чем можно было убедиться и непосредственно, проанализировав данные таблицы.

Выполнив подобный анализ для всех других решений из области Q , можно убедиться, что множество Парето для данной задачи представляет собой часть abc границы области допустимых решений Q (штрихпунктирная линия на рис. 23, a), т. е.

$$P_Q = \left\{ (x_1, x_2) \mid x_1 \in [10, 70], x_2 = \begin{cases} 0, & x_1 \in [10, 30], \\ x_1 - 30, & x_1 \in [30, 70] \end{cases} \right\}. \quad (2.5.31)$$

При отображении (2.5.30) множество Парето преобразуется в часть $a'b'c'$ (штрих-пунктирная линия на рис. 23, б) границы области достижимости. Видно, что если при переборе решений из множества Парето один из показателей растет, то другой непременно уменьшается.

Пример 4. В предыдущем параграфе была рассмотрена приближенная экономическая модель (2.4.24), описывающая динамику капиталовооруженности и численности работающих. Если параметры α , β , m , δ этой модели зафиксировать, то в состоянии равновесия капиталовооруженность x_* и численность работающих y_* будут определяться двумя свободными параметрами k и s в соответствии с формулами (2.4.26):

$$\begin{aligned} x_* &= x_*(k, s) = \left(\frac{\beta}{k(1-s)m} \right)^{1/\alpha}, \\ y_* &= y_*(k, s) = \frac{sm}{\delta} \left(\frac{\beta}{k(1-s)m} \right)^{(\alpha-1)/\alpha}. \end{aligned} \quad (2.5.32)$$

Предположим, что лицо, принимающее решение, заинтересовано в максимальной капиталовооруженности производства и наибольшей занятости, а областью Q его допустимых решений является множество параметров (k, s) , таких, что $0 < k_1 \leq k \leq k_2 < 1$, $0 < s_1 \leq s \leq s_2 < 1$, т. е. прямоугольник Q , изображенный на рис. 20, а. Таким образом, получается проблема с двумя целями:

$$x_*(k, s) \rightarrow \max, \quad y_*(k, s) \rightarrow \max, \quad (2.5.33)$$

при этом каждому решению $(k, s) \in Q$ будет соответствовать своя точка (x_*, y_*) из области достижимости Ω , изображенной на рис. 20, б и являющейся образом области допустимых решений Q при отображении (2.5.32).

Как видно из рис. 24, критерий x_* принимает максимальное значение при выборе решения $d = (k_1, s_2)$, но численность работающих при этом будет очень мала. С другой стороны, наибольшая занятость будет при выборе решения e , соответствующего параметрам $k = k_2$, $s = \alpha$ (см. задачу 2.5.2), однако при таком выборе оказывается крайне низкой капиталовооруженность производства. Таким образом, цели (2.5.33) являются противоречивыми и лицо, принимающее решение, должно пойти на некоторое компромиссное решение — наиболее приемлемое с точки зрения достижения целей (2.5.33).

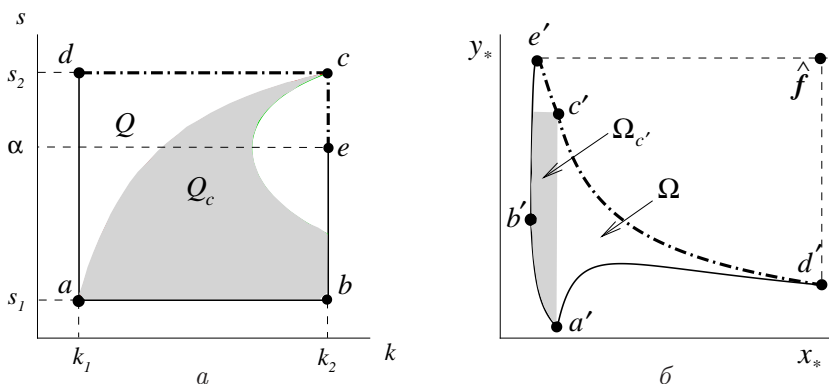


Рис. 24. Многокритериальная задача (2.4.24), (2.5.33): a — множество Парето (линия dce) в области Q допустимых решений; b — его образ (линия $d'e'c'e'$) при отображении (2.5.30) в множестве достижимости Ω ; $\alpha = 0,6$; $k_1 = s_1 = 0,2$; $k_2 = s_2 = 0,8$

Из рис. 24 видно также, что многие варианты из области допустимых решений Q являются заведомо плохими, поэтому их можно сразу отбросить и компромиссное решение искать в множестве Парето. Выясним, как оно выглядит. Выберем, например, решение $c = (k_2, s_2)$. В области достижимости ему соответствует граничная точка c' . Проведем через точку c' прямые, параллельные координатным осям. Тогда в области достижимости получится подмножество $\Omega_{c'}$ (отмеченное серым цветом на рис. 24, б), состоящее из точек, у которых обе координаты не превосходят соответствующих координат точки c' . Согласно формулам (2.5.32) проведенные прямые являются образами кривых:

$$k(1-s) - k_2(1-s_2) = 0, \quad k(1-s) - k_2(1-s_2) \left(\frac{s}{s_2}\right)^{\alpha/(\alpha-1)} = 0, \quad (2.5.34)$$

которые ограничивают подмножество $Q_c \subset Q$ (изображено серым цветом на рис. 24, а). Поскольку при отображении (2.5.32) образ каждой точки из Q_c лежит в $\Omega_{c'}$, то все эти точки являются безусловно не лучшими, чем решение c , поэтому их можно исключить из дальнейшего рассмотрения. Легко понять, что в результате такого отбора останутся только те решения из Q , которые отображаются на дугу $d'e'c'e'$ границы области достижимости. Оставшиеся решения и составят множество Парето — часть dce границы области допустимых решений (штрих-пунктирная линия на рис. 24, а).

2.5.3. Подходы к решению многоцелевых задач. После нахождения множества Парето встает вопрос о выборе единственного решения из этого множества, наиболее приемлемого для многоцелевой задачи:

$$f_i(\mathbf{x}) \rightarrow \max, \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.5.35)$$

Поскольку в множестве Парето не существует безусловно лучших решений, то найти вектор \mathbf{x} , на котором все критерии принимают максимальные значения, не удастся. Поэтому при исследовании многокритериальных задач указывают некоторые условия согласования критериев. В частности, довольно часто используется *метод скаляризации* — сведение многокритериальной задачи с вектор-функцией целей $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ к задаче с одним, единым скалярным критерием $F(\mathbf{x})$.

Укажем некоторые подходы к скаляризации критериев. *Линейная свертка* критериев определяется формулой

$$F(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n C_i f_i(\mathbf{x}) \rightarrow \max, \quad (2.5.36)$$

где C_i — некоторые положительные числа, тем или иным способом нормированные, например,

$$\sum_{i=1}^n C_i = 1. \quad (2.5.37)$$

Коэффициенты C_i отражают ранжирование целей и предлагаются экспертами.

Если функции f_i и ограничения, наложенные на выбор компонент вектора \mathbf{x} , линейны:

$$f_i(\mathbf{x}) = \sum_{s=1}^l d_{si} x_s, \quad i = 1, \dots, n, \quad (2.5.38)$$

$$\sum_{s=1}^l \alpha_{sj} x_s \leq b_j, \quad j = 1, \dots, m, \quad (2.5.39)$$

то одноцелевая задача с критерием (2.5.36) сводится к задаче линейного программирования: определить максимум линейной формы

$$F(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \sum_{s=1}^l C_i d_{si} x_s \quad (2.5.40)$$

при линейных ограничениях (2.5.39). Для решения полученной задачи можно использовать, например, рассмотренный выше симплекс-метод.

Очень часто в задачах планирования и проектирования задается некоторая система нормативов $f_1^*, f_2^*, \dots, f_n^*$, определяемая в результате экспертного опроса. Например, параметры \mathbf{x} будущей конструкции должны быть такими, чтобы функции $f_i(\mathbf{x})$ принимали максимальные значения и удовлетворяли дополнительным условиям:

$$f_i(\mathbf{x}) \geq f_i^*, \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.5.41)$$

В этих случаях единую целевую функцию удобно представить в виде

$$F(\mathbf{x}) = \min_i \frac{f_i(\mathbf{x})}{f_i^*} \rightarrow \max \quad (2.5.42)$$

и искать вектор \mathbf{x} , обеспечивающий максимальное значение $F(\mathbf{x})$. Согласно формуле (2.5.42) при данном значении вектора \mathbf{x} величина $F(\mathbf{x})$ дает значение наихудшего из показателей $f_i(\mathbf{x})$. Значит, поиск максимального значения целевой функции F означает выбор такой системы конструктивных параметров \mathbf{x} , которая максимизирует отношение i -го реально достигнутого значения критерия к его контрольному значению.

При условиях (2.5.38), (2.5.39) задача (2.5.42) также сводится к задаче линейного программирования. В самом деле, если ввести новую переменную

$$V = \min_i \frac{f_i(\mathbf{x})}{f_i^*}$$

и к ограничениям (2.5.39) добавить дополнительные

$$\sum_{s=1}^l d_{si} x_s \geq V f_i^*, \quad i = 1, \dots, n, \quad (2.5.43)$$

то получается следующая задача линейного программирования: определить максимум по \mathbf{x} скаляра V , удовлетворяющего ограничениям (2.5.39), (2.5.43).

В заключение рассмотрим одноцелевую задачу, которая получается из многоцелевой (2.5.35) с помощью некоторой метрики ρ в n -мерном пространстве целевых функций, например, евклидовой метрики.

Предположим, что в каждой i -й однокритериальной задаче (2.5.35) найден вектор \mathbf{x}_i , доставляющий максимальное значение i -му критерию:

$$f_i(\mathbf{x}_i) = \widehat{f}_i, \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.5.44)$$

Совокупность скалярных величин \widehat{f}_i определяет в пространстве критериев точку $\widehat{\mathbf{f}} = (\widehat{f}_1, \widehat{f}_2, \dots, \widehat{f}_n)$, которую назовем точкой «абсолютного максимума». Если векторы \mathbf{x}_i различны, то точка $\widehat{\mathbf{f}}$ является недостижимой в пространстве критериев, т. е. не принадлежит множеству достижимости (см. рис. 23, б и 24, б, где $\widehat{\mathbf{f}} \notin \Omega$). Скалярная величина

$$\rho(\mathbf{x}) = \left(\sum_{i=1}^n (f_i(\mathbf{x}) - \widehat{f}_i)^2 \right)^{1/2} \quad (2.5.45)$$

определяет в пространстве критериев евклидово расстояние от точки \mathbf{f} , соответствующей данному вектору \mathbf{x} , до точки «абсолютного максимума» $\widehat{\mathbf{f}}$. Введение метрики в пространстве целевых критериев позволяет в качестве нового скалярного критерия $F(\mathbf{x})$ принять функцию $\rho(\mathbf{x})$, определенную соотношением (2.5.45). Ее минимизация дает полезную информацию о возможности достижения «абсолютного максимума».

Пример 5. Рассмотрим применение метода скаляризации к задаче из примера 3. На множестве Парето (2.5.31) целевые функции (2.5.30) принимают следующий вид:

$$f_1 \Big|_{\mathbf{x} \in P_Q} = \begin{cases} 810 - 2x_1, & 10 \leq x_1 \leq 30, \\ 780 - x_1, & 30 \leq x_1 \leq 70 \end{cases} \rightarrow \max, \quad (2.5.46)$$

$$f_2 \Big|_{\mathbf{x} \in P_Q} = \begin{cases} 650 + 3x_1, & 10 \leq x_1 \leq 30, \\ 710 + x_1, & 30 \leq x_1 \leq 70 \end{cases} \rightarrow \max. \quad (2.5.47)$$

Следовательно, линейная свертка (2.5.36), (2.5.37) определяется формулой

$$F \Big|_{\mathbf{x} \in P_Q} = \begin{cases} 650 + 160C + (3 - 5C)x_1, & 10 \leq x_1 \leq 30, \\ 710 + 70C + (1 - 2C)x_1, & 30 \leq x_1 \leq 70 \end{cases} \rightarrow \max \quad (2.5.48)$$

и выбор оптимального решения будет зависеть от заданного экспертами значения весового параметра C , $0 < C < 1$. Отметим, что в некоторых случаях решение не является единственным (см. задачу 2.5.3).

При задании контрольных показателей f_1^* , f_2^* получаем единую целевую функцию вида (2.5.42):

$$F|_{\mathbf{x} \in P_Q} = \min \left\{ \frac{f_1(\mathbf{x})}{f_1^*}, \frac{f_2(\mathbf{x})}{f_2^*} \right\} \rightarrow \max$$

или

$$F|_{\mathbf{x} \in P_Q} = \begin{cases} \min \left\{ \frac{810 - 2x_1}{f_1^*}, \frac{650 + 3x_1}{f_2^*} \right\}, & 10 \leq x_1 \leq 30, \\ \min \left\{ \frac{780 - x_1}{f_1^*}, \frac{710 + x_1}{f_2^*} \right\}, & 30 \leq x_1 \leq 70 \end{cases} \rightarrow \max. \quad (2.5.49)$$

В этой однокритериальной задаче решений, удовлетворяющих условиям (2.5.41), может и не быть (завышенные контрольные показатели) (см. задачу 2.5.4).

Критерий, основанный на минимизации расстояния (2.5.45) до недостижимой точки «абсолютного максимума» $\hat{\mathbf{f}} = (790, 780)$, изображенной на рис. 23, б, записывается в нашем случае следующим образом:

$$F|_{\mathbf{x} \in P_Q} = \sqrt{(f_1(\mathbf{x}) - 790)^2 + (f_2(\mathbf{x}) - 780)^2} \rightarrow \min$$

или

$$F|_{\mathbf{x} \in P_Q} = \begin{cases} \sqrt{(20 - 2x_1)^2 + (3x_1 - 130)^2}, & 10 \leq x_1 \leq 30, \\ \sqrt{(10 + x_1)^2 + (x_1 - 70)^2}, & 30 \leq x_1 \leq 70 \end{cases} \rightarrow \min. \quad (2.5.50)$$

Указанный критерий устанавливает в рассматриваемой задаче единственное оптимальное решение (см. задачу 2.5.5).

В этом параграфе мы коснулись лишь одного алгоритма решения задач с большими объемами перерабатываемой информации и указали некоторые трудности, возникающие при конструировании алгоритмов в любой предметной области. Детальное исследование проблем построения эффективных алгоритмов будет выполнено позднее в соответствующих университетских курсах. Очевидно, что этот этап моделирования является не менее важным и требует не меньших усилий и знаний, чем этап построения

математических моделей, поскольку используемые алгоритмы решения сложных задач еще далеки от совершенства. Научные изыскания по ним продолжаются в настоящее время с неослабевающей интенсивностью.

З А Д А Ч И

2.5.1. Найти ранг матрицы системы уравнений (2.5.15), с помощью теоремы Кронекера — Капелли показать совместность этой системы и найти ее решение методом Гаусса.

2.5.2. Показать, что в примере 4 наибольшая численность работающих получается при выборе решения (k_2, α) (точка e на рис. 24, a), где α — параметр производственной функции Кобба — Дугласа (2.4.12), при этом предполагается, что $s_1 < \alpha < s_2$.

2.5.3. Найти оптимальное решение двухцелевой задачи (2.5.46), (2.5.47) при переходе к единому критерию (2.5.48) для следующих значений параметра C :

- | | |
|------------------|-----------------|
| а) $C = 0, 4$; | г) $C = 0, 6$; |
| б) $C = 0, 5$; | д) $C = 0, 7$. |
| в) $C = 0, 55$; | |

2.5.4. Найти оптимальное решение двухцелевой задачи (2.5.46), (2.5.47) при переходе к единому критерию (2.5.49) для следующих значений контрольных показателей f_1^*, f_2^* :

- | |
|---------------------------------|
| а) $f_1^* = 740, f_2^* = 740$; |
| б) $f_1^* = 745, f_2^* = 745$; |
| в) $f_1^* = 750, f_2^* = 750$. |

2.5.5. Найти оптимальное решение двухцелевой задачи (2.5.46), (2.5.47) при переходе к единому критерию (2.5.50).

Глава 3.

АКСИОМЫ МЕХАНИКИ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ

§ 3.1. Аксиоматика сплошной среды

Приступим теперь к процессу построения важного класса математических моделей — моделей механики сплошной среды (или, как их еще иногда называют, моделей сплошной деформируемой среды). Описываемым физическим объектом являются тела (массы), заполняющие некоторый объем физического пространства и способные деформироваться. При этом рассматривается такой класс движений этих тел, в котором можно отвлечься от их молекулярной и атомной структуры и предполагать, что они заполняют пространство непрерывным (сплошным) образом. Другими словами, мы будем описывать макро-, а не микромир.

Построение модели сплошной среды сводится к нахождению (выделению) числовых параметров, ее описывающих, и нахождению соотношений (уравнений) между этими параметрами. В основе механики сплошной среды лежит ряд экспериментальных фактов, которые мы сформулируем в виде аксиом. Именно эти аксиомы позволят нам ввести числовые параметры, описывающие сплошную среду, и вывести количественные соотношения, которые и будут являться одной из ее математических моделей.

3.1.1. Аксиома пространства-времени. *Аффинное пространство* — это множество (точек) X , на котором определено понятие *векторов* \vec{xy} с началом $x \in X$ и концом в $y \in X$, т. е. задано отображение $(x, y) \mapsto \vec{xy}$ из $X \times X$ в линейное пространство E (называемое *присоединенным*), обладающее следующими свойствами:

— для любой фиксированной точки $x \in X$ отображение $y \mapsto \vec{xy}$ есть *биекция* (взаимно однозначное отображение) X на E ;

— $\vec{xy} + \vec{yz} + \vec{zx} = 0$ для любых $x, y, z \in X$.

Таким образом, в аффинном пространстве нулем (началом отсчета) может быть объявлена любая точка. Если присоединенное пространство *евклидово*, т. е. в нем задано скалярное произведение, то пространство X называется *евклидовым аффинным*. Размерность X по определению есть размерность E .

Используя введенные понятия, сформулируем аксиому пространства-времени:

Пространство — трехмерное евклидово аффинное пространство, время — одномерное евклидово аффинное пространство. Время абсолютно.

Сцена, на которой разыгрывается наше действие, есть трехмерное евклидово пространство \mathbf{R}^3 , аффинная структура в котором задается отображением $(x, y) \mapsto y - x$. Скалярное произведение в \mathbf{R}^3 индуцирует в нем норму: $\|x\| = \sqrt{x \cdot x}$. Норма же и скалярное произведение в \mathbf{R}^3 позволяют определить длину вектора и скалярное произведение векторов: $|\vec{x}\vec{y}| = \|y - x\|$, $\vec{x}\vec{y} \cdot \vec{u}\vec{v} = (y - x) \cdot (v - u)$.

Поясним утверждение «время абсолютно». Окружающий мир в пространственно-временном смысле представляется точками пространства $\mathbf{R}^4 = \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}$, называемыми *мировыми точками*, или *событиями*. *Время* есть линейное отображение $t : \mathbf{R}^4 \rightarrow \mathbf{R}$ мира на «ось времени». Промежуток времени между событиями $A, B \in \mathbf{R}^4$ есть число $t(B - A)$. Если это число равно нулю, то события A и B называются *одновременными*. Линейность отображения t гарантирует изоморфизм пространства одновременных событий (ядра отображения t) пространству \mathbf{R}^3 . Наличие этого изоморфизма позволяет говорить об *абсолютно одновременных событиях* (в отличие от различных релятивистских теорий).

3.1.2. Аксиома материального континуума. Реальная физическая среда имеет атомарно-молекулярное строение [32]. Мы же будем рассматривать ее как среду, заполняющую некоторый объем сплошным образом. Сформулируем эту идеализацию в виде аксиомы материального континуума:

Сплошная среда в каждый момент времени есть материальный континуум.

Эта аксиома предполагает, что определены понятия массы и внутренней энергии каждого объема сплошной среды. *Объемом* в \mathbf{R}^3 называется любая область (связное множество) с кусочно-гладкой границей. Предполагается,

что определена *масса* любого объема ω , т. е. задана функция множества $M : \omega \mapsto M(\omega)$, и эта функция есть мера, т. е. неотрицательная счетно-аддитивная функция:

$$M\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} \omega_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} M(\omega_i), \quad \text{если } \omega_i \cap \omega_j = \emptyset \text{ при всех } i \neq j.$$

Более того, предполагается, что функция M непрерывна в следующем смысле: $M(\omega) \rightarrow 0$ при $\text{mes } \omega \rightarrow 0$, где $\text{mes } \omega$ — *мера Лебега* множества ω (строгое определение меры Лебега вводится в курсе математического анализа; не сильно искажая суть этого понятия, можно считать, что $\text{mes } \omega$ — объем области ω в смысле, описываемом в школьной геометрии).

В курсе функционального анализа будет доказано, что в этом случае существует неотрицательная функция $\rho : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$ такая, что для любого объема Ω выполняется равенство

$$M(\Omega) = \iiint_{\Omega} \rho(x) \, d\omega. \quad (3.1.1)$$

Здесь ω — элементарный объем. Эта функция называется *плотностью* (*удельной массой*) сплошной среды.

Можно показать, что

$$\rho(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{M[B_{\varepsilon}(x)]}{\frac{4}{3}\pi\varepsilon^3},$$

где $B_{\varepsilon}(x)$ — шар в \mathbf{R}^3 радиуса ε с центром в точке x (а $4\pi\varepsilon^3/3$, разумеется, объем этого шара). Последнее полностью согласуется с определением плотности в школьной физике.

Подчеркнем, что переход от массы к плотности в математическом смысле означает переход от весьма сложного математического объекта — функций множества (т. е. функций, заданных на множестве подмножеств пространства \mathbf{R}^3) к существенно более простым математическим объектам — функциям точки. Последние изучены гораздо лучше. К ним можно применять развитый аппарат математического анализа.

Точно так же аксиома материального континуума предполагает наличие у каждого объема *внутренней энергии*, т. е. существование непрерывной меры E_i .

По аналогии с представлением (3.1.1) можно ввести понятие *удельной*

объемной энергии e_i :

$$E_i(\Omega) = \iiint_{\Omega} e_i(x) d\omega.$$

Обычно удобнее пользоваться *удельной внутренней энергией* $U(x) \equiv e_i(x)/\rho(x)$ (т. е. энергией, отнесенной к единице массы) так, что

$$E_i(\Omega) = \iiint_{\Omega} \rho(x)U(x) d\omega = \iiint_{\Omega} \rho U d\omega. \quad (3.1.2)$$

§ 3.2. Движение сплошной среды

3.2.1. Аксиома движения. Прежде, чем сформулировать следующую аксиому, введем некоторые понятия и обозначения. Пусть Ω_s задает конфигурацию сплошной среды в момент времени s (т. е. множество точек в \mathbf{R}^3 , которые среда заполняет в момент времени s). Тот факт, что в процессе эволюции сплошная среда состоит из одних и тех же материальных частиц, математически описывается введением семейства взаимно-однозначных отображений (рис. 25):

$$\gamma_{s,t} : \Omega_s \rightarrow \Omega_t.$$

Каждое такое отображение определяет *движение сплошной среды*. Отображения $\gamma_{s,t}$ показывают перемещения частиц за промежуток времени от s до t .

Из физического опыта ясно, что за нулевое время частицы не должны сдвинуться: $\gamma_{s,s} = I$ (здесь I — тождественное отображение в Ω_s), и, кроме того, суммарный результат сдвига за время от s до t , а затем от t до p (рис. 25), есть результат сдвига за время $(p - s)$ — от s до p :

$$\gamma_{t,p} \circ \gamma_{s,t} = \gamma_{s,p}.$$

В дальнейшем в качестве начального момента изучаемых движений мы будем рассматривать «нулевой» момент $s = 0$, что позволяет перейти от обозначений $\gamma_{0,t}(\xi)$ к $\gamma_t(\xi)$, где $\xi \in \Omega_0$.

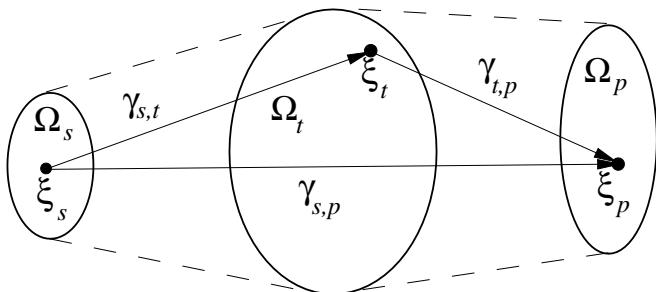


Рис. 25. Движение сплошной среды

Теперь мы можем сформулировать аксиому движения:

Отображения γ_t определены для любого $t \in \mathbf{R}$ и являются гомеоморфизмами Ω_0 на Ω_t , а отображение $t \mapsto \gamma_t$ есть изоморфизм аддитивной группы вещественных чисел в мультипликативную группу отображений в \mathbf{R}^3 . При каждом $\xi \in \Omega_0$ отображение $t \mapsto \gamma_t(\xi)$ непрерывно и кусочно-непрерывно дифференцируемо.

Тот факт, что $\{\gamma_t\}$ — мультипликативная группа, означает, что:

$$\gamma_0 = I; \quad (3.2.1)$$

$$\gamma_p \circ \gamma_t = \gamma_{t+p}. \quad (3.2.2)$$

Сформулированная аксиома позволяет говорить о движении материальной точки (или частицы) ξ сплошной среды; в частности, кривая $\{\gamma_t(\xi) : t \in \mathbf{R}\}$ называется траекторией точки $\xi \in \Omega_0$. Далее мы будем обозначать отображение $\gamma_t(\xi)$ через $\gamma(\xi, t)$ и называть отображение

$$x = \gamma(\xi, t) \quad (3.2.3)$$

законом движения сплошной среды. Если в формуле (3.2.3) точка ξ фиксирована, а время t меняется, то закон движения задает траекторию выделенной частицы. Если, наоборот, t фиксировано, а точки ξ занимают некоторый объем ω_0 , то закон движения задает состояние движущегося объема ω_t в момент времени t :

$$\omega_t = \{x \in \mathbf{R}^3 : x = \gamma(\xi, t), \xi \in \omega_0 \subset \Omega_0\}. \quad (3.2.4)$$

Кусочная гладкость траекторий, гарантируемая аксиомой движения, позволяет говорить о скорости частицы ξ в момент времени t :

$$v(\xi, t) = \frac{\partial \gamma(\xi, t)}{\partial t}.$$

Отметим еще некоторые следствия, вытекающие из аксиомы движения. Формула (3.2.1) постулирует, что для закона движения должно выполняться равенство:

$$\xi = \gamma(\xi, 0). \quad (3.2.5)$$

Кроме того, отображение (3.2.3) является взаимно-однозначным и невырожденным:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial \xi^1} & \frac{\partial x^1}{\partial \xi^2} & \frac{\partial x^1}{\partial \xi^3} \\ \frac{\partial x^2}{\partial \xi^1} & \frac{\partial x^2}{\partial \xi^2} & \frac{\partial x^2}{\partial \xi^3} \\ \frac{\partial x^3}{\partial \xi^1} & \frac{\partial x^3}{\partial \xi^2} & \frac{\partial x^3}{\partial \xi^3} \end{vmatrix} \neq 0, \quad (3.2.6)$$

где J — якобиан отображения (3.2.3), $x = (x^1, x^2, x^3)$, $\xi = (\xi^1, \xi^2, \xi^3)$, $x^i = \gamma^i(\xi, t)$ ($i = 1, 2, 3$). С помощью обратного отображения

$$\xi = \gamma^{-1}(x, t) \quad (3.2.7)$$

можно определить объем ω_0 , который занимала среда при $t = 0$, если известно, что в момент времени $t > 0$ она занимает объем ω_t .

3.2.2. Лагранжево и эйлерово описания сплошной среды. Как уже было сказано, описать сплошную среду — значит задать ее количественные характеристики. Это можно сделать, по крайней мере, двумя способами:

- привязывать характеристику к частице в данный момент времени;
- привязывать характеристику к точке пространства, в которой в данный момент находится частица.

Эти два способа называются соответственно *лагранжевым* и *эйлеровым описаниями* сплошной среды. Таким образом, в лагранжевом подходе все

характеристики задаются в переменных $(\xi, t) \in \Omega_0 \times \mathbf{R}$, а в эйлеровом — в переменных $(x, t) \in \{\Omega_t \times \{t\} : t \in \mathbf{R}\}$. Следовательно, координаты (ξ, t) называются *лагранжевыми координатами* (или *переменными*), а (x, t) — *эйлеровыми*. Каждое из этих описаний имеет свои преимущества и недостатки.

Лагранжево и эйлерово описания сплошной среды, разумеется, эквивалентны. Если известна некоторая характеристика в лагранжевом описании, то можно найти ее представление в эйлеровом, и наоборот. Например, если $v^L(\xi, t)$ и $v^E(x, t)$ — лагранжево и эйлерово представления скорости, то очевидно:

$$v^L(\xi, t) = v^E(\gamma(\xi, t), t), \quad (3.2.8)$$

и наоборот:

$$v^E(x, t) = v^L(\gamma^{-1}(x, t), t), \quad (3.2.9)$$

где γ^{-1} — обратное отображение (3.2.7) и по определению

$$v^L(\xi, t) = \frac{\partial \gamma(\xi, t)}{\partial t}. \quad (3.2.10)$$

Чтобы найти закон движения сплошной среды (3.2.3) в случае, когда известно поле скоростей в лагранжевом описании, достаточно найти интеграл от скорости (3.2.10):

$$\gamma(\xi, t) = \xi + \int_0^t v^L(\xi, s) ds. \quad (3.2.11)$$

Если же поле скоростей задано в эйлеровом описании, то приходится решать задачу Коши для дифференциального уравнения

$$\frac{\partial \gamma(\xi, t)}{\partial t} = v^E(\gamma(\xi, t), t), \quad \gamma(\xi, 0) = \xi, \quad (3.2.12)$$

которое получается с учетом равенств (3.2.10) и (3.2.8). Поскольку в уравнении (3.2.12) величина ξ фиксирована, то на эту задачу можно смотреть как на задачу Коши для системы из трех обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx^i}{dt} = v^{E,i}(x^1, x^2, x^3, t), \quad x^i(0) = \xi^i \quad (i = 1, 2, 3). \quad (3.2.13)$$

З А Д А Ч И

3.2.1. Рассмотрим задачу 1.1.2 о движении оползня по плоскому откосу, заданному функцией

$$x^3 = h_{\text{bt}}(x^1, x^2) = -x^1 \text{tg } \theta. \quad (3.2.14)$$

Напомним, что в упомянутой задаче мы рассмотрели несколько математических моделей движения оползня как твердого тела, моделей, в которых геометрия оползня не учитывалась, а его движение описывалось движением определенной материальной точки.

Теперь же примем во внимание форму оползня и возможность его деформации. Предположим, что в начальный момент времени оползневая масса лежит на откосе и занимает объем Ω_0 , представляющий собой прямую треугольную призму высотой W с основанием в виде прямоугольного треугольника ABC , катет BC которого параллелен вертикальной оси и равен T (рис. 26), а катет AC параллелен оси абсцисс Ox^1 . Лагранжевы координаты частиц, заполняющих этот объем, удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\begin{aligned} x_0 - T \text{ctg } \theta &\leq \xi^1 \leq x_0, \\ y_0 - W/2 &\leq \xi^2 \leq y_0 + W/2, \\ -\xi^1 \text{tg } \theta &\leq \xi^3 \leq -x_0 \text{tg } \theta + T, \end{aligned} \quad (3.2.15)$$

где x_0 — абсцисса частиц, лежащих на катете BC , $y_0 \in R$.

Пусть закон движения (3.2.3) оползневой массы задан отображением

$$\begin{aligned} x^1(\xi, t) &= x_0 + \frac{at^2}{2} - T \text{ctg } \theta + (T \text{ctg } \theta + \xi^1 - x_0) e^{\beta t}, \\ x^2(\xi, t) &= \xi^2, \\ x^3(\xi, t) &= -\left(x_0 + \frac{at^2}{2}\right) \text{tg } \theta + T - \left[T + (\xi^1 - x_0) \text{tg } \theta\right] e^{\beta t} + \\ &\quad + (\xi^3 + \xi^1 \text{tg } \theta) e^{-\beta t}, \end{aligned} \quad (3.2.16)$$

где $\beta = \text{const} \geq 0$, $a = \text{const} > 0$. Вычислить якобиан отображения (3.2.16) и доказать, что объем оползня не меняется при его движении:

$$\text{mes } \Omega_t = \iiint_{\Omega_t} dx = \text{const}. \quad (3.2.17)$$

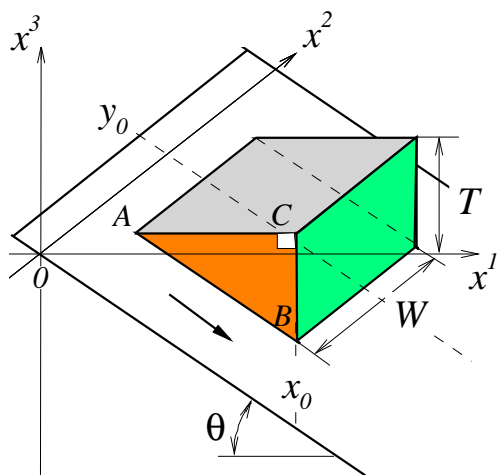


Рис. 26. Обозначения и начальное положение оползневой массы

3.2.2. Используя закон движения оползня (3.2.16), найти траектории вершин A , B , C основания призмы (см. рис. 26), имеющих одинаковую ординату $\xi^2 = y_0 - W/2$. Нарисовать эскиз формы оползня при $t > 0$.

3.2.3. Для заданного закона движения оползня (3.2.16) определить скорость его частиц в лагранжевом представлении (3.2.10). Доказать, что при $\beta = 0$ оползень движется по откосу как абсолютно твердое тело.

3.2.4. Для заданного закона движения (3.2.16) найти обратное отображение (3.2.7) и определить скорость частиц оползневой массы в эйлеровом представлении (3.2.9).

3.2.5. Известно поле скоростей $v^L(\xi, t)$ частиц оползня в лагранжевом описании:

$$\begin{aligned}
 v^{L,1}(\xi, t) &= at + \beta (T \operatorname{ctg} \theta + \xi^1 - x_0) e^{\beta t}, \\
 v^{L,2}(\xi, t) &= 0, \\
 v^{L,3}(\xi, t) &= -at \cdot \operatorname{tg} \theta - \beta \left[T + (\xi^1 - x_0) \operatorname{tg} \theta \right] e^{\beta t} - \\
 &\quad - \beta (\xi^3 + \xi^1 \operatorname{tg} \theta) e^{-\beta t}.
 \end{aligned}
 \tag{3.2.18}$$

Найти закон движения оползня.

3.2.6. Известно поле скоростей $v^E(x, t)$ частиц оползня в эйлеровом описании:

$$\begin{aligned} v^{E,1}(x, t) &= at + \beta \left[x^1 - x_0 - \frac{at^2}{2} + T \operatorname{ctg} \theta \right], \\ v^{E,2}(x, t) &= 0, \\ v^{E,3}(x, t) &= -at \cdot \operatorname{tg} \theta - \beta \left[x^3 + \left(2x^1 - x_0 - \frac{at^2}{2} \right) \operatorname{tg} \theta + T \right]. \end{aligned} \quad (3.2.19)$$

Найти закон движения оползня.

3.2.7. Дано поле скоростей с декартовыми компонентами

$$u(x, y, z, t) = -\omega y, \quad v(x, y, z, t) = \omega x, \quad w(x, y, z, t) = A, \quad A, \omega = \operatorname{const} > 0.$$

Найти закон движения сплошной среды, компоненты вектора скорости в лагранжевых координатах.

§ 3.3. Силовые и энергетические характеристики сплошной среды

Фундаментальную роль при описании сплошной среды, наряду с введенными ранее массой и внутренней энергией, играют также следующие количественные характеристики произвольного объема ω сплошной среды:

— *импульс (количество движения)*

$$K(\omega) = \iiint_{\omega} \rho(x) v(x) d\omega = \iiint_{\omega} \rho v d\omega; \quad (3.3.1)$$

— *момент импульса (момент количества движения)*

$$H(\omega) = \iiint_{\omega} \rho(x) (x \times v(x)) d\omega = \iiint_{\omega} \rho (x \times v) d\omega \quad (3.3.2)$$

(здесь $x \times v$ — векторное произведение x на v в \mathbf{R}^3);

— *кинетическая энергия*

$$E_k(\omega) = \iiint_{\omega} \frac{1}{2} \rho(x) |v(x)|^2 d\omega \quad (3.3.3)$$

и *полная энергия*

$$E(\omega) = E_k(\omega) + E_i(\omega). \quad (3.3.4)$$

Введенные характеристики являются прямыми обобщениями на сплошную среду известных из теоретической механики следующих понятий [24]:

— *импульса системы n материальных точек*

$$K = \sum_{i=1}^n m_i v_i$$

(v_i — скорость i -й точки массы m_i);

— *момента импульса*

$$H = \sum_{i=1}^n m_i (x_i \times v_i)$$

(x_i — радиус-вектор i -й точки);

— *кинетической*

$$E_k = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i |v_i|^2$$

и *полной энергии* как суммы кинетической и потенциальной (внутренней).

Если зафиксировать объем сплошной среды $\omega_0 \subset \Omega_0$ и рассматривать характеристики (3.3.1)–(3.3.4) на движущемся объеме $\omega_t = \gamma_t(\omega_0)$, то они будут функциями только времени t . Поведение этих характеристик постулируется аксиомами баланса.

Для любого движущегося объема ω_t масса объема неизменна:

$$\frac{d}{dt} M(\omega_t) = 0, \quad (3.3.5)$$

скорость изменения импульса равна главному вектору приложенных к объему сил:

$$\frac{d}{dt} K(\omega_t) = F(\omega_t), \quad (3.3.6)$$

скорость изменения момента импульса равна главному моменту сил:

$$\frac{d}{dt} H(\omega_t) = G(\omega_t), \quad (3.3.7)$$

скорость изменения полной энергии равна вносимой мощности:

$$\frac{d}{dt} E(\omega_t) = N(\omega_t). \quad (3.3.8)$$

Эти аксиомы иногда называют *принципом отвердевания*, поскольку уравнения (3.3.5)—(3.3.8) аналогичны уравнениям движения твердого тела. Смысл правых частей равенств (3.3.5)—(3.3.8) объясняется в следующих разделах курса.

§ 3.4. Замыкающие соотношения и интегральные законы сохранения

3.4.1. Замыкающие соотношения для сил. Будем рассматривать два класса сил, действующих на сплошную среду — *внешние массовые* и *внутренние поверхностные силы*.

Первая из этих сил $F_e(\omega)$ пропорциональна массе объема (типичным представителем таких сил является сила тяжести). Если потребовать, чтобы внешняя сила была непрерывной мерой, то у нее будет существовать *объемная плотность* f_e :

$$F_e(\omega) = \iiint_{\omega} f_e(x) d\omega.$$

Как и ранее, удобно пользоваться *массовой плотностью* $f(x) = \frac{f_e(x)}{\rho(x)}$. Тогда

$$F_e(\omega) = \iiint_{\omega} \rho(x) f(x) d\omega = \iiint_{\omega} \rho f d\omega,$$

а момент внешней силы определяется равенством

$$G_e(\omega) = \iiint_{\omega} \rho(x \times f) d\omega.$$

Эксперименты показывают, что кроме сил, действующих на объем (массу), имеются силы, действующие на поверхность $\partial\omega$ (например, силы давления, внутреннего трения и т. п.). Разумеется, понятие поверхностных сил условно, поскольку в рамках ньютоновской механики силы могут действовать только на массу. Здесь имеется в виду, что рассматриваемые силы приложены к частицам среды, расположенным в слоях пренебрежимой толщины. Для того, чтобы определить эти силы, рассмотрим сечение σ области Ω на области Ω_1 и Ω_2 плоскостью Σ . Пусть n — нормаль к Σ , направленная, скажем, в сторону Ω_2 (рис. 27).

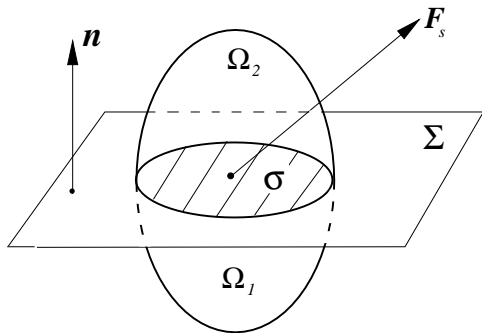


Рис. 27. Внутренняя поверхностная сила $F_s(\sigma)$

Формулируемая ниже аксиома внутренних поверхностных сил вводит вектор силы $F_s(\sigma)$, действующей на часть объема Ω_1 со стороны части объема Ω_2 через плоскую область σ . Если предполагать, что $F_s(\sigma)$ — непрерывная плоская мера, то имеет место интегральное представление

$$F_s(\sigma) = \iint_{\sigma} p_n(x) d\sigma. \quad (3.4.1)$$

Величина $p_n(x)$ называется *вектором напряжений внутренних поверхностных сил*. Она позволяет говорить о векторе внутренних поверхностных сил, действующих на данный объем через площадку поверхности в

точке x с нормалью n .

Аксиома внутренних поверхностных сил гласит:

Внутренняя поверхностная сила $F_s(\sigma)$ определена для любого сечения σ области Ω и является непрерывной плоской мерой.

Эта аксиома гарантирует существование вектора $p_n(x)$ напряжений поверхностных сил, с помощью которого *главный вектор внутренних поверхностных сил*, действующих на объем ω через его поверхность, определяется формулой

$$F_i(\omega) = \iint_{\partial\omega} p_{n(x)}(x) d\sigma = \iint_{\partial\omega} p_n d\sigma,$$

где $n(x)$ — орт нормали к поверхности $\partial\omega$ объема ω в точке x .

Наличие вектора p_n позволяет также определить *момент внутренних поверхностных сил*, действующих на ω через $\partial\omega$:

$$G_i(\omega) = \iint_{\partial\omega} (x \times p_{n(x)}(x)) d\sigma = \iint_{\partial\omega} (x \times p_n) d\sigma.$$

Следующая аксиома (аксиома сил и моментов) постулирует тот факт, что существование других сил и моментов, кроме рассмотренных выше, в данной модели не предполагается.

Правые части уравнений баланса импульса (3.3.6) и момента импульса (3.3.7) определяются соответственно выражениями

$$F(\omega) = F_e(\omega) + F_i(\omega) = \iiint_{\omega} \rho f d\omega + \iint_{\partial\omega} p_n d\sigma$$

и

$$G(\omega) = G_e(\omega) + G_i(\omega) = \iiint_{\omega} \rho (x \times f) d\omega + \iint_{\partial\omega} (x \times p_n) d\sigma.$$

3.4.2. Замыкающие энергетические соотношения. По аналогии с классической механикой можно ввести понятия *мощностей, разводимых внешними массовыми и внутренними поверхностными силами*

$$N_e(\omega) = \iiint_{\omega} \rho v \cdot f \, d\omega, \quad N_i(\omega) = \iint_{\partial\omega} v \cdot p_n \, d\sigma.$$

Кроме того, постулируется существование *тепловых потоков*. Они вводятся аксиомами с математической точки зрения аналогично внутренним поверхностным силам. Аксиома потока тепла гласит, что:

Поток тепла $Q(\sigma)$ определен для любого сечения σ области Ω и является непрерывной плоской мерой.

Если выполнена эта аксиома, то определена *поверхностная плотность q_n потока тепла*:

$$Q(\sigma) = \iint_{\sigma} q_n \, d\sigma,$$

а она, в свою очередь, позволяет говорить о *потоке тепла в объем ω из области $\Omega \setminus \omega$ через границу $\partial\omega$* :

$$Q(\omega) = \iint_{\partial\omega} q_{n(x)}(x) \, d\sigma = \iint_{\partial\omega} q_n \, d\sigma.$$

Последняя аксиома (аксиома передачи энергии) завершает описание механизмов передачи энергии в данной модели:

Правая часть уравнения баланса энергии (3.3.8) определяется выражением

$$N(\omega) = N_e(\omega) + N_i(\omega) + Q(\omega) = \iiint_{\omega} \rho v \cdot f \, d\omega + \iint_{\partial\omega} v \cdot p_n \, d\sigma + \iint_{\partial\omega} q_n \, d\sigma.$$

3.4.3. Интегральные законы сохранения. Теперь в уравнениях (3.3.5)—(3.3.8) определены все величины, и эти уравнения с описанными выше правыми частями составляют рассматриваемую нами *математическую модель сплошной среды*: для любого движущегося объема ω_t в любой момент времени t выполняются следующие интегральные соотношения:

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\omega_t} \rho d\omega = 0,$$

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\omega_t} \rho v d\omega = \iiint_{\omega_t} \rho f d\omega + \iint_{\partial\omega_t} p_n d\sigma,$$

(IM)

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\omega_t} \rho(x \times v) d\omega = \iiint_{\omega_t} \rho(x \times f) d\omega + \iint_{\partial\omega_t} (x \times p_n) d\sigma,$$

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\omega_t} \rho \left(\frac{1}{2} |v|^2 + U \right) d\omega = \iiint_{\omega_t} \rho v \cdot f d\omega + \iint_{\partial\omega_t} v \cdot p_n d\sigma + \iint_{\partial\omega_t} q_n d\sigma.$$

Эти уравнения называют (*интегральными*) *законами сохранения* соответственно *массы*, *импульса* (*количества движения*), *момента импульса* (*момента количества движения*) и *энергии*.

Полученная математическая модель (IM) весьма сложна для исследования (в частности, в силу ее большой общности). Наша следующая задача — попытаться упростить модель (возможно, за счет сужения рамок ее применимости). Далее мы покажем, что если величины, характеризующие сплошную среду, достаточно гладкие, то модель (IM) эквивалентна некоторой системе дифференциальных уравнений в частных производных, которая допускает исследование более развитыми математическими средствами. Для того, чтобы привести нашу модель к системе дифференциальных уравнений, нам потребуются некоторые новые математические понятия и факты, описанию которых и посвящена следующая глава.

Глава 4.

НЕКОТОРЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ АЛГЕБРЫ, МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА И ТЕОРИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Полученная математическая модель сплошной среды (ИМ), записанная в виде интегральных законов сохранения массы, импульса, момента импульса и энергии, весьма сложна для исследования. Но оказывается, что если величины, характеризующие сплошную среду, достаточно гладкие, то модель (ИМ) эквивалентна некоторой системе дифференциальных уравнений в частных производных, которая допускает исследование развитыми математическими средствами. Для того, чтобы привести нашу модель к системе дифференциальных уравнений, нам потребуется вспомнить некоторые математические понятия и факты, описанию которых и посвящена настоящая глава.

§ 4.1. Векторные пространства

В этом параграфе приводятся основные сведения из теории линейных нормированных пространств [8, 27], при этом главной целью станет достижение договоренности о терминологии.

4.1.1. Векторные пространства. Поле вещественных чисел будем обозначать \mathbf{R} . Вещественное векторное пространство представляет собой множество E элементов произвольной природы (его точки называются векторами), в котором определены операции сложения векторов $+: E \times E \rightarrow E$ и умножения на число $\cdot: \mathbf{R} \times E \rightarrow E$, удовлетворяющие следующим аксиомам: при всех $x, y, z \in E$ и $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$

1. $x + y = y + x$;
2. $x + (y + z) = (x + y) + z$;
3. существует вектор 0 (*нулевой вектор*) такой, что $x + 0 = x$;
4. существует вектор $-x$ такой, что $x + (-x) = 0$;

5. $1 \cdot x = x$;
6. $\alpha \cdot (\beta \cdot x) = (\alpha\beta) \cdot x$;
7. $\alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$;
8. $(\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$.

В дальнейшем знак умножения опускается: $\alpha \cdot x = \alpha x$.

Символ 0 используется как для обозначения нуля в \mathbf{R} , так и нулевого вектора в E .

Набор $\{x_1, \dots, x_k\} \subset E$ называется *линейно зависимым*, если найдется набор чисел $\{\alpha_1, \dots, \alpha_k\} \subset \mathbf{R}$, хотя бы одно из которых отлично от нуля, такой, что

$$\sum_{i=1}^k \alpha_i x_i = 0;$$

в противном случае он называется *линейно независимым*.

Пространство E называется m -мерным, если в нем существует линейно независимый набор из m векторов и любой набор из $(m+1)$ -го вектора линейно зависим. Произвольный линейно независимый набор из m векторов в m -мерном пространстве называется *базисом* в этом пространстве.

Если $\{e_1, \dots, e_m\} = \{e_i\}_{i=1}^m$ — базис в m -мерном пространстве E , то для любого вектора $x \in E$ найдется единственный набор скаляров $\{x_1, \dots, x_m\}$ такой, что

$$x = \sum_{i=1}^m x_i e_i; \quad (4.1.1)$$

числа x_1, \dots, x_m при этом называются *координатами* вектора x в базисе $\{e_i\}$. Соответствие $x \mapsto \{x_1, \dots, x_m\}$ отождествляет m -мерное вещественное векторное пространство E с m -мерным вещественным векторным пространством \mathbf{R}^m всех упорядоченных наборов m вещественных чисел с «покоординатными» операциями сложения и умножения на скаляры. С точки зрения линейной структуры пространства E и \mathbf{R}^m неразличимы. Поэтому в дальнейшем для обозначения произвольного m -мерного вещественного пространства мы будем использовать символ \mathbf{R}^m .

4.1.2. Скалярные произведения и нормы. *Скалярным произведением* в \mathbf{R}^m называется отображение (\cdot, \cdot) из $E \times E$ в \mathbf{R} , удовлетворяющее следующим аксиомам: при всех $x, y, z \in \mathbf{R}^m$ и $\alpha \in \mathbf{R}$

1. $(x, y) = (y, x)$;
2. $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$;
3. $(\alpha x, y) = \alpha(x, y)$;

4. $(x, x) \geq 0$;
5. если $(x, x) = 0$, то $x = 0$.

Взамен (x, y) мы в дальнейшем будем писать $x \cdot y$ или xy . Вещественное m -мерное векторное пространство со скалярным произведением называется *евклидовым*. Всюду ниже предполагается, что \mathbf{R}^m — евклидово вещественное m -мерное векторное пространство.

Нормой на векторном пространстве \mathbf{R}^m называется любое отображение $\|\cdot\| : \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}_+$, удовлетворяющее следующим требованиям: при всех $x, y \in \mathbf{R}^m$ и $\alpha \in \mathbf{R}$

1. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$;
2. $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$;
3. $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Норма вектора x в нормированном пространстве \mathbf{R}^m обозначается $\|x\|_{\mathbf{R}^m}$, или кратко $\|x\|$.

Наличие скалярного произведения в \mathbf{R}^m позволяет, в частности, ввести понятие *евклидовой нормы* (или *длины*) вектора:

$$\|x\| = \sqrt{xx}.$$

В дальнейшем евклидова норма векторов обозначается знаком модуля: $\|x\| = |x|$. Кроме того, в евклидовом пространстве можно ввести понятие ортогональности векторов: $x, y \in \mathbf{R}^m$ называются *ортогональными*, если $xy = 0$.

Наряду со скалярным произведением в \mathbf{R}^3 имеется еще одна, известная из курса аналитической геометрии, важная бинарная операция — *векторное произведение*. Ее строгое определение приводится в следующем параграфе.

4.1.3. Базисы и кобазисы. Для любого базиса $\{e_i\}$ кобазис $\{e^i\}$ однозначно определяется соотношениями

$$e^i e_j = \delta_j^i \quad (i, j = 1, \dots, m), \quad (4.1.2)$$

где δ_j^i — так называемый δ -символ Кронекера:

$$\delta_j^i = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j, \\ 0, & \text{если } i \neq j. \end{cases}$$

Геометрически соотношение (4.1.2) означает, что вектор e^i кобазиса ортогонален векторам $e_1, \dots, e_{i-1}, e_{i+1}, \dots, e_m$ базиса (рис. 28). Базис, совпадающий со своим кобазисом, называется *ортонормированным*: $e_i e_j = \delta_j^i$.

В частности, все векторы ортонормированного базиса имеют единичную длину.

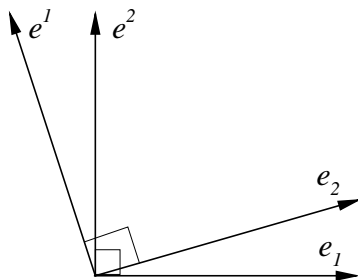


Рис. 28. Базис e_1, e_2 и кобазис e^1, e^2 в \mathbf{R}^2

4.1.4. Немые индексы. Начиная с этого момента, взамен привычного обозначения (4.1.1) для суммы индексированных одночленов мы будем использовать новое (традиционное в механике сплошной среды) обозначение, преимущества которого станут ясны ниже. Индекс у коэффициента x_i в разложении вектора x по базису $\{e_i\}$ будем писать сверху и вместо

$$x = \sum_{i=1}^m x_i e_i \quad (4.1.3)$$

будем писать

$$x = x^i e_i,$$

опуская знак суммирования по так называемому *немому* индексу i . Этимология названия «немой» связана с тем, что в (4.1.3) индекс суммирования i можно заменить любой другой буквой. Индекс называется *немым*, если он входит в одночлен (именно в одночлен, а не в формулу) в точности два раза: один раз в качестве верхнего индекса и один раз в качестве нижнего. Например, равенство

$$x_s = a_{si}^j \alpha_s e^i e_j$$

означает, что

$$x_s = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m a_{si}^j \alpha_s e^i e_j.$$

Пределы суммирования обычно ясны из контекста.

4.1.5. Ковариантные и контравариантные компоненты. Любой вектор $x \in \mathbf{R}^m$ можно разложить как по произвольному базису $\{e_i\}$:

$$x = x^i e_i, \quad (4.1.4)$$

так и по соответствующему ему кобазису $\{e^i\}$:

$$x = x_i e^i. \quad (4.1.5)$$

Соответствующие координаты x_i называются *ковариантными компонентами* вектора x , а координаты x^i — его *контравариантными компонентами*. Как легко видеть,

$$x^i = x \cdot e^i; \quad x_i = x \cdot e_i; \quad x \cdot y = x^i y_i = x_i y^i. \quad (4.1.6)$$

В пространстве \mathbf{R}^m переход от представления векторов в базисе $\{e_i\}$ (и соответствующем кобазисе $\{e^i\}$) к представлению векторов в новом базисе $\{e'_i\}$ (и кобазисе $\{e'^i\}$) производится с помощью матрицы перехода $\mathcal{A} = (A^j_i)$, однозначно определяемой равенствами

$$e'^i = A^j_i e_j, \quad i = 1, \dots, m \quad (4.1.7)$$

(это система m^2 линейных уравнений относительно A^j_i). Как легко видеть, векторы нового кобазиса определяются формулами

$$e'^i = (\mathcal{A}^{-1})^i_j e^j, \quad i = 1, \dots, m. \quad (4.1.8)$$

Поэтому для произвольного вектора $b \in \mathbf{R}^m$ получаются следующие выражения его ковариантных b'_i и контравариантных b'^i компонент в новых базисе $\{e'_i\}$ и кобазисе $\{e'^i\}$ через соответствующие компоненты в исходных базисе $\{e_i\}$ и кобазисе $\{e^i\}$:

$$b'_i = A^j_i b_j, \quad b'^i = (\mathcal{A}^{-1})^i_j b^j, \quad i = 1, \dots, m. \quad (4.1.9)$$

Далее мы будем различать одинаково и противоположно ориентированные базисы. Говорят, что *базисы $\{e_i\}$ и $\{e'_i\}$ имеют одинаковую ориентацию*, если определитель матрицы перехода (4.1.7) положителен, т. е. $\det \mathcal{A} > 0$, и ориентированы противоположно, если $\det \mathcal{A} < 0$.

З А Д А Ч И

4.1.1. Докажите справедливость формул (4.1.6).

4.1.2. Пусть два базиса $\{e_i\}$ и $\{e'_i\}$ связаны между собой соотношениями (4.1.7). Покажите, что система векторов (4.1.8) является кобазисом для базиса $\{e'_i\}$.

4.1.3. Вывести формулы (4.1.9).

4.1.4. Пусть система векторов $\{e_i\}$ ($i = 1, 2$) является базисом в \mathbf{R}^2 , задана матрица

$$A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad (4.1.10)$$

а векторы e'_i ($i = 1, 2$) определены формулой $e'_i = A_i^j e_j$. При каких значениях параметра θ система векторов $\{e'_i\}$ также является базисом в \mathbf{R}^2 ?

4.1.5. Докажите неравенство Коши — Шварца:

$$|x \cdot y| \leq |x| \cdot |y|, \quad \forall x, y \in \mathbf{R}^m. \quad (4.1.11)$$

§ 4.2. Линейные отображения

В этом параграфе изучаются линейные отображения [1, 18, 27]. Как и в предыдущем параграфе, основной целью являются установление терминологии и обозначений.

4.2.1. Пространство линейных отображений. Пусть \mathbf{R}^m и \mathbf{R}^n — линейные нормированные пространства. Отображение $L : \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}^n$ называется *линейным*, если

$$L \langle \alpha x + \beta y \rangle = \alpha L \langle x \rangle + \beta L \langle y \rangle$$

при всех $x, y \in \mathbf{R}^m$ и $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ (здесь и всюду ниже через $L \langle x \rangle$ обозначается значение отображения L на векторе x).

Множество всех линейных отображений из \mathbf{R}^m в \mathbf{R}^n становится линейным пространством, если в этом множестве ввести операции сложения отображений и их умножения на скаляры:

$$(L + K) \langle x \rangle = L \langle x \rangle + K \langle x \rangle, \quad \alpha L \langle x \rangle = L \langle \alpha x \rangle.$$

Это пространство в дальнейшем обозначается $\mathcal{L}(\mathbf{R}^m, \mathbf{R}^n)$. Если $m = n$, то используется обозначение $\mathcal{L}(\mathbf{R}^m)$.

Пространство $\mathcal{L}(\mathbf{R}^m, \mathbf{R}^n)$ превращается в нормированное, если положить

$$\|L\| = \sup_{x \in \mathbf{R}^m, x \neq 0} \frac{\|L \langle x \rangle\|_{\mathbf{R}^n}}{\|x\|_{\mathbf{R}^m}}. \quad (4.2.1)$$

4.2.2. Изометрия нормированных пространств. Два линейных нормированных пространства E_1 и E_2 называются *изометричными*, если существует линейное отображение $\mathfrak{S} : E_1 \rightarrow E_2$ такое, что

$$\|\mathfrak{S} \langle x \rangle\|_{E_2} = \|x\|_{E_1}. \quad (4.2.2)$$

Отображение \mathfrak{S} называется *изометрией*. Изометричность пространств E_1 и E_2 обычно обозначается знаком « \sim »: $E_1 \sim E_2$. С точки зрения линейной и метрической структуры изометрические пространства неразличимы.

Пример. Пространство $\mathcal{L}(\mathbf{R}^m, \mathbf{R})$ называется *пространством линейных функционалов на \mathbf{R}^m* (пространством, сопряженным к \mathbf{R}^m), его элементы называются *функционалами*. Сопряженное пространство обозначается обычно $(\mathbf{R}^m)^*$ или \mathbf{R}^{m*} .

Нетрудно видеть, что если в пространстве \mathbf{R}^m используется евклидова норма, то $\mathbf{R}^{m*} \sim \mathbf{R}^m$. Изометрию $\mathbf{R}^{m*} \rightarrow \mathbf{R}^m$ можно задать формулой

$$\mathfrak{S} \langle f \rangle = f \langle e_i \rangle e^i, \quad (4.2.3)$$

где $\{e_i\}$ — произвольный базис в \mathbf{R}^m , а $\{e^i\}$ — соответствующий кобазис. Таким образом, функционал f отождествляется с вектором $\mathfrak{S} \langle f \rangle$. Этот вектор, в свою очередь, определяет функционал f формулой

$$f \langle x \rangle = (\mathfrak{S} \langle f \rangle) \cdot x. \quad (4.2.4)$$

Легко проверяется, что для отображения \mathfrak{S} равенство норм (4.2.2) имеет место (см. задачу 4.2.1).

4.2.3. Матрица линейного отображения. *Диадой* $a \otimes b$ двух векторов $a, b \in \mathbf{R}^m$ называется линейное отображение из $\mathcal{L}(\mathbf{R}^m)$, определяемое равенством

$$(a \otimes b) \langle x \rangle = a(b \cdot x).$$

Для любого базиса $\{e_i\}$ в \mathbf{R}^m набор линейных отображений $\{e_i \otimes e^j\}_{i,j=1}^m$ будет базисом в $\mathcal{L}(\mathbf{R}^m)$. В самом деле, определим числа L_j^i

формулами

$$L_j^i = e^i \cdot L \langle e_j \rangle \quad (i, j = 1, \dots, m). \quad (4.2.5)$$

Но тогда

$$\begin{aligned} L_j^i(e_i \otimes e^j) \langle x \rangle &= L_j^i e_i(e^j \cdot x) = L_j^i e_i x^j = (e^i \cdot L \langle e_j \rangle) e_i x^j = \\ &= (e^i \cdot L \langle x^j e_j \rangle) e_i = (e^i \cdot L \langle x \rangle) e_i = L \langle x \rangle. \end{aligned}$$

Таким образом, для любого отображения $L \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^m)$ имеет место разложение

$$L = L_j^i(e_i \otimes e^j). \quad (4.2.6)$$

Единственность разложения (4.2.6) проверяется тривиально (см. задачу 4.2.2).

Наличие базиса $\{e_i \otimes e^j\}_{i,j=1}^m$ из m^2 элементов означает, что $\mathcal{L}(\mathbf{R}^m)$ является линейным m^2 -мерным пространством.

Соответствие $L \mapsto \{L_j^i\}$ устанавливает изоморфизм между пространством $\mathcal{L}(\mathbf{R}^m)$ и пространством \mathcal{M}^m квадратных $m \times m$ -матриц. Матрица $\{L_j^i\}$ (или просто L_j^i) называется *матрицей отображения L в базисе $\{e_i\}$* , при этом верхний индекс i указывает номер строки, а нижний индекс j — номер столбца. С помощью этой матрицы можно подсчитать значение отображения L на произвольном векторе x :

$$L \langle x \rangle = L_j^i(e_i \otimes e^j) \langle x \rangle = L_j^i e_i(e^j \cdot x) = L_j^i x^j e_i.$$

Матрица суперпозиции $K \circ L$ двух отображений $K, L \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^m)$ также легко вычисляется. С учетом формул (4.2.5), (4.2.6) получаем, что

$$\begin{aligned} (K \circ L)_j^i &= e^i \cdot (K \circ L) \langle e_j \rangle = e^i \cdot K \langle L \langle e_j \rangle \rangle = \\ &= e^i \cdot K \langle L_l^k(e_k \otimes e^l) \langle e_j \rangle \rangle = e^i \cdot K \langle L_l^k \langle e_k(e^l \cdot e_j) \rangle \rangle = \\ &= e^i \cdot K \langle L_l^k e_k \delta_j^l \rangle = L_j^k e^i \cdot K \langle e_k \rangle = L_j^k e^i \cdot K_s^p(e_p \otimes e^s) \langle e_k \rangle = \\ &= L_j^k e^i \cdot (K_s^p e_p \delta_k^s) = L_j^k e^i \cdot K_k^p e_p = K_k^p L_j^k \delta_p^i = K_k^i L_j^k. \end{aligned} \quad (4.2.7)$$

Здесь и ниже символ « \circ » обозначает суперпозицию отображений.

4.2.4. След матрицы и линейного отображения. На пространстве \mathcal{M}^m определен линейный функционал tr (от англ. trace — след; его также иногда обозначают Sp , от нем. Spur — след), равный сумме диагональных элементов матрицы:

$$\operatorname{tr} \{L_j^i\} \stackrel{\text{def}}{=} L_j^i = e^i \cdot L \langle e_i \rangle.$$

Этот функционал порождает другой функционал, определенный на множестве линейных отображений $\mathcal{L}(\mathbf{R}^m)$:

$$\operatorname{tr} \langle L \rangle = \operatorname{tr} \{L_j^i\}.$$

Указанное определение зависит от базиса. На самом деле оказывается, что *след матрицы (и соответственно линейного отображения) не зависит от выбора базиса*. Чтобы доказать это утверждение, заметим, во-первых, что для любых $a, b \in \mathbf{R}^m$

$$\begin{aligned} \operatorname{tr} \langle a \otimes b \rangle &= \operatorname{tr} \langle a^i e_i \otimes b_j e^j \rangle = \\ &= a^i b_j \operatorname{tr} \langle e_i \otimes e^j \rangle = a^i b_j e^k \cdot (e_i \otimes e^j) \langle e_k \rangle = \\ &= a^i b_j (e^k \cdot e_i) (e^j \cdot e_k) = a^i b_j \delta_i^k \delta_k^j = a^k b_k = a \cdot b. \end{aligned} \quad (4.2.8)$$

Во-вторых, линейный функционал на $\mathcal{L}(\mathbf{R}^m)$, обладающий свойством (4.2.8), обязательно есть след: если $\Phi : \mathcal{L}(\mathbf{R}^m) \rightarrow \mathbf{R}$ таков, что $\Phi(a \otimes b) = a \cdot b$, то

$$\Phi \langle L \rangle = \Phi \langle L_j^i (e_i \otimes e^j) \rangle = L_j^i (e_i \cdot e^j) = L_j^i \delta_i^j = L_j^j.$$

Таким образом, за эквивалентное определение следа можно взять следующее: линейный функционал Φ на $\mathcal{L}(\mathbf{R}^m)$ называется следом, если для любых $a, b \in \mathbf{R}^m$ выполняется равенство

$$\Phi(a \otimes b) = a \cdot b. \quad (4.2.9)$$

Остается заметить, что свойство (4.2.9) не зависит от выбора базиса.

4.2.5. Инварианты матриц и линейных отображений. Функции на пространстве \mathcal{M}^m , не зависящие от выбора базиса, называются *инвариантами матрицы*. Независимость инвариантов матрицы от выбора базиса позволяет говорить об *инвариантах линейного отображения*. Один из важных инвариантов — это след матрицы tr .

Нам потребуется еще два других инварианта для отображений из $\mathcal{L}(\mathbf{R}^3)$:

$$J_2 = J_2(L) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} (\operatorname{tr}^2 \langle L \rangle - \operatorname{tr} \langle L^2 \rangle)$$

и

$$J_3 = J_3(L) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{6} (\text{tr}^3 \langle L \rangle - 3 \text{tr} \langle L \rangle \text{tr} \langle L^2 \rangle + 2 \text{tr} \langle L^3 \rangle).$$

Для унификации обозначений след $\text{tr} \langle L \rangle$ отображения L мы будем обозначать через $J_1 = J_1(L)$.

Как мы уже знаем, $J_1 = L_i^i$. Остальные инварианты также выражаются через элементы матрицы $\{L_j^i\}$ формулами

$$J_2 = \begin{vmatrix} L_1^1 & L_2^1 \\ L_1^2 & L_2^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} L_1^1 & L_3^1 \\ L_1^3 & L_3^3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} L_2^2 & L_3^2 \\ L_2^3 & L_3^3 \end{vmatrix},$$

$$J_3 = \det\{L_j^i\}.$$

Коэффициенты характеристического полинома $p(\lambda)$ отображения L выражаются через инварианты:

$$p(\lambda) = \det(L - \lambda I) = \lambda^3 - J_1 \lambda^2 + J_2 \lambda - J_3.$$

Здесь I — тождественное отображение: $I \langle x \rangle \equiv x$. И, наоборот, инварианты отображения L вычисляются через *собственные значения* L (т. е. корни $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ характеристического полинома):

$$J_1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, \quad J_2 = \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_2 \lambda_3 + \lambda_3 \lambda_1, \quad J_3 = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3.$$

4.2.6. Сопряженные, самосопряженные (симметричные), антисимметричные и ортогональные отображения. Отображение $K \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^m)$ называется сопряженным к отображению $L \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^m)$, если при всех $x, y \in \mathbf{R}^m$

$$L \langle x \rangle \cdot y = x \cdot K \langle y \rangle. \quad (4.2.10)$$

Сопряженное к L отображение обозначается L^* .

Нетрудно показать, что если определить матрицу $\{K_j^i\}$ как матрицу, транспонированную к матрице $\{L_j^i\}$ отображения L в ортонормированном базисе $\{e_i\}$, т. е. положить $K_j^i = L_i^j$, то соответствующее отображение $K = K_j^i(e_i \otimes e^j)$ будет сопряженным к L (см. задачу 4.2.3). Это доказывает существование сопряженного к любому отображению из $\mathcal{L}(\mathbf{R}^m)$. Данное утверждение будет доказано другим способом в п. 4.2.7.

Отображение $L \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^m)$ называется *самосопряженным*, или *симметричным*, если $L^* = L$. Отображение $L \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^m)$ называется *антисимметричным*, если $L^* = -L$. В терминах матриц, представляющих отображения в произвольном ортонормированном базисе, эти определения выглядят как

равенства $L_j^i = L_i^j$ и $L_j^i = -L_i^j$ соответственно.

Наконец, отображение $L \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^m)$ называется *ортгоналичным*, если оно обратимо и обратное отображение совпадает с сопряженным: $L^{-1} = L^*$, или, что то же самое, $L^* \circ L = L \circ L^* = I$.

4.2.7. Свертка отображений. Пространство $\mathcal{L}(\mathbf{R}^m)$ превращается в евклидово, если в нем ввести специальным образом скалярное произведение. Это скалярное произведение отображений K и L из $\mathcal{L}(\mathbf{R}^m)$ называется *сверткой*, обозначается $K : L$ и вводится следующим образом:

$$K : L \stackrel{\text{def}}{=} \text{tr} \langle K^* \circ L \rangle. \quad (4.2.11)$$

Для того, чтобы показать, что свертка действительно является скалярным произведением, найдем «коэффициентное» представление свертки. Если $\{e_i\}$ — произвольный ортонормированный базис, то в соответствии с определением (4.2.11) и формулой (4.2.7) получаем, что

$$K : L = \text{tr} \langle K^* \circ L \rangle = (K^* \circ L)_i^i = (K^*)_j^i L_i^j.$$

После этого симметричность доказывается легко:

$$K : L = (K^*)_j^i L_i^j = K_i^j (L^*)_j^i = \text{tr} \langle L^* \circ K \rangle = L : K.$$

Далее

$$L : L = (L^*)_j^i L_i^j = \sum_{i,j=1}^m (L_j^i)^2 \geq 0,$$

и, более того, $L : L = 0$ только в том случае, когда $L = 0$. Линейность же свертки по обоим аргументам есть тривиальное следствие линейности следа.

4.2.8. Векторное произведение. Введем в \mathbf{R}^3 бинарную операцию $\times : \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$, называемую *векторным произведением*. Возьмем произвольное линейное отображение L в \mathbf{R}^3 и на его основе определим новое линейное отображение $\ell : \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ равенством

$$\begin{aligned} & \ell(L) \langle x, y, z \rangle = \\ & = x(y \cdot L \langle z \rangle - y \cdot L^* \langle z \rangle) + y(z \cdot L \langle x \rangle - z \cdot L^* \langle x \rangle) + z(x \cdot L \langle y \rangle - x \cdot L^* \langle y \rangle). \end{aligned}$$

Пусть далее $\{e_i\}$ — произвольный базис, а L таково, что

$$\ell(L) \langle e_1, e_2, e_3 \rangle \neq 0.$$

Определим отображение $\times_{\{e_i\}} : \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ равенством

$$x \times_{\{e_i\}} y = \ell(x \otimes y) \langle e_1, e_2, e_3 \rangle \left| \ell(L) \langle e_1, e_2, e_3 \rangle \right|.$$

Нетрудно показать, что для двух базисов $\{e_i\}$ и $\{e'_i\}$

$$x \times_{\{e_i\}} y = x \times_{\{e'_i\}} y, \quad (4.2.12)$$

если эти базисы имеют одинаковую ориентацию, и

$$x \times_{\{e_i\}} y = -x \times_{\{e'_i\}} y, \quad (4.2.13)$$

если противоположную. Таким образом, отображение $\times_{\{e_i\}}$ с точностью до знака не зависит от выбора базиса.

Зафиксируем теперь произвольный базис и выберем L так, чтобы

$$\left| \ell(L) \langle e_1, e_2, e_3 \rangle \right| = \frac{1}{\text{Vol}(e_1, e_2, e_3)},$$

где $\text{Vol}(e_1, e_2, e_3)$ — объем параллелепипеда, образованного векторами базиса. Соответствующее им отображение $\times_{\{e_i\}}$, которое мы будем обозначать \times , и есть по определению векторное произведение.

Можно показать, что

$$x \cdot (x \times y) = y \cdot (x \times y) = 0, \quad (4.2.14)$$

т. е. вектор $x \times y$ ортогонален x и y ,

$$|x \cdot (y \times z)| = \text{Vol}(x, y, z), \quad (4.2.15)$$

и, кроме того,

$$e_1 \cdot (e_2 \times e_3) = \text{Vol}(e_1, e_2, e_3). \quad (4.2.16)$$

Свойства (4.2.14)—(4.2.16) определяют векторное произведение однозначно и могут служить его аксиоматическим определением.

В произвольном ортонормированном базисе $\{e_i\}$ векторное произведение можно представить в следующем виде:

$$x \times y = \mathcal{A}(x) \langle y \rangle, \quad (4.2.17)$$

где матрица \mathcal{A} задается равенством

$$\mathcal{A}(x) = \begin{pmatrix} 0 & -x^3 & x^2 \\ x^3 & 0 & -x^1 \\ -x^2 & x^1 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.2.18)$$

и $x = x^i e_i$.

З А Д А Ч И

4.2.1. Доказать, что для отображения (4.2.3), действующего из \mathbf{R}^{m*} в пространство \mathbf{R}^m с евклидовой нормой, справедлива формула (4.2.4) и выполняется равенство (4.2.2):

$$|\mathfrak{S} \langle f \rangle| = \|f\|_{\mathbf{R}^{m*}}. \quad (4.2.19)$$

4.2.2. Доказать, что отображения $\{e_i \otimes e^j\}_{i,j=1}^m$ линейно независимы в $\mathcal{L}(\mathbf{R}^m)$, а разложение (4.2.6) по этой системе произвольного отображения из $\mathcal{L}(\mathbf{R}^m)$ единственно.

4.2.3. Пусть $L \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^m)$, $L_j^i = e^i \cdot L \langle e_j \rangle$, $K_j^i = L_i^j$ и $K = K_j^i (e_i \otimes e^j)$, где $\{e_i\}$ — ортонормированный базис в \mathbf{R}^m . Доказать, что $L^* = K$.

4.2.4. Доказать, что отображение $\times_{\{e_i\}}$ не зависит от выбора базиса (с точностью до знака).

4.2.5. Доказать справедливость свойств (4.2.14)–(4.2.16) векторного произведения.

4.2.6. Доказать, что в ортонормированном базисе для вычисления векторного произведения можно использовать формулу (4.2.17).

4.2.7. Пусть $\{L_j^i\}$ — матрица отображения $L \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^m)$ в базисе $\{e_i\}$. Зная матрицу перехода \mathcal{A} , найти элементы $\{L_j^i\}$ матрицы отображения L в новом базисе $\{e'_i\}$.

4.2.8. Доказать, что для любых отображений $K, L \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^m)$ справедлива формула

$$(K \circ L)^* = L^* \circ K^*. \quad (4.2.20)$$

4.2.9. Пусть O_1, O_2 — ортогональные отображения в $\mathcal{L}(\mathbf{R}^m)$. Доказать, что отображение $O_1 \circ O_2$ также является ортогональным.

§ 4.3. Тензоры

Многие характеристики сплошной среды представляют собой тензоры — полилинейные отображения на \mathbf{R}^3 [5, 18]. Здесь они описываются и связываются с уже привычными математическими понятиями.

4.3.1. Определения. Пусть $(\mathbf{R}^m)^r = \overbrace{\mathbf{R}^m \times \dots \times \mathbf{R}^m}^r$ и отображение $T : (\mathbf{R}^m)^r \rightarrow \mathbf{R}$ является линейным по каждому из своих r векторных аргументов при произвольных фиксированных значениях остальных $(r-1)$ аргументов. Такие отображения (полилинейные функционалы) называются *тензорами* в \mathbf{R}^m , при этом число r называется *рангом*, или *валентностью* тензора T .

Множество тензоров ранга r будем обозначать как $\mathbb{T}^r(\mathbf{R}^m)$. Оно образует линейное пространство с естественными операциями сложения и умножения на скаляры.

Пусть $\{e_i\}$ — базис в \mathbf{R}^m , а $\{e^i\}$ — его кобазис. Любое число вида $T \langle x_1, \dots, x_r \rangle$, где $x_s \in \{e_i\} \cup \{e^i\}$ ($s = 1, \dots, r$), называется *компонентой тензора* T . Если все $x_s \in \{e_i\}$, то компонента называется *ковариантной*, а если $x_s \in \{e^i\}$ — *контравариантной*; остальные компоненты называются *смешанными*. Тензор ранга r имеет в данном базисе $(2m)^r$ различных компонент, среди которых m^r ковариантных и m^r контравариантных. Число различных *типов* (или *видов*) компонент тензора (среди которых мы выделили два — ковариантные и контравариантные) очевидно 2^r .

Ковариантные компоненты тензора $T \langle e_{i_1}, \dots, e_{i_r} \rangle$ обычно обозначают через $T_{i_1 \dots i_r}$, а контравариантные $T \langle e^{i_1}, \dots, e^{i_r} \rangle$ — через $T^{i_1 \dots i_r}$. В обозначениях смешанных компонент тензора используются как верхние, так и нижние индексы, например:

$$T_{\cdot i \cdot}^{j \cdot k} = T \langle e^j, e_i, e^k \rangle; \quad T_{\cdot i \cdot}^{j k \cdot l} = T \langle e^j, e^k, e_i, e^l \rangle.$$

4.3.2. Примеры тензоров. Тензором нулевого ранга по определению является вещественное число (скаляр).

Тензоры первого ранга — это линейные функционалы на \mathbf{R}^m , т. е. элементы из \mathbf{R}^{m*} . Поскольку $\mathbf{R}^{m*} \sim \mathbf{R}^m$, то тензоры первого ранга отождествляются с векторами из \mathbf{R}^m .

Примером тензора второго ранга является универсальный тензор

$$T \langle x_1, x_2 \rangle = x_1 \cdot T \langle x_2 \rangle, \quad (4.3.1)$$

где T — некоторое отображение из $\mathcal{L}(\mathbf{R}^m)$. Смысл слова «универсальный» в названии тензора поясняется в следующем пункте.

Еще один пример тензора второго ранга — так называемый *фундаментальный метрический* тензор пространства \mathbf{R}^m : $g \langle x_1, x_2 \rangle = x_1 \cdot x_2$.

4.3.3. Изоморфизм $\mathbb{T}^2(\mathbf{R}^m) \sim \mathcal{L}(\mathbf{R}^m)$. Универсальность тензора (4.3.1) в том, что, как оказывается, любой тензор T второго ранга из $\mathbb{T}^2(\mathbf{R}^m)$ может быть представлен в таком виде. В самом деле, если в T зафиксировать второй аргумент x_2 , то отображение $T_1 : x_1 \mapsto T \langle x_1, x_2 \rangle$ будет тензором первого ранга. В силу изометрии $\mathbf{R}^{m*} \sim \mathbf{R}^m$ и формул (4.2.3), (4.2.4), задающих эту изометрию, найдется вектор $T \langle x_2 \rangle = \mathfrak{S} \langle T_1 \rangle$ (для каждого $x_2 \in \mathbf{R}^m$ он свой) такой, что

$$T \langle x_1, x_2 \rangle = x_1 \cdot T \langle x_2 \rangle.$$

Линейность отображения $x_2 \mapsto T \langle x_2 \rangle$ очевидна.

Отображение $\mathfrak{S} : T \mapsto T$ из $\mathbb{T}^2(\mathbf{R}^m)$ в $\mathcal{L}(\mathbf{R}^m)$ реализует изоморфизм $\mathbb{T}^2(\mathbf{R}^m)$ и $\mathcal{L}(\mathbf{R}^m)$. Таким образом, тензоры второго ранга из $\mathbb{T}^2(\mathbf{R}^m)$ отождествляются с линейными отображениями из $\mathcal{L}(\mathbf{R}^m)$. В силу этого можно говорить о норме тензора второго ранга, его инвариантах и т. д. Более того, поскольку имеет место изоморфизм $\mathcal{L}(\mathbf{R}^m) \sim \mathcal{M}^m$, имеет место и изоморфизм $\mathbb{T}^2(\mathbf{R}^m) \sim \mathcal{M}^m$. Поэтому можно говорить о матрице тензора и всех сопутствующих матрицам понятиях.

По существу, тензоры — это просто другая терминология для обозначения привычных и известных из линейной алгебры объектов — полилинейных функционалов. «Тензорная» терминология принята в механике сплошной среды. Она имеет некоторую специфику, которой мы в данном курсе не касаемся.

Кстати, наличие изоморфизма $\mathbb{T}^2(\mathbf{R}^m) \sim \mathcal{L}(\mathbf{R}^m)$ позволяет доказать утверждение из п. 4.2.6 о существовании сопряженного отображения. Для произвольного $L \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^m)$ определим тензор $T \in \mathbb{T}^2(\mathbf{R}^m)$ равенством $T \langle x_1, x_2 \rangle = x_1 \cdot L \langle x_2 \rangle$, затем определим тензор $T^* \in \mathbb{T}^2(\mathbf{R}^m)$ равенством

$T^* \langle x_1, x_2 \rangle = T \langle x_2, x_1 \rangle$ и, наконец, положим $K = \mathfrak{S}(T^*)$. Утверждается, что $K = L^*$. В самом деле,

$$x_1 \cdot K \langle x_2 \rangle = T^* \langle x_1, x_2 \rangle = T \langle x_2, x_1 \rangle = x_2 \cdot L \langle x_1 \rangle,$$

что и есть определение (4.2.10) сопряженного оператора.

З А Д А Ч И

4.3.1. По определению ковариантные и контравариантные компоненты фундаментального метрического тензора вычисляются по формулам

$$g_{ij} = g \langle e_i, e_j \rangle = e_i \cdot e_j, \quad g^{ij} = g \langle e^i, e^j \rangle = e^i \cdot e^j. \quad (4.3.2)$$

Доказать следующие свойства фундаментального тензора:

$$g_{ij} = g_{ji}, \quad g^{ij} = g^{ji}, \quad g^{ij} g_{jk} = \delta_k^i, \quad g_{ij} g^{jk} = \delta_i^k.$$

Последние два равенства означают, что симметричные матрицы, элементами первой из которых являются ковариантные компоненты g_{ij} , а второй — контравариантные, есть взаимно обратные матрицы.

4.3.2. Доказать формулы разложения векторов базиса и кобазиса

$$e^i = g^{ij} e_j, \quad e_i = g_{ij} e^j, \quad (4.3.3)$$

а также формулы «опускания» и «поднимания» индексов для компонент произвольного вектора $b \in \mathbf{R}^m$:

$$b^i = g^{ij} b_j, \quad b_i = g_{ij} b^j \quad (4.3.4)$$

и компонент произвольного тензора $T \in \mathbb{T}^r(\mathbf{R}^m)$:

$$T^{i_1 \dots i_r} = g^{i_1 j_1} \dots g^{i_r j_r} T_{j_1 \dots j_r}, \quad T_{i_1 \dots i_r} = g_{i_1 j_1} \dots g_{i_r j_r} T^{j_1 \dots j_r}. \quad (4.3.5)$$

4.3.3. Найти компоненты ковариантного метрического тензора g в сферической системе координат (r, φ, θ) : $x = r \sin \theta \cos \varphi$, $y = r \sin \theta \sin \varphi$, $z = r \cos \theta$.

§ 4.4. Скалярные, векторные и тензорные поля

Большинство числовых характеристик сплошных сред описывают в виде полей, т. е. функций, заданных на том или ином множестве и принимающих скалярные, векторные или тензорные значения [5]. В настоящем параграфе приводятся необходимые определения и факты, связанные с этими понятиями, и основная терминология.

4.4.1. Непрерывные поля. Пусть $U \subset \mathbf{R}^k$ — открытое подмножество, т. е. вместе с каждой точкой $x \in U$ в U лежит и некоторый шар $B(x, r)$ радиуса r с центром в x . Ниже буквой E обозначается одно из следующих линейных нормированных (евклидовых) пространств: \mathbf{R} , \mathbf{R}^m , \mathbf{R}^{m*} , $\mathcal{L}(\mathbf{R}^m)$, $\mathbb{T}^2(\mathbf{R}^m)$. Отображение $f : U \rightarrow E$ называется *скалярным* (если $E = \mathbf{R}$) или *тензорным* (в противном случае) *полем* (соответственно первого или второго ранга). Если $E = \mathbf{R}^m$ или $E = \mathbf{R}^{m*}$, то f также называется *векторным полем*.

Поле f называется *непрерывным* в точке $x \in U$, если

$$|f(x+h) - f(x)|_E \rightarrow 0 \text{ при } |h|_{\mathbf{R}^k} \rightarrow 0.$$

4.4.2. Дифференцируемые поля. Поле f по определению *дифференцируемо* в точке $x_0 \in U$, если найдется отображение $L \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^k, E)$ такое, что

$$\frac{|f(x_0+h) - f(x_0) - L(h)|_E}{|h|_{\mathbf{R}^k}} \rightarrow 0 \text{ при } |h|_{\mathbf{R}^k} \rightarrow 0.$$

Отображение L называется *производной поля f в точке x_0* и обозначается через

$$f'_{x_0} \text{ или } \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=x_0}.$$

В случае, когда $E = \mathbf{R}$, производную f'_{x_0} обозначают также через $\nabla f(x_0)$ или $\text{grad } f(x_0)$ и называют *градиентом поля f в точке x_0* .

Градиент скалярного поля в каждой точке есть элемент пространства $\mathbf{R}^{k*} = \mathbb{T}^1(\mathbf{R}^k)$, и, таким образом, градиент скалярного поля есть поле тензоров первого ранга.

Если поле f дифференцируемо в каждой точке U , то говорят, что f *дифференцируемо*. Если отображение $x \mapsto f'_x$ непрерывно как отображение из U в $L \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^k, E)$, то говорят, что поле *непрерывно дифференцируемо*.

Известно, что если $f : U \rightarrow E$, а $g : E \rightarrow E_1$ (где E_1 , как и E , — линейное нормированное пространство) и эти отображения непрерывно дифференцируемы, то таковым является и суперпозиция $g \circ f : U \rightarrow E_1$ и, более того, для любого $x_0 \in U$

$$\left. \frac{\partial g \circ f}{\partial x} \right|_{x=x_0} = \left. \frac{\partial g}{\partial x} \right|_{x=f(x_0)} \circ \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=x_0}.$$

Легко проверить также (см. задачу 4.2.1), что если $E = \mathcal{L}(\mathbf{R}^m)$ или $E = \mathbb{T}^2(\mathbf{R}^m)$, а $f : U \rightarrow E$ — непрерывно дифференцируемое отображение, то f^* также непрерывно дифференцируемо и

$$\frac{\partial f^*}{\partial x} = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^*. \quad (4.4.1)$$

4.4.3. Производные по направлению и частные производные. Матрица Якоби. Пусть $y \in \mathbf{R}^k$ и $|y| = 1$. Предел

$$\lim_{s \rightarrow +0} \frac{f(x + sy) - f(x)}{s} = \left. \frac{d}{ds} f(x + sy) \right|_{s=0}$$

называется *производной по направлению y поля f в точке x* и обозначается

$$\frac{\partial f(x) \langle y \rangle}{\partial x}, \text{ или } f'_y(x).$$

Если зафиксировать в \mathbf{R}^k и E базисы $\{p_i\}$ и $\{q_i\}$ и разложить f по базису $\{q_i\}$: $f(x) = f^j(x)q_j$, то производные функций $f^j(x)$ по направлениям базисных векторов p_i называются *частными производными функции f* . Если $x = x^i p_i$, то частная производная

$$\frac{\partial f^j(x) \langle p_i \rangle}{\partial x}$$

обозначается обычно как

$$\frac{\partial f^j(x)}{\partial x^i}.$$

Линейному отображению $\frac{\partial f}{\partial x}$ соответствует некоторая матрица (за которой мы сохраним то же обозначение $\frac{\partial f}{\partial x}$). Элементами этой матрицы,

называемой *матрицей Якоби*, являются частные производные функции f :

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_i^j = \frac{df^j(x + sp_i)}{ds} \Big|_{s=0} = \frac{\partial f^j}{\partial x^i} = (f^j)'_x \langle p_i \rangle.$$

Из курса математического анализа известно [20], что поле f непрерывно дифференцируемо в том и только в том случае, если частные производные $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_i^j$ существуют и непрерывны.

Если $E = \mathbf{R}$, то матрица Якоби градиента поля f (это матрица размерности $m \times 1$) имеет вид

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x^k} \right). \quad (4.4.2)$$

4.4.4. Дивергенция векторного поля. Если $E = \mathbf{R}^m$ и $m = k$, то $\partial f / \partial x$ есть элемент $\mathcal{L}(\mathbf{R}^m)$. След этого отображения называется *дивергенцией векторного поля f* (в точке x):

$$\operatorname{div} f \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{tr} \left\langle \frac{\partial f}{\partial x} \right\rangle.$$

Согласно определению следа отображения (см. п. 4.2.4), дивергенция векторного поля f определяется как след матрицы Якоби отображения $\partial f / \partial x$:

$$\operatorname{div} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_i^i = \frac{\partial f^i}{\partial x^i}. \quad (4.4.3)$$

4.4.5. Дивергенция тензорного поля. Если $E = \mathcal{L}(\mathbf{R}^m)$, или с точностью до изоморфизма $E = \mathbb{T}^2(\mathbf{R}^m)$, и $k = m$, то *дивергенция тензорного поля $f : U \rightarrow E$* определяется формулой

$$\operatorname{div} f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial f(x) \langle e_i \rangle}{\partial x} \langle e^i \rangle, \quad (4.4.4)$$

где $\{e_i\}$ — произвольный базис в \mathbf{R}^m . Дивергенция $\operatorname{div} f(x)$ при каждом $x \in U$ является очевидно вектором из \mathbf{R}^m .

Определение (4.4.4) не зависит от выбора базиса. Действительно, для любого вектора $y \in \mathbf{R}^m$ дивергенция векторной функции $f^*(x) \langle y \rangle$ вычис-

ляется следующим образом (см. п. 4.4.4):

$$\begin{aligned} \operatorname{div} (f^*(x) \langle y \rangle) &= \frac{\partial (f^*(x) \langle y \rangle)_i}{\partial x^i} = \frac{d}{ds} \left(e^i \cdot f^*(x + se_i) \langle y \rangle \right) \Big|_{s=0} = \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{e^i \cdot [f^*(x + se_i) - f^*(x)] \langle y \rangle}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{y \cdot [f(x + se_i) - f(x)] \langle e^i \rangle}{s} = \\ &= y \cdot \frac{d}{ds} (f(x + se_i) \langle e^i \rangle) \Big|_{s=0} = y \cdot \left(\frac{\partial f(x) \langle e_i \rangle}{\partial x} \right) \langle e^i \rangle. \end{aligned}$$

Поскольку левая часть цепочки не зависит от выбора базиса, правая часть также не зависит от его выбора. Таким образом, при всех $y \in \mathbf{R}^m$

$$\operatorname{div} (f^*(x) \langle y \rangle) = y \cdot \frac{\partial f(x) \langle e_i \rangle}{\partial x} \langle e^i \rangle. \quad (4.4.5)$$

Равенство (4.4.5) может быть принято в качестве определения (с «пробным» вектором y) дивергенции тензорного поля: $\operatorname{div} f(x)$ — это такой вектор $z \in \mathbf{R}^m$, что $\operatorname{div} (f^*(x) \langle y \rangle) = y \cdot z$ при любом $y \in \mathbf{R}^m$.

4.4.6. Формулы Гаусса — Остроградского. Из курса математического анализа известны следующие тождества, называемые *формулами Гаусса — Остроградского*. Пусть f — векторное, F — тензорное непрерывно дифференцируемые поля, ω — область в \mathbf{R}^m с кусочно гладкой границей $\partial\omega$, а n — внешняя нормаль к $\partial\omega$. Тогда

$$\iint_{\partial\omega} f \cdot n \, d\sigma = \iiint_{\omega} \operatorname{div} f \, d\omega, \quad (4.4.6)$$

$$\iint_{\partial\omega} F \langle n \rangle \, d\sigma = \iiint_{\omega} \operatorname{div} F \, d\omega, \quad (4.4.7)$$

$$\iint_{\partial\omega} f \cdot F \langle n \rangle \, d\sigma = \iiint_{\omega} \operatorname{div} F \langle f \rangle \, d\omega, \quad (4.4.8)$$

при этом

$$\operatorname{div} F \langle f \rangle = f \cdot \operatorname{div} F + \operatorname{tr} \left\langle F \circ \frac{\partial f}{\partial x} \right\rangle. \quad (4.4.9)$$

4.4.7. Оператор Лапласа. Суперпозиция операций дифференцирования и дивергенции называется *оператором Лапласа* и обозначается как Δ . Пусть f — скалярное или векторное поле. Тогда $\operatorname{div}(\partial f / \partial x)$ называется значением оператора Лапласа Δ на поле f и обозначается Δf .

Легко доказать, что если f — скалярное поле, то

$$\Delta f = \operatorname{div}(\nabla f) = \operatorname{div}\left(\frac{\partial f}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x^k}\right) = \sum_{i=1}^m \frac{\partial^2 f}{(\partial x^i)^2}. \quad (4.4.10)$$

В самом деле,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \nabla f(x) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_m} \right) = \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_m} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_m \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_m \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_m^2} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\operatorname{div}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \operatorname{tr}\left\langle \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x} \right\rangle = \sum_{i=1}^m \frac{\partial^2 f}{(\partial x^i)^2}.$$

Аналогично, хотя и более громоздко, показывается, что если f — векторное поле, то

$$\Delta f = (\Delta f^1, \dots, \Delta f^m) = \left(\sum_{i=1}^m \frac{\partial^2 f^1}{(\partial x^i)^2}, \dots, \sum_{i=1}^m \frac{\partial^2 f^m}{(\partial x^i)^2} \right). \quad (4.4.11)$$

З А Д А Ч И

4.4.1. Доказать, что если $E = \mathcal{L}(\mathbf{R}^m)$ или $E = \mathbb{T}^2(\mathbf{R}^m)$, а $f : U \rightarrow E$ — непрерывно дифференцируемое отображение, то f^* также непрерывно дифференцируемо и выполняется равенство (4.4.1).

4.4.2. Доказать, что для любого тензорного поля F справедлива формула (4.4.9).

4.4.3. Доказать справедливость формулы (4.4.11).

4.4.4. Доказать, что если f — векторное поле, то

$$\operatorname{div} \left(\frac{\partial f^*}{\partial x} \right) = \nabla (\operatorname{div} f). \quad (4.4.12)$$

4.4.5. Пусть $\{e_i\}$ — некоторый базис в \mathbf{R}^3 . Вычислить градиент скалярного поля $f(x) = (x^1)^2 + 2x^1x^2 - (x^3)^2$, частные производные и производную по направлению $y = \frac{2}{7}e_1 - \frac{3}{7}e_2 - \frac{6}{7}e_3$.

§ 4.5. Обыкновенные дифференциальные уравнения

В этом параграфе мы напомним теорему о дифференцировании решений обыкновенных дифференциальных уравнений по начальным данным [2, 25], которая нам потребуется в данном курсе, а также выведем формулу Эйлера.

4.5.1. Задача Коши. Пусть $f : \mathbf{R}^m \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^m$ — непрерывно дифференцируемое отображение. Рассмотрим *задачу Коши*:

$$x' = f(x, t), t \geq 0, \quad (4.5.1)$$

$$x(0) = \xi \in \mathbf{R}^m, \quad (4.5.2)$$

где ξ — векторный параметр. Известно (это утверждение классической *теоремы Коши — Пикара*), что в этом случае решение задачи Коши (4.5.1), (4.5.2) на некотором интервале $[0, T]$ существует и единственно. Если дополнительно потребовать ограниченности производной f по x :

$$\left| \frac{\partial f(x, t)}{\partial x} \right| \leq M < \infty$$

при всех $(x, t) \in \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}$, то можно утверждать существование и единственность решения на всей оси \mathbf{R} .

4.5.2. Уравнение в вариациях. Обозначим решение задачи Коши (4.5.1), (4.5.2) через $x(\xi, \cdot)$. Теорема о дифференцируемости решений по начальным данным утверждает, что отображение $(\xi, t) \mapsto x(\xi, t)$ непрерывно дифференцируемо и функция $t \mapsto \frac{\partial x(\xi, t)}{\partial \xi}$ при каждом ξ удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению

$$x' = \frac{\partial f(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=x(\xi, t)} \langle x \rangle, \quad (4.5.3)$$

называемому *уравнением в вариациях*, т. е. имеет место тождество (в сокращенной записи):

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial x}{\partial \xi} = \frac{\partial f}{\partial x} \left\langle \frac{\partial x}{\partial \xi} \right\rangle.$$

4.5.3. Формула Эйлера. Здесь описывается дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет инвариант J_3 отображения $\frac{\partial x}{\partial \xi}$.

Лемма 1 (О формуле Эйлера для инварианта J_3). Для функции

$$J = J(\xi, t) = \det \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \right)$$

справедлива формула Эйлера

$$\frac{dJ}{dt} = J \operatorname{div} f. \quad (4.5.4)$$

Доказательство. Пусть X и F — матрицы отображений $\frac{\partial x(\xi, t)}{\partial \xi}$ и $\frac{\partial f(x, t)}{\partial x}$ в базисе $\{e_i\}$:

$$X_j^i = e^i \cdot \frac{\partial x(\xi, t)}{\partial \xi} \langle e_j \rangle, \quad F_j^i = e^i \cdot \frac{\partial f(x, t)}{\partial x} \langle e_j \rangle.$$

В силу (4.5.3)

$$\frac{d}{dt} X_j^i = F_k^i X_j^k.$$

Нам же требуется показать, что

$$\frac{d}{dt} \det X = \det X \cdot \operatorname{tr} F.$$

Обозначим через A_k^j алгебраическое дополнение в матрице X до элемента X_j^k (обратите внимание на переставленные индексы). Тогда, как известно,

$$\det X = \begin{cases} X_j^k A_i^j, & \text{если } i = k, \\ 0, & \text{если } i \neq k, \end{cases}$$

или, короче,

$$X_j^k A_i^j = \delta_i^k \cdot \det X.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{\partial \det X}{\partial X_j^i} = A_i^j.$$

Но тогда (напомним, что действует соглашение о немых индексах)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \det X &= \sum_{i,j=1}^m \frac{\partial \det X}{\partial X_j^i} \cdot \frac{d}{dt} X_j^i = A_i^j \frac{d}{dt} X_j^i = A_i^j F_k^i X_j^k = \\ &= \left(X_j^k A_i^j \right) F_k^i = \det X \cdot F_k^i \delta_i^k = \det X \cdot F_i^i = \det X \cdot \operatorname{tr} F, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать. ■

Глава 5.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ

Как мы выяснили в главе 1, сплошная среда характеризуется скоростью v , плотностью ρ , удельной внутренней энергией U , плотностью массовых сил f , напряжением поверхностных сил p_n на элементарной площадке с нормалью n и плотностью потока тепла q_n через эту площадку. Ниже мы покажем, что если эти функции достаточно гладкие, то модель (ИМ) эквивалентна некоторой системе дифференциальных уравнений в частных производных [14, 15, 19, 22, 23, 32], которая и будет являть собой дифференциальную модель (ДМ) законов сохранения сплошной среды.

§ 5.1. Дифференциальный аналог закона сохранения массы

5.1.1. Области определения и соглашения о гладкости. Мы предполагаем, что величины v, ρ, U, f, p_n и q_n заданы в эйлеровом описании, т. е. являются функциями переменных (x, t) , изменяющихся на некотором множестве $D \subset \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}$. Функции p_n и q_n зависят также и от вектора нормали n . Областью изменения переменной n очевидно является единичная сфера $S = \{x \in \mathbf{R}^3 : |x| = 1\}$. Таким образом, область определения функций p и q есть $D \times S$.

Ниже предполагается, что v, ρ, U , а также p_n и q_n при каждом фиксированном $n \in S$ непрерывно дифференцируемы на D , функции p и q непрерывны на $D \times S$, а функция f непрерывна на D .

5.1.2. Общая схема преобразования интегральных законов.

Каждое из уравнений модели (IM) мы перепишем в виде

$$\iiint_{\omega_t} F d\omega = 0. \quad (5.1.1)$$

Поскольку это равенство должно выполняться для любого движущегося объема ω_t , отсюда будет вытекать, что на D

$$F \equiv 0. \quad (5.1.2)$$

Равенства вида (5.1.2) и будут составлять модель (DM). Импликация (5.1.1) \Rightarrow (5.1.2) вытекает из следующей леммы.

Лемма 2. Пусть непрерывная в области $D \subset \mathbf{R}^m$ функция $F : D \rightarrow \mathbf{R}^k$ такова, что

$$\int_B F(x) d\omega = 0$$

на любом шаре $B = B(x, r) \subset D$ радиуса r с центром в точке x . Тогда $F(x) \equiv 0$ в D .

Доказательство. Поскольку интеграл от функции со значениями в конечномерном пространстве определяется покоординатно, достаточно доказать утверждение леммы для скалярных функций (т. е. для случая $k = 1$). В предположении противного найдется точка $x_0 \in D$ такая, что $F(x_0) \neq 0$. Пусть для определенности $F(x_0) > 0$. В силу непрерывности F найдется $r > 0$ такое, что в шаре $B(x_0, r)$ будет верным неравенство $|F(x) - F(x_0)| \leq F(x_0)/2$. Но тогда

$$F(x) = F(x_0) - [F(x_0) - F(x)] \geq F(x_0) - |F(x_0) - F(x)| \geq \frac{1}{2}F(x_0)$$

при всех $x \in B(x_0, r) = B$. Поэтому

$$\int_B F(x) d\omega \geq \frac{1}{2} \int_B F(x_0) d\omega = \frac{1}{2}F(x_0) \cdot \text{mes } B > 0,$$

что противоречит условиям леммы. ■

5.1.3. Полная производная. Пусть $v = v(x, t)$ — поле скоростей сплошной среды, а $f = f^E(x, t)$ — скалярная, векторная или тензорная функция (здесь индекс E подчеркивает, что функция задана в эйлеровых переменных). Полной производной функции f называется функция

$$(x, t) \mapsto \frac{\partial f(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial f(x, t)}{\partial x} \langle v(x, t) \rangle.$$

Обозначается полная производная как $\dot{f}(x, t)$ или $\frac{d}{dt}f(x, t)$ (не путать с частной производной $\frac{\partial}{\partial t}f(x, t)$).

Пусть закон движения сплошной среды задан отображением $x = \gamma(\xi, t)$ и $f^L(\xi, t)$ — представление функции f в лагранжевых переменных:

$$f^L(\xi, t) = f^E(x, t) = f[\gamma(\xi, t), t].$$

Дифференцирование по t этого тождества (напомним, что $v = \partial\gamma/\partial t$) приводит к следующей формуле, выражающей полную производную в переменных Лагранжа:

$$\frac{d}{dt}f(x, t) = \frac{\partial}{\partial t}f^L(\xi, t).$$

5.1.4. Перестановка дифференцирования и интегрирования.

В этом пункте мы покажем, что для любой функции F выполняется равенство

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\omega_t} F(x, t) d\omega = \iiint_{\omega_t} \left(\frac{dF}{dt} + F \operatorname{div} v \right) d\omega, \quad (5.1.3)$$

являющееся многомерным аналогом формулы дифференцирования интеграла с переменным верхним пределом.

В самом деле, сделаем в интеграле из левой части равенства (5.1.3) замену переменных $x = \gamma(\xi, t)$. Эта замена переводит область ω_t в область ω_0 , и, таким образом, область интегрирования перестает зависеть от времени t :

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\omega_t} F(x, t) d\omega = \frac{d}{dt} \iiint_{\omega_0} F^L(\xi, t) J^L(\xi, t) d\omega,$$

где J — якобиан замены $x \rightarrow \xi$, т. е. $J(\xi, t) = \det(\partial x / \partial \xi)$. Поскольку теперь область интегрирования не зависит от t , дифференцирование можно внести под знак интеграла. Последующее дифференцирование подын-

тегрального выражения с использованием формулы Эйлера (4.5.4)

$$\frac{dJ}{dt} = J \operatorname{div} v,$$

или, что то же самое,

$$\frac{\partial J^L}{\partial t} = J^L \operatorname{div} v^L,$$

дает следующую цепочку равенств:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \iiint_{\omega_0} F^L J^L d\omega &= \iiint_{\omega_0} \frac{\partial}{\partial t} (F^L J^L) d\omega = \\ &= \iiint_{\omega_0} \left(\frac{\partial F^L}{\partial t} J^L + F^L \frac{\partial J^L}{\partial t} \right) d\omega = \iiint_{\omega_0} \left(\frac{\partial F^L}{\partial t} J^L + F^L J^L \operatorname{div} v^L \right) d\omega = \\ &= \iiint_{\omega_0} \left(\frac{\partial F^L}{\partial t} + F^L \operatorname{div} v^L \right) J^L d\omega. \end{aligned}$$

Обратная замена переменных $\xi \rightarrow x$ доказывает равенство (5.1.3):

$$\iiint_{\omega_0} \left(\frac{\partial F^L}{\partial t} + F^L \operatorname{div} v^L \right) J^L d\omega = \iiint_{\omega_t} \left(\frac{dF}{dt} + F \operatorname{div} v \right) d\omega.$$

5.1.5. Уравнение неразрывности. Подстановка в (5.1.3) вместо F функции ρ приводит к тождеству

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\omega_t} \rho(x, t) d\omega = \iiint_{\omega_t} \left(\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} v \right) d\omega.$$

Поскольку левая часть этого тождества равна нулю в силу (интегрального) закона сохранения массы, то

$$\iiint_{\omega_t} \left(\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} v \right) d\omega = 0$$

для любого движущегося объема ω_t . В частности, при любом фиксированном t , если в качестве ω_0 взять прообраз при отображении γ_t произвольного шара B , т. е. $\omega_0 = \gamma_t^{-1}(B)$, то $\omega_t = B$ при данном t . Отсюда следует, что при

каждом t последнее тождество выполняется на любом шаре. Применение леммы 2 приводит к так называемому *уравнению неразрывности*:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} v = 0, \quad (5.1.4)$$

являющемуся дифференциальным аналогом закона сохранения массы.

З А Д А Ч И

5.1.1. Доказать, что уравнение неразрывности (5.1.4) может быть переписано в следующем виде:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho v = 0. \quad (5.1.5)$$

5.1.2. Пусть закон движения сплошной среды задан отображением $x = \gamma(\xi, t) = (e^t \xi^1, \xi^1(1 - e^{2t}) + e^t \xi^2, e^{3t} \xi^3)$. Найти поле скоростей среды в эйлеровом и лагранжевом представлениях.

5.1.3. Пусть закон движения сплошной среды задан отображением $x = \gamma(\xi, t) = (t + 1)\xi$. Найти $\operatorname{div} v$.

5.1.4. Поле скоростей задано вектором $v = (x^1)^2 t e_1 + x^2 t^2 e_2 + x^1 x^3 t e_3$. Определить скорость и ускорение частицы, находящейся в момент времени $t = 1$ в точке $x = (1, 3, 2)$.

5.1.5. Поле скоростей задано вектором $v = (4x^1 - 3x^2, 3x^1, -4x^1)$. Найти компоненты вектора ускорения.

5.1.6. Поле скоростей задано вектором $v = (-\xi^2 e^{-t}, -\xi^3, 2t)$. Найти компоненты вектора ускорения в эйлеровом представлении.

5.1.7. Закон движения сплошной среды имеет вид ($q = \text{const}$)

$$x = \gamma(\xi, t) = \left(\xi^1 \sqrt{\frac{2qt}{(\xi^1)^2 + (\xi^2)^2} + 1}, \xi^2 \sqrt{\frac{2qt}{(\xi^1)^2 + (\xi^2)^2} + 1}, \xi^3 \right).$$

Найти поля скорости в переменных Лагранжа и Эйлера.

5.1.8. Движение среды происходит по закону

$$x = \gamma(\xi, t) = \left(\xi^1 \left(1 + \frac{t}{\tau} \right), \xi^2 \left(1 + 2\frac{t}{\tau} \right), \xi^3 \left(1 + \frac{t^2}{\tau^2} \right) \right), \quad \tau = \text{const.}$$

Найти поля скорости и ускорения в лагранжевом описании. Где находится в момент $t = 3\tau$ частица, которая в момент $t = \tau$ находилась в точке пространства с координатами (a, b, c) ?

§ 5.2. Закон сохранения импульса

5.2.1. Новая форма записи интегрального закона сохранения импульса. Если в равенстве (5.1.3) вместо функции F подставить функцию ρF и предполагать выполненным уравнение неразрывности, то мы получим следующую формулу дифференцирования интегралов от ρF :

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\omega_t} \rho F \, d\omega = \iiint_{\omega_t} \rho \frac{dF}{dt} \, d\omega. \quad (5.2.1)$$

Поэтому интегральный закон сохранения импульса (см. п. 3.4.3, IM)

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\omega_t} \rho v \, d\omega = \iiint_{\omega_t} \rho f \, d\omega + \iint_{\partial\omega_t} p_n \, d\sigma$$

может быть переписан с помощью формулы (5.2.1) в следующем виде:

$$\iint_{\partial\omega_t} p_n \, d\sigma = \iiint_{\omega_t} \rho \left(\frac{dv}{dt} - f \right) \, d\omega. \quad (5.2.2)$$

Теперь нужно преобразовать в интегральном законе сохранения импульса (5.2.2) поверхностный интеграл в объемный, чтобы затем, действуя по описанной в предыдущем параграфе общей схеме преобразования интегральных законов, получить дифференциальную форму закона сохранения (5.2.2). Для этого сначала найдем представление вектора p_n напряжений внутренних поверхностных сил.

5.2.2. Тензор напряжений. В этом пункте будет доказана теорема Коши о существовании тензора напряжений.

Теорема 2 (Основная теорема механики сплошной среды). *Существует тензорное поле $P : D \rightarrow \mathbb{T}^2(\mathbf{R}^3)$ такое, что при всех $(x, t, n) \in D \times S$*

$$p_n(x, t) = P(x, t) \langle n \rangle. \quad (5.2.3)$$

Доказательство. Зафиксируем произвольный ортонормированный базис $\{e_i\}$ в \mathbf{R}^3 и точку $(x, t) \in D$. Если мы покажем, что для любого вектора $\nu = \nu^i e_i \in S$ выполняется равенство

$$p_\nu = \nu^i p_{e_i} \quad (5.2.4)$$

(мы опускаем аргументы (x, t) у функции $p_\nu(x, t)$), то на S искомый тензор P можно определить равенством (и опять (x, t) опускается)

$$P \langle \nu \rangle = \nu^i p_{e_i}.$$

Далее продолжим P с единичной сферы S на все пространство \mathbf{R}^3 по линейности:

$$P \langle a \rangle = |a| P \left\langle \frac{a}{|a|} \right\rangle, \quad a \in \mathbf{R}^3.$$

Докажем справедливость равенства (5.2.4), используя интегральный закон сохранения импульса, переписанный в виде (5.2.2).

Покажем сначала, что для любого $\nu \in S$ выполняется равенство

$$p_\nu = -p_{-\nu}. \quad (5.2.5)$$

Пусть Σ — плоскость с нормалью ν , проходящая через точку $x \in \Omega_t$, $y \in \Sigma \cap \Omega_t$, $B = B(y, \varepsilon)$ — шар в \mathbf{R}^3 с центром в точке y радиуса ε , целиком лежащий в Ω_t , B_1, B_2 — части этого шара, на которые он разбивается плоскостью Σ (B_2 и ν лежат по одну сторону от Σ), $\beta = \partial B_1 \cap \partial B_2 = B \cap \Sigma$ (рис. 29).

Запишем закон (5.2.2) для объемов B_1, B_2, B , сложим первые два из получившихся тождеств и вычтем третье:

$$\left(\iint_{\partial B_1} + \iint_{\partial B_2} - \iint_{\partial B} \right) p_n d\sigma = \left(\iiint_{B_1} + \iiint_{B_2} - \iiint_B \right) \rho \left(\frac{dv}{dt} - f \right) d\omega = 0.$$

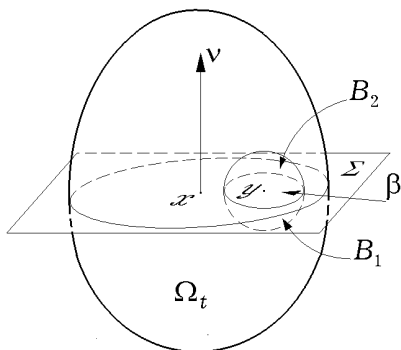


Рис. 29. Обозначения, используемые при доказательстве равенства (5.2.5)

В левой части этого равенства интегралы по границе шара B взаимно уничтожаются, в оставшемся первом интеграле по β очевидно $p_n = p_\nu$, а во втором — $p_n = p_{-\nu}$. Таким образом,

$$\iint_{\beta} [p_\nu(y, t) + p_{-\nu}(y, t)] d\sigma = 0.$$

Поскольку β — произвольный круг, целиком лежащий в $\Omega_t \cap \Sigma$, а функция $p_\nu(y, t) + p_{-\nu}(y, t)$ непрерывна, то из леммы 2 следует равенство (5.2.5).

Теперь докажем справедливость равенства (5.2.4). Пусть $\nu = \nu^i e_i$ таков, что все ν^i отличны от нуля и, более того, положительны. Обозначим через Δ_ε тетраэдр, высекаемый из координатного угла (с началом в точке x) плоскостью, проходящей через конец вектора $x + \varepsilon\nu$ ортогонально ν , а также координатными плоскостями базиса, начало которого помещено в точку x (рис. 30).

Пусть σ_ε — грань тетраэдра, перпендикулярная ν , а $\sigma_{\varepsilon i}$ — грани, перпендикулярные векторам e_i соответственно. При достаточно малых ε этот тетраэдр целиком лежит в Ω_t . Применяя формулу (5.2.1) на Δ_ε , получаем

$$\left(\iint_{\sigma_\varepsilon} + \sum_{i=1}^3 \iint_{\sigma_{\varepsilon i}} \right) p_n d\sigma = \iiint_{\Delta_\varepsilon} \rho \left(\frac{dv}{dt} - f \right) d\omega,$$

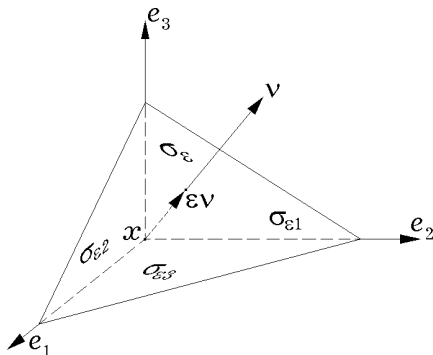


Рис. 30. Обозначения, используемые при доказательстве равенства (5.2.4)

или, учитывая, что $n = \nu$ на σ_ε и $n = -e_i$ на $\sigma_{\varepsilon i}$,

$$\iint_{\sigma_\varepsilon} p_\nu d\sigma + \sum_{i=1}^3 \iint_{\sigma_{\varepsilon i}} p_{-e_i} d\sigma = \iiint_{\Delta_\varepsilon} \rho \left(\frac{dv}{dt} - f \right) d\omega. \quad (5.2.6)$$

Как легко видеть,

$$\begin{aligned} \text{mes } \sigma_\varepsilon &= \varepsilon^2 \cdot \text{mes } \sigma_1, \\ \text{mes } \sigma_{\varepsilon i} &= \varepsilon^2 \cdot \text{mes } \sigma_{1i}, \\ \text{mes } \Delta_\varepsilon &= \varepsilon^3 \cdot \text{mes } \Delta_1, \end{aligned} \quad (5.2.7)$$

где $\text{mes } \sigma$ — мера Лебега множества σ (в первых двух случаях плоская, т. е. площадь, а в последнем — объемная).

Применим к (5.2.6) теорему о среднем значении:

$$p_\nu(\theta_\varepsilon, t) \cdot \text{mes } \sigma_\varepsilon + \sum_{i=1}^3 p_{-e_i}(\theta_{\varepsilon i}, t) \cdot \text{mes } \sigma_{\varepsilon i} = \left[\rho \left(\frac{dv}{dt} - f \right) \right](\vartheta_\varepsilon, t) \cdot \text{mes } \Delta_\varepsilon,$$

где $\theta_\varepsilon \in \sigma_\varepsilon$, $\theta_{\varepsilon i} \in \sigma_{\varepsilon i}$, а $\vartheta_\varepsilon \in \Delta_\varepsilon$. Подставим (5.2.7) в последнее равенство, разделим на ε^2 и перейдем к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$, учитывая, что $p_\nu(\theta_\varepsilon, t) \rightarrow p_\nu(x, t)$, а $p_{-e_i}(\theta_{\varepsilon i}, t) \rightarrow p_{-e_i}(x, t)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ (поскольку $\theta_\varepsilon, \theta_{\varepsilon i}, \vartheta_\varepsilon \rightarrow x$ при $\varepsilon \rightarrow 0$). Получим:

$$\text{mes } \sigma_1 p_\nu + \sum_{i=1}^3 \text{mes } \sigma_{1i} p_{-e_i} = 0,$$

или, учитывая (5.2.5),

$$\text{mes } \sigma_1 p_\nu - \sum_{i=1}^3 \text{mes } \sigma_{1i} p_{e_i} = 0.$$

Остается заметить, что

$$\text{mes } \sigma_{1i} = \text{mes } \sigma_1 \cdot \cos(\nu, e_i) = \text{mes } \sigma_1 \cdot (\nu, e_i) = \nu^i \text{mes } \sigma_1,$$

и равенство (5.2.4) в случае $\nu^i > 0$ доказано. Остальные случаи, когда $\nu^i \neq 0$, разбираются аналогично. Наконец, в случае, когда один или два коэффициента ν^i обращаются в нуль, равенство (5.2.4) следует из уже доказанного и непрерывности p . ■

Тензор P , существование которого утверждается в теореме, играет фундаментальную роль в механике сплошной среды и называется *тензором напряжений*. Существование этого тензора позволяет преобразовать поверхностные интегралы в законах сохранения импульса и момента импульса в объемные.

5.2.3. Закон сохранения импульса. В силу основной теоремы 2 имеет место равенство

$$\iint_{\partial\omega_t} p_{n(x)}(x, t) d\sigma = \iint_{\partial\omega_t} P(x, t) \langle n(x) \rangle d\sigma,$$

или, в сокращенной записи,

$$\iint_{\partial\omega_t} p_n d\sigma = \iint_{\partial\omega_t} P \langle n \rangle d\sigma.$$

В силу же формулы Гаусса — Остроградского (4.4.7)

$$\iint_{\partial\omega_t} P \langle n \rangle d\sigma = \iiint_{\omega_t} \text{div } P d\omega.$$

Поэтому интегральный закон сохранения импульса (5.2.2) может быть переписан в виде

$$\iiint_{\omega_t} \left[\rho \left(\frac{dv}{dt} - f \right) - \text{div } P \right] d\omega = 0.$$

Тогда из леммы 2 следует уравнение сохранения импульса:

$$\rho \frac{dv}{dt} = \operatorname{div} P + \rho f. \quad (5.2.8)$$

5.2.4. Закон сохранения момента импульса. Интегральный закон сохранения момента импульса имеет следующий вид (см. п. 3.4.3 (ИМ)-модкль):

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\omega_t} \rho(x \times v) d\omega = \iiint_{\omega_t} \rho(x \times f) d\omega + \iint_{\partial\omega_t} (x \times p_n) d\sigma. \quad (5.2.9)$$

Преобразуем в этом равенстве поверхностный интеграл в объемный:

$$\begin{aligned} \iint_{\partial\omega_t} [x \times p_{n(x)}(x, t)] d\sigma &= \iint_{\partial\omega_t} [x \times P(x, t) \langle n(x) \rangle] d\sigma = \\ &= \iiint_{\omega_t} \mathcal{A}(x) \circ P \langle n(x) \rangle d\sigma = \iiint_{\omega_t} \operatorname{div} (\mathcal{A}(x) \circ P) d\omega. \end{aligned}$$

Здесь использованы формула Гаусса — Остроградского (4.4.7) и линейное (антисимметричное) отображение $\mathcal{A}(x)$ из \mathbf{R}^3 в \mathbf{R}^3 , заданное в произвольном ортонормированном базисе $\{e_i\}$ матрицей (4.2.18) и позволяющее представить векторное произведение в виде (4.2.17). Поэтому закон сохранения момента импульса (5.2.9) можно, используя формулу (5.2.1), переписать в виде

$$\iiint_{\omega_t} \rho \left(x \times \frac{dv}{dt} \right) d\omega - \iiint_{\omega_t} \operatorname{div} (\mathcal{A}(x) \circ P) d\sigma - \iiint_{\omega_t} \rho(x \times f) d\omega = 0.$$

Применение леммы 2 к последнему равенству приводит к уравнению сохранения момента импульса

$$\rho \left(x \times \frac{dv}{dt} \right) = \operatorname{div} (\mathcal{A}(x) \circ P) + \rho(x \times f). \quad (5.2.10)$$

Если теперь, воспользовавшись уравнением импульса (5.2.8), подставить в (5.2.10) выражение $\operatorname{div} P + \rho f$ вместо $\rho dv/dt$, то получится более простая форма уравнения момента импульса:

$$\operatorname{div} (\mathcal{A}(x) \circ P) = x \times \operatorname{div} P. \quad (5.2.11)$$

5.2.5. Симметричность тензора напряжений. Оказывается, что уравнение (5.2.11) эквивалентно условию симметричности тензора напряжений.

Теорема 3 (О симметричности тензора напряжений). Уравнение момента импульса (5.2.11) выполнено в том и только том случае, когда тензор напряжений P симметричен: $P = P^*$.

Доказательство. Пусть выполнено уравнение (5.2.11), а $\{e_i\}$ — произвольный ортонормированный базис. Используя определение дивергенции тензора, свойства дифференцирования композиции отображений и определение \mathcal{A} , преобразуем левую часть равенства (5.2.11):

$$\begin{aligned} \operatorname{div} (\mathcal{A}(x) \circ P(x, t)) &= \left. \frac{d}{ds} (\mathcal{A}(x + se_i) \circ P(x + se_i, t) \langle e^i \rangle) \right|_{s=0} = \\ &= \left(\left. \frac{d}{ds} \mathcal{A}(x + se_i) \right|_{s=0} \right) \langle P(x, t) \langle e^i \rangle \rangle + \\ &+ \mathcal{A}(x) \left\langle \left(\left. \frac{d}{ds} P(x + se_i) \right|_{s=0} \right) \langle e^i \rangle \right\rangle = \\ &= \mathcal{A}(e_i) \langle P(x, t) \langle e^i \rangle \rangle + \mathcal{A}(x) \langle \operatorname{div} P(x, t) \rangle = e_i \times P \langle e^i \rangle + x \times \operatorname{div} P. \end{aligned}$$

Поэтому в силу (5.2.11)

$$e_i \times P \langle e^i \rangle = 0.$$

Последнее возможно только в случае симметричности тензора P . В самом деле,

$$\begin{aligned} 0 &= e_i \times P \langle e^i \rangle = \mathcal{A}(e_i) \langle P \langle e^i \rangle \rangle = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{12} \\ p_{13} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{21} \\ p_{22} \\ p_{23} \end{pmatrix} + \\ &+ \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{31} \\ p_{32} \\ p_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{23} - p_{32} \\ p_{31} - p_{13} \\ p_{12} - p_{21} \end{pmatrix} = 0, \end{aligned}$$

что означает симметричность P .

Поскольку все преобразования и рассуждения в приведенном выше доказательстве обратимы, обратное заключение также верно. ■

Таким образом, уравнение (5.2.11) и условие симметричности тензора напряжений эквивалентны. Поэтому в результирующую систему дифференциальных уравнений, которую мы выводим, обычно вставляют не уравнение (5.2.11), а требование симметричности тензора напряжений.

З А Д А Ч И

5.2.1. Записать в развернутой форме уравнение сохранения импульса (5.2.8).

5.2.2. Пусть в ортонормированном базисе $\{e_i\}$ в \mathbf{R}^3 тензор напряжений P в некоторой точке x представляется матрицей

$$P = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 5 \\ -4 & 5 & -6 \end{pmatrix}. \quad (5.2.12)$$

Определить вектор напряжений $p_n(x)$ на площадке с единичным вектором нормали $n = -\frac{3}{5}e_1 + \frac{4}{5}e_3$.

5.2.3. Пусть в ортонормированном базисе $\{e_i\}$ в \mathbf{R}^3 тензор напряжений P в некоторой точке x представляется матрицей

$$P = \begin{pmatrix} 7 & 0 & -2 \\ 0 & 5 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}. \quad (5.2.13)$$

Определить вектор напряжений $p_n(x)$ на площадке с единичным вектором нормали $n = \frac{2}{3}e_1 - \frac{2}{3}e_2 + \frac{1}{3}e_3$.

5.2.4. Пусть в ортонормированном базисе $\{e_i\}$ в \mathbf{R}^3 тензор напряжений P в некоторой точке x представляется матрицей

$$P = \begin{pmatrix} 6 & 0 & -3 \\ 0 & 5 & 0 \\ -3 & 0 & 4 \end{pmatrix}. \quad (5.2.14)$$

Определить вектор напряжений $p_n(x)$ на площадке с единичным вектором нормали $n = \frac{2}{3}e_1 - \frac{2}{3}e_2 + \frac{1}{3}e_3$.

§ 5.3. Уравнение притока тепла

5.3.1. Вектор потока тепла. Наконец, обратимся к последнему уравнению в модели (ИМ) — интегральному закону сохранения энергии:

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\omega_t} \rho \left(\frac{1}{2} |v|^2 + U \right) d\omega = \iiint_{\omega_t} \rho v \cdot f d\omega + \iint_{\partial\omega_t} v \cdot p_n d\sigma + \iint_{\partial\omega_t} q_n d\sigma.$$

Следующая теорема вводит «энергетический аналог» тензора напряжений — *вектор потока тепла*.

Теорема 4 (О существовании вектора потока тепла). *Существует векторное поле $q : D \rightarrow \mathbf{R}^3$ такое, что в каждой точке $(x, t) \in D$ для любой нормали $n \in S$ плотность q_n потока тепла через элементарную площадку с нормалью n задается формулой*

$$q_n(x, t) = -q \cdot n. \quad (5.3.1)$$

Доказательство представляет собой почти дословное повторение доказательства теоремы 2. Изменения связаны только с тем фактом, что q_n , в отличие от p_n , является скалярной, а не векторной функцией. Кроме того, в определении вектора потока тепла (5.3.1) фигурирует знак «−», который, очевидно, не влияет на доказательство и взят лишь для того, чтобы вектор q показывал истинное направление переноса тепловой энергии: n — орт внешней нормали к границе $\partial\omega$ объема ω , в который вносится поток тепла с плотностью q_n . ■

5.3.2. Тензор скоростей деформации. Наличие вектора потока тепла позволяет, как и выше, преобразовать уравнение баланса энергии к дифференциальной форме. Для его описания нам потребуется новое понятие.

Тензором скоростей деформации сплошной среды называется следующий тензор второго ранга:

$$D = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial v(x, t)}{\partial x} + \left(\frac{\partial v(x, t)}{\partial x} \right)^* \right]. \quad (5.3.2)$$

Этот тензор наряду с тензором напряжений играет фундаментальную роль в механике сплошной среды и будет более подробно изучаться позднее.

5.3.3. Уравнение притока тепла. В силу (5.3.1) и формулы Гаусса — Остроградского (4.4.6) получим:

$$\iint_{\partial\omega_t} q_n d\sigma = - \iint_{\partial\omega_t} q \cdot n d\sigma = - \iiint_{\omega_t} \operatorname{div} q d\omega$$

и

$$\iint_{\partial\omega_t} v \cdot p_n d\sigma = \iiint_{\omega_t} \operatorname{div} (P \langle v \rangle) d\omega.$$

Поэтому интегральный закон сохранения энергии переписывается с учетом формулы (5.2.1) в виде

$$\iiint_{\omega_t} \left[\rho \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} |v|^2 + U \right) - \operatorname{div} (P \langle v \rangle) - \rho v \cdot f + \operatorname{div} q \right] d\omega = 0.$$

Применение леммы 2 к последнему равенству приводит к уравнению

$$\rho \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} |v|^2 + U \right) - \operatorname{div} (P \langle v \rangle) - \rho v \cdot f + \operatorname{div} q = 0. \quad (5.3.3)$$

Теперь воспользуемся тем, что

$$\frac{d}{dt} |v|^2 = 2v \cdot \frac{dv}{dt}, \quad (5.3.4)$$

а

$$\operatorname{div} (P \langle v \rangle) = v \cdot \operatorname{div} P + P : D. \quad (5.3.5)$$

Докажем последнее равенство. Как легко видеть,

$$\frac{\partial (P \langle v \rangle)}{\partial x} = \frac{\partial P(x, t)}{\partial x} \langle v(x, t) \rangle + P(x, t) \circ \frac{\partial v(x, t)}{\partial x}.$$

Далее (напомним, что тензор P симметричен)

$$\begin{aligned} \operatorname{tr} \left(P \circ \frac{\partial v}{\partial x} \right) &= P_j^i \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)_i^j = \frac{1}{2} P_j^i \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)_i^j + \frac{1}{2} P_j^i \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)_i^j = \\ &= \frac{1}{2} P_j^i \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)_i^j + \frac{1}{2} P_i^j \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)_j^i = \frac{1}{2} P_j^i \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)_i^j + \frac{1}{2} (P^*)^j_i \left[\left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^* \right]_i^j = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} P_j^i \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)_i^j + \frac{1}{2} P_j^i \left[\left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^* \right]_i^j = \frac{1}{2} P_j^i \left[\frac{\partial v}{\partial x} + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^* \right]_i^j = \\
&= P_j^i D_i^j = (P^*)_j^i D_i^j = P : D,
\end{aligned}$$

а

$$\begin{aligned}
\operatorname{tr} \left(\frac{\partial P}{\partial x} \langle v \rangle \right) &= e^i \cdot \left(\frac{d}{ds} P(x + se_i) \langle v \rangle \Big|_{s=0} \right) = \\
&= e^i \cdot \left(\frac{d}{ds} P(x + se_i) \Big|_{s=0} \langle v \rangle \right) = v \cdot \left(\frac{d}{ds} P^*(x + se_i) \Big|_{s=0} \langle e^i \rangle \right) = \\
&= v \cdot \left(\frac{d}{ds} P(x + se_i) \Big|_{s=0} \langle e^i \rangle \right) = v \cdot \operatorname{div} P.
\end{aligned}$$

Таким образом, равенство (5.3.5) действительно выполняется.

Используя равенства (5.3.4), (5.3.5), перепишем уравнение (5.3.3)

$$\rho \left(v \cdot \frac{dv}{dt} + \frac{dU}{dt} \right) - v \cdot \operatorname{div} P - P : D - \rho v \cdot f + \operatorname{div} q = 0$$

и исключим из последнего с помощью уравнения сохранения импульса (5.2.8) член с производной dv/dt . В результате получим более простую форму уравнения притока тепла (5.3.3):

$$\rho \frac{dU}{dt} = P : D - \operatorname{div} q. \tag{5.3.6}$$

З А Д А Ч И

5.3.1. Записать в развернутой форме уравнение притока тепла (5.3.6).

§ 5.4. Дифференциальная модель сплошной среды

Если выполнены предположения гладкости, описанные в п. 5.1.1, то на D определены тензорное поле P симметричных тензоров напряжений и векторное поле q потока тепла такие, что интегральная модель (IM) эквивалентна следующей дифференциальной модели:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} v = 0, \\ \rho \frac{dv}{dt} = \operatorname{div} P + \rho f, \\ \rho \frac{dU}{dt} = P : D - \operatorname{div} q. \end{array} \right. \quad (\text{DM})$$

Построенная модель (DM) обладает двумя существенными недостатками. Во-первых, она все еще непомерно сложна, поскольку описывает очень широкий класс сплошных сред — от газов до твердых тел. При таком уровне общности вряд ли возможно вывести сколько-нибудь содержательные утверждения о сплошной среде. И, во-вторых, что еще более существенно, данная модель *незамкнута* в том смысле, что число уравнений в ней меньше числа неизвестных. В самом деле, в данной модели пять скалярных уравнений. В то же время она содержит два скалярных неизвестных (ρ и U), два векторных (трехмерных) неизвестных (v и q) и одну тензорную неизвестную величину P . В силу требования симметричности тензора P он описывается шестью скалярными параметрами. Таким образом, модель (DM) содержит 14 скалярных неизвестных. Поэтому она должна быть дополнена уравнениями, учитывающими конкретные свойства той или иной сплошной среды. Такие уравнения называются *определяющими*.

Глава 6.

ТЕРМОДИНАМИКА СПЛОШНОЙ СРЕДЫ

Для того, чтобы научиться выводить определяющие уравнения, мы должны уметь описывать термодинамические характеристики сплошной среды. Основное понятие, которым оперирует термодинамика, — понятие состояния сплошной среды [14, 22, 23, 32]. Математически оно описывается введением параметров состояния. С некоторыми из этих параметров мы уже сталкивались. Это, например, удельная плотность ρ и внутренняя энергия U . Ниже мы встретимся с *абсолютной температурой, энтропией и давлением*. Разумеется, набор параметров зависит от рассматриваемых сред, моделей и задач исследования. Например, в некоторых случаях удобно считать параметром состояния тензор напряжений или тензор скоростей деформации и т. д. К их изучению мы и приступаем.

§ 6.1. Первое начало термодинамики

6.1.1. Термодинамические эффекты в сплошных средах. Физический опыт показывает, что сплошные среды не представляют собой чисто механическое явление. В частности, в процессе эволюции сплошной среды (изменения параметров, ее характеризующих) происходят превращения одних видов энергии в другие (например, удлинение металлов при нагревании, нагревание газов при сжатии и т. п.).

Термодинамика — это раздел физики, в котором изучаются связи между тепловой и другими видами энергии. В первую очередь нас будут интересовать связи между тепловой и механической энергиями. Если быть более точными, то мы будем заниматься изучением не термодинамики, а *термостатики*, поскольку на первом этапе будем описывать на языке математики лишь *термодинамически равновесные* (не изменяющиеся со временем) состояния сплошной среды. Для описания неравновесных тепловых процессов мы с помощью специальной аксиомы позволим термодинамическим параметрам изменяться во времени.

6.1.2. Параметры состояния. Начнем с выяснения понятий, лежащих в основе термодинамики и тем самым всей механики сплошной среды, а именно понятий *состояния* системы и *параметров состояния*. Будем говорить, что состояние нашей системы (например, некоторого объема сплошной среды) задано, если заданы значения некоторых параметров $\mu^1, \mu^2, \dots, \mu^n$, которыми полностью определяются все интересующие нас характеристики системы (среды). Определяющие параметры μ^i , которые могут принимать вообще в некоторых диапазонах произвольные значения, называются *параметрами состояния*.

Если состояние среды характеризуется набором параметров состояния $\boldsymbol{\mu} = \{\mu^1, \dots, \mu^k\}$, то множество \mathbf{P} всех допустимых наборов $\boldsymbol{\mu}$, в которых может находиться среда, называется *пространством состояний*. Обычно пространство состояний — это многообразие. Его размерность $\dim \mathbf{P}$ (т. е. минимальное количество числовых параметров, с помощью которых это многообразие может быть параметризовано) определяет фактическое число параметров состояния сплошной среды: если $\dim \mathbf{P} = k$, то среда называется *k-параметрической*. Таким образом, мы считаем, что (при соответствующей параметризации) конкретная сплошная среда полностью характеризуется набором $\boldsymbol{\mu}$ параметров состояния. Разным состояниям термодинамических систем очевидно будут соответствовать разные точки пространства состояний. Набор параметров состояния и их число различны для различных моделей сплошных сред.

Постараемся дать ответ на вопрос, что значит знать состояние среды? Ответ может быть таким. Все тела состоят из атомов и молекул, и если в каждый момент времени известно положение и движение всех элементарных частиц, составляющих тело, то известно и состояние всего тела. Однако этот ответ не может нас удовлетворить. В самом деле, если мы хотим задать состояние одного кубического сантиметра покоящегося воздуха, то нам надо задать $3 \cdot 27 \cdot 10^{19}$ функций от времени — координат молекул (считаемых материальными точками), содержащихся в этом объеме, так как молекулы даже покоящегося газа движутся. В то же время известно, что с макроскопической точки зрения во многих случаях состояние покоящегося воздуха (и других газов) определяется заданием всего только двух параметров — давления p и плотности ρ .

Макроскопическая точка зрения — это точка зрения, в которой учитываются процессы, эффекты и свойства, существенные только для конечных тел. Существенность определяется постановкой задачи, разумностью и целесообразной точностью принятых измерений и определений.

Переход от большого числа параметров, определяющих состояние среды, рассматриваемой как дискретная система, к меньшему числу парамет-

ров, подобных p и ρ для газа и определяющих макроскопическое состояние среды, составляет важнейший предмет физики жидкостей, газов и твердых тел. Разрешение этой проблемы всегда связано с дополнительными гипотезами — законами вероятностной и другой природы, гипотезами, которые должны проверяться и черпаться в опытах и наблюдениях.

Макроскопические параметры могут строиться как статистические средние, вычисленные при некоторых допущениях по отношению к совокупностям большого числа молекул, движущихся и расположенных вообще произвольно. Например, в газах макроскопическую скорость v можно вводить как скорость центра тяжести совокупности молекул в физически малом объеме; температуру T — как среднюю энергию хаотического движения атомов и молекул относительно макроскопического движения, приходящуюся на одну степень свободы; напряжение p_n на некоторой площадке — как среднюю характеристику импульса, переносимого молекулами через эту площадку при их хаотическом движении.

В общем случае определяющие параметры вводятся для определенных рассматриваемых классов задач с помощью гипотез, при этом опираются на опытные данные и теоретические исследования. Во многих сложных случаях проблема введения определяющих параметров еще открыта и является предметом исследования, например, для моделей вязко-пластических твердых тел, для неравновесных явлений в усложненных физических, химических или биологических системах, в различного рода явлениях, сопровождаемых излучением, и во многих других проблемах.

6.1.3. О числе параметров состояния для сплошных сред.

Внутреннее состояние малой частицы материального континуума можно характеризовать конечным и гораздо меньшим числом определяющих параметров, чем дискретную систему элементарных частиц. Например, внутреннее состояние частицы твердого деформируемого тела в классической теории упругости характеризуется только семью переменными параметрами — шестью компонентами тензора деформаций \mathcal{E} и температурой T , а также постоянными для данной конкретной среды физическими константами — модулем Юнга, коэффициентом Пуассона и теплоемкостью. Вместе с тем не исключается возможность того, что число параметров, определяющих состояние даже бесконечно малой частицы континуума, в какой-нибудь модели континуума (сплошной среде) будет бесконечным.

Примерами такого рода моделей являются модели тел с наследственностью. При введении таких моделей считают, что напряжения зависят не только от деформаций и температуры в данный момент, но от всей предыстории деформирования тела, т. е. от функций тензора деформаций

$\mathcal{E}(t)$ и температуры $T(t)$. Это равносильно утверждению, что напряжения зависят от \mathcal{E} , T и всех их производных по времени, т. е. число параметров состояния таких сред бесконечно. Другим, более сложным примером могут служить континуумы, встречающиеся в кинетических теориях, развиваемых в статистической физике, например, газ, описываемый уравнением Больцмана. Однако такого рода модели сложны, и опыт теории и практики показывает, что в большинстве практически важных случаев для задания малой частицы можно обойтись конечным и вообще небольшим числом параметров. В сложных кинетических теориях при построении решений также часто применяются приближенные методы, равносильные с физической точки зрения переходу к моделям с конечным числом степеней свободы для бесконечно малых частиц.

Заметим, что для определения состояния конечного объема сплошной среды нужно, вообще говоря, всегда задавать функции (а не числа) — распределение деформаций, температуры и т. д. Задание функции равносильно заданию бесконечного числа параметров (например, коэффициентов Фурье для этой функции). Поэтому число определяющих параметров для конечного объема в общем случае для любых моделей сплошных сред всегда бесконечно.

Однако в малом все функции, задающие состояние тела, можно приближенно считать линейными, либо квадратичными, либо полиномами не очень высокой степени. Поэтому коэффициенты этих полиномов образуют конечное число параметров, задающих состояние бесконечно малых элементов сплошной среды. При построении механики сплошной среды бесконечно малые частицы рассматриваются как термодинамические системы, для которых определены механические понятия о положении и характеристиках движения, а также физические понятия о внутреннем состоянии.

Примем, что для бесконечно малой частицы существует конечная система характеристик — определяющих параметров, задаваемых в употребляемой системе координат и системе единиц измерения числами. Некоторые из этих параметров могут быть геометрическими или механическими, как, например, пространственные координаты, скорость, плотность, характеристики деформации и т. п., а другие — физическими или химическими, как, например, температура, концентрации различных компонент, параметры структуры, фазовые характеристики вещества, коэффициенты теплопроводности, вязкости, модули упругости и т. д.

6.1.4. Полная система определяющих параметров. Условимся через μ^i обозначать параметры, которые в принятой системе отсчета могут быть переменными, а через k^i — физические постоянные. По определению для фиксированной малой частицы величины $\mu^1, \mu^2, \dots, \mu^n, k^1, k^2, \dots, k^m$ образуют базис (полную систему определяющих параметров), т. е. они могут быть заданы независимо и в известных диапазонах произвольно, а их набор обладает свойством, что все другие рассматриваемые в данном классе задач характеристики состояний и движений можно выразить в универсальной, не зависящей от частной конкретной задачи, форме через них. Например, плотность и температура для частицы газа в известных пределах могут быть заданы произвольно, а другие термодинамические функции, например, энтропия и давление, определяются через них.

Следует различать систему определяющих параметров в данной конкретной задаче и систему параметров, определяющих состояние среды. В первом случае это система параметров, характеризующих условие задачи, выделяющая единичное глобальное явление для конечных тел на основании системы уравнений и добавочных краевых и других условий; во втором — это характеристики состояния, для которых необходимо составить уравнения, выполняющиеся для всевозможных конкретных задач, процессов. Фиксирование системы параметров, определяющих физическое состояние элементов среды, является важным и в логическом смысле первоначальным этапом в определении модели сплошной среды, предназначенной для описания движения некоторой реальной среды при некоторых определенных классах внешних условий.

С математической точки зрения параметры состояния $\mu^1, \mu^2, \dots, \mu^n, k^1, k^2, \dots, k^m$ представляют собой аргументы функций, входящих в замкнутую систему уравнений, описывающих поведение среды. Эти функции могут зависеть от разного набора независимых переменных, и в соответствии с этим система определяющих параметров, фиксирующих данную модель сплошной среды, может состояться из разных величин. Например, в случае газа это могут быть или p и ρ , или p и T , или ρ и T и т. п.

С физической же точки зрения эти различные системы определяющих параметров для данной модели сплошной среды могут оказаться неравноправными. В заданиях внутренней энергии как функции ρ и энтропии S или p и ρ содержится разное количество информации. При введении системы определяющих параметров необходимо подразумевать и иметь в виду систему величин и характеристик, которые рассматриваются как определяемые величины. Очевидно, что система определяющих параметров по своему числу и составу для различных определяемых величин может быть вообще различной.

6.1.5. Процессы и циклы. Для любых $\mu_1, \mu_2 \in \mathbf{P}$ обозначим через $\mathcal{C}_{\mathbf{P}}(\mu_1, \mu_2)$ множество всех путей (ориентированных (направленных) кривых, лежащих в \mathbf{P}), ведущих из μ_1 в μ_2 , а через

$$\mathcal{C}_{\mathbf{P}} = \bigcup \{ \mathcal{C}_{\mathbf{P}}(\mu_1, \mu_2) : \mu_1, \mu_2 \in \mathbf{P} \}$$

множество всех путей на \mathbf{P} . В $\mathcal{C}_{\mathbf{P}}$ выделяется некоторое подмножество $\mathcal{E}_{\mathbf{P}}$ путей, называемых *процессами*. Процессы отвечают физически реализуемым процессам перехода сплошной среды из состояния μ_1 в состояние μ_2 . Процесс $\varepsilon(\mu_1, \mu_2) \in \mathcal{E}_{\mathbf{P}}$ называется *обратимым*, если путь $\varepsilon(\mu_2, \mu_1)$, идущий по той же кривой (в противоположном направлении), также есть процесс. В противном случае процесс $\varepsilon(\mu_1, \mu_2)$ необратим. Например, процесс диффузии тепла по металлическому стержню, нагретому с одного конца, необратим, а процесс сжатия газа в цилиндре обратим.

Особое значение имеют физически реальные процессы, т. е. процессы, в которых в рамках применяемой модели последовательность состояний может осуществляться с течением времени. В зависимости от внешних и внутренних взаимодействий можно рассматривать различные реальные процессы. Процессы могут быть *непрерывными*, когда совокупность состояний $\mu^1, \mu^2, \dots, \mu^n$ для данной частицы образует в пространстве состояний непрерывную кривую. В теории встречаются также процессы с разрывами значений параметров состояния $\mu^1, \mu^2, \dots, \mu^n$ и, в частности, *разрывные* процессы, составленные из участков непрерывных кривых в пространстве состояний.

Между двумя данными одними и теми же состояниями можно проводить много различных процессов, как непрерывных, так и разрывных. Семейство кривых, отвечающих реальным процессам, которые могут обуславливаться разнообразными внешними условиями, обладает, вообще говоря, большим произволом.

Число изменяемых параметров и их характер для различного рода процессов могут быть разными. Например, процессы могут быть чисто механическими, когда все параметры немеханической природы сохраняют постоянные значения.

Процесс, в результате которого система возвращается в пространстве состояний к своему первоначальному положению, называется *циклом*. В случае непрерывных процессов циклу в пространстве состояний соответствует замкнутая кривая.

Можно зафиксировать некоторое состояние A и рассматривать всевозможные непрерывные циклы, проходящие через состояние A и некоторое состояние B . Различным процессам или циклам соответствуют различные

внешние условия. Это проявляется в том, что уравнения, определяющие $\mu^1, \mu^2, \dots, \mu^n$, содержат функции, которые могут быть различными, ими можно распоряжаться и тем самым влиять на рассматриваемые процессы.

6.1.6. О взаимодействии системы с внешними объектами. Совершая некоторый процесс, система в общем случае взаимодействует с внешними телами и полями. Основная задача при построении моделей сплошных сред состоит в установлении законов и механизмов взаимодействия выделенной частицы сплошной среды с внешними по отношению к ней телами и полями, в частности с соседними частицами той же самой среды. Для приложений в механике сплошной среды необходимы макроскопические соотношения с малым числом определяющих параметров. При построении моделей сплошных сред всегда в том или ином виде требуется формулировать и использовать феноменологические гипотезы, которые после проверки их полезности для описания наблюдений в опытах называются законами природы.

В механике сплошной среды большое значение имеет учет энергообмена между данной частицей (термодинамической системой) и соседними частицами, внешними телами и внешним полем. Понятие об энергии тесно связано с представлениями о различных видах энергии. Это может быть кинетическая энергия частиц, потенциальная энергия, связанная с относительным расположением частиц, тепловая энергия, электромагнитная энергия, энергия химических связей и некоторые другие виды энергии.

Рассмотрим систему, которая характеризуется конечным числом определяющих параметров, например, бесконечно малую частицу сплошной среды или конечный объем V при условии, что все частицы этого объема совершают одинаковые процессы (параметры состояния в этом случае постоянны по объему).

Будем подразумевать, что по характеристикам внутреннего состояния частицы $\mu^1, \mu^2, \dots, \mu^n$ и их бесконечно малых изменений $d\mu^1, d\mu^2, \dots, d\mu^n$ можно судить о различных суммарных макроскопических притоках энергии к частице извне. Данные об этих притоках в зависимости от элементарного процесса за счет приращений нужно рассматривать как описание свойств модели, которое составляет важнейшую часть ее конструктивного построения. Естественно, что вместо этих данных о свойствах различных энергопритоков к частице извне в качестве данных, входящих в определение модели, можно выбирать и другие, из которых эти сведения об энергообмене можно получить с помощью некоторой цепи универсальных или частных для данной модели соотношений.

В механике до последнего времени важное значение имели приток энергии к частице механической природы, т. е. работа внешних макроскопических объемных или массовых и поверхностных внешних сил над частицей, и приток тепловой энергии, который частица может получать за счет теплопроводности, излучения, химических превращений, течения электрического тока и других механизмов. В настоящее время во многих случаях требуется учитывать электромагнитные взаимодействия; возникает необходимость рассматривать энергообмен частицы с внешней средой за счет более сложных механизмов взаимодействия, таких, например, как работа распределенных поверхностных пар, энергообмен за счет структурных и фазовых превращений и т. п.

Для некоторого процесса $d\mu^1, d\mu^2, \dots, d\mu^n$ полный внешний приток энергии к малой частице можно представить в виде $dA^{(e)} + dQ^{(e)} + dQ^*$, где $dA^{(e)}$ — работа внешних макроскопических массовых и поверхностных сил, $dQ^{(e)}$ — приток тепла, dQ^* — внешний приток энергии к частице, который возникает за счет различных механизмов взаимодействия, отличных от работы макроскопических сил и теплообмена, например, за счет взаимодействия с электромагнитным полем при учете энергии, затрачиваемой на намагничивание и электрическую поляризацию среды, и других причин.

Для элементарной работы внешних сил в соответствии с основным смыслом системы определяющих параметров и в связи с рядом допущений, которые входят в определение модели сплошной среды, для бесконечно малого элементарного процесса, соответствующего изменению параметров $d\mu^1, d\mu^2, \dots, d\mu^n$, можно написать формулу вида

$$dA^{(e)} = P_i (\mu^1, \mu^2, \dots, \mu^n, k^1, k^2, \dots, k^m) d\mu^i.$$

В этой формуле работа внешних сил $dA^{(e)}$ представлена через внутренние параметры рассматриваемой частицы и их приращения. Вид функций P_i по своему существу связан с формулировкой основных постулатов, необходимых для определения модели.

6.1.7. Закон сохранения энергии — первое начало термодинамики. Допустим, что имеется процесс, протекающий в пространстве состояний по кривой \mathcal{L}_1 от точки A со значениями параметров состояния μ_0^i до точки B со значениями параметров μ^i (рис. 31). Введем понятие полного притока энергии, который система получает извне в этом процессе. Он равен

$$A^{(e)} + Q^* = \int_{AB(\mathcal{L}_1)} P_i d\mu^i + \int_{AB(\mathcal{L}_1)} Q_i d\mu^i \quad (6.1.1)$$

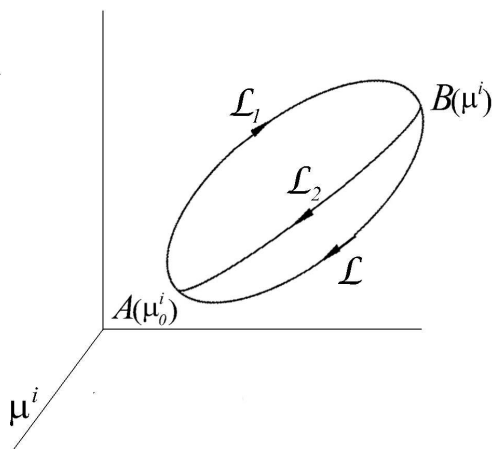


Рис. 31. К закону сохранения энергии

и, на первый взгляд, должен зависеть от процесса, т. е. от пути интегрирования \mathcal{L}_1 в пространстве состояний.

Первое начало термодинамики, или закон сохранения энергии, можно сформулировать как невозможность осуществления вечного двигателя первого рода, т. е. циклически работающей машины, которая могла бы служить источником полезной энергии, без использования какого-либо внешнего по отношению к этой машине источника энергии. Это утверждение следует рассматривать как закон, подтверждающийся всеми известными опытными данными.

Пусть теперь система совершает цикл, например C . Тогда первое начало термодинамики, или закон сохранения энергии, сводится к утверждению, что полный приток энергии, поступающий извне к системе, совершающей любой осуществимый цикл, равен нулю, т. е.

$$\oint_C (P_i + Q_i) d\mu^i = 0. \quad (6.1.2)$$

Отсюда непосредственно вытекает, что полный приток энергии (6.1.1) к системе извне не зависит от процесса \mathcal{L}_1 , а зависит только от начального и конечного состояний системы. В самом деле, введем между состояниями A и B , кроме рассматриваемого произвольного процесса \mathcal{L}_1 , еще и дру-

гой процесс \mathcal{L}_2 и процесс \mathcal{L} , протекающий от состояния B к состоянию A . Процессы $\mathcal{L}_1\mathcal{L}$ и $\mathcal{L}_2\mathcal{L}$ образуют замкнутые циклы, и из закона сохранения энергии сразу следует, что

$$A^{(e)} + Q^* = \int_{\mathcal{L}_1} (P_i + Q_i) d\mu^i = \int_{\mathcal{L}_2} (P_i + Q_i) d\mu^i = - \int_{\mathcal{L}} (P_i + Q_i) d\mu^i.$$

Поэтому, если начальное состояние A системы фиксировано, то для всех осуществимых процессов полный приток энергии к системе извне зависит только от конечного состояния системы, т. е.

$$A^{(e)} + Q^* = E(\mu^1, \dots, \mu^k) - E(\mu_0^1, \dots, \mu_0^k),$$

где E — однозначная функция параметров состояния системы, называемая ее полной энергией. Таким образом, из первого закона термодинамики следует, что существует функция состояния $E(\mu^1, \dots, \mu^k)$, полный дифференциал которой для осуществимых процессов равен сумме элементарных работ внешних массовых и поверхностных макроскопических сил $dA^{(e)}$ и элементарных притоков к системе извне других видов энергии:

$$dE = dA^{(e)} + dQ^* = (P_i + Q_i) d\mu^i.$$

Полная энергия системы $E(\mu^1, \dots, \mu^k)$ определена с точностью до аддитивной постоянной — значения E в начальном состоянии системы A .

Если внешние притоки энергии к системе известны, то первое начало термодинамики (6.1.2) может служить основой для определения полной энергии системы E . Наоборот, если энергия откуда-либо известна, то закон сохранения энергии можно использовать для выяснения механизма взаимодействия рассматриваемой частицы с внешними телами, т. е. для определения $dA^{(e)} + dQ^*$.

6.1.8. Внутренняя энергия системы. Удельная внутренняя энергия системы U определяется с точностью до аддитивной постоянной и существует для каждой термодинамической системы. Удельная внутренняя энергия U не зависит явно от пространственных координат и времени, если пространство и время можно считать однородными. Свойство однородности означает, что во всех точках пространства и во все моменты времени при одинаковых внешних условиях в данной термодинамической системе процессы протекают одинаково.

Полную энергию и внутреннюю энергию можно вводить как для всего тела в целом, так и для отдельных его частей. Внутренняя энергия конеч-

ной части тела или тела в целом, вообще говоря, не обладает свойством аддитивности, т. е. внутренняя энергия тела в целом не равна сумме внутренних энергий составляющих это тело частей. Однако во многих случаях внутреннюю энергию можно считать аддитивной, в частности, так будет для воды в тех случаях, когда не нужно учитывать поверхностное натяжение, или для упругого тела, подчиняющегося закону Гука.

Универсальное соотношение, выражающее собой закон сохранения энергии, можно представить в виде

$$dE + dU = dA^{(e)} + dQ^* + dQ^{**},$$

где dU — изменение внутренней энергии рассматриваемого тела, dE — изменение его кинетической энергии, $dA^{(e)}$ — элементарная работа внешних макроскопических сил, dQ^* — элементарный приток тепла к телу извне, dQ^{**} — элементарный приток к телу извне других, отличных от работы макроскопических механических сил, нетепловых видов энергии.

6.1.9. Термодинамическое равновесие. Термодинамически равновесным состоянием системы называется такое состояние, в котором все характеристики внутреннего состояния системы (в том числе и механические) при сохранении внешних условий могут сколь угодно долго сохранять свои значения. В пространстве состояний состояние термодинамического равновесия изображается точкой.

Если среди определяющих параметров имеются субстанциональные производные по времени, то в состоянии равновесия эти производные равны нулю.

Термодинамические процессы могут протекать как быстро, так и медленно. Можно рассматривать предельный случай процесса, протекающего столь медленно, что скорости изменения всех параметров в нем бесконечно малы. В пространстве состояний такой процесс изображается кривой, каждая точка которой является точкой равновесия. Бесконечно медленные процессы, в которых каждое промежуточное состояние является состоянием равновесия, называются равновесными. В соотношениях, описывающих равновесные процессы, несущественна величина скорости изменения параметров, однако направление изменения определяющих параметров в равновесном процессе может быть существенным.

Процессы, протекающие с конечными скоростями (если скорости оказывают влияние на физические связи), называются неравновесными.

Процесс, протекающий от некоторого состояния A к состоянию B , называется обратимым, если для каждого промежуточного состояния все уравнения для бесконечно малых приращений параметров удовлетворяются

также при замене знаков этих приращений на обратные. Таким образом, если некоторая последовательность состояний образует в пространстве состояний обратимый процесс, то эту последовательность система может проходить как в прямом, так и в обратном направлении, причем соответствующие каждому элементу пути внешние притоки энергии $dA^{(e)}$, dQ^* и dQ^{**} в прямом и обратном процессе отличаются только знаками. Если процесс не обладает таким свойством, то он называется необратимым.

§ 6.2. Энтропия. Второе начало термодинамики

Рассмотрим теперь второй закон термодинамики, который, так же как и первый закон, представляет собой универсальное утверждение, подтверждаемое всеми известными опытными данными и всеми теоретическими представлениями о механизмах физических явлений. Второй закон термодинамики утверждает, что невозможно устройство, которое переводило бы тепло от тела с меньшей температурой к телу с большей температурой без каких-либо изменений в других телах. Второй закон термодинамики можно еще сформулировать так: нельзя построить так называемый вечный двигатель второго рода, т. е. машину, которая, работая в согласии с первым законом термодинамики по некоторому циклу, периодически совершала бы работу только за счет охлаждения некоторого одного и того же источника тепла с фиксированной температурой (отбор тепла из резервуара с постоянной температурой).

Как было установлено в п. 4.1.7, первый закон термодинамики постулирует взаимный переход механической и тепловой энергии одной в другую. Соотношение, выражающее переход тепла и работы в кинетическую и внутреннюю энергии во время термодинамического процесса, заключено в уравнении энергии. Однако первый закон оставляет без ответа вопрос, является ли этот переход обратимым или необратимым. Все реальные процессы необратимы, но обратимые процессы представляют собой очень полезную идеализацию, так как во многих ситуациях диссипацию энергии можно считать пренебрежимо малой. Основным критерий необратимости содержится во втором законе термодинамики, который устанавливает некоторые ограничения на производство энтропии.

Второй закон термодинамики постулирует существование двух различных функций состояния — абсолютной температуры Θ и энтропии S , свойства которых будут указаны ниже. Абсолютная температура Θ — положительная величина, которая является функцией только эмпирической

температуры. Считаем, что энтропия обладает свойством аддитивности, т. е. что полная энтропия системы равна сумме энтропии ее частей. В механике сплошной среды вводят удельную энтропию (на единицу массы) или плотность энтропии s , в результате чего полная энтропия S становится равной интегралу $\int_V \rho s dV$. Энтропия системы может меняться либо из-за взаимодействия с окружающей средой, либо за счет изменений, которые происходят внутри самой системы, поэтому можно написать

$$ds = ds^{(e)} + ds^{(i)},$$

где ds — приращение удельной энтропии, $ds^{(e)}$ — приращение, вызванное взаимодействием с внешней средой, а $ds^{(i)}$ — внутреннее изменение. Приращение $ds^{(i)}$ никогда не бывает отрицательным. Оно равно нулю при обратимых процессах и положительно при необратимых.

6.2.1. Количество теплоты. Количество теплоты Q , или *тепловая энергия*, определяется как энергия броуновского движения молекул в физическом теле. Эту характеристику среды нельзя считать параметром состояния, так как количество теплоты Q , полученное или выделенное сплошной средой при переходе из состояния μ_1 в μ_2 по пути $\varepsilon(\mu_1, \mu_2)$, зависит от этого пути. Приток тепла в обратимом процессе может быть задан дифференциальной формой

$$dQ(\mu) = \sum_{j=1}^k B_j(\mu) d\mu^j,$$

и тогда приток тепла при переходе из состояния μ_1 в μ_2 по пути

$$\varepsilon(\mu_1, \mu_2) = \{\mu(s) : s \in [0, 1], \mu(0) = \mu_1, \mu(1) = \mu_2\}$$

задается криволинейным интегралом

$$Q = \int_{\varepsilon(\mu_1, \mu_2)} dQ(\mu) = \int_0^1 \sum_{j=1}^k B_j[\mu^1(s), \dots, \mu^k(s)] \mu^j(s) ds. \quad (6.2.1)$$

Физический смысл дифференциальной формы dQ есть элементарный приток теплоты при элементарном процессе.

6.2.2. Абсолютная температура и энтропия. Причина зависимости притока тепла Q при переходе из состояния μ_1 в состояние μ_2 от пути $\varepsilon(\mu_1, \mu_2)$ заключается в том, что подинтегральная $dQ(\mu)$ в интеграле (6.2.1) не является полным дифференциалом некоторой функции. Оказывается, существует параметр состояния Θ , называемый *абсолютной температурой*, такой, что отношение dQ/Θ для любого обратимого процесса уже является полным дифференциалом некоторой функции S , также являющейся параметром состояния и называемой *энтропией*. Тогда для любого обратимого процесса

$$S_2 - S_1 = S(\mu_2) - S(\mu_1) = \int_{\varepsilon(\mu_1, \mu_2)} \frac{dQ}{\Theta}.$$

6.2.3. Второе начало термодинамики. Физический опыт показывает, что не все тепловые процессы возможны (например, процесс, обратный к вышеописанной диффузии тепла в металлическом стержне, нагревом с одного конца).

Второе начало (или *закон термодинамики*) выделяет возможные тепловые процессы. Он гласит: *Если сплошная среда теплоизолирована (т. е. отсутствует внешний приток или отвод тепла), то энтропия этой среды не убывает*. Математически это выражается неравенством

$$\Theta dS \geq dQ. \quad (6.2.2)$$

Для полноты коллекции приведем историческую эволюцию формулировок этого физического закона.

1850 г., Клаузиус: *Невозможен процесс, единственным результатом которого является передача тепла от холодного тела к более горячему.*

1851 г., Кельвин: *Невозможен процесс, единственным результатом которого является превращение теплоты в работу.*

1909 г., Каратеодори: *В любой окрестности любого состояния μ_1 существует состояние μ_2 , которое не может быть конечным состоянием процесса $\varepsilon(\mu_1, \mu_2)$ с нулевым притоком тепла.*

Для обратимых процессов из второго начала термодинамики вытекает, что

$$\Theta dS = dQ,$$

или, что то же самое (*основное термодинамическое тождество*):

$$\Theta dS = dU + dA. \quad (6.2.3)$$

§ 6.3. Аксиомы термодинамики

6.3.1. Основная аксиома термодинамики. Термодинамические требования к сплошной среде могут быть сформулированы в виде следующей аксиомы термодинамики:

Для сплошной среды выполнены первое и второе начала термодинамики.

6.3.2. Аксиома локального равновесия. Описанное выше понятие процесса, безусловно, является идеализацией, поскольку непрерывная последовательная смена равновесных (не изменяющихся во времени) состояний сплошной среды может быть реализована лишь приближенно. Однако для описания неравновесных тепловых процессов можно воспользоваться понятиями, введенными для термодинамически равновесных состояний. Необходимо только уточнить понятия энтропии и абсолютной температуры сплошной среды. Мы определим эти понятия аксиоматически.

Энтропией сплошной среды называется непрерывная мера на \mathbf{R}^3 . Таким образом, предполагается, что задана неотрицательная счетно-аддитивная функция множества $S : \omega_t \mapsto S(\omega_t)$. Как и ранее, это гарантирует существование *удельной энтропии*, т. е. такой функции $s : D \rightarrow \mathbf{R}$, что для любого объема ω_t выполняется равенство

$$S(\omega_t) = \iiint_{\omega_t} s(x, t) \rho(x, t) d\omega = \iiint_{\omega_t} s \rho d\omega. \quad (6.3.1)$$

Кроме того, предполагается существование неотрицательной функции $\Theta : D \rightarrow \mathbf{R}_+$, называемой *абсолютной температурой*.

Предположим, что наша среда термостатически полностью описана, т. е. известно ее пространство состояний \mathbf{P} , в котором лежат наборы $\mu = \{\mu^1, \dots, \mu^k\}$ параметров состояния, полностью характеризующих равновесные состояния среды. Это означает, в частности, что удельная внутренняя энергия U , плотность ρ , удельная энтропия s , абсолютная температура Θ и т. д. являются заданными функциями параметров состояния

$$\boldsymbol{\mu} = \{\mu^1, \dots, \mu^k\}.$$

Возможность перехода от термостатического описания к термодинамическому постулирует следующая аксиома — аксиома локального равновесия:

Состояние любой частицы x сплошной среды в любой момент времени t полностью характеризуется параметрами $\boldsymbol{\mu} = \{\mu^1, \dots, \mu^k\}$, причем все термодинамические параметры частицы (U, ρ, s, Θ и т. д.) определяются по $\boldsymbol{\mu}$ теми же самыми функциями, что и в термостатическом описании.

На интуитивном уровне эта аксиома означает, что каждая частица сплошной среды в каждый момент времени отождествляется с равновесной термодинамической системой, описываемой параметрами состояния $\boldsymbol{\mu} = \{\mu^1, \dots, \mu^k\}$.

6.3.3. Неравенство Клаузиуса — Дюгема. Второе начало термодинамики (6.2.2) (в динамическом, а не в равновесном случае) в этих терминах может быть выражено по-разному. Например, предполагается выполненным неравенство

$$\frac{d}{dt} S(\omega_t) \geq - \iint_{\partial\omega_t} \frac{q \cdot n}{\Theta} d\sigma. \quad (6.3.2)$$

В самом деле, если считать объем ω_t теплоизолированным, т. е. предполагать, что $q \cdot n = 0$ на $\partial\omega_t$, то

$$\frac{d}{dt} S(\omega_t) \geq 0,$$

что полностью совпадает с «термостатическим» вторым началом термодинамики (см. начало п. 6.2.3).

Если заменить в (6.3.2) S по формуле (6.3.1), а затем, как это неоднократно делалось выше, применить формулу (5.2.1) дифференцирования под знаком интеграла и формулу Гаусса — Остроградского, то получим неравенство

$$\iiint_{\omega_t} \left(\rho \frac{ds}{dt} + \operatorname{div} \frac{q}{\Theta} \right) d\omega \geq 0.$$

Применение же аналога леммы 2 (п. 5.1.2) приводит к так называемому *неравенству Клаузиуса — Дюгема*, являющемуся локальным (не ин-

тегральным) эквивалентом второго начала термодинамики (6.3.2):

$$\rho \frac{ds}{dt} + \operatorname{div} \frac{q}{\Theta} \geq 0. \quad (6.3.3)$$

6.3.4. Аксиома Фурье. Аксиома позволяет выразить в уравнении сохранения энергии (5.3.6) вектор потока тепла через абсолютную температуру.

Вектор потока тепла пропорционален градиенту температуры:

$$q = -\varkappa \nabla \Theta, \quad (6.3.4)$$

где \varkappa — (неотрицательный) параметр состояния, называемый коэффициентом теплопроводности.

Аксиома Фурье представляет собой математический эквивалент физического закона Фурье, полученного как результат обобщения физических наблюдений. Знак «−» в (6.3.4) соответствует тому физически наблюдаемому факту, что тепло может передаваться только от «горячих» областей к «холодным». Ниже мы покажем, что аксиома Фурье может быть выведена из общего принципа независимости определяющих уравнений от системы отсчета.

Коэффициент теплопроводности \varkappa в моделях конкретных сплошных сред есть известная функция других параметров состояния. Для многих сред он вообще постоянен.

Аксиома Фурье позволяет уменьшить число неизвестных в дифференциальной модели (DM) на единицу, заменяя в уравнении сохранения энергии (5.3.6) векторную неизвестную q на две скалярных Θ и \varkappa :

$$\rho \frac{dU}{dt} = P : D + \operatorname{div} (\varkappa \nabla \Theta).$$

Глава 7.

ДЕФОРМАЦИЯ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ И ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ УРАВНЕНИЯ

Для того, чтобы научиться выводить определяющие уравнения, мы должны более подробно изучить такую фундаментальную характеристику сплошной среды, как тензор деформации. Кроме того, мы сформулируем основные принципы построения определяющих уравнений.

§ 7.1. Тензоры деформации и скоростей деформации

7.1.1. Деформация сплошной среды. Пусть $x = \gamma(\xi, t)$ — движение сплошной среды. Разумеется, при движении первоначальная конфигурация Ω_0 сплошной среды переходит в «деформированную» конфигурацию Ω_t , при которой изменяется взаимное положение частиц сплошной среды. Зафиксируем некоторую частицу $P_0 \in \Omega_0$. Тогда ее положение в нулевой момент времени есть ξ_0 , а в момент времени t — $x_0 = \gamma(\xi_0, t)$ (рис. 32). Вектор $w_0 = x_0 - \xi_0$ называется *вектором перемещения* частицы P_0 .

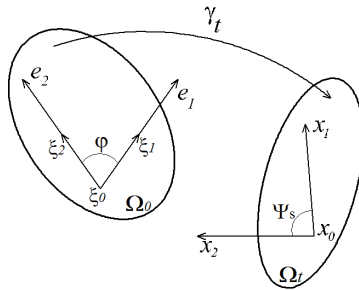


Рис. 32. Деформация сплошной среды при движении

Пусть $e_1 \in S$ — произвольный орт, $\xi_1 = \xi_0 + s e_1$ ($s > 0$), а $x_1 = \gamma(\xi_1, t)$.

Относительным удлинением в направлении e_1 называется число

$$l(e_1) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{|x_1 - x_0| - |\xi_1 - \xi_0|}{|\xi_1 - \xi_0|}.$$

Пусть теперь $e_2 \in S$, $\xi_2 = \xi_0 + se_2$, $x_2 = \gamma(\xi_2, t)$, φ — угол между векторами $\xi_1 - \xi_0$ и $\xi_2 - \xi_0$ (или, что то же самое, между ортами e_1 и e_2), а ψ_s — угол между векторами $x_1 - x_0$ и $x_2 - x_0$:

$$\cos \psi_s = \frac{(x_1 - x_0) \cdot (x_2 - x_0)}{|x_1 - x_0| \cdot |x_2 - x_0|}.$$

Относительным сдвигом направлений e_1 и e_2 называется число

$$\tau(e_1, e_2) = \lim_{s \rightarrow 0} \psi_s - \varphi.$$

Относительные удлинения и сдвиги полностью характеризуют деформацию малой окрестности частицы P_0 , поскольку описывают, как изменяются расстояния и углы при движении сплошной среды.

7.1.2. Тензор деформации Лагранжа. Для аналитического описания деформации в случае, когда движение γ дифференцируемо, определим тензор \mathbb{T} равенством

$$\mathbb{T} = \frac{\partial x}{\partial \xi} = \frac{\partial}{\partial \xi} \gamma(\xi_0, t).$$

Тензор \mathbb{T} называется *тензором дисторсии* (distortion — искажение, перекашивание). Тогда очевидно, что

$$x_1 - x_0 = \gamma(\xi_0 + se_1, t) - \gamma(\xi_0, t) = \mathbb{T} \langle se_1 \rangle + o(s). \quad (7.1.1)$$

Определим теперь *тензор деформации Лагранжа* \mathcal{L} равенством

$$2\mathcal{L} = \mathbb{T}^* \circ \mathbb{T} - I.$$

Тогда из (7.1.1) очевидным образом вытекают равенства

$$l(e_1) = \sqrt{2e_1 \cdot \mathcal{L} \langle e_1 \rangle + 1} - 1, \quad (7.1.2)$$

$$\cos(\lim_{s \rightarrow 0} \psi_s) = \frac{e_1 \cdot e_2 + 2e_1 \cdot \mathcal{L} \langle e_2 \rangle}{[l(e_1) + 1][l(e_2) + 1]}. \quad (7.1.3)$$

В самом деле,

$$\begin{aligned}
 l(e_1) &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{|x_1 - x_0| - |\xi_1 - \xi_0|}{|\xi_1 - \xi_0|} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{|\mathbb{T} \langle se_1 \rangle + o(s)| - |se_1|}{|se_1|} = \\
 &= |\mathbb{T} \langle e_1 \rangle| - 1 = \sqrt{\mathbb{T} \langle e_1 \rangle \cdot \overline{\mathbb{T} \langle e_1 \rangle}} - 1 = \sqrt{e_1 \cdot (\mathbb{T}^* \circ \mathbb{T}) \langle e_1 \rangle} - 1 = \\
 &= \sqrt{e_1 \cdot (\mathcal{2L} + I) \langle e_1 \rangle} - 1 = \sqrt{2e_1 \cdot \mathcal{L} \langle e_1 \rangle + 1} - 1.
 \end{aligned}$$

Далее аналогично

$$\begin{aligned}
 |x_1 - x_0| &= |\mathbb{T} \langle se_1 \rangle + o(s)| = |\mathbb{T} \langle se_1 \rangle| + o(s) = \\
 &= \sqrt{\mathbb{T} \langle se_1 \rangle \cdot \overline{\mathbb{T} \langle se_1 \rangle}} + o(s) = s\sqrt{e_1 \cdot (\mathbb{T}^* \circ \mathbb{T}) \langle e_1 \rangle} + o(s) = \\
 &= s\sqrt{e_1 \cdot (\mathcal{2L} + I) \langle e_1 \rangle} + o(s) = s\sqrt{2e_1 \cdot \mathcal{L} \langle e_1 \rangle + 1} + o(s) = \\
 &= s(l(e_1) + 1) + o(s).
 \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned}
 \cos(\lim_{s \rightarrow 0} \psi_s) &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{(x_1 - x_0) \cdot (x_2 - x_0)}{|x_1 - x_0| \cdot |x_2 - x_0|} = \\
 &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{[\mathbb{T} \langle se_1 \rangle + o(s)] \cdot [\mathbb{T} \langle se_2 \rangle + o(s)]}{[s(l(e_1) + 1) + o(s)] \cdot [s(l(e_2) + 1) + o(s)]} = \\
 &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{(\mathbb{T} \langle e_1 \rangle + O(s)) \cdot (\mathbb{T} \langle e_2 \rangle + O(s))}{[(l(e_1) + 1) + O(s)] \cdot [(l(e_2) + 1) + O(s)]} = \\
 &= \frac{\mathbb{T} \langle e_1 \rangle \cdot \mathbb{T} \langle e_2 \rangle}{[l(e_1) + 1] \cdot [l(e_2) + 1]} = \frac{e_1 \cdot e_2 + e_1 \cdot (\mathbb{T}^* \circ \mathbb{T}) \langle e_2 \rangle - e_1 \cdot e_2}{[l(e_1) + 1] \cdot (l(e_2) + 1)} = \\
 &= \frac{e_1 \cdot e_2 + 2e_1 \cdot \mathcal{L} \langle e_2 \rangle}{[l(e_1) + 1] \cdot (l(e_2) + 1)}.
 \end{aligned}$$

Можно показать, что знание тензорной функции $\mathcal{L}(\xi, t)$ позволяет полностью определить конфигурацию Ω_t сплошной среды.

7.1.3. Тензор деформации Эйлера. Точно так же можно ввести тензор деформации Эйлера равенством

$$2\mathcal{E} = I - \perp^* \circ \perp,$$

где

$$\perp = \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \gamma^{-1}(x, t).$$

Подчеркнем, что тензоры \mathcal{L} и \mathcal{E} — функции разных переменных: $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\xi, t)$, а $\mathcal{E} = \mathcal{E}(x, t)$. Нетрудно доказать, что $\mathcal{L} = \mathbb{T}^* \circ \mathcal{E} \circ \mathbb{T}$.

7.1.4. Скорость деформации. При описании некоторых сред более удобным оказывается знать не деформацию, а скорость деформации. Эта скорость характеризуется величиной $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}$. Она легко вычисляется через тензор дисторсии и тензор скоростей деформации (см. п. 3.3.2). В самом деле, поскольку $\frac{\partial \gamma(\xi, t)}{\partial t} = v^L(\xi, t)$, имеем:

$$\frac{\partial \mathbb{T}}{\partial t} = \frac{\partial v^L}{\partial \xi} = \frac{\partial v}{\partial x} \circ \mathbb{T}.$$

Поэтому

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = \mathbb{T}^* \circ D \circ \mathbb{T},$$

где D — тензор скоростей деформации (5.3.2).

З А Д А Ч И

7.1.1. Доказать, что тензоры деформации Эйлера и Лагранжа связаны равенством $\mathcal{L} = \mathbb{T}^* \circ \mathcal{E} \circ \mathbb{T}$.

7.1.2. Пусть закон движения сплошной среды задан отображением

$$x = \gamma(\xi, t) = (e^t \xi^1 + 2t(\xi^2)^2 + t(\xi^3)^2, e^{2t} \xi^2 + 2t\xi^3, e^{2t} \xi^3 + 3t\xi^2).$$

Найти тензор деформации Лагранжа.

7.1.3. Пусть закон движения сплошной среды задан отображением

$$x = \gamma(\xi, t) = (e^{-t} \xi^1, e^{-t} \xi^2, -2t\xi^1 - 2t\xi^2 + \xi^3).$$

Найти тензор деформации Эйлера.

7.1.4. Найти тензоры деформации Лагранжа и Эйлера для движения сплошной среды с полем скорости, указанным в задаче 3.2.7.

§ 7.2. Определяющие уравнения

До настоящего момента мы не использовали никаких конкретных знаний, отличающих одну сплошную среду от другой в рамках рассматриваемой нами модели. Поэтому пока наша модель носит универсальный характер и включает в себя широкий класс газов, жидкостей, упругих тел и т. п. Поведение конкретного класса сплошных сред подчиняется, кроме описанных универсальных законов, дополнительным уравнениям, характеризующим именно данный конкретный класс. Эти уравнения носят название *определяющих уравнений*, или *уравнений состояния*. Обычно эти уравнения связывают тензор напряжений с деформацией среды (например, с тензором деформации или скоростей деформации).

В силу большого многообразия физически различных сплошных сред, естественно, эти уравнения могут быть весьма разнообразными. Тем не менее, они подчиняются некоторым общим для них всех условиям, или принципам. Эти принципы (вернее, самые существенные и важные из них) мы сейчас сформулируем.

7.2.1. Принцип причинности. *Поле тензоров напряжений $P(x, t)$ в сплошной среде Ω_t однозначно определяется предысторией эволюции сплошной среды.*

Пусть $\gamma_t = \gamma(\cdot, t) : \Omega_0 \rightarrow \Omega_t$ — движение сплошной среды, а $P : D \rightarrow \mathbf{R}^k$ — набор параметров, описывающих эту среду. Символическая запись принципа причинности выглядит так:

$$P[\gamma(\xi, t), t] = \mathcal{F} \left(\xi, t, \bigcup_{\eta, \zeta \in \Omega_0} \left\{ \gamma(\eta, \cdot) \Big|_{[0, t]}, P[\gamma(\zeta, \cdot), \cdot] \Big|_{[0, t]} \right\} \right), \quad (7.2.1)$$

где $\gamma(\eta, \cdot) \Big|_{[0, t]}$ и $P[\gamma(\zeta, \cdot), \cdot] \Big|_{[0, t]}$ — сужения соответствующих функций на отрезок $[0, t]$. Другими словами, тензор P зависит только от того, как среда эволюционировала раньше, и не зависит ни от посторонних эффектов, ни от ее поведения в будущем.

7.2.2. Принцип пространственной локализации. *В формуле (7.2.1) взамен $\eta, \zeta \in \Omega_0$ можно писать $\eta, \zeta \in \mathcal{V}_\xi$, где \mathcal{V}_ξ — некоторая*

окрестность точки ξ в Ω_0 .

Этот принцип означает, что тензор напряжений в данной частице определяется лишь поведением среды в некоторой окрестности этой частицы. Если предположить аналитичность всех параметров среды, то принцип пространственной локализации можно переформулировать так.

Тензор напряжений в данной частице зависит от предыстории параметров P и их производных в данной частице:

$$P[\gamma(\xi, t), t] = \mathcal{F} \left(\xi, t, \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \left\{ \frac{\partial^k}{\partial \xi^k} \gamma(\xi, \cdot) \Big|_{[0, t]}, \frac{\partial^k}{\partial \xi^k} P[\gamma(\xi, \cdot), \cdot] \Big|_{[0, t]} \right\} \right).$$

Сплошная среда, для которой в правой части последнего равенства фигурируют только производные нулевого (т. е. сами функции) и первого порядков

$$\begin{aligned} &P[\gamma(\xi, t), t] = \\ &= \mathcal{F} \left(\xi, t, \gamma(\xi, \cdot) \Big|_{[0, t]}, \frac{\partial}{\partial \xi} \gamma(\xi, \cdot) \Big|_{[0, t]}, P[\gamma(\xi, \cdot), \cdot] \Big|_{[0, t]}, \frac{\partial}{\partial \xi} P[\gamma(\xi, \cdot), \cdot] \Big|_{[0, t]} \right), \end{aligned}$$

называется *простой*.

Наконец, если в правых частях приведенных выше уравнений взамен всех сужений функций $f|_{[0, t]}$ на отрезок $[0, t]$ фигурируют только сужения $f|_{\{t\}} = f|_{\{t\}} = f(t)$ «на точку» t , то сплошная среда называется *средой с бесконечно короткой памятью* (синонимы: *среда с нулевой памятью, среда без наследственности*). Например, определяющие уравнения в простой среде с бесконечно короткой памятью должны выглядеть так:

$$P[\gamma(\xi, t), t] = \mathcal{F} \left(\xi, t, \gamma(\xi, t), \frac{\partial}{\partial \xi} \gamma(\xi, t), P[\gamma(\xi, t), t], \frac{\partial}{\partial \xi} P[\gamma(\xi, t), t] \right),$$

или, короче,

$$P[\gamma(\xi, t), t] = \mathcal{F} \left(\xi, t, \gamma, \frac{\partial \gamma}{\partial \xi}, P(\gamma, t), \frac{\partial P(\gamma, t)}{\partial \xi} \right).$$

7.2.3. Системы отсчета. Описание последнего из формулируемых нами принципов — принципа независимости от системы отсчета — несколько сложнее. Оно требует дополнительных понятий.

Репером называется базис, состоящий из векторов единичной длины, исходящих из одной точки. Репер с часами называется *системой отсчета*.

Пусть помещенный в точку \emptyset репер $\{e_i\}$ с часами, показывающими вре-

мя t , — некоторая (неподвижная) система отсчета. Зададим непрерывную кривую $t \mapsto \emptyset(t)$ и семейство непрерывно зависящих от t ортогональных преобразований $O(t)$ с положительным определителем. Поместим теперь в точку $\emptyset(t)$ репер $\{e'_i\} = \{O(t) \langle e_i \rangle\}$ и часы, показывающие время $t' = t + \alpha$. Они образуют новую (подвижную) систему отсчета, которую мы будем обозначать $(\emptyset(t), O(t), \alpha)$. Поскольку ортогональные преобразования сохраняют углы и расстояния, можно представлять себе, что второй репер есть движущийся как абсолютно твердое тело первый.

Точка X , задаваемая в первой системе отсчета радиус-вектором x , во второй системе отсчета задается радиус-вектором x' (рис. 33). Найдем формулы перехода из одной системы отсчета в другую.

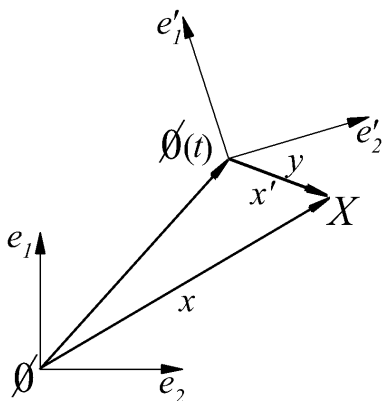


Рис. 33. Системы отсчета с часами

Положим $y = x - \emptyset(t)$. Тогда

$$y = y^i e_i = y^i O^{-1}(t) \langle e'_i \rangle = y^i O^*(t) \langle e'_i \rangle = y^i \alpha_i^j e'_j,$$

где (α_i^j) — матрица преобразования $O^*(t)$ в базисе $\{e'_i\}$. Разложение y по второму базису дает $y = x'^j e'_j$. Отсюда $x'^j = \alpha_i^j y^i$. Таким образом,

$$x' = O^*(t) \langle x - \emptyset(t) \rangle, \quad t' = t + \alpha.$$

Очевидно, если $z = y - x$ — вектор с началом в точке x и концом в y в первой системе отсчета, то во второй системе отсчета представление соответствующего вектора имеет вид $z' = O^*(t) \langle z \rangle$.

Если A — линейное отображение векторов в первой системе отсчета, то во второй системе отсчета ему соответствует линейное преобразование

$$A' = O^*(t)AO(t).$$

Скалярное s , векторное v и тензорное T поля на D по определению *индифферентны* (по отношению к изменению системы отсчета), если для любой подвижной системы отсчета $(O(t), O(t), \alpha)$

$$s'(x', t') = s(x, t),$$

$$v'(x', t') = O^*(t) \langle v(x, t) \rangle,$$

$$T'(x', t') = O^*(t) \circ T(x, t) \circ O(t).$$

7.2.4. Принцип независимости от системы отсчета. *Равенство (7.2.1) инвариантно относительно любой непрерывной замены системы отсчета:*

$$P'[\gamma'(\xi', t'), t'] = \mathcal{F} \left(\xi', t', \bigcup_{\eta', \zeta' \in \Omega'_\alpha} \left\{ \gamma'(\eta', \cdot) \Big|_{[\alpha, t']}, P'[\gamma'(\zeta', \cdot), \cdot] \Big|_{[\alpha, t']} \right\} \right).$$

Обратите внимание, что функция \mathcal{F} неизменна.

При построении определяющих уравнений предполагается, что *параметры состояния индифферентны*, что не является ограничительным предположением. Более того, эти уравнения должны быть независимыми от системы отсчета.

7.2.5. Индифферентность основных тензоров. Оказывается, что введенные тензоры \mathcal{E} , P , D также индифферентны.

Теорема 5 (Об индифферентности основных тензоров). *Тензоры деформации Эйлера \mathcal{E} , напряжений P и скоростей деформации D индифферентны.*

Доказательство. Поскольку $\xi' = O^*(0) \langle \xi \rangle$ и $x = O(t) \langle x' \rangle$, то

$$\perp' = \frac{\partial \xi'}{\partial x'} = \frac{\partial \xi'}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial x'} = O^*(0) \circ \perp \circ O(t).$$

Но тогда

$$\begin{aligned} 2\mathcal{E}' &= I - \perp'^* \circ \perp' = O^*(t) \circ O(t) - [O^*(0) \circ \perp \circ O(t)]^* \circ [O^*(0) \circ \perp \circ O(t)] = \\ &= O^*(t) \circ O(t) - [O^*(t) \circ \perp^* \circ O(0)] \circ [O^*(0) \circ \perp \circ O(t)] = \\ &= O^*(t) \circ [I - \perp^* \circ O(0) \circ O^*(0) \circ \perp] \circ O(t) = \\ &= O^*(t) \circ (I - \perp^* \circ \perp) O(t) = 2O^*(t) \circ \mathcal{E} \circ O(t), \end{aligned}$$

и индифферентность \mathcal{E} доказана.

Далее поскольку

$$p_n = P \langle n \rangle, \quad p'_{n'} = P' \langle n' \rangle, \quad n' = O^*(t) \langle n \rangle, \quad p'_{n'} = O^*(t) \langle p_n \rangle,$$

то

$$P' \langle n' \rangle = p'_{n'} = O^*(t) \langle p_n \rangle = [O^*(t) \circ P] \langle n \rangle = [O^*(t) \circ P \circ O(t)] \langle n' \rangle,$$

что означает индифферентность тензора напряжений P .

Наконец, докажем индифферентность тензора скоростей деформации D . В силу выведенных выше формул перехода в новую систему отсчета движение $\gamma(\xi, t)$ частицы ξ в системе отсчета $(0(t), O(t), \alpha)$ задается функцией

$$\gamma'(\xi', t') = O^*(t) \langle \gamma(\xi, t) - 0(t) \rangle,$$

где $\xi' = O^*(0) \langle \xi \rangle$. Дифференцирование последнего равенства по t' (напомним, что $t' = t + \alpha$ и, следовательно, $d/dt' = d/dt$) дает следующее представление скорости $v'(x', t')$ в новой системе отсчета:

$$\begin{aligned} v'(x', t') &= \frac{\partial \gamma'(\xi', t')}{\partial t'} = \\ &= \frac{dO^*(t)}{dt} \langle \gamma(\xi, t) - 0(t) \rangle + O^*(t) \left\langle \frac{\partial \gamma(\xi, t)}{\partial t} - \frac{d0(t)}{dt} \right\rangle = \\ &= \frac{dO^*(t)}{dt} \langle x - 0(t) \rangle + O^*(t) \left\langle v(x, t) - \frac{d0(t)}{dt} \right\rangle. \end{aligned} \tag{7.2.2}$$

Но тогда

$$\frac{\partial v'}{\partial x'} = \frac{dO^*(t)}{dt} \circ \frac{\partial x}{\partial x'} + O^*(t) \circ \frac{\partial v}{\partial x} \circ \frac{\partial x}{\partial x'} = \frac{dO^*(t)}{dt} \circ O(t) + O^*(t) \circ \frac{\partial v}{\partial x} \circ O(t),$$

а поэтому

$$\left(\frac{\partial v'}{\partial x'} \right)^* = O^*(t) \circ \frac{dO(t)}{dt} + O^*(t) \circ \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^* \circ O(t).$$

Остается заметить, что, поскольку $O^*(t) \circ O(t) = I$,

$$O(t) \circ \frac{dO^*(t)}{dt} + \frac{dO(t)}{dt} \circ O^*(t) = 0$$

(здесь 0 в правой части обозначает нулевой оператор). Складывая полученные выражения для $\partial v' / \partial x'$ и $(\partial v' / \partial x')^*$, имеем:

$$\begin{aligned} D' &= \left(\frac{\partial v'}{\partial x'} \right)^* + \frac{\partial v'}{\partial x'} = \\ &= O^*(t) \circ \frac{dO(t)}{dt} + O^*(t) \circ \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^* \circ O(t) + \frac{dO^*(t)}{dt} \circ O(t) + O^*(t) \circ \frac{\partial v}{\partial x} \circ O(t) = \\ &= O^*(t) \circ \left[\left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^* + \frac{\partial v}{\partial x} \right] \circ O(t) = O^*(t) \circ D \circ O(t), \end{aligned}$$

что и требовалось доказать. ■

Заметим, что из равенства (7.2.2) следует неиндифферентность вектора скорости; он «неиндифферентен» на величину

$$\left(\frac{dO^*(t)}{dt} \right) \langle x - 0(t) \rangle - O^*(t) \left\langle \frac{d0(t)}{dt} \right\rangle.$$

7.2.6. Пример: жидкости и газы. Жидкости и газы представляют собой легко деформирующиеся, подвижные сплошные среды: для того, чтобы вывести их из состояния равновесия, достаточно сколь угодно малых сил. В силу этого внутренние напряжения (тензор напряжений) очень слабо зависят от деформаций среды. В то же время физические эксперименты демонстрируют существенную зависимость напряжений от скоростей деформации (тензора скоростей деформации). Поэтому жидкости и газы можно определить как сплошные среды, в которых тензор напряжений зависит от тензора скоростей деформации и не зависит от тензора деформаций. Кроме того, он может еще зависеть от основных термоди-

намических параметров. Более точно, жидкости и газы — это среды, в которых

$$P = F(D, P),$$

где $P = (\rho, U, \Theta, s)$ — набор основных (подчеркнем, скалярных) термодинамических параметров. Очевидно, такое уравнение состояния удовлетворяет принципам причинности и пространственной локализации.

В силу принципа независимости от системы отсчета

$$P' = F(D', P').$$

Индифферентность основных термодинамических параметров P и доказанная выше индифферентность тензоров P и D влекут необходимость выполнения тождества

$$O^*(t) \circ P \circ O(t) = F(O^*(t) \circ D \circ O(t), P).$$

Таким образом, тензорная функция $\Phi : T \mapsto F(T, P)$ при каждом фиксированном P должна удовлетворять условию

$$\Phi(O^* \circ T \circ O) = O^* \circ \Phi(T) \circ O$$

для любого ортогонального преобразования O . Такие тензорные функции называются *изотропными*. Требование изотропности функций, фигурирующих в определяющих уравнениях, является следствием принципа независимости от системы отсчета.

К изучению математических моделей жидкостей мы еще вернемся.

7.2.7. Пример: упругие тела. В упругих деформируемых телах, в отличие от жидкостей и газов, тензор напряжений зависит от тензора деформации (и основных термодинамических параметров):

$$P = F(\mathcal{E}, P).$$

Принцип независимости от системы отсчета влечет требование изотропности функции F по первому аргументу. Уравнение состояния для внутренней энергии в упругих средах имеет вид

$$U = f(\mathcal{E}, P).$$

В силу принципа независимости от системы отсчета должно выполняться тождество

$$U' = f(\mathcal{E}', P'),$$

откуда, как и выше, вытекает требование *изотропности* (скалярной) функции $\Phi : T \mapsto f(T, P)$:

$$\Phi(T) = \Phi(O^* \circ T \circ O)$$

для любого ортогонального преобразования O .

7.2.8. Пример: определяющее уравнение для вектора потока тепла. Во многих сплошных средах выполняется определяющее уравнение вида

$$q = F(\nabla\Theta, P). \quad (7.2.3)$$

Заметим, что если (скалярная) функция α индифферентна, то и (векторная) функция $\nabla\alpha$ тоже индифферентна. Поэтому переход к новой системе отсчета в уравнении (7.2.3) приводит к уравнению

$$q' = F(\nabla\Theta', P').$$

Последнее влечет требование *изотропности* (векторной) функции $\Phi : x \mapsto f(x, P)$, т. е.

$$O^* \langle \Phi(x) \rangle = \Phi(O^* \langle x \rangle)$$

для любого ортогонального преобразования O .

§ 7.3. Изотропные функции

Описанные выше примеры показывают, что скалярные, векторные и тензорные функции, фигурирующие в уравнениях состояния, должны быть изотропными. Важность требования изотропности заставляет нас более подробно изучить класс изотропных функций.

7.3.1. Изотропные функции. Мы начнем с тензорных функций. Зафиксируем в \mathbf{R}^3 произвольный ортонормированный базис $\{e_i\}$. Тогда, как известно (см. п. 2.3.3), определено отображение \mathfrak{J} , сопоставляющее каждому тензору T второго ранга на \mathbf{R}^3 (который мы отождествляем с линейным отображением на \mathbf{R}^3) матрицу $\mathcal{T} : \mathcal{T}_j^i = e^i \cdot T \langle e_j \rangle$. Известно, что отображение \mathfrak{J} линейно и обратимо, а также что \mathfrak{J} и \mathfrak{J}^{-1} сохраняют

операции суперпозиции тензоров и сопряжения:

$$\mathfrak{J}(T \circ S) = \mathfrak{J}(T) \circ \mathfrak{J}(S), \quad \mathfrak{J}(T^*) = [\mathfrak{J}(T)]^*. \quad (7.3.1)$$

Каждая тензорная функция $\Phi : \mathbb{T}^2(\mathbf{R}^3) \rightarrow \mathbb{T}^2(\mathbf{R}^3)$ порождает матричную функцию $\phi : M^3 \rightarrow M^3$ по формуле $\phi = \mathfrak{J} \circ \Phi \circ \mathfrak{J}^{-1}$. Матричная функция ϕ называется *изотропной*, если

$$\phi(O^* \circ T \circ O) = O^* \circ \phi(T) \circ O \quad (7.3.2)$$

для любой ортогональной матрицы $O \in M^3$, т. е. такой, что

$$O^* \circ O = O \circ O^* = I.$$

Тривиально доказывается, что *тензорная функция Φ изотропна в том и только том случае, когда изотропна матричная функция ϕ .*

Поэтому в дальнейшем мы отождествляем матричные и тензорные функции, а также матрицы T и тензоры T , сохраняя обозначение T и для матриц.

Нашей целью являются утверждения о представлении изотропных функций как функций от инвариантов тензоров (см. п. 2.3.3).

7.3.2. Представление симметричных функций. Докажем предварительно две полезные леммы.

Лемма 3 (О представлении симметричных функций на \mathbf{R}^2). *Если функция $\alpha : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ симметрична, т. е. $\alpha(x, y) = \alpha(y, x)$, то она представима в виде*

$$\alpha(x, y) = \beta(x + y, xy),$$

где $\beta : D \rightarrow \mathbf{R}$, $D \subset \mathbf{R}^2$.

Доказательство. Пусть D — множество тех $(b, c) \in \mathbf{R}^2$, для которых квадратное уравнение $\lambda^2 - b\lambda + c = 0$ имеет вещественные корни x, y . Положим $\beta(b, c) = \alpha(x, y)$. Симметричность функции α гарантирует корректность определения β . Утверждение леммы следует из теоремы Виета. ■

Лемма 4 (О представлении симметричных функций на \mathbf{R}^3). *Если функция $\alpha : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$ симметрична, т. е. не изменяется при произвольной перестановке аргументов, то она представима в виде*

$$\alpha(x, y, z) = \beta(x + y + z, xy + yz + zx, xyz),$$

где $\beta : D \rightarrow \mathbf{R}$, $D \subset \mathbf{R}^3$.

Доказательство. Эта лемма доказывается так же, как и предыдущая. D определяется как множество тех $(b, c, d) \in \mathbf{R}^3$, для которых кубическое уравнение $\lambda^3 - b\lambda^2 + c\lambda - d = 0$ имеет три вещественных корня x, y, z , а β определяется равенством $\beta(b, c, d) = \alpha(x, y, z)$. ■

7.3.3. Представление изотропных тензорных функций. Докажем утверждение о том, что любую изотропную тензорную функцию можно выразить через инварианты этого тензора.

Теорема 6 (О представлении изотропной тензорной функции).

Пусть \mathcal{S}^3 — пространство симметричных 3×3 -матриц, а $\phi : \mathcal{S}^3 \rightarrow \mathcal{S}^3$ — изотропная матричная (или тензорная) функция. Тогда найдутся функции $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$ такие, что для любой матрицы $T \in \mathcal{S}^3$

$$\phi(T) = \varphi_0^T I + \varphi_1^T T + \varphi_2^T T^2,$$

где $\varphi_i^T = \varphi_i(J_1, J_2, J_3)$ ($i = 0, 1, 2$), а $J_i = J_i(T)$ ($i = 1, 2, 3$) — инварианты матрицы T .

Доказательство. Пусть $S = \phi(T)$. В силу симметричности T существует ортогональная матрица O_1 , приводящая T к диагональной матрице D_T :

$$D_T = O_1^* \circ T \circ O_1 = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3),$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ — собственные числа матрицы T . Положим $D_S = O_1^* \circ S \circ O_1$. В силу изотропности ϕ

$$D_S = O_1^* \circ \phi(T) \circ O_1 = \phi(O_1^* \circ T \circ O_1) = \phi(D_T).$$

Обозначим диагональные матрицы $\text{diag}(1, -1, -1)$ и $\text{diag}(-1, -1, 1)$ через O_2 и O_3 соответственно. Очевидно, что $O_2^* = O_2$ и $O_3^* = O_3$ и, кроме того,

$$O_2^* \circ D_T \circ O_2 = O_3^* \circ D_T \circ O_3 = D_T$$

(применение матриц O_2, O_2^* и O_3, O_3^* к диагональным матрицам изменяет только знаки соответствующих коэффициентов на диагонали). Далее с учетом изотропности ϕ

$$O_2^* \circ D_S \circ O_2 = O_2^* \circ \phi(D_T) \circ O_2 = \phi(O_2^* \circ D_T \circ O_2) = \phi(D_T) = D_S \quad (7.3.3)$$

и аналогично

$$O_3^* \circ D_S \circ O_3 = D_S. \quad (7.3.4)$$

Непосредственное вычисление (7.3.4) показывает, что (мы используем обозначение s_j^i для элементов матрицы D_S):

$$O_2^* \circ D_S \circ O_2 = \begin{pmatrix} s_1^1 & -s_2^1 & -s_3^1 \\ -s_1^2 & s_2^2 & s_3^2 \\ -s_1^3 & s_2^3 & s_3^3 \end{pmatrix},$$

а

$$O_3^* \circ D_S \circ O_3 = \begin{pmatrix} s_1^1 & s_2^1 & -s_3^1 \\ s_1^2 & s_2^2 & -s_3^2 \\ -s_1^3 & -s_2^3 & s_3^3 \end{pmatrix}.$$

Из этих равенств и из (7.3.3) и (7.3.4) следует равенство всех внедиагональных элементов матрицы D_S нулю. Таким образом, D_S — диагональная матрица: $D_S = \text{diag}(\eta_1, \eta_2, \eta_3)$, причем η_1, η_2, η_3 — ее собственные значения.

Запишем теперь равенство $D_S = \phi(D_T)$ в «координатной форме»: $s_j^i = \phi_{ij}(t_j^i)$, или, оставляя только ненулевые координаты, $s_i^i = \phi_{ii}(t_j^i)$. Обозначив через Φ_i «сужение» функций ϕ_{ii} на «диагональные элементы», перепишем последнее тождество для матриц D_T и D_S в виде

$$\eta_i = \Phi_i(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3).$$

Введем в рассмотрение еще одну матрицу:

$$O_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Из изотропности ϕ вытекает равенство $O_4^* \circ D_S \circ O_4 = \phi(O_4^* \circ D_T \circ O_4)$, а непосредственный подсчет показывает, что

$$O_4^* \circ D_T \circ O_4 = \text{diag}(\lambda_2, \lambda_1, \lambda_3), \quad O_4^* \circ D_S \circ O_4 = \text{diag}(\eta_2, \eta_1, \eta_3).$$

Поэтому

$$\text{diag}(\eta_2, \eta_1, \eta_3) = \phi(\text{diag}(\lambda_2, \lambda_1, \lambda_3)), \quad (7.3.5)$$

откуда, в частности, следует равенство

$$\eta_3 = \Phi_3(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \Phi_3(\lambda_2, \lambda_1, \lambda_3).$$

В силу леммы 3 найдется функция Ψ_3 такая, что

$$\Phi_3(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \Psi_3(\lambda_1 + \lambda_2, \lambda_1 \lambda_2, \lambda_3). \quad (7.3.6)$$

Учитывая, что инварианты $J_1 = J_1(T)$, $J_2 = J_2(T)$, $J_3 = J_3(T)$ выражаются через собственные значения матрицы формулами (см. п. 2.2.5)

$$J_1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, \quad J_2 = \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_2 \lambda_3 + \lambda_3 \lambda_1, \quad J_3 = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3, \quad (7.3.7)$$

равенство (7.3.6) можно продолжить следующим образом:

$$\Phi_3(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \Psi_3(J_1 - \lambda_3, J_2 - \lambda_3(J_1 - \lambda_3), \lambda_3) \stackrel{\text{def}}{=} \psi_3(J_1, J_2, \lambda_3). \quad (7.3.8)$$

Точно так же доказывается существование функций ψ_i ($i = 1, 2$), что

$$\Phi_i(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \psi_i(J_1, J_2, \lambda_i). \quad (7.3.9)$$

Теперь заметим, что из равенства (7.3.5) следуют равенства

$$\psi_2(J_1, J_2, \lambda_2) = \psi_1(J_1, J_2, \lambda_2), \quad (7.3.10)$$

$$\psi_2(J_1, J_2, \lambda_1) = \psi_1(J_1, J_2, \lambda_1). \quad (7.3.11)$$

Докажем утверждение теоремы сначала в случае, когда все собственные значения матрицы T различны. Определим числа ϕ_i^T ($i = 0, 1, 2$) как решения системы уравнений

$$\phi_0^T + \phi_1^T \lambda_i + \phi_2^T \lambda_i^2 = \Phi_i = \Phi_i(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \eta_i, \quad (i = 0, 1, 2). \quad (7.3.12)$$

Как известно, ее решение ϕ_0^T (например) задается формулой (в силу различности собственных значений λ_i определитель этой системы представляет собой определитель Вандермонда и отличен от нуля):

$$\phi_0^T = \begin{vmatrix} \Phi_1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 \\ \Phi_2 & \lambda_2 & \lambda_2^2 \\ \Phi_3 & \lambda_3 & \lambda_3^2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 \\ 1 & \lambda_3 & \lambda_3^2 \end{vmatrix}^{-1} \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{F}_0(\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3). \quad (7.3.13)$$

Очевидно, что

$$\mathcal{F}_0(\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \mathcal{F}_0(\Phi_2, \Phi_1, \Phi_3, \lambda_2, \lambda_1, \lambda_3).$$

Далее, подставляя (7.3.8) и (7.3.9) в (7.3.13), получим:

$$\begin{aligned} & \mathcal{F}_0(\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \\ & = \mathcal{F}_0[\Phi_1(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3), \Phi_2(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3), \Phi_3(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3), \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3] = \\ & = \mathcal{F}_0[\psi_1(J_1, J_2, \lambda_1), \psi_2(J_1, J_2, \lambda_2), \psi_3(J_1, J_2, \lambda_3), \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3] \stackrel{\text{def}}{=} \\ & \stackrel{\text{def}}{=} \overline{\mathcal{F}}_0(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3). \end{aligned}$$

Теперь заметим, что в силу (7.3.10) и (7.3.11)

$$\overline{\mathcal{F}}_0(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \overline{\mathcal{F}}_0(\lambda_2, \lambda_1, \lambda_3).$$

Аналогично показывается перестановочность остальных аргументов, и, таким образом, функция $\overline{\mathcal{F}}_0$ симметрична. Теми же самыми рассуждениями устанавливается существование и симметричность остальных решений $\varphi_i^T = \overline{\mathcal{F}}_i(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ ($i = 1, 2$) системы (7.3.12). Но тогда в силу леммы 4 существуют функции φ_i такие, что $\varphi_i^T = \varphi_i(J_1, J_2, J_3)$.

Осталось вернуться от диагональных матриц к исходным. Система (7.3.12) в матричном виде выглядит так:

$$\text{diag}(\eta_1, \eta_2, \eta_3) = \varphi_0^T I + \varphi_1^T \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) + \varphi_2^T [\text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)]^2,$$

или

$$D_S = \varphi_0^T I + \varphi_1^T D_T + \varphi_2^T D_T^2.$$

Умножив последнее равенство слева на матрицу O_1 , а справа — на O_1^* , получим:

$$\phi(T) = S = \varphi_0^T I + \varphi_1^T T + \varphi_2^T T^2,$$

и теорема в случае различных собственных значений матрицы T доказана.

В случае, если $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$, вместо системы (7.3.12) достаточно рассмотреть систему из двух уравнений

$$\phi_0^T + \phi_1^T \lambda_i = \Phi_i \quad (i = 1, 3)$$

и аналогичными рассуждениями получить существование функций φ_0, φ_1 таких, что

$$\phi(T) = S = \varphi_0^T I + \varphi_1^T T$$

(функция φ_2 в этом случае равна нулю).

Наконец, в случае, когда все собственные числа матрицы T одинаковы (матрица пропорциональна тождественной), утверждение теоремы тривиально:

$$F(T) = \varphi_0^T I$$

(в этом случае функции φ_1 и φ_2 равны нулю). ■

7.3.4. Представление изотропных скалярных функций

Теорема 7 (О представлении изотропной скалярной функции).

Пусть \mathcal{S}^3 — пространство симметричных 3×3 -матриц, а $\phi : \mathcal{S}^3 \rightarrow \mathbf{R}$ — изотропная функция. Тогда найдется функция $\varphi : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$ такая, что

$$\phi(T) = \varphi[J_1(T), J_2(T), J_3(T)].$$

Доказательство. Как и в доказательстве предыдущей теоремы, показывается, что $\phi(T)$ зависит только от собственных значений матрицы T , причем симметричным образом. Поэтому утверждение теоремы следует из леммы 4. ■

7.3.5. Представление изотропных векторных функций

Теорема 8 (О представлении изотропной векторной функции).

Для любой векторной изотропной функции $\phi : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ существует функция $\varphi : \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}$ такая, что

$$\phi(x) = \varphi(|x|)x. \quad (7.3.14)$$

Доказательство. Определим функцию φ равенством

$$\varphi(|x|) = \begin{cases} 0, & \text{если } \phi(x) = 0 \text{ или } x = 0, \\ \frac{x \cdot \phi(x)}{|x|^2}, & \text{если } \phi(x) \neq 0. \end{cases}$$

Мы должны доказать, во-первых, корректность определения φ , т. е. показать, что $\varphi(|x|) = \varphi(|y|)$, если $|x| = |y|$, и, во-вторых, что функция φ искомая, т. е. доказать равенство (7.3.14).

Корректность следует из изотропности функции ϕ . Действительно, если $|x| = |y|$, то найдется ортогональное преобразование O такое, что $y = O \langle x \rangle$.

Но тогда

$$\begin{aligned}\varphi(|y|) &= y \cdot \phi(y) \frac{1}{|y|^2} = O \langle x \rangle \cdot \phi(O \langle x \rangle) \frac{1}{|x|^2} = O \langle x \rangle \cdot O \langle \phi(x) \rangle \frac{1}{|x|^2} = \\ &= (O^* \circ O \langle x \rangle) \cdot \phi(x) \frac{1}{|x|^2} = x \cdot \phi(x) \frac{1}{|x|^2} = \varphi(|x|).\end{aligned}$$

Докажем (7.3.14). Если $x = 0$, то и $\phi(x) = 0$. В самом деле,

$$\phi(0) = O^* \langle \phi(0) \rangle = O \langle \phi(0) \rangle,$$

и поэтому $\phi(0) = 0$, так как O — произвольный поворот. Если $\phi(x) = 0$, то очевидно и $\varphi(|x|) = 0$, что гарантирует (7.3.14). Наконец, если x таков, что $\phi(x) \neq 0$, то сначала покажем, что $\phi(x) = ax$ ($a \in \mathbf{R}$). В самом деле, пусть O_α — ортогональное преобразование поворота вокруг вектора x на угол α . В силу изотропности ϕ

$$O_\alpha^* \langle \phi(x) \rangle = \phi(O_\alpha^* \langle x \rangle) = \phi(x),$$

т. е. вектор $\phi(x)$ не изменяется при повороте вокруг x . Это может быть только в том случае, если $\phi(x) = ax$. Но тогда

$$\varphi(x)x = \frac{x \cdot \phi(x)}{|x|^2} x = \frac{x \cdot ax}{|x|^2} x = ax = \phi(x),$$

что и требовалось доказать. ■

7.3.6. Еще раз о законе Фурье. Оказывается, что закон Фурье (см. п. 6.3.4) является следствием предположения о том, что вектор потока тепла удовлетворяет уравнению состояния (7.2.3)

$$q = F(\nabla\Theta, P)$$

и принципу независимости от системы отсчета.

Действительно, упомянутый принцип влечет требование изотропности функции F по первому аргументу (см. п. 5.2.8). Поэтому в силу теоремы 8 функция F может быть представлена в виде

$$F(\nabla\Theta, P) = -\kappa(|\nabla\Theta|, P)\nabla\Theta$$

($-\varkappa$ — это функция φ из теоремы 8). Тогда определяющее уравнение (7.2.3) записывается в виде (закона Фурье):

$$q = -\varkappa \nabla \Theta.$$

Глава 8.

МОДЕЛИ ЖИДКОСТЕЙ

Как уже говорилось, для замыкания дифференциальной (DM)-модели необходимы дополнительные уравнения, называемые определяющими. Эти уравнения уже не являются универсальными для всех сплошных сред и учитывают те или иные физические свойства конкретных сред. Говорилось также и о том, что жидкости и газы характеризуются существенной зависимостью тензора напряжений от тензора скоростей деформации и независимостью от тензора деформации. В этой главе мы более подробно рассмотрим различные модели одного класса сплошных сред, называемого *жидкостями*.

§ 8.1. Замыкание (DM)-модели жидкости

8.1.1. Основное уравнение состояния. Мы предполагаем, что уравнение состояния для жидкостей имеет вид

$$P = F(D, P, x, t). \quad (8.1.1)$$

Подчеркнем, что здесь мы уже воспользовались принципами причинности и пространственной локализации: уравнение (8.1.1) им уже удовлетворяет. Мы также предполагаем выполненным принцип независимости от системы отсчета; это проявится чуть ниже (см. п. 8.1.2). Далее в уравнении (8.1.1) мы пока не конкретизируем список термодинамических параметров P ; это также будет сделано позже (см. п. 8.1.3).

8.1.2. Однородность уравнения состояния. Однородность означает, что физические законы, которым подчиняется жидкость, неизменны во времени и пространстве.

Лемма 5 (Об однородности основного уравнения состояния). *Жидкость однородна, т. е. функция F в уравнении состояния (8.1.1) не зависит явно от x и t .*

Д о к а з а т е л ь с т в о. В самом деле, в силу принципа независимости от системы отсчета

$$P' = F(D', P', x', t'),$$

или, что то же самое,

$$O^*(t) \circ P \circ O(t) = F(O^*(t) \circ D \circ O(t), P, O^*(t) \langle x \rangle, t + \alpha).$$

В силу теоремы 5 об индифферентности основных тензоров последнее равенство переписывается в виде

$$P = F(D, P, O^*(t) \langle x \rangle, t + \alpha).$$

Таким образом, для любого ортогонального преобразования O и любого числа α имеет место тождество

$$F(D, P, O^* \langle x \rangle, t + \alpha) \equiv F(D, P, x, t). \quad (8.1.2)$$

Поэтому (если взять $O = I$) для любых t_1 и t_2

$$F(D, P, x, t_1) \equiv F(D, P, x, t_2),$$

что означает независимость F от t . Если же для любых $x_1, x_2 \in \mathbf{R}^3$ в (8.1.2) взять в качестве O ортогональное преобразование, переводящее x_1 в x_2 , а в качестве α — нуль, то получаем тождество

$$F(D, P, x_2, t) \equiv F(D, P, x_1, t),$$

означающее независимость функции F от аргумента x . ■

Таким образом, два последних аргумента у функции F опускаются и уравнение состояния (8.1.1) принимает следующий вид:

$$P = F(D, P). \quad (8.1.3)$$

Из принципа независимости от системы отсчета следует изотропность функции F по первому аргументу. Поэтому в силу теоремы 6 она может быть представлена в виде

$$F(D, P) = \varphi_0 I + \varphi_1 D + \varphi_2 D^2, \quad (8.1.4)$$

где коэффициенты φ_i ($i = 0, 1, 2$) зависят от инвариантов тензора D и па-

раметров состояния:

$$\varphi_i = \varphi_i [J_1(D), J_2(D), J_3(D), P]. \quad (8.1.5)$$

8.1.3. Аксиомы относительно уравнения состояния. Сформулируем основные аксиомы, которым должно удовлетворять уравнение состояния в нашей модели жидкости.

Аксиома идеальности гласит:

Покоящаяся жидкость идеальна, т. е. тензор напряжений в ней пропорционален тождественному.

Математически эта аксиома означает, что

$$F(0, P) = -pI,$$

где $-p$ — коэффициент пропорциональности. Величина p называется *давлением*. Элементарная работа в идеальных средах задается формулой

$$dA = pdV, \quad (8.1.6)$$

где $V = 1/\rho$ — *удельный объем*.

Термодинамическое состояние жидкости описывается пятью параметрами: $P = (\rho, U, \Theta, s, p)$, которые входят в коэффициенты (8.1.5) уравнения состояния (8.1.3). Следующая *аксиома термодинамического состояния* выделяет среди них независимые:

Жидкости являются двупараметрическими средами.

Эта аксиома означает, что из набора P только два параметра независимы, остальные выражаются через них. Обычно пространство (термодинамических) состояний P параметризуется параметрами ρ (удельная плотность) и s (удельная энтропия). Аксиома термодинамического состояния требует, чтобы были известны функции, выражающие U , Θ и p через ρ и s . Но если мы знаем функцию $U = U(\rho, s)$, то в силу основного термодинамического тождества (6.2.3), которое для идеальных жидкостей (см. (8.1.6)) имеет вид

$$\Theta ds = dU + pdV, \quad (8.1.7)$$

остальные функции можно выразить через U .

Действительно, подставляя $U = U(\rho, s)$ и $V = 1/\rho$ в основное термоди-

намическое тождество (8.1.7), имеем:

$$\Theta ds = \frac{\partial U(\rho, s)}{\partial \rho} d\rho + \frac{\partial U(\rho, s)}{\partial s} ds - p \frac{1}{\rho^2} d\rho,$$

отсюда, учитывая независимость ρ и s , получаем выражения

$$\Theta(\rho, s) = \frac{\partial U(\rho, s)}{\partial s}, \quad p(\rho, s) = \rho^2 \frac{\partial U(\rho, s)}{\partial \rho}. \quad (8.1.8)$$

Коэффициент теплопроводности \varkappa также считается функцией (ρ, s) . Кроме того, нуждаются в описании зависимости коэффициентов (8.1.5) от инвариантов тензора скоростей деформации $J = (J_1, J_2, J_3)$ и параметров состояния ρ, s :

$$\varphi_i = \varphi_i(J, \rho, s) \quad (i = 0, 1, 2). \quad (8.1.9)$$

Отметим, что аксиома идеальности позволяет вычислить коэффициент φ_0 при $J = 0$:

$$\varphi_0(0, \rho, s) = -p. \quad (8.1.10)$$

8.1.4. Первая замкнутая модель жидкости. Предположим, что из экспериментальных данных или каких-либо теоретических предположений известны функции (8.1.9), а также функция $\varkappa(\rho, s)$. Тогда уравнения

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} v = 0, \\ \rho \frac{dv}{dt} = \operatorname{div} P + \rho f, \\ \rho \frac{dU}{dt} = P : D + \operatorname{div} (\varkappa \nabla \Theta), \\ P = \varphi_0 I + \varphi_1 D + \varphi_2 D^2 \end{array} \right. \quad (8.1.11)$$

образуют замкнутую модель. В самом деле, после исключения тензора P из этой системы с помощью последнего уравнения получится пять скалярных уравнений для пяти скалярных неизвестных — трех компонент вектора скорости, плотности и удельной энтропии.

§ 8.2. Классическая модель жидкости

Модель (8.1.11) непомерно трудна для использования, поскольку она, во-первых, весьма и весьма сложна как математический объект, а во-вторых, требует знания большого числа функций состояния $(U, \varkappa, \varphi_i)$.

Эти функции (особенно первые две) для конкретной жидкости есть результат обработки экспериментальных данных. Разработка и проведение экспериментов, результатом которых является знание этих функций, сама по себе сложная и дорогостоящая научная задача. Поэтому мы попытаемся упростить модель исходя из дополнительных аксиом, которые хотя и сужают класс рассматриваемых жидкостей, тем не менее, с одной стороны, оставляют в классе много типов жидкостей, а с другой — существенно упрощают математическую модель.

8.2.1. Аксиома линейности. Одной из таких дополнительных аксиом является *аксиома линейности*:

Тензор напряжений P зависит от тензора скоростей деформации D линейно.

Эта аксиома сразу же влечет три следующих вывода относительно коэффициентов (8.1.5) тензора напряжений (8.1.4):

- $\varphi_2 \equiv 0$;
- коэффициент φ_1 не зависит от инвариантов тензора D , поэтому

$$\varphi_1 = \varphi_1(\rho, s) \stackrel{\text{def}}{=} 2\mu(\rho, s);$$

- поскольку только один инвариант тензора, а именно след $\text{tr } D (= \text{div } v)$ линейно зависит от D , то коэффициент φ_0 зависит только от $\text{tr } D$. Таким образом, (здесь мы используем (8.1.10))

$$\varphi_0 = \varphi_0(\text{tr } D, \rho, s) = \varphi_0(0, \rho, s) + \lambda(\rho, s)\text{tr } D = -p(\rho, s) + \lambda(\rho, s)\text{div } v.$$

Следовательно, выражение для тензора напряжений принимает следующий вид:

$$P = (-p + \lambda \text{div } v)I + 2\mu D. \quad (8.2.1)$$

Отметим, что коэффициенты $\lambda = \lambda(\rho, s)$ и $\mu = \mu(\rho, s)$ называются *первым* и *вторым коэффициентами вязкости*.

8.2.2. Уравнения классической модели жидкости. Аксиома линейности, вернее ее следствие (8.2.1), позволяет вычислить в модели (8.1.11) выражения $\operatorname{div} P$ и $P : D$. Для первого из них получаем следующую формулу:

$$\operatorname{div} P = -\nabla p + \nabla(\lambda \operatorname{div} v) + \operatorname{div}(2\mu D)$$

(здесь мы воспользовались очевидным равенством $\operatorname{div}(\varphi(x)I) = \operatorname{grad} \varphi$, выполненным для любой гладкой функции $\varphi : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$).

Для вычисления $P : D$ введем *девиатор* тензора D формулой

$$D' = D - \frac{1}{3}(\operatorname{div} v)I$$

и определим *диссипативную функцию* Φ формулой

$$\Phi = \left(\lambda + \frac{2}{3}\mu \right) (\operatorname{div} v)^2 + 2\mu D' : D.$$

Тогда, учитывая, что $\operatorname{tr} D = \operatorname{tr} D^* = \operatorname{div} v$, а также, что

$$D' : D = \operatorname{tr} \left[\left(D - \frac{1}{3}(\operatorname{div} v)I \right)^* \circ D \right] = \operatorname{tr} D^* \circ D - \frac{1}{3}(\operatorname{div} v)^2,$$

имеем:

$$\begin{aligned} P : D &= \operatorname{tr}(P^* \circ D) = \operatorname{tr} \left[[(-p + \lambda \operatorname{div} v)I + 2\mu D]^* \circ D \right] = \\ &= \operatorname{tr}(-pD) + \operatorname{tr}[\lambda(\operatorname{div} v)D] + \operatorname{tr}(2\mu D^* \circ D) = \\ &= -p \operatorname{div} v + \lambda(\operatorname{div} v)^2 + 2\mu \operatorname{tr}(D^* \circ D) = \\ &= -p \operatorname{div} v + \lambda(\operatorname{div} v)^2 + \frac{2}{3}\mu(\operatorname{div} v)^2 + 2\mu \operatorname{tr}(D^* \circ D) - \frac{2}{3}\mu(\operatorname{div} v)^2 = \\ &= -p \operatorname{div} v + \left(\lambda + \frac{2}{3}\mu \right) (\operatorname{div} v)^2 + 2\mu D' : D = -p \operatorname{div} v + \Phi. \end{aligned}$$

Дифференцируя основное термодинамическое тождество по t и умножая результат на ρ , получаем:

$$\rho \frac{dU}{dt} = \rho \Theta \frac{ds}{dt} - p \rho \frac{dV}{dt}.$$

Слагаемое $p\rho dV/dt$ из правой части вычисляется с помощью уравнения неразрывности:

$$p\rho\frac{dV}{dt} = p\rho\frac{d(1/\rho)}{dt} = p\rho\left(-\frac{1}{\rho^2}\right)\frac{d\rho}{dt} = -p\frac{1}{\rho}(-\rho\operatorname{div}v) = p\operatorname{div}v,$$

поэтому

$$\rho\frac{dU}{dt} = \rho\Theta\frac{ds}{dt} - p\operatorname{div}v.$$

Подставляя вычисленные выражения в модель (8.1.11), получим следующую так называемую *классическую* модель жидкости:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\rho}{dt} + \rho\operatorname{div}v = 0, \\ \rho\frac{dv}{dt} = -\nabla p + \nabla(\lambda\operatorname{div}v) + \operatorname{div}(2\mu D) + \rho f, \\ \rho\Theta\frac{ds}{dt} = \operatorname{div}(\varkappa\nabla\Theta) + \Phi. \end{array} \right. \quad (8.2.2)$$

В этой модели $U, \lambda, \mu, \varkappa$ считаются заданными функциями независимых параметров состояния (ρ, s) , а p, ρ, Θ, s связаны соотношениями (8.1.8). Модель (8.2.2) вместе с (8.1.8) составляют пять скалярных уравнений для пяти скалярных неизвестных ρ, v, s .

§ 8.3. Модели несжимаемой жидкости

Классическая модель (8.2.2) все еще остается достаточно сложной как в математическом плане, так и в плане применимости ее к описанию конкретных жидкостей. Последнее связано с необходимостью знать четыре функции состояния — $U, \lambda, \mu, \varkappa$. Эти функции могут быть получены только из экспериментальных или общетеоретических соображений, и их нахождение представляет собой отдельную весьма трудную задачу. Поэтому мы, продолжая двигаться по избранному пути, рассмотрим частные случаи этой модели, сужая класс описываемых ею жидкостей (находясь в классе аксиомы линейности).

8.3.1. Несжимаемая жидкость. Опыт показывает, что в довольно широком классе течений многих жидкостей даже большие изменения давления не приводят к существенному изменению плотности. Поэтому в

таком классе плотность можно считать константой. Проследим за математическими следствиями предположения $\rho = \text{const}$.

Во-первых, среда сразу же становится в термодинамическом смысле *однопараметрической*. В качестве независимого параметра в этом случае обычно выбирается абсолютная температура Θ .

Во-вторых, давление перестает быть термодинамическим параметром состояния, поскольку перестает участвовать в основном термодинамическом тождестве. В самом деле, поскольку $V = 1/\rho = \text{const}$, то $dV = 0$, и слагаемое $p dV$ исчезает из основного термодинамического тождества. Более того, основное термодинамическое тождество принимает вид

$$dU = \Theta ds, \quad (8.3.1)$$

свидетельствующий о том, что приток тепла в среду идет только на увеличение ее внутренней энергии. Это, как мы увидим ниже, позволяет выделить уравнение притока тепла из модели и решать его независимо. Пока же мы исключим его из модели.

Так как $\rho = \text{const}$, уравнение неразрывности принимает вид

$$\text{div } v = 0,$$

поэтому вязкость λ перестает играть какую-либо роль в модели (она фигурирует только в уравнении сохранения импульса с множителем $\text{div } v$). Таким образом, остается только вязкость μ . Удобно и принято вместо μ ввести *коэффициент кинематической вязкости* $\nu = \mu/\rho$. В общем случае коэффициент кинематической вязкости может довольно сильно зависеть от температуры $\nu = \nu(\Theta)$ (например, в магматических расплавах вязкость в зависимости от температуры может отличаться на несколько порядков). Однако в простейшей модели, рассматриваемой нами, мы будем считать, что $\nu = \text{const}$. Такое ограничение оставляет класс описываемых жидкостей достаточно широким.

Упростим уравнение сохранения импульса. Для этого достаточно заметить, что

$$\text{div} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^* = \nabla(\text{div } v), \quad \text{div} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) = \Delta v$$

(здесь Δ — оператор Лапласа), и поэтому в силу постоянства μ

$$\text{div} (2\mu D) = \text{div} \left[2\mu \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^* \right) \right] = \mu \Delta v.$$

Уравнение неразрывности и уравнение сохранения импульса (после деления его на ρ) составляют *математическую модель вязкой несжимаемой жидкости*:

$$\begin{cases} \operatorname{div} v = 0, \\ \frac{dv}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta v + f. \end{cases} \quad (8.3.2)$$

Эта система уравнений называется *системой уравнений Навье — Стокса* и представляет собой систему из четырех скалярных уравнений для четырех скалярных неизвестных v, p . Модель (8.3.2) — одна из наиболее широко применяющихся моделей жидкости.

8.3.2. Об уравнении притока тепла. Тот факт, что приток тепла идет только на изменение внутренней энергии (см. формулу 8.3.1), означает, что среда обладает свойством воспринимать тепловую энергию при неизменном объеме. Это свойство называется *теплоемкостью* и характеризуется величиной

$$C_V = \frac{\partial U(\Theta, V)}{\partial \Theta}.$$

Функция $C_V(\Theta)$ определяется экспериментально и известна для широкого спектра сред. Таким образом, $dU = C_V d\Theta$. Но тогда уравнение притока тепла можно записать в виде

$$\rho C_V \frac{d\Theta}{dt} = \operatorname{div} (\kappa \nabla \Theta) + 2\nu \rho (D' : D)$$

(здесь мы учли, что $\operatorname{div} v = 0$), или после деления на ρC_V :

$$\frac{d\Theta}{dt} = \frac{1}{\rho C_V} \operatorname{div} (\kappa \nabla \Theta) + \Phi',$$

где диссипативная функция определяется формулой

$$\Phi' = \frac{2\nu}{C_V} D' : D. \quad (8.3.3)$$

Поэтому тепловые потоки в среде не влияют на движение среды и могут быть найдены уже после нахождения v, p .

Построенная модель Навье — Стокса обладает многими достоинствами, обуславливающими ее широкую распространенность. Одним из основных является тот факт, что в ней фигурируют только две константы (не функции!), нуждающиеся в экспериментальном нахождении: это плотность ρ и

кинематическая вязкость ν . Эти константы с большой степенью точности и надежности определяются экспериментально.

8.3.3. Модель идеальной жидкости. Последним из рассматриваемых нами упрощений модели сплошной среды будет отказ от учета эффектов, вызванных наличием вязкости. В ряде течений вязкие эффекты, т. е. эффекты, связанные со свойством жидкостей сопротивляться сдвиговым напряжениям, оказываются несущественными. В этих моделях можно положить кинематическую вязкость ν равной нулю. Такие жидкости называются *идеальными*. В результате мы получаем *математическую модель идеальной несжимаемой жидкости*:

$$\begin{cases} \operatorname{div} v = 0, \\ \frac{dv}{dt} + \frac{1}{\rho} \nabla p = f. \end{cases} \quad (8.3.4)$$

Эта система уравнений называется *системой уравнений Эйлера*.

Из формулы (8.3.3) следует, что для идеальной несжимаемой жидкости $\Phi' \equiv 0$, поэтому уравнение притока тепла переписывается в виде

$$\frac{d\Theta}{dt} = \frac{1}{\rho C_V} \operatorname{div} (\varkappa \nabla \Theta).$$

Если рассматривать жидкости, в которых коэффициенты \varkappa и C_V являются константами (это предположение выполняется для достаточно широкого класса жидкостей), то последнее уравнение превращается в обычное уравнение теплопроводности:

$$\frac{d\Theta}{dt} = K \Delta \Theta, \quad (8.3.5)$$

где $K = \varkappa / \rho C_V$ называется *коэффициентом температуропроводности*.

Подчеркнем в заключение, что описанные нами модели сплошной среды исторически появлялись в обратном порядке, т. е. развитие теории сплошных сред шло в основном индуктивно, от частных моделей к более общим.

З А Д А Ч И

8.3.1. Преобразовать уравнение неразрывности $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho v) = 0$ к виду $\frac{\partial \rho}{\partial t} + v \nabla \rho + \rho \operatorname{div} v = 0$.

8.3.2. Несжимаемая жидкость движется с полем скорости

$$v = A \left(\frac{x^2 - y^2}{r^4}, \frac{2xy}{r^4}, 0 \right), \quad r^2 = x^2 + y^2, \quad A = \text{const.}$$

Доказать, что такое поле скорости удовлетворяет уравнению неразрывности.

8.3.3. Показать, что поле скоростей $v = A \left(\frac{x}{r^3}, \frac{y}{r^3}, \frac{z}{r^3} \right)$, $A = \text{const}$, $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ удовлетворяет уравнению неразрывности несжимаемой жидкости.

Ответы, указания, решения

1.1.1. Р е ш е н и е. Плоский откос, изображенный на рис. 3, описывается линейной функцией

$$y = h_{bt}(x) = -x \operatorname{tg} \theta, \quad (1)$$

где $\theta > 0$ — угол наклона откоса. По откосу движется оползень, который согласно условию задачи представляет собой твердое тело заданной формы. Предположим, что это тело имеет конечную протяженность, известный объем V и известную плотность ρ_{sl} материала, из которого оно сложено.

При моделировании оползня твердым телом закон его прямолинейного движения по откосу (1) задается законом движения любой из его точек, например, законом движения точки $\mathbf{x}_c(t)$, имеющей абсциссу $x_c(t)$ и ординату $y_c(t) = h_{bt}(x_c(t))$, т. е. точки, скользящей вдоль откоса. Обозначим через x_c^0 начальную абсциссу выделенной точки: $x_c(0) = x_c^0$.

Пусть s — параметр, равный расстоянию, отсчитываемому от начала координат вдоль плоского откоса. Тогда абсцисса x точки, лежащей на откосе, и параметр s для этой точки связаны равенством

$$s = \frac{x}{\cos \theta}. \quad (2)$$

Предположим, что в начальный момент времени точка $\mathbf{x}_c(0)$ соответствует параметру $s = S_0$, а движущаяся точка $\mathbf{x}_c(t)$ — параметру $s = S(t)$. Тогда закон движения $s = S(t)$ первоначально покоящейся материальной точки $\mathbf{x}_c(t)$ вдоль откоса (1) определяется как решение следующей задачи Коши для уравнения движения [24]:

$$m\ddot{S}(t) = F_\tau(t), \quad (3)$$

$$S(0) = S_0, \quad \dot{S}(0) = 0, \quad (4)$$

где $\ddot{S} = \frac{d^2S}{dt^2}$, $\dot{S} = \frac{dS}{dt}$, m — величина, имеющая размерность массы, $F_\tau(t)$ — сила, направленная вдоль откоса и действующая в момент времени t на движущуюся точку $\mathbf{x}_c(t)$.

Перейдем теперь к рассмотрению иерархии математических моделей исследуемого явления.

Модель М1. Учитывается масса оползня M и сила тяжести. Таким

образом,

$$m = M = \rho_{sl}V; \quad F_{\tau} = Mg \sin \theta$$

и задача (3), (4) принимает вид

$$\begin{aligned} M\ddot{S}(t) &= Mg \sin \theta, \\ S(0) &= S_0, \quad \dot{S}(0) = 0, \end{aligned} \quad (5)$$

где g — ускорение свободного падения. Решение задачи (5) описывается формулой

$$S(t) = S_0 + \frac{gt^2}{2} \sin \theta,$$

из которой следует, что скорость движения оползня

$$v(t) = \dot{S}(t) = gt \sin \theta$$

неограниченно растет со временем, что противоречит реальности, в которой рано или поздно оползень должен остановиться.

Модель М2. Учтем теперь присоединенную массу воды. Движущийся оползень вовлекает в движение некоторую часть прилегающей к нему воды, поэтому в уравнении (3) в качестве величины m будем брать суммарную массу оползня и присоединенную массу воды $C_w\rho_wV$, т. е.

$$m = M + C_w\rho_wV = (\rho_{sl} + C_w\rho_w)V,$$

где ρ_w — плотность воды, C_w — коэффициент присоединенной массы. Величина этого коэффициента зависит от формы движущегося в жидкости тела [19, 32]. В частности, если в жидкости движется шар, то $C_w = 0,5$, для цилиндра — $C_w = 1$.

С учетом сделанных предположений задача (3), (4) примет вид

$$\begin{aligned} (\rho_{sl} + C_w\rho_w)V\ddot{S}(t) &= \rho_{sl}Vg \sin \theta, \\ S(0) &= S_0, \quad \dot{S}(0) = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Решение этой задачи задается формулой

$$S(t) = S_0 + \frac{\gamma}{\gamma + C_w} \cdot \frac{gt^2}{2} \sin \theta,$$

где через $\gamma = \rho_{sl}/\rho_w$ обозначено отношение плотности материала оползня к плотности воды, $\gamma > 1$. Поскольку $\gamma/(\gamma + C_w) < 1$, то скорость движения

оползня

$$v(t) = \frac{\gamma}{\gamma + C_w} gt \sin \theta$$

в модели М2 стала меньше, чем в модели М1, однако и она не соответствует действительности из-за неограниченного роста при $t \rightarrow \infty$. Таким образом, упрощающие предположения, положенные в основу модели М2, оказались недостаточными, и необходимо учесть какие-то дополнительные факторы, влияющие на движение оползня.

Модель М3. Дополнительно учтем силу плавучести (силу Архимеда, равную весу вытесненной телом жидкости). Эта сила, как и сила тяжести, действует в вертикальном, но противоположном направлении, а ее составляющая, касательная к плоскому откосу, равна $-\rho_w V g \sin \theta$. Поэтому уравнение движения (3) запишется как

$$(\rho_{sl} + C_w \rho_w) V \ddot{S} = (\rho_{sl} - \rho_w) V g \sin \theta. \quad (7)$$

Решение задачи (7), (4) дается теперь формулой

$$S(t) = S_0 + \frac{\gamma - 1}{\gamma + C_w} \cdot \frac{gt^2}{2} \sin \theta,$$

а для скорости получаем выражение

$$v(t) = \frac{\gamma - 1}{\gamma + C_w} gt \sin \theta.$$

Видим, что учет силы Архимеда опять приводит к уменьшению значений скорости (по сравнению с моделью М2), однако и в этой модели скорость оползня неограниченно растет с ростом времени. Следовательно, и эта модель не является приемлемой и требует дальнейшей модификации.

Модель М4. Примем теперь во внимание свойство жидких и газообразных сред оказывать сопротивление движущимся в них телам. Сила сопротивления является пассивной, т. е. она проявляется только при движении тела: при отсутствии движения эта сила равна нулю, а для движущегося тела с ростом его скорости возрастает и сопротивление среды. Сила сопротивления направлена против направления движения, и при малых ускорениях она пропорциональна скорости движения тела, т. е. равна $-\mu \dot{S}$, при этом коэффициент μ зависит от размеров тела, плотности среды (воды в данном случае), ее вязкости и т. д.

Итак, при учете силы сопротивления уравнение движения будет отличаться от уравнения (7) наличием дополнительного члена, отвечающего за

эту силу:

$$(\rho_{sl} + C_w \rho_w) V \ddot{S} = (\rho_{sl} - \rho_w) V g \sin \theta - \mu \dot{S}. \quad (8)$$

Из вида этого уравнения следует, что движение оползня не является равноускоренным ($\dot{S} \neq \text{const}$), как было в рассмотренных ранее моделях. Считая, что при $t = 0$ уравнение (8) выполняется, и учитывая начальное условие $\dot{S}(0) = 0$, получаем следующее выражение для начального ускорения:

$$a_0 = \ddot{S}(0) = \frac{\gamma - 1}{\gamma + C_w} g \sin \theta > 0, \quad (9)$$

т. е. ускорение при $t = 0$ такое же, как в модели М3. Но если в модели М3 ускорение остается равным a_0 при всех $t > 0$, то в модели М4 оно с ростом времени убывает.

Продолжая анализ уравнения (8), можно сделать следующее утверждение. Если в некоторый момент времени ускорение станет равным нулю, то скорость в этот момент примет значение

$$v_\infty = \frac{\rho_w}{\mu} (\gamma - 1) V g \sin \theta > 0. \quad (10)$$

Пусть τ — время, за которое достигалась бы скорость v_∞ , если бы оползень двигался из состояния покоя равноускоренно с постоянным ускорением a_0 , т. е.

$$\tau = \frac{v_\infty}{a_0} = \frac{\rho_w}{\mu} V (\gamma + C_w) > 0. \quad (11)$$

Используя введенные обозначения, перепишем уравнение (8) в более компактной форме

$$\ddot{S} = a_0 - \frac{\dot{S}}{\tau} \quad (12)$$

и будем искать решение этого линейного уравнения в виде суммы общего решения $S_1(t) = \alpha + \beta e^{-t/\tau}$ однородного уравнения и частного решения $S_2(t) = v_\infty t$ неоднородного, т. е.

$$S(t) = \alpha + \beta e^{-t/\tau} + v_\infty t.$$

С учетом начальных условий (4) получаем, что

$$S(t) = S_0 + v_\infty t - \tau v_\infty (1 - e^{-t/\tau}) \quad (13)$$

и

$$v(t) = \dot{S}(t) = v_\infty (1 - e^{-t/\tau}). \quad (14)$$

Итак, в предыдущих моделях движение оползня было равноускоренным, из-за чего скорость неограниченно росла при $t \rightarrow \infty$. Теперь же движение является ускоренным, но с монотонно убывающим при $t \rightarrow \infty$ ускорением

$$\ddot{S}(t) = a_0 e^{-t/\tau} \rightarrow 0, \quad (15)$$

вследствие чего величина скорости (14), приближаясь к значению v_∞ , остается ограниченной при $t \rightarrow \infty$.

Модель М5. Еще одной силой, тормозящей движение оползня, является сила трения о дно

$$F_{\text{тр}} = -k_{\text{тр}} (\rho_{sl} - \rho_w) V g \cos \theta,$$

которая направлена вдоль откоса в сторону, обратную направлению движения оползня. Здесь $k_{\text{тр}}$ — коэффициент трения. Как и сила сопротивления, сила трения является пассивной, поскольку ее влияние на положение оползня будет проявляться только при его движении (при $\dot{S} \neq 0$).

Итак, в модели М5 уравнение движения будет иметь следующий вид:

$$(\rho_{sl} + C_w \rho_w) V \ddot{S} = (\rho_{sl} - \rho_w) V g (\sin \theta - k_{\text{тр}} \cos \theta) - \mu \dot{S}. \quad (16)$$

Аналогами величин (9)—(11) будут теперь начальное ускорение a_0 , предельная скорость v_∞ и характерное время τ , определяемые соответственно выражениями

$$a_0 = \frac{\gamma - 1}{\gamma + C_w} g (\sin \theta - k_{\text{тр}} \cos \theta), \quad (17)$$

$$v_\infty = \frac{\rho_w}{\mu} (\gamma - 1) V g (\sin \theta - k_{\text{тр}} \cos \theta), \quad (18)$$

$$\tau = \frac{v_\infty}{a_0} = \frac{\rho_w}{\mu} V (\gamma + C_w). \quad (19)$$

Неравенство $a_0 > 0$ является условием начала движения первоначально покоящегося оползня, условием его сдвига из начального положения. В предыдущих моделях это условие выполнялось всегда и оползень начинал движение при любом угле наклона подводного откоса, даже на очень пологом откосе, что не соответствует действительности. В этом смысле модель М5 более реалистическая, поскольку для нее оползень начинает движение только при выполнении условия

$$k_{\text{тр}} < \text{tg } \theta.$$

Если это условие выполнено, то оползень начнет движение с начальным ускорением a_0 , меньшим начального ускорения (9) модели М4. Соответственно и предельная скорость v_∞ в модели М5 получается меньшей, чем в модели М4, в которой сила трения не учитывается. Характерное же время τ в этих моделях одинаково. Одинаковыми являются и формулы для решения (13), скорости (14) и ускорения (15).

Модели М6, М7, . . . Принимая во внимание другие факторы, влияющие на движение оползня, можно продолжить иерархическую цепочку, присоединяя к ней все более полные математические модели.

Например, использованная нами формула Стокса $F = -\mu\dot{S}$ для вычисления силы сопротивления справедлива только для движений с постоянной скоростью или движений с небольшими ускорениями. В общем случае для вычисления силы сопротивления следует пользоваться уточненной формулой Стокса $F = -\mu\dot{S}^\alpha$, где α — положительная постоянная, зависящая от свойств среды. Заметим, что при $\alpha \neq 1$ уравнение движения становится нелинейным, что значительно осложняет поиск его решения.

В реальной ситуации склон, по которому движется оползень, не бывает плоским, поэтому необходимо учесть неровность дна, а также пространственный характер изменения его формы, т. е. изменчивость дна не только в плоскости Oxy (см. рис. 3), но и в направлении, перпендикулярном этой плоскости.

Мы рассмотрели модели, в которых оползень представлялся в виде материальной точки и использовалась единственная его геометрическая характеристика — объем. Следующий шаг к получению более точных результатов моделирования состоит в учете пространственной формы оползня, а также в отказе от представления оползня в виде твердого тела, т. е. в учете свойства деформируемости оползня. Например, можно моделировать движение оползневой массы течением жидкости, отличающейся от воды по плотности, вязкости и т. п., либо движением некоторой упругопластической среды [14, 15, 23]. Наиболее сложные модели получаются при решении «связанных» задач, в которых учитывается как влияние движения оползня на течение воды с образованием поверхностных волн, так и обратное влияние.

1.1.2. Р е ш е н и е. На основе закона Ньютона (1.1.7) получаем, что учет волнового давления приводит к замене уравнения (1.1.8) следующим уравнением

$$m\ddot{s} = -ks - F_0 \cos \omega_1 t. \quad (20)$$

Решение этого уравнения находится как сумма общего решения (1.1.9) уравнения (1.1.8) и частного решения $s_1(t) = \gamma \cos \omega_1 t$ уравнения (20), т. е.

$$s(t) = \alpha \sin \omega t + \beta \cos \omega t + \gamma \cos \omega_1 t.$$

Подставляя это выражение в (20), находим

$$\gamma = \frac{F_0}{m(\omega_1^2 - \omega^2)}.$$

Следовательно, решение задачи (20), (1.1.10) дается формулой

$$s(t) = \left(a - \frac{F_0}{m(\omega_1^2 - \omega^2)} \right) \cos \omega t + \frac{F_0}{m(\omega_1^2 - \omega^2)} \cos \omega_1 t. \quad (21)$$

Из формулы для решения (21) следует, что если частоты ω и ω_1 соизмеримы (отношение ω/ω_1 является рациональным числом), то функция $s(t)$ является периодической, иначе — непериодической. Кроме того, при приближении частоты внешней силы ω_1 к частоте упругих колебаний ω амплитуда колебаний стенки неограниченно растет — возникает явление резонанса.

Используя принцип «от простого к сложному», можно построить иерархию все более полных математических моделей, описывающих движение вертикальной стенки, прикрепленной пружинами к неподвижному блоку и подверженной воздействию новых внешних сил, не учтенных ранее. Например, можно дополнительно учесть силу трения стенки о дно $F_{\text{тр}} = k_{\text{тр}} mg \operatorname{sgn} \dot{s}$, где $k_{\text{тр}}$ — коэффициент трения, $\operatorname{sgn} \dot{s}$ — знак скорости. Еще более полная модель получится, если принять во внимание сопротивление воды движению стенки. Можно учесть присоединенную массу воды — движущаяся стенка вовлекает в движение некоторую часть прилегающей к ней воды, поэтому в уравнении (20) массу этой воды необходимо добавить к массе стенки m . Модель будет более точной, если учитывать, что коэффициент жесткости зависит от величины деформации ($k = k(s) \neq \operatorname{const}$). Еще более сложные модели получаются при учете обратного воздействия движущейся стенки на волновой режим прилегающей акватории, который описывается своей иерархией гидродинамических моделей течения жидко-

сти со свободной границей [19, 32]. Выбор той или иной модели определяется целями исследования, требуемой детальностью описания процесса.

1.2.1. Р е ш е н и е. Подставив выражение (1.2.3) в начальные условия (1.2.2), найдем постоянные α и β :

$$\alpha = \frac{a}{2} \frac{\tau\omega}{\sqrt{1 - \tau^2\omega^2/4}}; \quad \beta = a.$$

Следовательно, для разности между приближенным решением (1.2.3) и точным (1.1.11) имеем равенство

$$s_j - s(t_j) = \frac{a}{2} \frac{\tau\omega}{\sqrt{1 - \tau^2\omega^2/4}} \sin j\varphi + a(\cos j\varphi - \cos \omega t_j). \quad (22)$$

Выберем шаг τ настолько малым, чтобы выполнялось неравенство

$$\sqrt{1 - \frac{\tau^2\omega^2}{4}} > \frac{1}{2}.$$

Тогда будет верна оценка

$$|s_j - s(t_j)| \leq a\omega \cdot \tau + a|\cos j\varphi - \cos j\omega\tau|. \quad (23)$$

Применяя теорему о среднем, получаем, что

$$\cos j\varphi - \cos j\omega\tau = -\sin(\theta)[j(\varphi - \omega\tau)],$$

где точка θ лежит на вещественной оси между точками $j\varphi$ и $j\omega\tau$. Следовательно,

$$|\cos j\varphi - \cos j\omega\tau| \leq j|\varphi - \omega\tau|. \quad (24)$$

Используя известные из курса математического анализа неравенства

$$0 < \sin \varphi < \varphi < \operatorname{tg} \varphi, \quad (25)$$

где $\varphi \in (0, \pi/2)$, приходим к оценке

$$|\varphi - \omega\tau| \leq \max \left\{ |\sin \varphi - \omega\tau|; |\operatorname{tg} \varphi - \omega\tau| \right\}. \quad (26)$$

С учетом равенств

$$\cos \varphi = 1 - \frac{\tau^2 \omega^2}{2}; \quad \sin \varphi = \tau \omega \sqrt{1 - \frac{\tau^2 \omega^2}{4}}; \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{\tau \omega \sqrt{1 - \frac{\tau^2 \omega^2}{4}}}{1 - \frac{\tau^2 \omega^2}{2}}$$

оценку (26) можно переписать следующим образом:

$$\begin{aligned} |\varphi - \omega \tau| &\leq \tau \omega \cdot \max \left\{ 1 - \sqrt{1 - \frac{\tau^2 \omega^2}{4}}; \frac{\sqrt{1 - \frac{\tau^2 \omega^2}{4}}}{1 - \frac{\tau^2 \omega^2}{2}} - 1 \right\} = \\ &= \tau \omega \cdot \left(\frac{\sqrt{1 - \frac{\tau^2 \omega^2}{4}}}{1 - \frac{\tau^2 \omega^2}{2}} - 1 \right). \end{aligned}$$

Последнее равенство выполняется при малых значениях шага τ . Кроме того, при малых значениях τ верна оценка

$$\frac{\sqrt{1 - \frac{\tau^2 \omega^2}{4}}}{1 - \frac{\tau^2 \omega^2}{2}} - 1 < \frac{\tau^2 \omega^2}{2}.$$

Подставляя полученные оценки в неравенство (24), получаем, что

$$|\cos j\varphi - \cos j\omega\tau| \leq j \frac{\tau^3 \omega^3}{2} \leq \frac{T\omega^3}{2} \tau^2, \quad (27)$$

где T — конечный момент времени ($T = N\tau$). Следовательно, оценка (23) может быть записана в следующем виде:

$$|s_j - s(t_j)| \leq a\omega \cdot \tau + \frac{aT\omega^3}{2} \tau^2.$$

Учитывая, что $\tau^2 \ll \tau$, отсюда сразу получаем требуемое неравенство (1.2.4), которое означает сходимость приближенного решения к точному при $N \rightarrow \infty$ ($\tau \rightarrow 0$), причем сходимость с первым порядком по τ .

В курсе «Методы вычислений» [36] будут рассмотрены иные приемы исследования сходимости приближенного решения к точному, позволяющие выполнить такое исследование гораздо проще приведенного выше доказательства.

1.2.2. У к а з а н и е. Используя общее решение (1.2.3) уравнения (1.2.1), покажите, что решением дискретной задачи (1.2.1), (1.2.5) является сеточная функция

$$s_j = a \cos j\varphi.$$

Следовательно,

$$s_j - s(t_j) = a \left(\cos j\varphi - \cos \omega t_j \right).$$

Далее воспользуйтесь доказанной оценкой (27).

2.1.1. У к а з а н и е. Покажите, что при

$$g = \frac{\varepsilon^2}{4\gamma}$$

решение задачи (2.1.7) задается формулой

$$x(t) = \frac{1}{\gamma t + \frac{1}{x_0 - x_*}} + x_*, \quad x_* = \frac{\varepsilon}{2\gamma},$$

поэтому численность популяции будет монотонно уменьшаться, приближаясь к уровню $x = x_*$.

Если

$$g < \frac{\varepsilon^2}{4\gamma},$$

то решение описывается формулой

$$x(t) = \frac{x_1(x_0 - x_2) - x_2(x_0 - x_1)e^{\gamma(x_2 - x_1)t}}{x_0 - x_2 - (x_0 - x_1)e^{\gamma(x_2 - x_1)t}},$$

где

$$x_1 = \frac{\varepsilon - \sqrt{\varepsilon^2 - 4\gamma g}}{2\gamma}, \quad x_2 = \frac{\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 - 4\gamma g}}{2\gamma}.$$

Следовательно, популяция также сохранится, причем она будет стабилизироваться на более высоком уровне $x = x_2 > x_*$, чем в первом случае.

И наконец, рассмотрите случай

$$g > \frac{\varepsilon^2}{4\gamma}$$

и покажите, что теперь задача имеет решение

$$x(t) = \frac{1}{2\gamma} \left[\varepsilon + p \operatorname{tg} \left(-\frac{p}{2} t + C \right) \right],$$

где

$$p = \sqrt{4\gamma g - \varepsilon^2}, \quad C = \operatorname{arctg} \left(\frac{2x_0\gamma - \varepsilon}{p} \right).$$

Видно, что в этом случае вся популяция будет уничтожена к некоторому моменту времени. Найдите этот момент времени.

2.1.2. У к а з а н и е. Покажите, что при $g = \delta x$ решение задачи (2.1.7) задается формулой

$$x(t) = \begin{cases} \frac{x_0}{1 + \gamma x_0 t} & \text{при } \delta = \varepsilon, \\ \frac{x_0 x_* e^{(\varepsilon - \delta)t}}{x_* + x_0 (e^{(\varepsilon - \delta)t} - 1)} & \text{при } \delta \neq \varepsilon, \end{cases}$$

где $x_* = (\varepsilon - \delta)/\gamma$. Следовательно, при $\delta \geq \varepsilon$ численность популяции с ростом времени стремится к нулю, а при $\delta < \varepsilon$ стабилизируется на более низком уровне x_* , чем при отсутствии вылова.

2.2.1. У к а з а н и е. Качественный анализ решений системы уравнений (2.2.27) проводится аналогично анализу, выполненному в § 2.2 для решений системы (2.2.2). Вначале показываем, что функции $\xi(\tau)$, $\eta(\tau)$ положительны и ограничены. Затем, используя первый интеграл системы (2.2.27)

$$\frac{\xi^p}{\eta} e^{-(p-1)\tau} = C,$$

получаем, что $\eta(\tau) \rightarrow 0$ при $\tau \rightarrow \infty$. После этого доказываем, что $\xi(\tau)$ неограниченно приближается снизу к единице при $\tau \rightarrow \infty$.

2.2.2. У к а з а н и е. Исследуем амплитуду колебаний численности жертв. В начальных данных (2.2.15) возьмем значение $\xi_0 = 1$ и произвольное положительное значение $\eta_0 < 1$. Согласно формуле (2.2.17) фазовая траектория, отвечающая этим начальным данным, будет определяться

уравнением

$$\left(\frac{\xi}{e^\xi}\right)^p \frac{\eta}{e^\eta} = \frac{1}{e^p} \frac{\eta_0}{e^{\eta_0}}.$$

Амплитуда колебаний a_1 функции $\xi(\tau)$ определяется формулой (2.2.20) и будет равна разности значений функции $\xi(\tau)$ в самой правой и самой левой точках траектории (см. гл. 2, рис. 7, б), ордината η которых равна единице. Таким образом, величины ξ_{\max} и ξ_{\min} — корни уравнения

$$\left(\frac{\xi}{e^\xi}\right)^p \frac{1}{e} = \frac{1}{e^p} \frac{\eta_0}{e^{\eta_0}},$$

или

$$f(\xi) = h(\eta_0, p), \quad (28)$$

где

$$f(\xi) = \frac{\xi}{e^\xi}, \quad h = \left(\frac{\eta_0}{e^{\eta_0+p-1}}\right)^{1/p}.$$

График функции f изображен на рис. 34.

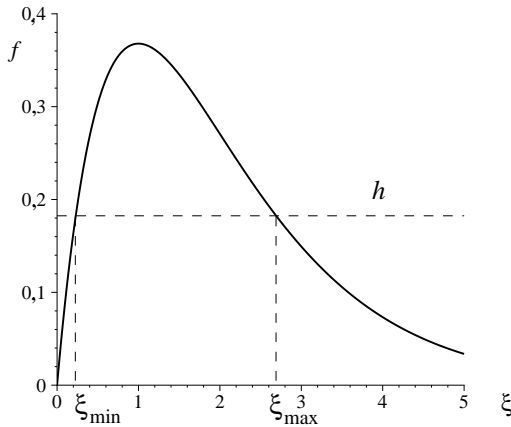


Рис. 34. График функции $f(\xi)$

Далее доказать следующие утверждения:

— для любых $p > 0$ и $0 < \eta_0 < 1$ выполняется неравенство $h(\eta_0, p) < \frac{1}{e}$, поэтому уравнение (28) всегда имеет два решения ξ_{\min} , ξ_{\max} , при этом $0 < \xi_{\min} < 1 < \xi_{\max}$;

— для каждого фиксированного $p > 0$ выполняется неравенство $\frac{\partial h}{\partial \eta_0} > 0$, поэтому с ростом начальной координаты η_0 величина h растет, а амплитуда колебаний $a_1 = \xi_{\max} - \xi_{\min}$ уменьшается (см. гл. 2, рис. 7, б и 8);

— для каждого фиксированного η_0 ($0 < \eta_0 < 1$) выполняется неравенство $\frac{\partial h}{\partial p} > 0$, поэтому с ростом параметра p величина h растет, а амплитуда колебаний a_1 уменьшается (ср. рис. 7, б и 8 из гл. 2).

Аналогичным образом проведите анализ амплитуд колебаний численности хищников.

2.2.3. Р е ш е н и е. Пусть T — период решения системы уравнений (2.2.13) с некоторыми начальными данными (2.2.15). Записав уравнения (2.2.13) в виде

$$\begin{aligned}\frac{1}{\xi} \frac{d\xi}{d\tau} &= 1 - \eta, \\ \frac{1}{\eta} \frac{d\eta}{d\tau} &= p(\xi - 1)\end{aligned}$$

и проинтегрировав последние уравнения по отрезку $[0, T]$, получаем равенства

$$\begin{aligned}\ln \xi(T) - \ln \xi_0 &= \int_0^T (1 - \eta(\tau)) d\tau = T - \int_0^T \eta(\tau) d\tau, \\ \ln \eta(T) - \ln \eta_0 &= p \int_0^T (\xi(\tau) - 1) d\tau = p \int_0^T \xi(\tau) d\tau - pT.\end{aligned}$$

В силу периодичности решения получаем, что $\xi(T) = \xi_0$ и $\eta(T) = \eta_0$. Поэтому

$$\frac{1}{T} \int_0^T \eta(\tau) d\tau = \frac{1}{T} \int_0^T \xi(\tau) d\tau = 1 = \xi_* = \eta_*,$$

т. е. действительно для любых решений, независимо от начальных данных осредненные по периоду значения численностей популяций равны значе-

ниями численностей в состоянии равновесия.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{2.2.4.} \quad \frac{d\xi}{d\tau} &= [1 - q\xi - (1 - q)\eta]\xi, \\
 \frac{d\eta}{d\tau} &= p(\xi - 1)\eta.
 \end{aligned}
 \tag{29}$$

2.3.1. Р е ш е н и е. Система уравнений (2.3.9), (2.3.11) имеет две точки покоя: $\mathbf{x}_* = (1, 1)$ и $\mathbf{x}_* = (0, 0)$. Первая точка была исследована на устойчивость в § 2.3. Поэтому остается рассмотреть только вторую точку.

Линеаризуя уравнения (2.3.9) в окрестности точки покоя $\mathbf{x}_* = (0, 0)$, получаем систему линейных уравнений вида (2.3.48) с матрицей Якоби:

$$\mathcal{A} = \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}_*) = \begin{pmatrix} 1 - y & -x \\ py & p(x - 1) \end{pmatrix} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_*} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -p \end{pmatrix}.$$

Собственные значения этой матрицы вещественны и различны:

$$\lambda_1 = -p < 0, \quad \lambda_2 = 1 > 0,$$

им соответствующим линейно независимые собственные векторы

$$\mathbf{r}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

общее решение линейной задачи описывается формулой (2.3.32), из которой следуют следующие выражения для компонент решения, удовлетворяющего начальным данным (2.3.45):

$$x(t) = x_0 e^t, \quad y(t) = y_0 e^{-pt},
 \tag{30}$$

при этом биологическое содержание имеют решения, соответствующие неотрицательным значениям $x_0 \geq 0$, $y_0 \geq 0$.

Поскольку одно из собственных значений положительно, то точка покоя $\mathbf{x}_* = (0, 0)$ будет неустойчивым решением линейной системы: если $x_0 > 0$, то $x(t) \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow \infty$, т. е. решение с ростом времени удаляется от точки покоя. Согласно теореме 1 эта точка покоя будет и неустойчивым решением нелинейной системы (2.3.9), (2.3.11).

Если из уравнений (30) исключить время, то получим первый интеграл

линейной системы:

$$\Psi(x, y) = C = \text{const.}$$

Например, при $p = 1$ получаем, что

$$\Psi(x, y) = xy. \quad (31)$$

Поскольку поверхность $z = \Psi(x, y)$ является седлообразной, то рассматриваемая точка покоя называется *седлом* (рис. 35, а). Линии уровня этой поверхности, являющиеся при $x_0 \neq 0, y_0 \neq 0$ гиперболами (рис. 35, б), совпадают с фазовыми траекториями, соответствующими решениям (30).

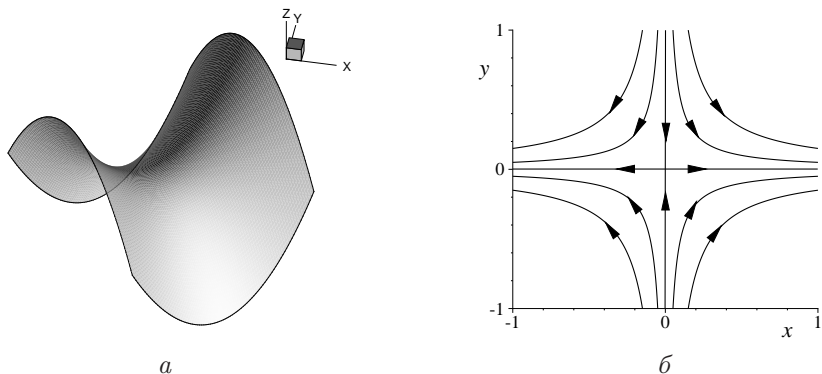


Рис. 35. Точка покоя типа «седло»: а — график поверхности (31); б — фазовые траектории, соответствующие решениям (30) при $p = 1$

2.3.2. У к а з а н и е. Покажите, что система уравнений (2.3.18), кроме точки покоя (2.3.23), (2.3.24), имеет еще две: $\mathbf{x}_* = (0, 0)$ и $\mathbf{x}_* = (x_*, 0)$, где

$$x_* = a^{-1}(0) > 0, \quad (a(x_*) = 0).$$

В окрестности точки покоя $\mathbf{x}_* = (0, 0)$ первое приближение системы (2.3.18) имеет вид уравнения (2.3.48) с матрицей Якоби:

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} a(0) & 0 \\ 0 & K(0) \end{pmatrix}.$$

Убедитесь в том, что собственные значения этой матрицы имеют противоположные знаки и точка покоя есть «седло» как для системы линейных уравнений (2.3.48), так и для нелинейных (2.3.18).

Матрица Якоби первого приближения в точке покоя $\mathbf{x}_* = (x_*, 0)$ запишется как

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} a'(x_*)x_* & -V(x_*) \\ 0 & K(x_*) \end{pmatrix}.$$

Ее собственные значения

$$\lambda_1 = a'(x_*)x_* < 0, \quad \lambda_2 = K(x_*)$$

могут быть одного знака или иметь противоположные знаки. Если $K(x_*) < 0$, то точка покоя является для нелинейной системы (2.3.18) асимптотически устойчивым узлом, при $K(x_*) > 0$ — седлом, при $K(x_*) = 0$ линейное приближение не дает ответа на вопрос о типе этой точки покоя.

2.3.3. У к а з а н и е. Покажите, что система уравнений (2.3.50) имеет три точки покоя: $\mathbf{x}_* = (0, 0)$, $\mathbf{x}_* = \left(\frac{1}{q}, 0\right)$ и $\mathbf{x}_* = (1, 1)$.

Покажите, что первые две точки имеют тип «седло», а третья является асимптотически устойчивым узлом при условии

$$p \leq \frac{q^2}{4(1-q)},$$

при нарушении этого условия — устойчивым фокусом.

З а м е ч а н и е. Система уравнений (2.3.50) является частным случаем модели Колмогорова (2.3.18), если в последней взять следующие коэффициенты:

$$a(x) = 1 - qx, \quad V(x) = (1 - q)x, \quad K(x) = p(x - 1).$$

При этом очевидно, что требования (2.3.20)—(2.3.22) удовлетворяются.

2.3.4. У к а з а н и е. Покажите, что система уравнений (2.3.51) имеет три точки покоя $\mathbf{x}_* = (0, 0)$, $\mathbf{x}_* = (1, 0)$ и $\mathbf{x}_* = (0, 1)$. Покажите, что точка покоя $\mathbf{x}_* = (0, 0)$ является неустойчивым узлом, точка $\mathbf{x}_* = (1, 0)$ — асимптотически устойчивым узлом при $p > 1$ и имеет тип «седло», если $0 < p < 1$, точка $\mathbf{x}_* = (0, 1)$ — наоборот: при $0 < p < 1$ — асимптотически устойчивый узел, при $p > 1$ — «седло».

2.4.1. У к а з а н и е. Покажите, что согласно выражениям (2.4.23) дискриминант d характеристического уравнения (2.3.28) первого приближения системы (2.4.20) вычисляется по формуле

$$d = \beta(\beta - 4sm).$$

Используя эту формулу, покажите, что при $\beta \geq 4m$ точка покоя (2.4.22) будет устойчивым узлом при любой норме накопления $0 < s < 1$, а при $\beta < 4m$ точка покоя будет устойчивым узлом для $s \leq \frac{\beta}{4m}$ и устойчивым фокусом при $s > \frac{\beta}{4m}$. Таким образом, при условии $\beta < 4m$ принятие достаточно большой нормы накопления приводит к колебательному характеру установления стационарного состояния экономики.

2.4.2. У к а з а н и е. Покажите, что в окрестности точки равновесия (2.4.26) матрица \mathcal{A} первого приближения (2.3.26) системы уравнений (2.4.24) имеет вид

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \sigma & -\delta x_* \\ \frac{ks(1-s)m^2\alpha}{\delta} x_*^{2\alpha-2} & 0 \end{pmatrix},$$

где $\sigma = -\alpha\beta + sm(\alpha - 1)x_*^{\alpha-1}$, и характеристическое уравнение записывается как

$$\lambda^2 - \sigma\lambda + \alpha\beta\delta y_* = 0.$$

Далее покажите, что $\operatorname{Re} \lambda_i < 0$ ($i = 1, 2$). Тогда из теоремы 1 будет следовать, что при $t \rightarrow \infty$ решение нелинейной системы уравнений (2.4.24) неограниченно приближается к точке покоя.

2.4.3. У к а з а н и е. Покажите, что исследуемые показатели вычисляются по формулам:

$$X = \frac{\beta}{\delta} \frac{s}{k(1-s)}; \quad D = \frac{sm^2}{\delta} \left(\frac{\beta}{k(1-s)m} \right)^{2-1/\alpha}; \quad c = \beta \left(\frac{1}{k} - 1 \right).$$

2.4.4. У к а з а н и е. Покажите, что для отображения (2.4.30) справедливо равенство:

$$\frac{\partial x_*}{\partial s}(k, s) = \frac{\beta}{\alpha km(1-s)^2} x_*^{1-\alpha}, \quad (32)$$

$$\frac{\partial y_*}{\partial s}(k, s) = \frac{m}{\delta} x_*^{\alpha-1} + \frac{ms}{\delta} (\alpha - 1) x_*^{\alpha-2} \frac{\partial x_*}{\partial s}(k, s), \quad (33)$$

$$\frac{\partial x_*}{\partial k}(k, s) = -\frac{\beta}{\alpha k^2 m (1-s)} x_*^{1-\alpha},$$

$$\frac{\partial y_*}{\partial k}(k, s) = \frac{ms}{\delta} (\alpha - 1) x_*^{\alpha-2} \frac{\partial x_*}{\partial k}(k, s).$$

Далее докажите, что якобиан отображения (2.4.30) отрицателен.

2.5.1. У к а з а н и е. Покажите, что ранг матрицы системы уравнений (2.5.15) равен четырем и совпадает с рангом расширенной матрицы этой системы. Покажите, что при использовании метода Гаусса получается решение (2.5.21).

2.5.2. У к а з а н и е. Используя формулы (32), (33), (2.5.32), покажите, что

$$\frac{\partial y_*}{\partial s}(k, s) = \frac{\beta}{\delta k (1-s) x_*} \left[1 + \frac{s(\alpha - 1)}{\alpha(1-s)} \right].$$

2.5.3. а) $x_1 = 70$, $x_2 = 40$; в) $x_1 = 30$, $x_2 = 0$; д) $x_1 = 10$, $x_2 = 0$; б), г) — бесконечное множество решений.

2.5.4. а), б) — $x_1 = 35$, $x_2 = 5$; в) — не существует решения, удовлетворяющего условиям (2.5.41).

2.5.5. $x_1 = 30$, $x_2 = 0$.

3.2.1. $J = 1$.

У к а з а н и е. Для доказательства сохранения объема оползня при его движении воспользуйтесь формулой замены переменной в интеграле:

$$\iiint_{\Omega_t} f(x) dx = \iiint_{\Omega_0} f(x(\xi)) J(\xi) d\xi. \quad (34)$$

3.2.2. У к а з а н и е. В начальный момент времени вершины A , B , C

основания призмы имеют следующие координаты:

$$\begin{aligned} \xi_A^1 &= x_0 - T \operatorname{ctg} \theta, & \xi_A^2 &= y_0 - \frac{W}{2}, & \xi_A^3 &= -x_0 \operatorname{tg} \theta + T; \\ \xi_B^1 &= x_0, & \xi_B^2 &= y_0 - \frac{W}{2}, & \xi_B^3 &= -x_0 \operatorname{tg} \theta; \\ \xi_C^1 &= x_0, & \xi_C^2 &= y_0 - \frac{W}{2}, & \xi_C^3 &= -x_0 \operatorname{tg} \theta + T. \end{aligned} \quad (35)$$

Подставляя лагранжевы координаты (35) в закон движения (3.2.16), получаем траектории точек A , B и C :

$$x_A = \gamma(\xi_A, t) = \begin{pmatrix} x_A^1 \\ x_A^2 \\ x_A^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 + \frac{at^2}{2} - T \operatorname{ctg} \theta \\ y_0 - \frac{W}{2} \\ -\left(x_0 + \frac{at^2}{2}\right) \operatorname{tg} \theta + T \end{pmatrix}; \quad (36)$$

$$x_B = \gamma(\xi_B, t) = \begin{pmatrix} x_B^1 \\ x_B^2 \\ x_B^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 + \frac{at^2}{2} - T \operatorname{ctg} \theta (1 - e^{\beta t}) \\ y_0 - \frac{W}{2} \\ -\left(x_0 + \frac{at^2}{2}\right) \operatorname{tg} \theta + T (1 - e^{\beta t}) \end{pmatrix}; \quad (37)$$

$$x_C = \gamma(\xi_C, t) =$$

$$= \begin{pmatrix} x_C^1 \\ x_C^2 \\ x_C^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 + \frac{at^2}{2} - T \operatorname{ctg} \theta (1 - e^{\beta t}) \\ y_0 - \frac{W}{2} \\ -\left(x_0 + \frac{at^2}{2}\right) \operatorname{tg} \theta + T (1 - e^{\beta t}) + T e^{-\beta t} \end{pmatrix}. \quad (38)$$

Для движущихся точек A и B выполняются равенства $x_A^3 = -x_A^1 \operatorname{tg} \theta$ и $x_B^3 = -x_B^1 \operatorname{tg} \theta$. Это означает, что траектории этих точек лежат на прямой (3.2.14), т. е. точки A и B движутся по откосу.

Из формул (37) и (38) следует, что при движении отрезок $[BC]$ всегда остается вертикальным (в любой момент времени движущиеся точки B и C имеют одинаковые абсциссу и ординату). При этом высота оползня уменьшается:

$$|BC|(t) = |x_C^3 - x_B^3| = Te^{-\beta t} \leq T,$$

а его протяженность (вдоль откоса) увеличивается:

$$|AB|(t) = \frac{Te^{\beta t}}{\sin \theta} \geq \frac{T}{\sin \theta},$$

где T и $T/\sin \theta$ — соответственно высота и протяженность оползня при $t = 0$ (см. формулы (35)).

Покажите, что при $t > 0$ оползневая масса сохраняет форму прямой треугольной призмы (рис. 36) с вертикальной гранью, проходящей через сторону BC треугольника в основании. Сам же треугольник ABC уже не является при $t > 0$ прямоугольным ($\angle ACB > 90^\circ$). Таким образом, оползень в процессе движения деформируется.

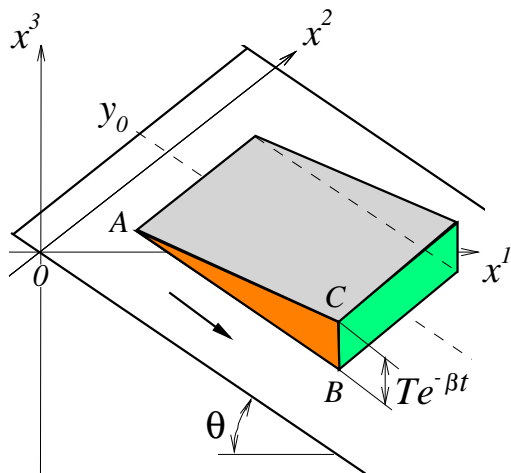


Рис. 36. Форма оползневой массы при $t > 0$

3.2.3. У к а з а н и е. Для вычисления компонент скорости в лагранжевом представлении воспользуйтесь определением (3.2.10). Используя полу-

ченные выражения

$$\begin{aligned}
 v^{L,1}(\xi, t) &= at + \beta (T \operatorname{ctg} \theta + \xi^1 - x_0) e^{\beta t}, \\
 v^{L,2}(\xi, t) &= 0, \\
 v^{L,3}(\xi, t) &= -at \cdot \operatorname{tg} \theta - \beta \left[T + (\xi^1 - x_0) \operatorname{tg} \theta \right] e^{\beta t} - \\
 &\quad - \beta (\xi^3 + \xi^1 \operatorname{tg} \theta) e^{-\beta t},
 \end{aligned} \tag{39}$$

покажите, что при $\beta = 0$ все частицы оползня движутся с одной и той же скоростью (v^L не зависит от ξ) параллельно откосу в плоскостях, параллельных плоскости ABC .

3.2.4. У к а з а н и е. Согласно формуле (3.2.9) для определения скорости в эйлеровом представлении необходимо вначале найти обратное отображение (3.2.7) для закона движения (3.2.16), а затем подставить найденные выражения для ξ^i ($i = 1, 2, 3$) в формулы (39) для компонент скорости в лагранжевом представлении.

Покажите, что из закона движения (3.2.16) следуют равенства

$$\xi^1 - x_0 = \left[x^1 - \left(x_0 + \frac{at^2}{2} - T \operatorname{ctg} \theta \right) \right] e^{-\beta t} - T \operatorname{ctg} \theta;$$

$$\xi^3 + \xi^1 \operatorname{tg} \theta = \left\{ x^3 + \left(x_0 + \frac{at^2}{2} \right) \operatorname{tg} \theta - T + \left[T + (\xi^1 - x_0) \operatorname{tg} \theta \right] e^{\beta t} \right\} e^{\beta t}.$$

Подставив эти выражения в формулы (39), убедитесь в справедливости следующего эйлерова представления компонент скорости:

$$\begin{aligned}
 v^{E,1}(x, t) &= at + \beta \left[x^1 - x_0 - \frac{at^2}{2} + T \operatorname{ctg} \theta \right], \\
 v^{E,2}(x, t) &= 0,
 \end{aligned} \tag{40}$$

$$v^{E,3}(x, t) = -at \cdot \operatorname{tg} \theta - \beta \left[x^3 + \left(2x^1 - x_0 - \frac{at^2}{2} \right) \operatorname{tg} \theta + T \right].$$

3.2.5. У к а з а н и е. Воспользовавшись формулой (3.2.11), убедитесь в том, что закон движения описывается формулами (3.2.16).

3.2.6. У к а з а н и е. Закон движения находится путем решения задачи Коши (3.2.13), которая для заданных компонент скорости (3.2.19) за-

писывается как следующая задача для системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{dx^1}{dt} &= at + \beta \left[x^1 - x_0 - \frac{at^2}{2} + T \operatorname{ctg} \theta \right], \\ \frac{dx^2}{dt} &= 0, \\ \frac{dx^3}{dt} &= -at \cdot \operatorname{tg} \theta - \beta \left[x^3 + \left(2x^1 - x_0 - \frac{at^2}{2} \right) \operatorname{tg} \theta + T \right], \\ x^1(0) &= \xi^1, \quad x^2(0) = \xi^2, \quad x^3(0) = \xi^3. \end{aligned} \quad (41)$$

Используя метод вариации постоянной [25], покажите, что из первого уравнения получается следующее выражение:

$$x^1(\xi, t) = \left\{ \xi^1 + \int_0^t \left[as + \beta \left(-x_0 - \frac{as^2}{2} + T \operatorname{ctg} \theta \right) \right] e^{-\beta s} ds \right\} e^{\beta t}. \quad (42)$$

Применяя формулы интегрирования по частям

$$\begin{aligned} \int_0^t s e^{-\beta s} ds &= -\frac{1}{\beta} \left[t e^{-\beta t} + \frac{e^{-\beta t} - 1}{\beta} \right], \\ \int_0^t s^2 e^{-\beta s} ds &= -\frac{1}{\beta} \left[t^2 e^{-\beta t} + \frac{2}{\beta} \left(t e^{-\beta t} + \frac{e^{-\beta t} - 1}{\beta} \right) \right], \end{aligned}$$

убедитесь в том, что уравнение (42) преобразуется в первое уравнение закона движения (3.2.16).

Проделав аналогичные выкладки для третьего уравнения системы (41), окончательно убедитесь в том, что полю скоростей (3.2.19) соответствует закон движения (3.2.16).

3.2.7. Закон движения в переменных Лагранжа:

$$\begin{aligned}x^1 &= \xi^1 \cos(\omega t) - \xi^2 \sin(\omega t), \\x^2 &= \xi^1 \sin(\omega t) + \xi^2 \cos(\omega t), \\x^3 &= At + \xi^3.\end{aligned}$$

Компоненты вектора скорости в переменных Лагранжа:

$$\begin{aligned}u(\xi^1, \xi^2, \xi^3, t) &= -\xi^1 \omega \sin(\omega t) - \xi^2 \omega \cos(\omega t), \\v(\xi^1, \xi^2, \xi^3, t) &= \xi^1 \omega \cos(\omega t) - \xi^2 \omega \sin(\omega t), \\w(\xi^1, \xi^2, \xi^3, t) &= A.\end{aligned}$$

4.1.1. Р е ш е н и е. Пусть разложение вектора $x \in \mathbf{R}^m$ по базису $\{e_i\}$ имеет вид равенства (4.1.4). Умножая обе части этого равенства на произвольный вектор кобазиса e^k , получаем выражение

$$x \cdot e^k = x^i e_i \cdot e^k.$$

Используя свойство (4.1.2) векторов базиса и кобазиса, получаем

$$x \cdot e^k = x^i \delta_i^k = x^k,$$

т. е. первое из доказываемых равенств (4.1.6). Аналогично с использованием разложений (4.1.4), (4.1.5) и свойства (4.1.2) доказываются остальные равенства (4.1.6).

4.1.2. Р е ш е н и е. Проверим, что для системы векторов $\{e'^i\}$, определенных по формулам (4.1.8), выполняются равенства вида (4.1.2). В самом деле,

$$e'^i e'_j = (\mathcal{A}^{-1})_k^i e^k A_j^p e_p = (\mathcal{A}^{-1})_k^i A_j^p \delta_p^k = (\mathcal{A}^{-1})_k^i A_j^k = (\mathcal{I})_j^i = \delta_j^i,$$

где \mathcal{I} — единичная матрица.

4.1.3. Р е ш е н и е. Докажем справедливость первой из формул (4.1.9). Для этого разложение вектора b по новому кобазису

$$b = b'_j e'^j$$

умножим скалярно на некоторый вектор e'_i нового базиса:

$$b \cdot e'_i = b'_j e'^j \quad e'_i = b'_j \delta_i^j = b'_i.$$

Поэтому

$$b'_i = b \cdot e'_i = b \cdot A_i^j e_j = A_i^j b \cdot e_j = A_i^j b_j.$$

Аналогично доказывается вторая из формул (4.1.9).

4.1.4. При всех значениях параметра θ .

4.1.5. У к а з а н и е. См. [20], стр. 448.

4.2.1. Р е ш е н и е. В силу свойства (4.1.2) и линейности функционалов из $\mathcal{L}(\mathbf{R}^m, \mathbf{R})$ выполняется следующая цепочка равенств:

$$(\mathfrak{S}\langle f \rangle) \cdot x = f \langle e_i \rangle e^i \cdot (x^j e_j) = f \langle x^j e_i \rangle e^i \cdot e_j = f \langle x^j e_i \rangle \delta_j^i = f \langle x^i e_i \rangle = f \langle x \rangle,$$

т. е. равенство (4.2.4) действительно выполняется.

Докажем теперь справедливость равенства (4.2.19), выполнение которого означает, что $\mathbf{R}^{m*} \sim \mathbf{R}^m$ и отображение $\mathfrak{S} : \mathbf{R}^{m*} \rightarrow \mathbf{R}^m$ является изометрией этих пространств. Используя равенство (4.2.4) и неравенство Коши — Шварца (4.1.11), получаем оценку

$$|f \langle x \rangle| = |(\mathfrak{S}\langle f \rangle) \cdot x| \leq |\mathfrak{S}\langle f \rangle| \cdot |x|,$$

справедливую для произвольного вектора $x \in \mathbf{R}^m$. Если же в качестве x взять вектор $x = \mathfrak{S}\langle f \rangle$, то последнее неравенство превращается в равенство

$$|f \langle x \rangle| = |x \cdot x| = |x|^2,$$

поэтому

$$\|f\|_{\mathbf{R}^{m*}} = \sup_{x \in \mathbf{R}^m, x \neq 0} \frac{|f \langle x \rangle|}{|x|} = \frac{|\mathfrak{S}\langle f \rangle|^2}{|\mathfrak{S}\langle f \rangle|} = |\mathfrak{S}\langle f \rangle|.$$

4.2.2. Р е ш е н и е. Покажем, что отображения $\{e_i \otimes e^j\}_{i,j=1}^m$ линейно независимы в $\mathcal{L}(\mathbf{R}^m)$. Предположим, что линейная комбинация этих отображений с коэффициентами $\alpha_j^i \in \mathbf{R}$ обращается в нуль:

$$\alpha_j^i (e_i \otimes e^j) = 0. \quad (43)$$

Тогда для произвольного $x \in \mathbf{R}^m$ имеют место равенства

$$0 = \alpha_j^i (e_i \otimes e^j) \langle x \rangle = \alpha_j^i e_i \langle e^j \cdot x \rangle = \alpha_j^i x^j e_i.$$

Поскольку система векторов $\{e_i\}_{i=1}^m$ является базисом в \mathbf{R}^m , то в последнем равенстве все m коэффициентов должны равняться нулю:

$$\alpha_j^i x^j = 0, \quad i = 1, \dots, m.$$

В силу произвольности x отсюда получаем, что и все α_j^i равны нулю. Таким образом, равенство (43) возможно лишь при нулевых значениях коэффициентов α_j^i , поэтому элементы $\{e_i \otimes e^j\}_{i,j=1}^m$ линейно независимы в $\mathcal{L}(\mathbf{R}^m)$. Кроме того, каждое отображение из $\mathcal{L}(\mathbf{R}^m)$ представляется в виде линейной комбинации этих элементов (см. равенство (4.2.6)). Следовательно, множество из m^2 элементов $\{e_i \otimes e^j\}_{i,j=1}^m$ представляет собой базис в $\mathcal{L}(\mathbf{R}^m)$. Остается заметить, что разложение по базису всегда единственно.

4.2.3. Р е ш е н и е. Достаточно убедиться в справедливости для всех $x, y \in \mathbf{R}^m$ равенства (4.2.10). С одной стороны,

$$L \langle x \rangle \cdot y = (L_j^i (e_i \otimes e^j) \langle x \rangle) \cdot y = (L_j^i e_i (e^j \cdot x)) \cdot y = L_j^i x^j (e_i \cdot y) = L_j^i x^j y_i,$$

а с другой —

$$\begin{aligned} x \cdot K \langle y \rangle &= x \cdot (K_j^i (e_i \otimes e^j) \langle y \rangle) = x \cdot (K_j^i e_i (e^j \cdot y)) = K_j^i y^j (e_i \cdot x) = \\ &= K_j^i x_i y^j = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m L_i^j x_i y^j = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m L_j^i x_j y^i. \end{aligned}$$

В ортонормированном базисе ковариантные и контравариантные компоненты вектора совпадают. В самом деле,

$$x_j = x \cdot e_j = x \cdot e^j = x^j,$$

поэтому

$$x \cdot K \langle y \rangle = L_j^i x^j y_i = L \langle x \rangle \cdot y,$$

т. е. $L^* = K$.

4.2.7. Р е ш е н и е. Согласно определению (4.2.5) элементы $\{L_j^i\}$ матрицы отображения $L \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^m)$ в новом базисе $\{e'_i\}$ вычисляются по формуле

$$L_j^i = e'^i \cdot L \langle e'_j \rangle \quad (i, j = 1, \dots, m).$$

Применение формул перехода (4.1.7), (4.1.8) приводит к следующей цепоч-

ке равенств:

$$L_j^i = (\mathcal{A}^{-1})_k^i e^k L \langle A_j^l e_l \rangle = (\mathcal{A}^{-1})_k^i e^k L \langle e_l \rangle A_j^l = (\mathcal{A}^{-1})_k^i L_l^k A_j^l,$$

т. е. матрица $\{L_j^i\}$ является матрицей суперпозиции $A^{-1} \circ L \circ A$ трех отображений $A^{-1}, L, A \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^m)$, при этом A, A^{-1} — отображения, соответствующие матрицам \mathcal{A} и \mathcal{A}^{-1} соответственно.

5.1.2. В лагранжевом представлении: $v = (e^t \xi^1, 2e^{2t} \xi^1 - e^t \xi^2, 3e^{3t} \xi^3)$; в эйлеровом — $v = (x^1, (3e^t - e^{-t})x^1 + x^2, 3x^3)$.

5.1.4. Скорость частицы: $v = (1, 3, 2)$, ускорение частицы: $a = (3, 9, 6)$.

5.1.5. $a = (7x^1 - 12x^2, 12x^1 - 9x^2, -16x^1 + 12x^2)$.

5.1.6. $a = (x^2 + tx^3)e^{-t}, 0, 2)$.

5.1.7. В лагранжевом представлении:

$$v^1 = \frac{q\xi^1}{(\xi^1)^2 + (\xi^2)^2} \sqrt{\frac{2qt}{(\xi^1)^2 + (\xi^2)^2} + 1},$$

$$v^2 = \frac{q\xi^2}{(\xi^1)^2 + (\xi^2)^2} \sqrt{\frac{2qt}{(\xi^1)^2 + (\xi^2)^2} + 1},$$

$$v^3 = 0;$$

в эйлеровом — $v = \left(\frac{qx^1}{(x^1)^2 + (x^2)^2}, \frac{qx^2}{(x^1)^2 + (x^2)^2}, 0 \right)$.

5.1.8. Скорость $v = \left(\frac{\xi^1}{\tau}, 2\frac{\xi^2}{\tau}, 2\frac{\xi^3 t}{\tau^2} \right)$; ускорение $a = \left(0, 0, 2\frac{\xi^3}{\tau^2} \right)$.

Частица находится в точке $\left(2a, \frac{7b}{3}, 5c \right)$.

5.2.2. $p_n = \left(\frac{22}{5}, 4, \frac{36}{5} \right)$.

5.2.4. $p_n = \left(4, -\frac{10}{3}, 0 \right)$.

7.1.2. Тензор деформации Лагранжа:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{2t} - 1 & 4te^t \xi^2 & 2te^t \xi^3 \\ 4te^t \xi^2 & 16t^2(\xi^2)^2 + e^{4t} + 9t^2 - 1 & 8t^2 \xi^2 \xi^3 + 2te^{2t} + e^{5t} \\ 2te^t \xi^3 & 8t^2 \xi^2 \xi^3 + 2te^{2t} + e^{5t} & 4t^2(\xi^3)^2 + e^{4t} + 4t^2 - 1 \end{pmatrix}.$$

7.1.3. Тензор деформации Эйлера:

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 - e^{2t}(1 + 4t^2) & -4t^2 e^{2t} & -2te^t \\ -4t^2 e^{2t} & 1 - e^{2t}(1 + 4t^2) & -2te^t \\ -2te^t & -2te^t & 0 \end{pmatrix}.$$

7.1.4. Тензор деформации Лагранжа:

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тензор деформации Эйлера:

$$\mathcal{E} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

8.3.1. Р е ш е н и е. По определению дивергенции векторного поля:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial x} v^1 + \frac{\partial \rho}{\partial y} v^2 + \frac{\partial \rho}{\partial z} v^3 + \rho \frac{\partial v^1}{\partial x} + \rho \frac{\partial v^2}{\partial y} + \rho \frac{\partial v^3}{\partial z} = 0,$$

Следовательно, учитывая определение градиента скалярного поля, получаем:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + v \nabla \rho + \rho \operatorname{div} v = 0$$

8.3.2. Р е ш е н и е. Проверяется непосредственным дифференцированием:

$$\frac{\partial v^1}{\partial x} = A \frac{2x(3y^2 - x^2)}{r^6},$$

$$\frac{\partial v^2}{\partial x} = A \frac{2x(x^2 - 3y^2)}{r^6}$$

и, следовательно,

$$\operatorname{div} v = \frac{\partial v^1}{\partial x} + \frac{\partial v^2}{\partial y} = 0.$$

8.3.3. У к а з а н и е. Проверяется непосредственным дифференцированием.

Библиографический список

1. *Александров П. С.* Лекции по аналитической геометрии, пополненные необходимыми сведениями из алгебры / П. С. Александров. – М.: Наука, 1968. – 912 с.
2. *Арнольд В. И.* Обыкновенные дифференциальные уравнения / В. И. Арнольд. – Ижевск: Ижевская республиканская типография, 2000. – 368 с.
3. *Баутин Н. Н.* Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости / Н. Н. Баутин, Е. А. Леонтович. – М.: Наука, 1990. – 490 с.
4. *Белолипецкий В. М.* Математическое моделирование в задачах охраны окружающей среды / В. М. Белолипецкий, Ю. И. Шокин. – Новосибирск: Инфолио-пресс, 1997. – 240 с.
5. *Векуа И. Н.* Основы тензорного анализа и теории ковариантов / И. Н. Векуа. – М.: Наука, 1978. – 296 с.
6. *Воеводин В. В.* Параллельные вычисления / В. В. Воеводин, Вл. В. Воеводин. – СПб.: БХВ-Петербург, 2002. – 602 с.
7. *Гайфулин С. А.* САФРА. Функциональное наполнение. Система OLYMUS / С. А. Гайфулин, В. Я. Карпов, Т. В. Мищенко. М.: Препринт ИПМатем АН СССР, № 27, 1980. – 16 с.
8. *Гельфанд И. М.* Лекции по линейной алгебре / И. М. Гельфанд. – М.: Добросвет, 1998. – 320 с.
9. *Гильдерман Ю. И.* Лекции по высшей математике для биологов / Ю. И. Гильдерман. – Новосибирск: Наука, 1974. – 412 с.
10. *Гимади Э. Х.* Математические модели и методы принятия решений / Э. Х. Гимади, Н. И. Глебов. – Новосибирск: НГУ, 2008. – 162 с.
11. *Глассер А. Г.* Построение разностных сеток с помощью уравнений Бельтрами и диффузии / А. Г. Глассер, В. Д. Лисейкин, Ю. И. Шокин, И. А. Васева, Ю. В. Лиханова. – Новосибирск: Наука, 2006. – 180 с.
12. *Годунов С. К.* Численное решение многомерных задач газовой динамики / С. К. Годунов, А. В. Забродин, М. Я. Иванов, А. Н. Крайков, Г. П. Прокопов. – М.: Наука, 1976. – 400 с.
13. *Годунов С. К.* Разностные схемы / С. К. Годунов, В. С. Рябенский. – М.: Наука, 1973. – 400 с.

14. *Жермен П.* Курс механики сплошных сред. Общая теория / П. Жермен. – М.: Высш. шк., 1983. – 399 с.
15. *Ильюшин А. А.* Механика сплошной среды / А. А. Ильюшин. – М.: МГУ, 1990. – 310 с.
16. *Кини Р. Л.* Принятие решений при многих критериях: предпочтения и замещения / Р. Л. Кини, Х. Райфа – М.: Радио и связь, 1981. – 560 с.
17. *Коновалов А. Н.* Модульный принцип построения программ как основа создания пакета прикладных программ решения задач механики сплошной среды: Комплексы программ математической физики / А. Н. Коновалов, Н. Н. Яненко. Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1972. – С. 48–54.
18. *Кочин Н. Е.* Векторное исчисление и начала тензорного исчисления / Н. Е. Кочин. – М.: Наука, 1965. – 427 с.
19. *Кочин Н. Е.* Теоретическая гидромеханика: Ч. 1. / Н. Е. Кочин, И. А. Кибель, Н. В. Розе – М.: Физматгиз, 1963. – 584 с.
20. *Кудрявцев Л. Д.* Курс математического анализа: В 3 т. / Л. Д. Кудрявцев. – М.: Дрофа, 2008. – 704 с. – Т. 1: Дифференциальное интегральное исчисления функций одной переменной.
21. *Марчук Г. И.* Методы вычислительной математики / Г. И. Марчук. – М.: Наука, 1989. – 608 с.
22. *Мейз Дж.* Теория и задачи механики сплошных сред / Дж. Мейз. – М.: Изд-во ЛКИ, 2010. – 320 с.
23. *Овсянников Л. В.* Введение в механику сплошных сред: Ч. 1. / Л. В. Овсянников. – Новосибирск: Изд-во НГУ, 1976. – 75 с.
24. *Петкевич В. В.* Теоретическая механика / В. В. Петкевич. – М.: Наука, 1981. – 496 с.
25. *Петровский И. Г.* Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений / И. Г. Петровский. – М.: Наука, 1984. – 296 с.
26. *Понтрягин Л. С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения / Л. С. Понтрягин. – М.: Наука, 1974. – 331 с.
27. *Постников М. М.* Аналитическая геометрия / М. М. Постников. – М.: Наука, 1973. – 751 с.
28. *Ризниченко Г. Ю.* Математические модели биологических продукционных процессов / Г. Ю. Ризниченко, А. Б. Рубин. – М.: МГУ, 1993. – 302 с.

-
29. Самарский А. А. Введение в численные методы / А. А. Самарский. – СПб.: Лань, 2009. – 288 с.
 30. Самарский А. А. Теория разностных схем / А. А. Самарский. – М.: Наука, 1989. – 616 с.
 31. Самарский А. А. Математическое моделирование / А. А. Самарский, А. П. Михайлов. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. – 320 с.
 32. Седов Л. И. Механика сплошной среды: В 2 т. / Л. И. Седов. – СПб.: Лань, 2004. – 560 с.
 33. Сичкарев В. И. Волновые энергетические станции в океане / В. И. Сичкарев, В. А. Акуличев. – М.: Наука. 1989. – 131 с.
 34. Солодовников А. С. Введение в линейную алгебру и линейное программирование / А. С. Солодовников. – М.: Просвещение, 1966. – 183 с.
 35. Туманова Е. А. Макроэкономика. Элементы продвинутого подхода / Е. А. Туманова, Н. Л. Шагас. – М.: ИНФРА-М, 2004. – 400 с.
 36. Хакимзянов Г. С. Методы вычислений: В 4 ч. / Г. С. Хакимзянов, С. Г. Черный. – Новосибирск: НГУ, 2003. Ч. 1. 160 с., 2005. Ч. 2. 158 с., 2008. Ч. 3. 160 с.
 37. Хакимзянов Г. С. Разностные схемы на адаптивных сетках: В 3 ч. / Г. С. Хакимзянов, Ю. И. Шокин. – Новосибирск: НГУ, 2005. Ч. 1. 132 с., 2009. Ч. 2. 184 с.,
 38. Шокин Ю. И. Методы римановой геометрии в задачах построения разностных сеток / Ю. И. Шокин, В. Д. Лисейкин, А. С. Лебедев, Н. Т. Данаев, И. А. Китаева. – Новосибирск: Наука, 2005. – 256 с.
 39. Яненко Н. Н. Методологические проблемы математической физики / Н. Н. Яненко, Н. Г. Преображенский, О. С. Разумовский. – Новосибирск: Наука, 1986. – 296 с.
 40. Thompson J. F. Numerical grid generation, foundations and applications / J. F. Thompson, Z. U. A. Warsi, C. W. Mastin. – N.Y.: Elsevier Science Publisher, 1985. – 331 p.

Дополнительная литература

1. *Амелькин В. В.* Дифференциальные уравнения в приложениях / В. В. Амелькин. – М.: Наука, 1987. – 160 с.
2. *Акивис М. А.* Тензорное исчисление / М. А. Акивис, В. В. Гольдберг. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 304 с.
3. *Бережная Е. В.* Математические методы моделирования экономических систем / Е. В. Бережная, В. И. Бережной. – М.: Финансы и статистика, 2006. – 432 с.
4. *Баутин С. П.* Разрушительные атмосферные вихри: теоремы, расчеты, эксперименты / С. П. Баутин, И. Ю. Крутова, А. Г. Обухов, К. В. Баутин. – Новосибирск: Наука; Екатеринбург: УрГУПС, 2013. – 215 с.
5. *Введение в математическое моделирование: учеб. пособие* / Под ред. П. В. Трусова. – М.: Университетская книга, Логос, 2007. – 440 с.
6. *Давыдова М. А.* Лекции по гидродинамике / М. А. Давыдова. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2011. – 216 с.
7. *Ибрагимов Н. Х.* Практический курс дифференциальных уравнений и математического моделирования / Н. Х. Ибрагимов. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2012. – 332 с.
8. *Колемаев В. А.* Математическая экономика / В. А. Колемаев. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2002. – 399 с.
9. *Колемаев В. А.* Экономико-математическое моделирование / В. А. Колемаев. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2005. – 295 с.
10. *Куропатенко В. Ф.* Модели механики сплошных сред / В. Ф. Куропатенко. – Челябинск: Челяб. гос. ун-т, 2007. – 302 с.
11. *Марчук Г. И.* Математическое моделирование в проблеме окружающей среды / Г. И. Марчук. – М.: Наука, 1982. – 320 с.
12. *Петкевич В. В.* Основы механики сплошных сред / В. В. Петкевич. – М.: Эдиториал УРСС, 2001. – 400 с.
13. *Тер-Крикоров А. М.* Оптимальное управление и математическая экономика / А. М. Тер-Крикоров. – М.: Наука, 1977. – 216 с.
14. *Gershenfeld N. A.* The nature of mathematical modeling / N. A. Gershenfeld. – Cambridge University Press, 2000. – 344 p.

Персоналии



Самарский Александр Андреевич (1919–2008) — советский ученый с мировым именем, академик, Герой Социалистического труда, лауреат Ленинской и Государственных премий СССР, ветеран Великой Отечественной войны. А. А. Самарским были заложены основы нового научного направления — математического моделирования, разработана методология вычислительного эксперимента, создана фундаментальная общая теория разностных схем. Научная школа академика А. А. Самарского известна в мире своими выдающимися

работами в области математического моделирования задач термоядерного синтеза, физики плазмы, магнитной и радиационной газодинамики, атомной энергетики, аэродинамики.



Яненко Николай Николаевич (1921–1984) — выдающийся советский математик и механик, академик, Герой Социалистического труда, трижды лауреат Государственной премии СССР, ветеран Великой Отечественной войны. Мировое признание получил созданный им «метод дробных шагов». Н. Н. Яненко основал новую научную дисциплину — математическую технологию, разработал принципы модульного анализа математических моделей, вычислительных алгоритмов и программ, принципы распараллеливания алгоритмов и конструирования пакетов

прикладных программ. Им были сформированы творческие коллективы, способные решать сложнейшие задачи и заслуженно называемые теперь школой академика Яненко. В 1964 г. Н. Н. Яненко основал в НГУ кафедру «Вычислительные методы механики сплошной среды», которая в 1997 г. стала называться кафедрой «Математическое моделирование».



Шокин Юрий Иванович (род. 1943) — известный специалист в области прикладной математики и информатики, академик. Ю. И. Шокин обосновал и развил новое научное направление в вычислительной математике — метод дифференциального приближения для анализа, классификации и построения разностных схем с заданными свойствами. Первым в стране им начаты исследования по интервальной математике. Научная школа академика Ю. И. Шокина известна работами по численному моделированию волн цунами и

цунамирайонированию Дальневосточного побережья РФ, по расчету машиностроительных конструкций, использованию математического моделирования для анализа причин и последствий аварийных ситуаций, по созданию «Сети передачи данных СО РАН». Возглавляемый Ю. И. Шокиным Институт вычислительных технологий СО РАН является базовым для кафедры «Математическое моделирование» механико-математического факультета НГУ.



Ахмеров Рустям Рафаэлович (1951–2009) — известный специалист по нелинейным дифференциальным уравнениям в частных производных и нелинейному функциональному анализу. Работал в Воронежском государственном университете, Институте теоретической и прикладной механики СО АН СССР, Институте вычислительных технологий СО РАН. Первым из преподавателей кафедры «Математическое моделирование» начал читать для студентов механико-математического факультета НГУ лекции по обязательному курсу «Математическое моделирование», в которых удивительным образом сочетались

математическая строгость и легкость восприятия, лаконичность и широта охвата предмета.



Бернулли Якоб (Bernoulli, Jakob; 1654–1705) — швейцарский математик, профессор математики Базельского университета. Якоб Бернулли внес огромный вклад в развитие аналитической геометрии и зарождение вариационного исчисления. Его именем названа лемниската Бернулли. Он исследовал также циклоиду, цепную линию, логарифмическую спираль. Ему принадлежат значительные достижения в теории рядов, дифференциальном исчислении, теории вероятностей и теории чисел, где его именем названы «числа Бернулли». Якоб Бернулли издал также работы по различным вопросам арифметики, алгебры, геометрии и физики.



Вольтерра Вито (Volterra, Vito; 1860–1940) — итальянский математик, профессор Пизанского, Туринского, Римского университетов. Работы Вольтерра посвящены дифференциальным уравнениям в частных производных, теории упругости, интегральным и интегро-дифференциальным уравнениям, функциональному анализу и теории множеств. В частности, Вольтерра построил примеры непрерывных функций, производные которых существуют, но не удовлетворяют критерию интегрируемости ни на каком интервале.



Гаусс Иоганн Карл Фридрих (Gauss) (1777–1855) — великий немецкий математик, астроном и физик, считается одним из величайших математиков всех времен, «королем математиков». Для творчества Гаусса характерна органическая связь между теоретической и прикладной математикой, широта проблематики. Труды Гаусса повлияли на развитие алгебры (доказательство основной теоремы алгебры), теории чисел (квадратичные вычеты), дифференциальной геометрии (внутренняя геометрия поверхностей), математической физики (принцип Гаусса), теорий электричества

и магнетизма, геодезии (разработка методов наименьших квадратов) и многих разделов астрономии.

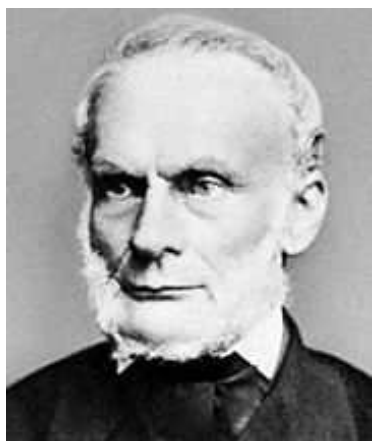


Дюэм (Дюгем) Пьер Морис Мари (Duhem) (1861–1916) — французский физик, математик, философ и историк науки, член Парижской академии наук. Основные работы относятся к гидродинамике, электродинамике, магнетизму, теории упругости и классической термодинамике. Универсализм мировоззрения ученого, философский склад его ума позволили ему достаточно смело применить основные принципы термодинамики к химическим процессам, что нашло отражение в его новаторских трудах «Термодинамический потенциал и его применение к химической термодинамике» (1886) и «Термодинамика и химия» (1902).

ский потенциал и его применение к химической термодинамике» (1886) и «Термодинамика и химия» (1902).

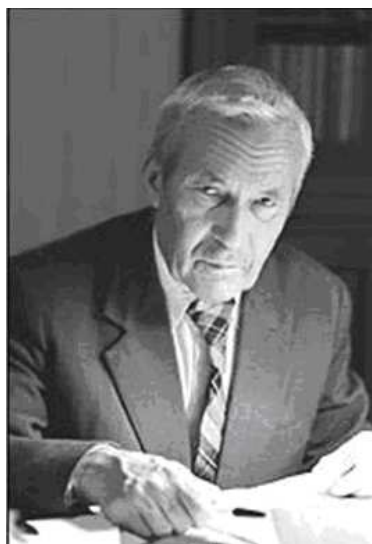


Каратеодори Константин (Carathéodory) (1873–1950) — немецкий математик греческой национальности. Выпускник Бельгийской военной академии 1895 г. Математическое образование получил в Берлине и Геттингене. С 1924 г. профессор университета в Мюнхене. Известен работами по теории функций, вариационному исчислению (построение теории поля экстремалей), теории конформных отображений, общей теории меры множеств. В 1909 г. предложил аксиоматическое построение основ термодинамики.



Клаузиус Рудольф Юлиус Эммануэль (Clausius) (1822–1888) — немецкий физик и математик. Свою славу Клаузиус приобрел благодаря работам по теоретической термодинамике; лишь благодаря трудам Клаузиуса, одновременно с работами Джоуля, Гельмгольца и Ранкина, термодинамика получила окончательную разработку. Клаузиус предложил одну из формулировок второго начала термодинамики, известную в настоящее время как формулировка Клаузиуса. Он доказал несколько новых теорем в механической теории тепла, которые

носят его имя. Им же было введено понятие энтропии. Благодаря ясности изложения Клаузиуса механическая теория тепла в самом начале своего развития стала применяться к объяснению явлений из совершенно другой области научного знания. Так, в 1867 г. устанавливается аналогия между испарением и разложением химических соединений. Клаузиус известен также работами по упругости тел, по оптике и динамическому электричеству.



Колмогоров Андрей Николаевич (1903–1987) — величайший советский математик XX столетия, академик. А. Н. Колмогоров является создателем современной теории вероятностей, автором фундаментальных трудов и ряда мировых открытий в теории функций, дифференциальных уравнений, гамильтоновых систем, в математической логике, топологии, функциональном анализе, информатике, теории турбулентности. Созданные им научные школы определили развитие многих из этих направлений в XX столетии. В истории российской науки имя А. Н. Колмогорова стоит рядом с именами М. В. Ломоносова и Д. И. Менделеева — ученых, всей своей жизнью прославивших Россию.



Коши Огюстен Луи (Cauchy, Augustin Louis; 1789–1857) — великий французский математик, член Парижской академии наук. Коши разработал фундамент математического анализа и внес огромный вклад в анализ, алгебру, математическую физику и многие другие области математики. Впервые дал строгое определение основным понятиям математического анализа — пределу, непрерывности, производной, дифференциалу, интегралу, сходимости ряда. Курсы анализа Коши, основанные на систематическом использовании понятия предела, послужили образцом для большинства курсов позднейшего времени. Его имя внесено в список величайших ученых Франции.



Лагранж Жозеф Луи (Lagrange) (1736–1813) — французский математик и механик итальянского происхождения. Наряду с Эйлером — лучший математик XVIII в. Особенно прославился исключительным мастерством в области обобщения и синтеза накопленного научного материала. Автор классического трактата «Аналитическая механика», в котором установил фундаментальный «принцип возможных перемещений» и завершил математизацию механики. Внес огромный вклад в развитие анализа, теории чисел, теории вероятностей, численных методов, вариационного исчисления,

теории дифференциальных уравнений. В двух своих важных трудах — «Теория аналитических функций» (1797) и «О решении численных уравнений» (1798) — подытожил все, что было известно по этим вопросам в то время. Содержавшиеся в этих работах новые идеи и методы были развиты в дальнейшем математиками XIX в.



Лаплас Пьер-Симон (Laplace) (1749–1827) — автор классических трудов «Аналитическая теория вероятностей» (1812) и «Трактат о небесной механике» (1798–1825) по теории вероятностей и небесной механики (динамика Солнечной системы в целом и ее устойчивость), множества трудов по дифференциальным уравнениям, математической физике, теории капиллярности, теплоте, акустике, геодезии и др. Предложил (1796) космогоническую гипотезу (гипотеза Лапласа). Классический представитель механистического детерминизма. Состоял членом шести Академий наук и Королевских обществ, в том числе Петербургской академии.

Классический представитель механистического детерминизма. Состоял членом шести Академий наук и Королевских обществ, в том числе Петербургской академии.



Лотка Альфред Джеймс (Lotka, Alfred James; 1880–1949) — американский математик, физикохимик, статистик. Получил известность благодаря своей работе в области динамики популяций. Лотка показал, что население, растущее неизменным темпом и сохраняющее неизменный порядок вымирания, стремится к определенному возрастному составу и к постоянным значениям коэффициентов рождаемости и смертности. Изучал также процесс смены поколений, дал современное аналитическое выражение длины поколения, проанализировал процесс демографического развития семьи. Ввел интегральное уравнение воспроизводства населения. Исследовал

экономические и демографические аспекты здравоохранения и эволюции продолжительности жизни, заложив основы экономической демографии.



Ляпунов Александр Михайлович (1857–1918) — русский математик и механик, академик Петербургской АН. Работал в Петербургском, Харьковском, Одесском университетах. Основные работы посвящены теории устойчивости равновесия и движения механических систем, теории фигур равновесия равномерно вращающейся жидкости и математической физике. Важнейшим достижением А. М. Ляпунова является создание современной теории устойчивости равновесия и движения механических систем, определяемых конечным числом параметров.



Мальтус Томас Роберт (Malthus, Thomas Robert; 1766–1834) — английский священник и ученый, демограф и экономист. В 1798 г. опубликовал свою книгу «Essay on the Principle of Population» («Опыт о законе народонаселения»). Три основных тезиса «Опыта»:

- из-за биологической способности человека к продолжению рода его физические способности используются для увеличения своих продовольственных ресурсов;
- народонаселение строго ограничено средствами существования;
- рост народонаселения может быть остановлен лишь встречными причинами, которые сводятся к нравственному воздержанию, или несчастьями (войны, эпидемии, голод).

Пришел к выводу, что народонаселение растет в геометрической прогрессии, а средства существования — в арифметической.



Навье Анри (Navier) (1785–1836) — французский инженер и ученый. Автор ряда трудов по строительной механике, сопротивлению материалов, теории упругости, гидравлике и гидромеханике. Автор курса сопротивления материалов. Навье сформулировал теорию упругости в математическом виде (1821), сделав ее пригодной для применения в строительстве с достаточной на первое время точностью. В 1826 г. ввел модули упругости как характеристику материалов, независимую от второго момента площади. Навье считается одним из основателей современной теории упругости.

Его основной вклад — вывод в 1822 г. уравнения Навье — Стокса, играющего ключевую роль в гидродинамике.



Остроградский Михаил Васильевич (1801–1861) — российский и украинский математик и механик, признанный лидер математиков Российской империи середины XIX века. Основные его работы относятся к прикладным аспектам математического анализа, механики, теории упругости и магнетизма, теории вероятностей. Он внес также вклад в алгебру и теорию чисел. Хорошо известен метод Остроградского для интегрирования рациональных функций (1844), чрезвычайно полезна формула Остроградского для преобразования объемного интеграла в поверхностный.

Кроме научных исследований, написал ряд учебников по высшей и элементарной математике («Программа и конспект тригонометрии», «Руководство начальной геометрии» и др.).



Парето Вильфредо (Pareto, Vilfredo; 1848–1923) — итальянский экономист и социолог, представитель математической школы в экономике. Известен так называемым «законом Парето», описывающим процесс распределения доходов. В объяснении человеческих действий Парето выдвинул теорию «остатков» и «производных», а также теорию элиты. В основе его социологии лежит идея о том, что значительная часть социальных действий не имеет ничего общего с логикой, а поступки индивидов нередко продиктованы стремлением придать иррациональным действиям некую видимость логичности. Человек движим как инстинктивными «остатками», так и логизированными «производными» остатков.



Перл Раймонд (Pearl, Raymond; 1879–1940) — американский биолог, демограф и статистик, известный как один из основателей биогеронтологии. Большую часть своей профессиональной жизни провел в университете Джона Гопкинса (Johns Hopkins University) в Балтиморе, США. Основные труды в области биометрии и биологии человека. Изучая зависимость темпа роста численности биологической популяции плодовых мушек от ее плотности, установил, что эта зависимость выражается в виде так называемой логистической кривой, т. е. сначала прирост увеличивается, а достигнув определенного уровня, приостанавливается. Пре-

небрегая социальной природой человека, перенес этот закон на рост населения отдельных стран.



Стокс Джордж Габриель (Stokes) (1819–1903) — английский физик-теоретик и математик ирландского происхождения. Работы Стокса относятся к области гидродинамики, оптики, спектроскопии, математической физики. Разработал теорию вязкости жидкостей (1845), математическую теорию движения вязких жидкостей (уравнение Навье — Стокса). Вывел формулу (1851) для силы сопротивления, действующей на твердый шар малого размера при его движении в бесконечно вязкой среде (закон Стокса). Опубликовал ряд работ по оптике (1849): исследовал кольца Ньютона, абберацию, дифракцию, интерференцию и поляризацию света.



Томсон Уильям, лорд Кельвин (Kelvin) (1824–1907) — один из величайших английских физиков. В круг интересов Томсона входили термодинамика, гидродинамика, электромагнетизм, теория упругости, теплота, математика, техника. Познакомившись с теоремой Карно, высказал идею абсолютной термодинамической шкалы (1848). В 1851 г. сформулировал (независимо от Р. Клаузиуса) второе начало термодинамики. Ввел понятие диссипации энергии. Внес большой вклад в развитие практических применений разных разделов науки. Сконструировал целый ряд точ-

ных электрометрических приборов: «кабельный» гальванометр, сифон-отметчик для приема телеграфных сигналов. Предложил использовать многожильные провода из медной проволоки. Член Петербургской академии наук (1896).



Ферхюльст Пьер Франсуа (Verhulst, Pierre Francois; 1804–1849) — бельгийский математик, член Бельгийской академии наук, известен работами в области моделирования численности населения. Главным результатом его исследований является формулирование логистического уравнения для численности населения, также называемое уравнением Ферхюльста. Введенный им в уравнение Мальтуса дополнительный отрицательный член, пропорциональный квадрату численности населения, отражает уменьшение скорости роста численности за счет ограниченности ареала обитания или же количества ресурсов.



Фурье Жан Батист Жозеф (Fourier) (1768–1830) — французский математик и физик. Представил работу (1789) о численном решении уравнений любой степени, но она затерялась во время революции; изложил (1796) теорему о числе вещественных корней в заданном интервале (опубликована в 1820 г.). Позднее его результаты обобщили Штурм и Коши. Получил Большую премию Академии (1812) за аналитическую теорию теплопроводности, несмотря на нестрогие доказательства. Свои методы (ряды и интегралы Фурье) использовал в теории

распространения тепла. Но вскоре они стали исключительно мощным инструментом математического исследования самых разных задач, особенно там, где есть волны и колебания. А этот круг чрезвычайно широк: астрономия, акустика, теория приливов, радиотехника и др.



Эйлер Леонард (Euler) (1707–1783) — российский, немецкий и швейцарский математик, внесший значительный вклад в развитие математики, а также механики, физики, астрономии и ряда прикладных наук. Автор более чем 800 работ по математическому анализу, дифференциальной геометрии, теории чисел, приближенным вычислениям, небесной механике, математической физике, оптике, баллистике, кораблестроению, теории музыки и др. Многие его работы оказали значительное влияние на развитие науки. Член Петербургской

академии наук (1731). Первые русские академики по математике (С. К. Котельников) и астрономии (С. Я. Румовский) были его учениками.



Якоби Карл Густав Якоб (Jacobi) (1804–1850) — известный немецкий математик, родной брат российского академика, физика Бориса Семеновича Якоби. Внес огромный вклад в комплексный анализ, линейную алгебру, динамику и другие разделы математики и механики. В вариационном исчислении исследовал вторую вариацию (1837) и получил достаточные условия экстремума, позже обобщенные Вейерштрассом (условия Якоби). Занимаясь изучением фигур равновесия вращающейся жидкости,

показал, что при определенных условиях ими могут быть не только эллипсоиды вращения, исследованные еще Маклореном, но и трехосные эллипсоиды общего вида, получившие название эллипсоидов Якоби. В работе «О функциональных детерминантах» (1841) открыл и исследовал функциональные определители, называемые теперь якобианами. Имя Якоби носит класс ортогональных многочленов, обобщающих многочлены Лежандра. Ввел в употребление общепринятое теперь обозначение частной производной символом « ∂ ».

Предметный указатель

- Аксиома
- внутренних поверхностных сил, 121
 - движения, 112
 - идеальности, 204
 - линейности, 206
 - локального равновесия, 180
 - материального континуума, 109
 - потока тепла, 122
 - пространства-времени, 109
 - сил и моментов, 121
 - термодинамики, 179
 - термодинамического состояния, 204
 - Фурье, 181
- Аксиомы баланса, 118
- Базис, 125, 126
- Базисы одинаковой ориентации, 128
- Вектор
- напряжений внутренних поверхностных сил, 120
 - перемещения, 182
 - потока тепла, 161, 181
- Газ, 191
- Градиент скалярного поля в точке, 140
- Давление, 165, 204
- Движение
- материальной точки (частицы), 112
 - сплошной среды, 111
- Девиатор, 207
- Деформация сплошной среды, 182
- Диада, 130
- Дивергенция
- векторного поля, 142
 - тензорного поля, 142
- Жидкость, 191, 202
- идеальная, 204, 211
 - несжимаемая, 208
 - однородная, 202
- Задача
- Коши для ОДУ, 145
 - многокритериальная, 98
- Закон
- движения сплошной среды, 112
 - Ньютона, 14
 - сохранения, 16
 - — импульса, 157
 - — момента импульса, 158
 - — энергии, 175
 - термодинамики, 178
 - Фурье, 181, 200
- Изометрия, 130
- Изоморфизм, 138
- Импульс (количество движения), 117
- Инварианты
- линейного отображения, 132

- матрицы, 132
- Индексы немые, 127
- Кобазис, 126
- Количество теплоты, 177
- Компоненты
 - тензора, 137
 - — ковариантные, 137
 - — контравариантные, 137
 - — смешанные, 137
- Компоненты вектора ковариантные, контравариантные, 128
- Координаты
 - вектора, 125
 - Лагранжа, 114
 - Эйлера, 114
- Коэффициент
 - вязкости
 - — второй, 206
 - — первый, 206
 - вязкости кинематической, 209
 - температуропроводности, 211
 - теплопроводности, 181
- Лемма
 - о представлении симметричных функций
 - — на \mathbf{R}^2 , 194
 - — на \mathbf{R}^3 , 195
 - о формуле Эйлера для инварианта J_3 , 146
 - об однородности основного уравнения состояния, 202
- Масса, 110
- Матрица
 - сообщества, 61
 - Якоби, 142
- Метод
 - аналогий, 21
- Множество Парето, 99
- Модель
 - вольтерровская, 60
 - двухвидового взаимодействия, 57
 - дифференциальная сплошной среды, 164
 - жидкости
 - — вязкой несжимаемой, 210
 - — идеальной несжимаемой, 211
 - — классическая, 208
 - — первая замкнутая, 205
 - Колмогорова, 66
 - Лотки — Вольтерра, 51
 - Мальтуса, 41
 - математическая, 13
 - математическая сплошной среды, 123
 - межвидовой конкуренции, 46
 - первого порядка аппроксимации, 68
 - первого приближения, 68
 - Ферхюльста — Пирла, 43
 - экономического роста, 79
- Момент количества движения, 117
- Начало термодинамики второе, 178
- Неравенство
 - Коши — Шварца, 129
- Неравенство Клаузиуса — Дюгема, 180
- Норма вектора, 126
- Объем, 109
 - удельный, 204
- Оператор Лапласа, 144
- Описание сплошной среды лагранжево, эйлерово, 113
- Отображение
 - антисимметричное, 133
 - линейное, 129
 - ортогональное, 134
 - самосопряженное, 133
 - симметричное, 133

- Параметры
 — определяющие, 168
 — — полная система, 169
 — состояния, 166
- Плоскость фазовая, 53
- Плотность поверхностная потока тепла, 122
- Поле
 — векторное, 140
 — дифференцируемое, 140
 — индифферентное, 189
 — непрерывно дифференцируемое, 140
 — непрерывное, 140
 — скалярное, 140
 — тензорное, 140
- Принцип
 — вариационный, 17
 — независимости от системы отсчета, 189
 — отвердевания, 119
 — Парето, 98
 — причинности, 186
 — пространственной локализации, 186
- Произведение
 — векторное, 134
 — скалярное, 125
- Производная
 — полная, 150
 — поля в точке, 140
 — поля по направлению, 141
 — частная, 141
- Пространства изометричные, 130
- Пространство
 — аффинное, 108
 — векторное, 124
 — евклидово, 109, 126
 — евклидово аффинное, 109
 — линейных отображений, 129
 — линейных функционалов, 130
 — нормированное, 130
 — присоединенное, 108
- Процесс
 — непрерывный, 170
 — обратимый, 170
- Процесс, цикл, 170
- Равновесие термодинамическое, 175
- Ранг (валентность) тензора, 137
- Репер, 188
- Решение
 — асимптотически устойчивое, 63
 — неустойчивое, 62
 — устойчивое по Ляпунову, 62
- Свертка линейных отображений, 134
- Сдвиг направлений относительный, 183
- Седло, 227
- Сила
 — внешняя массовая, 119
 — внутренняя поверхностная, 120
- Символ Кронекера, 126
- Система
 — автономная, 63
 — отсчета, 188
 — уравнений
 — — Навье — Стокса, 210
 — — Эйлера, 211
- След матрицы, 131
- Состояние
 — равновесия, 63
 — среды равновесное термодинамическое, 165
- Среда сплошная
 — k -параметрическая, 166
 — без наследственности, 187
 — простая, 187
 — с бесконечно короткой памятью, 187
 — с нулевой памятью, 187
- Тело упругое, 192
- Температура

- абсолютная, 165
- абсолютная (аксиоматическое определение), 179
- Температура абсолютная, 178
- Тензор, 137
 - деформации
 - — Лагранжа, 183
 - — Эйлера, 185
 - дисторсии, 183, 185
 - метрический (фундаментальный), 138
 - напряжений, 154, 157, 159
 - нулевого ранга, 138
 - скоростей деформации, 161, 185
- Теорема
 - Коши — Пикара, 145
 - о дифференцируемости решений ОДУ по начальным данным, 146
 - о представлении изотропной
 - — векторной функции, 199
 - — скалярной функции, 199
 - — тензорной функции, 195
 - о симметричности тензора напряжений, 159
 - о существовании вектора потока тепла, 161
 - об индифферентности основных тензоров, 189
 - об устойчивости точки покоя, 75
 - основная механики сплошной среды, 154
- Теплоемкость, 210
- Термодинамика, 165
- Термостатика, 165
- Тождество термодинамическое основное, 179
- Точка покоя, 63
- Траектория, 112
- Траектория фазовая, 53
- Удлинение относительное, 183
- Узел
 - асимптотически устойчивый, 228
 - вырожденный, 71
 - неустойчивый, устойчивый, 70
- Уравнение
 - в вариациях, 146
 - Клапейрона, 15
 - неразрывности, 152
 - состояния для жидкостей основное, 202
- Уравнения
 - определяющие, 186
 - состояния, 186
- Устойчивость по Ляпунову, 61
- Фокус неустойчивый, устойчивый, 73
- Формула Эйлера, 146
- Формулы Гаусса — Остроградского, 143
- Функция
 - векторная изотропная, 193
 - диссипативная, 207
 - Кобба — Дугласа, 81
 - матричная изотропная, 194
 - скалярная изотропная, 193
 - тензорная изотропная, 192
- Центр, 64
- Цикл, 64
- Энергия
 - внутренняя, 110
 - кинетическая, 118
 - полная, 118
 - тепловая, 177
 - удельная объемная, 111
- Энтропия, 165, 178
 - (аксиоматическое определение), 179
 - удельная, 179

Учебное издание

Хакимзянов Гаяз Салимович,
Чубаров Леонид Борисович,
Воронина Полина Владимировна

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Учебное пособие

Редактор *Е. П. Войтенко*

Подписано в печать 13.03.2014 г.
Формат 60 x 84 1/16. Уч.-изд. л. 16,4. Усл. печ. л. 15,2.

Тираж 250 экз. Заказ №

Редакционно-издательский центр НГУ.
630090, Новосибирск-90, ул. Пирогова, 2.