

Белолипецкий В. М., Шокин Ю. И.

# МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ *в задачах*

ОХРАНЫ ОКРУЖАЮЩЕЙ СРЕДЫ





РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК  
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ  
Институт вычислительных технологий  
Вычислительный центр (г. Красноярск)

Белолипецкий В. М., Шокин Ю. И.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ  
В ЗАДАЧАХ ОХРАНЫ ОКРУЖАЮЩЕЙ СРЕДЫ

Ответственный редактор  
доктор физико-математических наук Сапожников Г. А.

Новосибирск  
Издательство «ИНФОЛИО-пресс»  
1997

УДК 539.3  
ББК Б1в641 + В19  
Б435

**Белолипецкий В. М., Шокин Ю. И.**

Б435

Математическое моделирование в задачах охраны окружающей среды. — Новосибирск: Издательство «ИНФОЛИО-пресс», 1997. — 240 с.: ил.

ISBN 5-89590-004-6

Книга посвящена математическому моделированию задач, связанных с охраной окружающей среды. В ней излагаются примеры математического моделирования в этих задачах. Описываются задачи математической технологии, методология системного анализа. Рассматриваются примеры математических моделей в экологии, математические модели для проблем охраны водных ресурсов и оптимального размещения промышленных предприятий. Приводятся модели водных экосистем, модели глобального развития.

Книга рассчитана на математиков, экологов, биологов, гидрологов, географов, а также на студентов и аспирантов соответствующих специальностей.

Табл. 3. Ил. 29. Библиогр.: 25 назв.

**ББК Б1в641 + В19**

ISBN 5-89590-004-6

- © Белолипецкий В. М., 1997
- © Шокин Ю. И., 1997
- © Институт вычислительных технологий  
СибРАН, 1997
- © Вычислительный центр СО РАН (г. Красноярск),  
1997
- © Издательство «ИНФОЛИО-пресс», 1997



# Введение\*

Темпы развития цивилизации и ее воздействие на природные ресурсы привели к тому, что контроль и управление окружающей средой стали актуальнейшими проблемами современности.

Под “окружающей средой” принято понимать целостную систему взаимосвязанных природных и антропогенных объектов и явлений, в которой живут люди. (Антропогенные воздействия – это воздействия, вызванные деятельностью человека.) Понятие окружающей среды включает социальные, природные и искусственно создаваемые физические, химические и биологические факторы, т. е. все то, что прямо или косвенно воздействует на жизнь и деятельность человека.

Задача сводится к исследованию сложных систем или ситуаций при нечетко поставленных целях. Одна из задач, которую приходится решать, и состоит в определении целей. Мощным инструментом исследования сложных систем является системный анализ. При системном подходе используется математический аппарат теории исследования операций, методы неформального анализа (метод экспертиз, метод опроса, эвристические методы) и имитационные эксперименты.

## § 1. Окружающая среда и научно-технический прогресс

Научно-техническая революция (НТР), ставшая возможной в результате великих открытий в физике, биологии, химии и многих

---

\*Работа выполнена при поддержке Красноярского краевого фонда науки. Грант № 6F0111.

других науках, позволяет интенсивно использовать природные ресурсы, необходимые для дальнейшего развития производительных сил, удовлетворения материальных и духовных потребностей общества.

НТР приводит к коренным изменениям не только в промышленности, но и в сельском хозяйстве, транспорте и других отраслях материального производства. Она широко вторгается во все сферы общественной жизни и человеческой деятельности.

Однако НТР нередко усложняет взаимоотношения человека с окружающей природной средой, вносит весьма заметные и непредвиденные изменения в экологические системы, биосферы в целом. Природа безмолвна, но она не безразлична к человеческой деятельности, она реагирует на каждый человеческий акт, реагирует на него своими собственными средствами. Природа мстит человеку, если человек, преобразуя ее, не руководствуется ее законами. Она разрушается, грозит обществу лишением того, без чего сама социальная жизнь невозможна, — сырья, энергии, пищи.

Изыскания и исследования в области охраны природы должны опережать запросы практики и обеспечивать разработку научных основ взаимоотношений человека и природы, а также подготовку конкретных предложений по рациональному использованию естественных ресурсов.

## § 2. Природа и поведение экологических систем

Реальной основой для всестороннего подхода к природе является учение о биосфере Земли. Биосфера (от греч. *bios* — жизнь, *spharia* — шар) — оболочка Земли, в которой развивается жизнь исключительно разнообразных организмов, населяющих поверхность суши, почву, нижние слои атмосферы, гидросферу. В своей основе биосфера представляет собой результат взаимодействия живой и неживой материи. Основоположителем современных представлений о биосфере считается выдающийся советский естествоиспытатель академик В. И. Вернадский.

Основа динамического равновесия и устойчивости биосферы — круговорот веществ и превращение энергии. Учение о биосфере

является основой экологии. Экология — наука, изучающая условия существования живых организмов и взаимосвязи между организмами и средой, в которой они обитают. Физическая среда географического района вместе с населяющими его видами организмов образуют экосистему (биогеоценоз). Современная биосфера — результат длительной эволюции всего органического мира и неживой природы. В эволюции биосферы принимает участие и человек. Если вначале воздействие человека на природу было незначительным, то по мере развития производительных сил общества оно все более возрастало и в настоящее время по масштабам приближается к действию геологических процессов.

Оценка экологических стратегий — это попытка оценить то, как экологическая система будет реагировать на вмешательства человека и природы. Такие вмешательства могут угрожать существованию системы, однако при тщательном учете способны принести и пользу. Можно выделить четыре свойства, которые определяют, как экосистемы отвечают на изменения и, следовательно, как должны разрабатываться стратегии и оцениваться вмешательства.

- Части экологической системы связаны друг с другом избирательно. Это важно для определения того, что именно необходимо измерять. Связи в экосистеме устроены специальным образом. Каждый вид имеет ограниченное число связей с другими, что приводит к отчетливой организации экологической системы. Экосистемы обнаруживают такую структуру связей, которая приводит к существованию подсистем, сильно связанных внутри себя, но незначительно взаимодействующих между собой. Поэтому важное значение для контроля окружающей среды имеет определение качественной структуры экосистемы.

- События не однородны в пространстве, явления могут сильно отличаться в различных частях пространства.

- Резкие изменения в поведении обычны для многих экосистем. Многие взаимодействия таковы, что существует порог, отделяющий области, в которых поведение сохраняется, от областей, где оно резко меняется или эффект имеет разные знаки. Такие нелинейные отношения приводят к существованию множественных областей стабильности.

• Экологические системы не статичны, а находятся в непрерывном изменении (изменяются численности видов, условия равновесия, видовой состав). Это динамическое изменение частично определяет структуру, разнообразие и жизнеспособность систем. Некоторые изменения вызываются внутренними механизмами, другие — внешними событиями (засухой, морозом, жарой, пожарами и штормами). Следовательно, естественные системы непрерывно подвергаются “проверке на прочность” и их адаптация к этим испытаниям определяет их реакцию на новые вмешательства.

Продолжительное испытание на прочность различных систем в известном смысле придало им ту эластичность, которой они обладают. Поэтому при разработке экологической стратегии нужно учитывать, что помещение системы в узкие рамки неизменности может в процессе дальнейшей эволюции сделать ее хрупкой и уязвимой.

Перечисленные свойства (упорядоченность связей между частями, пространственная неоднородность, эластичность и динамическая изменчивость) должны учитываться при разработке методов оценки воздействий на окружающую среду и экологической стратегии.

Решение кардинальных проблем экологии тесно связано с осуществлением жизненно важных задач развития экономики, улучшения условий существования человечества, а также с охраной окружающей среды. Среди них наиболее важными являются следующие.

*Адаптация к среде.* Данная проблема охватывает многие вопросы: приспособительное варьирование внутривидовых группировок и многовидовых сообществ, изучение условий адаптации к холоду, сухости, высоким температурам, невесомости и т. д.

*Регуляция численности популяций.* Результаты исследований численности популяций могут быть использованы при разработке мероприятий по управлению динамикой численности вредителей сельского и лесного хозяйства, переносчиков болезней человека и сельскохозяйственных животных, а также промысловых видов.

*Управление продукционным процессом.* Эта проблема включает вопросы количественной характеристики энергетического потока в системе трофических (от греч. *trophe* — питание) уровней. Среди них наиболее актуальными являются управление процессом фото-

синтеза, повышение его интенсивности, увеличение выхода продукции, используемой человеком, поддержание плодородия почвы, предохранение от истощения, эрозии, эффективность применения различных типов удобрений, рациональное размещение посевов.

*Экологическая индикация.* Она включает в себя вопросы, тесно связанные с нуждами различных отраслей промышленности, сельского хозяйства; определяет масштабы и прогнозирует последствия воздействия человека на природную среду (степень загрязнения вод, атмосферы, почв); определяет допустимый порог истощения почвы, предельно допустимые концентрации в окружающей среде различных отходов деятельности человека.

*Мониторинг.* Система повторных целенаправленных наблюдений за интересующими человека параметрами природной среды в динамике называется мониторингом. На основании полученных данных о состоянии природной среды даются рекомендации для разработки рациональных способов ее использования.

Взаимоотношения человека и окружающей среды, т.е. проблема сохранения стабильности человеческого общества в целом, столь сложны и многообразны, что о них серьезно можно говорить только при условии широкого использования ЭВМ и математических методов анализа.

### § 3. Математическая технология

В настоящее время в прикладной математике при решении задач на ЭВМ сложилась вполне определенная технологическая цепочка: объект исследования—физическая модель—математическая модель—численный алгоритм—программа—расчет на ЭВМ, сравнение с экспериментальными и другими данными. Объект математической технологии — вычислительная часть этой цепочки: математическая модель—численный алгоритм—программа—расчет на ЭВМ.

На современном этапе научных исследований вычислительный эксперимент — мощный научный метод, предназначенный для изучения, прогнозирования, оптимизации сложных многопараметрических нелинейных процессов, теоретическое и экспериментальное исследование которых традиционными методами затруднено или не-

возможно. (Например, управление климатом, изменение состояния экологических систем — для этих случаев натуральный эксперимент опасен и может быть выполнен один раз.) На первом этапе вычислительного эксперимента формулируется математическая модель.

Основное требование, предъявляемое к математической модели, — это адекватное описание физических процессов, протекающих в исследуемых системах. Однако охватить все многообразие физических явлений чрезвычайно трудно. Необходимо упростить проблему и рассмотреть только основные процессы. Какие процессы являются основными, а какие второстепенными определяется в первую очередь свойствами данной системы и тем кругом физических (или каких-либо других) задач, для решения которых она предназначена. Поэтому построение математической модели существенно зависит от конкретного явления (процесса). Вместе с тем есть ряд общих положений, которые лежат в основе каждой математической модели. Система уравнений, составляющая математическую модель, должна быть замкнутой и непротиворечивой. Она предназначена для изучения широкого класса физических явлений, для исследования целого ряда различных систем. Алгоритм решения задачи должен быть легко реализуемым, чтобы решение соответствующей системы уравнений не отнимало много времени и средств. К желательным свойствам математической модели следует отнести ее корректность по входным параметрам и свойство физической замкнутости в том смысле, чтобы количество внешних физических параметров было минимальным и они соответствовали бы величинам, которыми можно управлять в реальном процессе, математическая модель должна как бы “жить самостоятельно”, подобно физической модели. С помощью таких математических моделей можно проводить машинные эксперименты.

Для решения входящих в математическую модель уравнений при различных значениях параметров, управляющих процессом, используется основной теоретический аппарат вычислительной математики — численные методы. На следующем этапе составляется программа для ЭВМ, реализующая выбранный алгоритм. В математике возникла “технология”, важным элементом которой являются проблемно-ориентированные пакеты прикладных программ, предо-

ставляющие возможность хранить относительно простые готовые программы и автоматически собирать из них сложные. Далее проводятся вычисления на ЭВМ по составленным программам, т. е. машинный эксперимент. На завершающем этапе выполняется анализ результатов, сопоставление их с чисто теоретическими прогнозами и данными натурального эксперимента. При необходимости математические модели и вычислительные алгоритмы уточняются и вычислительный эксперимент повторяется на более совершенной основе.

Результат вычислительного эксперимента — выраженные в точной количественной форме детальные и конкретные практические рекомендации.

## 1. Общие принципы построения математических моделей

При изучении любого явления вначале получают качественное описание проблемы. На этапе моделирования качественное представление переходит в количественное. На этом этапе определяют функциональные зависимости между переменными и для каждого варианта решения и входных данных выходные данные системы. Построение моделей — процедура неформальная и очень сильно зависит от опыта исследователя, всегда опирается на определенный опытный материал. Модель должна правильно отражать явления, однако этого мало — она должна быть удобной для использования. Поэтому степень детализации модели, форма ее представления зависят от целей исследования.

Изучение и формализация опытного материала — не единственный способ построения математической модели. Важную роль играет получение моделей, описывающих частные явления, из моделей более общих. Так, в механике жидкостей модель пограничного слоя Прандтля, являющаяся асимптотической, выведена из более общей модели — уравнений Навье — Стокса. Сегодня математические модели применяются в различных областях знания, выработано немало принципов и подходов, носящих достаточно общий характер.

Основная задача научного анализа — выделить реальные движения из множества мысленно допустимых, сформулировать принципы их отбора. Здесь термин “движение” употребляется в широком

смысла — изменению вообще, всякое взаимодействие материальных объектов. В различных областях знания принципы отбора движений разные. Принято различать три уровня организации материи: неживая, живая и самая высокая — мыслящая. На самом нижнем уровне — неживой материи — основными принципами отбора являются законы сохранения вещества, импульса, энергии и т. д. Любое моделирование начинается с выбора основных (фазовых) переменных, с помощью которых записываются законы сохранения.

Законы сохранения не выделяют единственного движения и не исчерпывают всех принципов отбора. Необходимо учитывать законы термодинамики, принципы минимума диссипации энергии, устойчивости. Очень важны различные условия (ограничения): граничные, начальные и др. Законы сохранения не обеспечивают однозначности возможных движений. Другие принципы отбора производят дальнейшее сужение множества возможных движений.

На уровне живой материи все принципы отбора движений, справедливые для неживой материи, сохраняют свою силу. Поэтому и здесь процесс моделирования начинается с записи законов сохранения. Однако основные переменные оказываются уже иными.

Почти все взаимодействия в живой материи динамические, т. е. зависят от времени, постоянно изменяются. Более того, взаимодействия часто имеют особенность, которую в технике называют “обратной связью”. Взаимодействия характеризуются тем, что некоторые эффекты процесса возвращаются к своему источнику или к предыдущей стадии, в результате чего усиливаются или видоизменяются. Обратные связи бывают положительными (усиление эффекта) и отрицательными (ослабление эффекта). Итак, при описании биологических систем следует основываться на законах сохранения и системе обратных связей.

На общественном уровне организации материи возникает совершенно новое явление — трудовая деятельность. Поэтому для описания моделей в этой области следует пользоваться терминами трудовой деятельности людей (экономическими терминами).

Можно выделить два типа моделей:

1) детерминистические, в которых предсказываемые значения могут быть точно вычислены;



2) стохастические, в которых предсказываемые значения зависят от распределения вероятностей.

В некоторых случаях при изучении процесса может оказаться, что получить функциональные зависимости между выходными и входными переменными невозможно из-за недостатка данных, и тогда приходится использовать мнение экспертов (специалистов).

Следует отметить относительные преимущества и недостатки применения математических моделей в прикладном анализе.

Преимущества математических моделей состоят в том, что они точны и абстрактны, передают информацию логически однозначным образом. Модели точны, поскольку позволяют осуществлять предсказания, которые можно сравнивать с реальными данными, поставив эксперимент или проводя необходимые наблюдения. Модели абстрактны, так как символическая логика математики извлекает те и только те элементы, которые важны для дедуктивной логики рассуждения, исключая все посторонние значения.

Недостатки математических моделей заключаются часто в сложности математического аппарата. Возникают трудности перевода результатов с языка математики на язык реальной жизни. Пожалуй самый большой недостаток математической модели связан с тем искажением, которое можно привести в саму проблему, упорно отстаивая конкретную модель, даже если в действительности она не соответствует фактам, а также с теми трудностями, которые возникают иногда при необходимости отказаться от модели, оказавшейся неперспективной. Математическое моделирование настолько увлекательное занятие, что “модельеру” очень легко отойти от реальности и увлечься применением математических языков к абстрактным явлениям. Именно поэтому следует помнить, что моделирование в прикладной математике — это лишь один из этапов широкой стратегии исследования.

# Глава 1

## Методология системного анализа

### § 1. Характерные черты системного анализа

Дисциплина, именуемая “системный анализ”, образовалась в силу необходимости вести исследования междисциплинарного характера. Создание сложных технических систем, проектирование крупных хозяйственных комплексов и управление ими, анализ экологических ситуаций и многие другие направления инженерной, научной и хозяйственной деятельности требовали организации исследований, которые носили бы нетрадиционный, междисциплинарный характер.

Системный анализ возник в эпоху ЭВМ, и его развитие определяется современными возможностями и перспективами.

Системный анализ — это дисциплина, занимающаяся проблемами принятия решений в условиях, когда выбор альтернативы (стратегии) требует анализа сложной информации различной физической природы. Поэтому системный анализ опирается на дисциплины, которые занимаются проблемами принятия решений, — теории исследований операций и общей теории управления. В исследовании операций можно выделить три основных этапа:

- а) построение модели — описание на языке математики;
- б) описание операции — постановка задачи. Необходимо сформулировать цель операции и в конечном счете оптимизационную задачу;



Рис. 1.1. Основные этапы системного анализа

в) решение полученной оптимизационной задачи.

При изучении сложных систем встает проблема неопределенности целей (трудность сопоставления различных требований). Если невозможно точно поставить цели, то в этом случае на помощь приходит системный анализ.

В системном подходе выделяются следующие основные этапы, которые можно представить в виде схемы (рис. 1.1).

Остановимся вкратце на указанных этапах.

**1. Постановка задачи и ограничение ее степени сложности.** При исследовании сложных систем требуется упростить задачу, чтобы она имела четкую и достаточно простую математическую формулировку. Успех или неудача всего исследования во многом зависит от согласования между упрощением и усложнением. Не один заманчивый проект оказывался в конце концов не осуществленным из-за того, что принятый уровень сложности затруднял последующее моделирование, не позволяя получить решение.

**2. Установление иерархии целей и задач.** Следующим этапом системного анализа является установление целей и задач исследования. Обычно эти цели и задачи образуют некоторую иерархию, причем основные задачи подразделяются на ряд второстепенных.

В системном анализе может быть присвоен малый приоритет тем целям и задачам, которые хотя и важны с точки зрения получения

научной информации, но довольно слабо влияют на вид решений рассматриваемой сложной системы. Для плодотворного применения системного анализа очень важно четко определить приоритеты различных задач. Исследование часто начинается при нечеткой формулировке целей, которые уточняются в процессе системного анализа.

**3. Моделирование.** На этапе постановки задачи получают качественное описание проблем. На этапе моделирования качественное представление переходит в количественное. Одной из основных целей моделирования в системном анализе является оказание помощи исследователю системы и лицу, принимающему решение, в получении более ясного представления о взаимодействиях между различными элементами системы.

**4. Имитационная система.** Цели в задачах теории исследования операций и теории управления считались заданными. В новых сложных задачах объектом исследования сделались сами цели. Эта проблема не может быть решена без экспертов. Однако одни эксперты не смогут проанализировать всю имеющуюся информацию. Симбиоз математика и эксперта — вот что стало на повестку дня “машинной математики”. Для реализации такого взаимодействия необходимо уметь организовать многократно повторенный машинный эксперимент с моделью. Совокупность моделей, имитирующих протекание изучаемого процесса, объединенная со специальной системой вспомогательных программ и информационной базой, позволяющих оперативно реализовать вариантыные расчеты, называется имитационной системой.

Более широкому использованию имитационных систем способствовало появление ЭВМ третьего поколения, обладающих более совершенными системами периферийных устройств и операционными системами. Эти машины и обеспечили ту базу, без которой объединение строгих методов анализа и эвристических приемов было невозможно.

**5. Анализ возможных стратегий.** После построения имитационной системы начинается этап оценки возможных стратегий, в ходе которого исследуют чувствительность результатов к допущениям, сделанным при построении модели. Если основные допущения некорректны, необходимо вернуться к этапу моделирования. Часто

удаётся улучшить модель, незначительно модифицировав исходный вариант.

Системный подход к оценке решения состоит в определении подходящей меры для показателей и последующем объединении численных значений всех показателей в единое представление или функцию, по которой можно выбрать наиболее желательный вариант решения.

## § 2. Математический аппарат моделей, основанный на законах сохранения

При построении математической модели изучаемого объекта из всех характеризующих его связей выделяются наиболее существенные. Эти связи, как правило, записываются в виде уравнений, которые выражают фундаментальные законы естествознания. Сами объекты могут быть совершенно различными по своей природе и назначению — физические или биологические явления, технологические процессы, механизмы или конструкции.

Закон сохранения — это схема рассуждения, а не конкретный математический аппарат. Если последовательность рассуждений можно записать в виде

$$\frac{d\Phi}{dt} = F, \quad (1.1)$$

то будем говорить, что сформулирован закон сохранения. Здесь  $t$  — время,  $\Phi = \sum_k \varphi^k$ ,  $\varphi^k = \varphi^k(\varphi_1^k, \dots, \varphi_s^k)$ ,  $\varphi_s^k = \varphi_s^k(t, x_i)$  — количественная характеристика некоторого свойства  $k$ -го элемента системы (например масса, энергия и т. п.),  $t$  — независимая переменная, характеризующая время,  $x_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$  или  $i = \overline{1, n}$ ) — признаки индивидуальности элемента системы (например координаты, фазовые переменные) и должны быть заданы. Причина изменения  $F$  называется воздействием. Можно выделить три уровня законов сохранения.

$I$  — уровень однородных систем. Пусть  $F(\varphi^k)$  — заданная функция, тогда (1.1) представляет собой замкнутую систему обыкновен-

ных дифференциальных уравнений:

$$\frac{d\Phi}{dt} = F^+ - F^-, \quad (1.2)$$

где  $F^+ = F^+(\varphi^k)$  — воздействия, способствующие количественному росту  $\varphi^k$ ,  $F^-(\varphi^k)$  — воздействия, способствующие уменьшению  $\varphi^k$ .

*II — уровень непрерывных неоднородных систем.* Предполагается: число элементов системы настолько велико, что признаки индивидуальности, свойства элементов системы, воздействия принимают все значения из допустимых интервалов, а все искомые функции  $\varphi_\alpha$  являются непрерывными и удовлетворяют достаточным требованиям гладкости. Искомая характеристика системы в рассматриваемом случае представляется в виде

$$\Phi = \int_{\omega} \varphi d\omega, \quad (1.3)$$

где  $\omega(t)$  — произвольный выделенный объем пространства переменных  $x_i$  (состоящий при всех  $t$  из одних и тех же признаков  $x_i$ ),  $\varphi$  — плотность распределения величины  $\Phi$ . Для непрерывных неоднородных систем в силу (1.3) закон сохранения записывается в виде

$$\frac{d}{dt} \int_{\omega} \varphi d\omega = F. \quad (1.4)$$

Воздействия  $F$  разделяют на две категории ( $F = G + \Sigma$ ):

1) воздействия на каждый элемент системы,  $G = \int_{\omega} g d\omega$ , где  $g$  — плотность воздействия;

2) воздействия, которые передаются через границу объема системы  $S$ ,  $\Sigma = \int_s \sigma_n dS$ , где  $\sigma_n$  — плотность распределения поверхностных воздействий.

Считается, что закон сохранения универсален: если он применим для объема  $\omega$ , то применим и для любой части объема.

Окончательно закон сохранения для непрерывной среды запишется в виде

$$\frac{d}{dt} \int_{\omega} \varphi d\omega = \int_{\omega} g d\omega + \int_s \sigma_i \alpha_i dS, \quad (1.5)$$

где  $\alpha_i$  — направляющие косинусы нормали  $n$  к поверхности  $S$ ,  $\sigma_n = \sigma_i \alpha_i$ .

Если для непрерывных неоднородных систем некоторое словесное утверждение или результат последовательности утверждений записываются в виде (1.5), то считается, что сформулирован закон сохранения.

Если функции удовлетворяют необходимым условиям гладкости, то из формы записи уравнения закона сохранения в интегральной форме (1.5) можно получить уравнение в частных производных:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial \varphi V_i}{\partial x_i} = g + \frac{\partial \sigma_i}{\partial x_i}. \quad (1.6)$$

Из словесной формулировки расшифровываются параметры  $\varphi$ ,  $\sigma$ ,  $g$ . Подставляя их значения в (1.6), получаем уравнения в частных производных для конкретных законов сохранения.

Соотношения  $\frac{dx_i}{dt} = V_i$  конкретизируются узкими специалистами той области, в которой исследуются явление, процесс.

*III уровень дискретных статистических систем.* Система состоит из большого количества дискретных элементов, обладающих своими признаками индивидуальности,  $x_i$  — признаки индивидуальности каждого элемента. Пусть вся система состоит из  $N$  качественно различных подсистем,  $\alpha = \overline{1, N}$  характеризует принадлежность к подсистеме, закон сохранения для каждой подсистемы отдельно записывается в виде

$$\frac{d\varphi_\alpha}{dt} = F_\alpha^+ - F_\alpha^-, \quad \alpha = \overline{1, N}, \quad (1.7)$$

где  $\varphi_\alpha = \varphi_\alpha(t, x_i, y_j)$ ,  $x_i (i = \overline{1, m})$  — признаки индивидуальности, участвующие во взаимодействиях,  $y_j = x_{j+m} (j = \overline{1, n-m})$  — признаки, не принимающие участия во взаимодействиях.

Производные  $\frac{dx_i}{dt}$ ,  $\frac{dy_j}{dt}$  связаны не со всей системой, а с отдельными ее элементами:

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_k, y_l), \quad i, k = \overline{1, m}, \quad l = \overline{1, n-m}; \quad (1.8)$$

$$\frac{dy_j}{dt} = f_{j+m}(x_k, y_l), \quad l, j = \overline{1, n-m}, \quad k = \overline{1, m}. \quad (1.9)$$

Так как  $\varphi_\alpha = \varphi_\alpha(t, x_i, y_j)$ , то

$$\frac{d\varphi_\alpha}{dt} = \frac{\partial\varphi_\alpha}{\partial t} + f_i(x_k, y_l) \frac{\partial\varphi_\alpha}{\partial x_i} + f_{j+m}(x_k, y_l) \frac{\partial\varphi_\alpha}{\partial y_j}, \quad \alpha = \overline{1, N}. \quad (1.10)$$

Таким образом, третий уровень законов сохранения формулируется следующим образом:

$$\frac{\partial\varphi_\alpha}{\partial t} + f_i(x_k, y_l) \frac{\partial\varphi_\alpha}{\partial x_i} + f_{j+m}(x_k, y_l) \frac{\partial\varphi_\alpha}{\partial y_j} = F_\alpha^+ - F_\alpha^-. \quad (1.11)$$

В приложениях возникает необходимость изучения классов движений, более широких по сравнению с классом непрерывных движений. Если в области определения движения существует некоторая гиперповерхность, на которой допускается скачкообразное изменение функций и вне которой эти функции непрерывны, то такое движение называется движением с сильным разрывом. Величины разрывов функций не могут быть произвольными, а удовлетворяют некоторым соотношениям, которые называются уравнениями сильного разрыва. Данные соотношения получаются из законов сохранения.

### § 3. Примеры математических моделей в экологии

#### 1. Простейшие модели однородных популяций

Ни один живой организм не существует отдельно от других — все они образуют группы, называемые популяциями. Внутри популяции существуют довольно сложные взаимодействия, но в отношениях с другими популяциями и с окружающей средой она выступает в виде некоторой целостной структуры. Самый низкий уровень организации живых существ, рассматриваемый в экологии, — популяционный.

Основная характеристика популяции (размер) — общая численность, или плотность (численность на единицу пространства). Обычно она выражается либо в количестве особей, либо в их биомассе. В природе существуют нижние и верхние пределы для размеров



популяции. Динамика изменения общей численности определяется двумя процессами — рождением и гибелью.

Если предположить, что популяция равномерно распределена в пространстве, все особи в популяции одинаковы, а численность, или плотность, популяции  $N(t)$  — непрерывная дифференцируемая функция, то динамика изменения  $N(t)$  может быть описана уравнением

$$\frac{dN}{dt} = (B - D)N, \quad (1.12)$$

где  $B$  и  $D$  — рождаемость и смертность соответственно, которые в общем случае могут зависеть от  $N$  и  $t$ . При  $B - D = \varepsilon = \text{const}$  получаем хорошо известный закон экспоненциального роста численности популяции в неограниченной среде (закон Мальтуса).

Однако в популяциях, являющихся компонентами стабильных экосистем, обычно всегда обнаруживается статистически достоверная отрицательная корреляция между  $\varepsilon$  и  $N$ . (Единственная популяция, для которой установлена положительная корреляция между этими величинами, — это популяция человека!) Самая простая форма регрессионной зависимости между  $\varepsilon$  и  $N$  — линейная. Поэтому можно предположить, что  $\varepsilon = \alpha - \gamma N$ ;  $\alpha, \gamma > 0$ , и уравнение динамики популяции записывается в виде

$$\frac{dN}{dt} = N(\alpha - \gamma N), \quad (1.13)$$

широко известного в теории популяций логистического уравнения. Его решение имеет вид

$$N(t) = \frac{\alpha N_0 e^{\alpha t}}{\alpha + \gamma N_0 (e^{\alpha t} - 1)}. \quad (1.14)$$

Очевидно, что  $\lim_{t \rightarrow \infty} N(t) = \frac{\alpha}{\gamma}$ , т.е. численность популяции, не возрастает беспредельно, а ограничена сверху.

Все многообразие зависимостей коэффициента прироста от общей численности можно разделить на два класса: в первом  $\varepsilon$  монотонно уменьшается с ростом  $N$ , для второго характерно нарушение монотонности. В этом случае при некоторых значениях численности коэффициент прироста начинает возрастать с ростом  $N$ . При

дальнейшем увеличении численности начинает сказываться общий недостаток ресурса, и рост  $\varepsilon$  сменяется падением. Такой тип зависимости называется кривой Олли. В этом случае существует несколько устойчивых стационарных состояний. Наличие нескольких различных устойчивых стационарных состояний в популяциях, для которых характерна зависимость типа Олли, может быть интерпретировано как возникновение некоторой новой формы адаптации к окружающей среде, позволяющей популяции увеличивать свой размер.

Возможны и другие механизмы возникновения колебаний численности (учет возрастной структуры популяции, наличие случайных возмущений и т. д.). С обобщением рассмотренных моделей можно познакомиться в специальной литературе.

## 2. Модель хищник–жертва (модель Вольтерра).

Пусть  $x(t)$  и  $y(t)$  — численность жертв и хищников соответственно. Предположим, что единственным фактором, ограничивающим размножение жертв, является давление на них со стороны хищников, а размножение хищников ограничивается количеством добытой ими пищи (количеством жертв). Тогда в отсутствие хищников численность жертв должна расти экспоненциально с относительной скоростью  $\alpha$ , а численность хищников в отсутствие жертв — также экспоненциально убывать с относительной скоростью  $m$ ;  $\alpha$  и  $m$  — коэффициенты естественного прироста жертв и естественной смертности хищников соответственно. Пусть  $V = V(x)$  — количество (или биомасса) жертв, потребляемых одним хищником за единицу времени, причем  $k$ -я часть полученной с этой биомассой энергии расходуется на воспроизводство, а остальная тратится на поддержание основного обмена. Тогда уравнения системы *хищник–жертва* можно записать в виде

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \alpha x - V(x)y, \\ \frac{dy}{dt} &= y(kV(x) - m); \end{aligned} \tag{1.15}$$

$V(x)$  обычно называют трофической функцией хищника и именно ее определяют в экспериментальных работах. В настоящее время

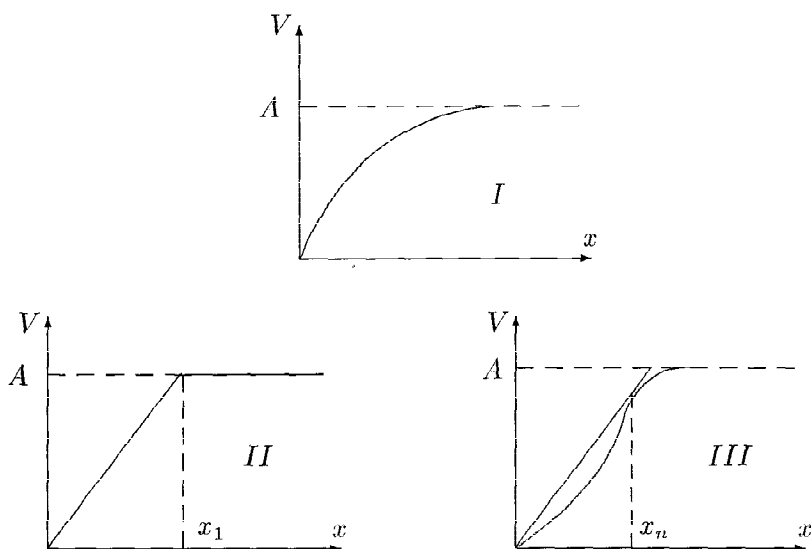


Рис. 1.2. Характерные типы трофической функции хищника

считается установленным, что эта функция принадлежит одному из типов (рис. 1.2):

I — характерен для беспозвоночных и некоторых видов хищных рыб;

II — для хищников-фильтраторов (например, многих моллюсков);

III — для позвоночных — организмов, проявляющих достаточно сложное поведение (например, способных к обучению). Аналогичный вид имеет трофическая функция, если жертвы могут вырабатывать защитную стратегию.

При малых значениях  $x$ , когда почти все жертвы становятся добычей хищника, который всегда голоден и насыщения у которого не наступает (ситуация довольно обычная в природе), трофическую функцию  $V(x)$  можно считать линейной функцией численности жертв, т. е.  $V = \beta x$ . Кроме того, предположим, что  $k = \text{const}$ .

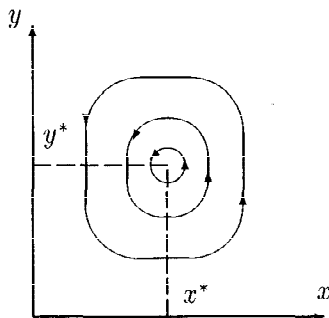


Рис. 1.3. Фазовые траектории решений уравнений системы хищник-жертва

Тогда

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \alpha x - \beta xy, \\ \frac{dy}{dt} &= k\beta xy - my. \end{aligned} \quad (1.16)$$

Система (1.16) — классическая модель *хищник-жертва* Вольтерра, который показал, что эта система имеет интеграл

$$\left( \frac{e^X}{X} \right)^m \left( \frac{e^Y}{Y} \right)^\alpha = C \quad (1.17)$$

(следует из уравнения  $\frac{dy}{dx} = \frac{y(k\beta x - m)}{x(\alpha - \beta y)}$ , в котором переменные разделяются). Здесь  $X = \frac{x}{y^*}$ ,  $Y = \frac{y}{y^*}$ ,  $x^* = \frac{m}{k\beta}$ ,  $y^* = \frac{\alpha}{\beta}$ . Если  $x_0, y_0$  — начальные значения численности жертв и хищников соответственно, то

$$C = \left( \frac{e^{x_0/x^*}}{x_0/x^*} \right)^m \cdot \left( \frac{e^{y_0/y^*}}{y_0/y^*} \right)^\alpha > 0$$

и уравнение (1.17) описывает семейство вложенных друг в друга замкнутых кривых (рис. 1.3), соответствующих фазовым траекториям периодических решений системы (1.16). Заметим, что при увеличении  $C$  амплитуды колебаний  $x$  и  $y$  возрастают. При минимальном значении  $C = e^{(m+\alpha)}$  эти кривые стягиваются в точку

с координатами  $(x^*, y^*)$ . Очевидно, что  $\{x = x^*, y = y^*\}$  является стационарным решением системы (1.16)  $\left(\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt} = 0\right)$ . Если в некоторый момент времени  $t = t_0$ ,  $x = x^*$ ,  $y = y^*$ , то и во все последующие моменты времени эти равенства сохраняются. Кроме того, стационарным является тривиальное решение  $x = y = 0$ . Других стационарных решений система (1.16) не имеет.

Хотя модель Вольтерра смогла объяснить многие реально наблюдавшиеся явления, есть у нее большой недостаток — при любых сколь угодно слабых возмущениях фазовых координат система переходит из одного цикла в другой.

### 3. Общая модель хищник–жертва (модель Колмогорова)

Наиболее общая модель выражена в работе Колмогорова. Если в популяции хищников отсутствует внутривидовая конкуренция, то обобщением модели Вольтерра будет модель вида

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \alpha(x)x - V(x)y, \\ \frac{dy}{dt} &= K(x)y.\end{aligned}\tag{1.18}$$

В отличие от модели Вольтерра, в колмогоровской модели заранее не делается никаких специальных предположений относительно конкретного вида функций  $\alpha$ ,  $V$  и  $K$  — коэффициента естественного прироста хищников. Для осмысленной биологической интерпретации этих функций сформулируем некоторые качественные предположения о характере их зависимости от  $x$ .

1.  $\alpha'_x < 0$ ;  $\alpha(0) > 0 > \alpha(\infty)$ . Интерпретация этих ограничений такова: в отсутствие хищников коэффициент естественного прироста жертв убывает с возрастанием их численности, переходя от положительных значений к отрицательным. Другими словами, в популяции жертв существует внутривидовая конкуренция в борьбе за ограниченный ресурс, так что даже в отсутствие хищников численность жертв не может возрастать бесконечно, а стабилизируется на уровне, определяемом из уравнения  $\alpha(\bar{x}) = 0$ .

2.  $K'_x > 0$ ;  $K(0) < 0 < K(\infty)$ . Это означает, что с ростом численности жертв коэффициент естественного прироста хищников возрастает, переходя от отрицательных значений (при недостатке пищи) к положительным.

3.  $V(x) > 0$  при  $x > 0$ ;  $V(0) = 0$ . Очевидно, что у системы (1.18) есть три стационарные точки:  $(0, 0)$ ;  $(\bar{x}, 0)$ , где  $\bar{x}$  определяется из уравнения  $\alpha(\bar{x}) = 0$ ; а также  $(x^*, y^*)$ , которая находится из уравнений

$$\alpha(x^*)x^* - V(x^*)y^* = 0, \quad k(x^*) = 0. \quad (1.19)$$

Исследуем поведение траектории в окрестности стационарных точек, линеаризуя (1.18). Пусть  $p = x - x^0$ ,  $g = y - y^0$ , где  $x^0$ ,  $y^0$  — координаты этих точек.

★ В точке  $(0, 0)$  получим

$$\frac{dp}{dt} = \alpha(0)p, \quad \frac{dg}{dt} = k(0)g. \quad (1.20)$$

Корни характеристического уравнения  $\lambda_1 = \alpha(0)$  и  $\lambda_2 = k(0)$  действительны и имеют разные знаки, так что эта точка — седло.

★ В точке  $(\bar{x}, 0)$  линеаризованные уравнения имеют вид

$$\frac{dp}{dt} = \lambda'_x(0)\bar{x}p - V(\bar{x})g, \quad \frac{dg}{dt} = k(\bar{x})g. \quad (1.21)$$

Корни характеристического уравнения  $\lambda_1 = \alpha'_x(\bar{x})\bar{x}$ ,  $\lambda_2 = k(\bar{x})$ . Поскольку  $\alpha'_x < 0$ , то  $\lambda_1 < 0$ . Если  $K(\bar{x}) > 0$ , т.е.  $\bar{x} > x^*$ , то  $\lambda_2 > 0$  и эта точка — седло.

При  $\bar{x} < x^*$  и  $K(\bar{x}) < 0$  точка  $(\bar{x}, 0)$  — устойчивый узел.

★ В точке  $(x^*, y^*)$  имеем

$$\frac{dp}{dt} = -\sigma p - V(x^*)g, \quad \frac{dg}{dt} = (K'_x(x^*)y^*)p, \quad (1.22)$$

где  $\sigma = V'_x(x^*)y^* - \alpha'(x^*)x^* - \alpha(x^*)$ . Характеристическое уравнение этой системы имеет вид

$$\lambda^2 + \sigma\lambda + V(x^*)K'_x(x^*)y^* = 0. \quad (1.23)$$

Поскольку произведение корней  $V(x^*)K'_x(x^*)y^*$  положительно, то точка  $(x^*, y^*)$  есть либо фокус (при  $\sigma^2 < 4V(x^*)K'_x(x^*)y^*$ ), либо узел (при

$\sigma^2 > 4VK'_x y^*$ ). Устойчивость определяется знаком  $\sigma$  (при  $\sigma > 0$  — устойчивость, при  $\sigma < 0$  — неустойчивость). Из рассмотренных случаев можно сделать вывод, что из весьма простых и естественных предположений о характере межвидовых и внутривидовых взаимоотношений возникает достаточно сложное поведение системы *хищник—жертва*. Интересно то, что в этой системе возможно естественное существование предельного цикла.

В рассмотренной модели сделано существенное допущение:  $\alpha'_x < 0$ ,  $\alpha(\bar{x}) = 0$  при  $\bar{x} < \infty$ , что означает в популяции жертв существование механизмов, регулирующих их численность даже в отсутствие хищников. Однако основной механизм регуляции численностей, входящих в сообщество видов, — трофические взаимоотношения между хищниками и жертвами.

Классическая модель *хищник—жертва* обобщается в других, более сложных, моделях.

#### 4. Сообщества $n$ видов. Вольтерровские модели и балансовые уравнения экологии

В структуре сообществ многих видов выделяются трофические (пищевые) уровни — группы видов, между которыми невозможны прямые пищевые связи. Уровней может быть несколько. Виды, принадлежащие одному уровню, находятся обычно либо в состоянии конкуренции в борьбе за жизненные ресурсы, либо — коалиции в использовании ресурсов. Основные трофические уровни наземных сообществ — это, как правило, продуценты (растения, аккумулирующие энергию света и вещества субстрата), первичные консументы (травоядные) и вторичные консументы (хищники, питающиеся травоядными). В некоторых случаях возможна более длинная цепь.

На рис. 1.4 приведена схема потоков массы и энергии между основными компонентами наземных экосистем.

Трофическая сеть отражает лишь вертикальную структуру сообщества и ничего не говорит о его горизонтальной структуре, между тем как виды одного трофического уровня могут находиться в весьма разнообразных отношениях друг с другом.

Теоретический анализ динамики сообщества  $n$  видов во времени опирается на некоторую систему уравнений относительно  $N_i(t)$ ,

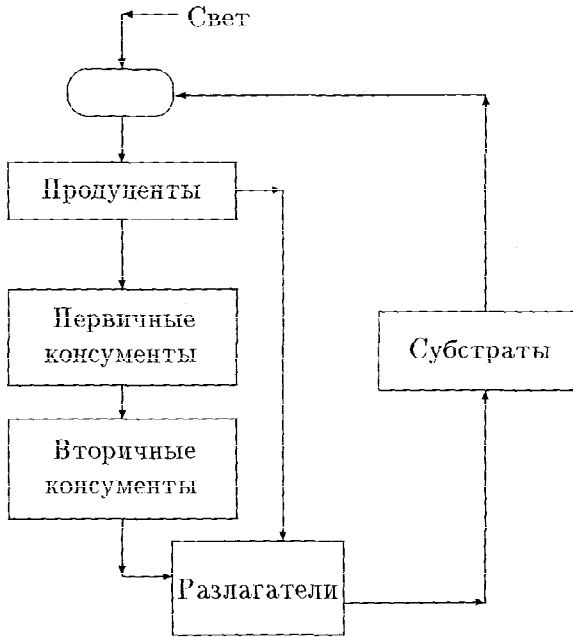


Рис. 1.4. Схема потоков массы и энергии между основными компонентами наземных экосистем

аппроксимирующих численность видов. Имеющие биологический смысл решения системы принадлежат положительному ортанту  $n$ -мерного евклидова пространства

$$p^n = \{N : N_1 \geq 0, N_2 \geq 0, \dots, N_n \geq 0\}.$$

Стабильность сообщества интерпретируется как некоторые специальные свойства особых, “равновесных”, решений системы.

В классе обыкновенных дифференциальных уравнений модель сообщества представляет собой систему вида

$$\frac{dN_i}{dt} = F_i(N_1, N_2, \dots, N_n, t),$$

где функции  $F_1, \dots, F_n$  определяются структурой видовых взаимоотношений и их количественными показателями. Если в указанных



уравнениях естественный прирост или убыль видов описываются линейными, а самолимитирование и взаимовлияние видов — квадратичными членами, не зависящими явным образом от  $t$ , то получаются так называемые вольтерровские модели динамики сообщества  $n$ -видов:

$$\frac{dN_i}{dt} = N_i \left( \varepsilon_i - \sum_{j=1}^n \gamma_{ij} N_j \right), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (1.24)$$

где  $\varepsilon_i$  — скорость естественного прироста или смертности  $i$ -го вида в отсутствие всех остальных видов,  $\gamma_{ij}$  ( $i \neq j$ ) отражают соответственно характер и интенсивность влияния  $j$ -го вида на  $i$ -й вид,  $\gamma_{ij}$  — показатель внутривидового взаимодействия для  $i$ -го вида. Матрицу  $\Gamma = \|\gamma_{ij}\|$ , отражающую структуру связей сообщества, называют матрицей сообщества.

Математические модели экологии необходимы для изучения устойчивости, стабильности экосистем. Ясно, что довольно долго могут существовать только устойчивые экосистемы. С другой стороны, пределы устойчивости определяют те максимальные нагрузки на экосистему, превышение которых приведет к “экологической катастрофе”. С проблемой устойчивости связаны вопросы эксплуатации природных популяций и сообществ, оценки пределов загрязнения среды, прогноз последствий осуществления тех или иных природохозяйственных мероприятий.

Выше рассмотрены примеры детерминистских моделей и не рассмотрен другой тип моделей — стохастические модели, в которых предсказываемые значения зависят от распределения вероятностей.

## § 4. Имитационные системы

В настоящее время под имитацией принято понимать экспериментальное изучение объектов исследования с реализацией на ЭВМ математических моделей этих объектов. С имитацией связано использование машинного комплекса в качестве экспериментальной установки. Подобное использование ЭВМ началось еще в пятидесятые годы, когда стало необходимым изучить явления, которые невоз-

можно воспроизвести в земных условиях (например, процесс входа космического аппарата в атмосферу со скоростями порядка многих километров в секунду). Для изучения подобных процессов невозможно было поставить ни натуральный, ни лабораторный эксперимент. Оставалась единственная возможность — создать совершенную математическую модель и с помощью этой модели расчетным путем получить необходимые характеристики изучаемого процесса. Такое прямое использование ЭВМ в качестве экспериментальной установки было характерно для пятидесятых и начала шестидесятых годов. Но уже в тот период наметилось новое направление в области машинного эксперимента — использование ЭВМ в режиме “диалога” с натурным экспериментом не только для изучения свойств модели, но и для создания математической модели.

В основе теории почти всегда лежит какой-нибудь эксперимент. Информации, полученной с помощью эксперимента, часто недостаточно для того, чтобы математическая модель, построенная на ее основе, была адекватна реальности. Следующий этап — исследование полученной модели с помощью вычислительного комплекса — численный анализ модели. В результате обнаруживается целый ряд свойств. Некоторые из них, может быть, известны из эксперимента, некоторые оказываются совершенно новыми.

Однако из-за недостаточной достоверности математической модели, с помощью которой обнаружены эти особенности, результаты, полученные расчетным путем, трудно принять на веру. Но экспериментатору они тем не менее очень нужны, подсказывая ему новые идеи, уточняя детали процесса и т. д. С их помощью он улучшает экспериментальную установку, в результате чего возникает новая математическая модель. Образуется итерационная цепочка — диалог математика и экспериментатора.

В последние годы в естествознании, экономике, инженерных науках возник еще один тип эксперимента, связанный не только с изучением явления, но и с выбором его характеристик или исследованием широкого спектра разнообразных зависимостей. Для подобного эксперимента, который объединяет в себе оба рассмотренных типа, и необходимы имитационные системы с развитым операционным и терминальным обеспечением.

Главное отличие модельных экспериментов от натуральных состоит в переходе от изучаемого объекта к его модели, а затем — от модели к изучаемому объекту. Имитационные эксперименты обладают огромным преимуществом: позволяют провести модельный эксперимент с такими объектами, с которыми натурные эксперименты неосуществимы либо принципиально, либо по экономическим или этическим соображениям. Принципиально, например, неосуществимы эксперименты с прошлым. Из экономических соображений нельзя проводить натурные эксперименты с различными вариантами управления экономикой страны.

В тех же случаях, когда натурные эксперименты возможны, имитация позволяет значительно уменьшить затраты на исследование. Другим преимуществом имитационных экспериментов является возможность значительно сократить продолжительность исследования, что во многих случаях имеет принципиальное значение (например, при изучении экосистем).

В прикладном имитационном эксперименте выделяются следующие основные этапы:

— формулировка проблемы (при взаимодействии математика с заказчиком определяются не только цели исследования и их формализация, но и оценки роли различных факторов);

— построение модели (в имитационном эксперименте кроме формулировки модели и оценки ее параметров важную роль играют выбор языка программирования на ЭВМ, тип ПЭВМ, использование специальных машинных средств, а также проверки модели);

— планирование и проведение эксперимента (рациональный выбор вариантов внешнего воздействия на модель для получения интересующих результатов с наименьшими затратами).

Эксперименты со сложными моделями часто проводятся в диалоговом режиме, т.е. в процессе взаимодействия человека с вычислительной машиной. Однако для работы с моделью необходимо создать систему вспомогательных моделей, связанных между собой логически и информационно, общий источник информации, соответствующее математическое обеспечение. *Совокупность системы моделей, банка данных и средств проведения имитационных экспериментов называют имитационной системой.*

Имитационная система не может создаваться для проведения отдельного имитационного эксперимента — на ее разработку затрачиваются достаточно большие средства и продолжительное время. Эти средства окупятся, если имитационная система превратится в орудие постоянного анализа изучаемого объекта, причем с ее помощью будут исследоваться вопросы, связанные с принятием разнообразных решений.

Имитационная система — средство всестороннего системного анализа изучаемого объекта. Постоянное использование системы требует легкости в общении с ней. Один эксперимент может быть проведен под руководством создателей имитационной системы, постоянное же ее использование означает передачу системы пользователю, мало знакомому с тонкостями построения моделей и системного программирования. Имитационная система должна непрерывно развиваться, постоянно совершенствоваться, т. е. с ее помощью можно будет решать все новые задачи. При этом менее совершенные модели заменяются все более совершенными. Построение имитационных систем основано на модульном принципе: система хранится в виде программ расчета по отдельным подмоделям. Эти программы называют модулями. Отдельные модули должны быть построены так чтобы в случае необходимости их можно было разумно сочетать.

Исходные данные для модулей должны храниться в банке данных, куда также вносятся и результаты расчетов, которые в свою очередь могут оказаться исходной информацией для других экспериментов.

Для сложных объектов исследования банк модулей и банк данных содержат большое число разнообразных элементов. Поэтому возникает необходимость создания специальной информационно-поисковой системы, которая содержала бы в себе сведения об имеющихся модулях и данных, позволяла бы проанализировать эти сведения, вызвать из памяти необходимые данные, модули или внести в систему новые.

Для решения прикладных задач требуется создать специальную систему общения человека и ЭВМ, которая должна обеспечивать 1) удобный вывод информации на терминальное устройство, графо-построители; 2) легкий и быстрый ввод информации с терминаль-

ных устройств; 3) диалоговый режим общения человека с ЭВМ, в том числе оперативное вмешательство в течение процесса имитации. Такая система должна предоставить возможность общения человека с вычислительной машиной на языке, близком к естественному человеческому языку, т.е. включать в себя транслятор, переводящий вопросы и приказы человека на язык имитационной системы.

В начальные периоды работы имитационной системы желательно использовать методы оптимизации, основанные на упрощенных моделях. Имитационный эксперимент позволяет оценить качество самых упрощенных моделей и улучшить их в случае необходимости. С другой стороны, полученные оптимальные решения могут оказаться полезными при выборе управлений (планировании) в имитационном эксперименте.

Итак, имитационная система представляет собой сложное хозяйство, включающее различные отдельные блоки и системы. Чтобы этот набор отдельных элементов был собран в целое и стал действительно системой, необходима управляющая программа имитационной системы. Эта программа в соответствии с указаниями экспериментатора (пользователя) должна выбрать подходящие модули и составить по ним программу, найти с помощью информационной системы нужные исходные данные, обеспечить передачу экспериментатору необходимой ему информации, осуществить изменение процесса имитационного расчета по приказу экспериментатора, запись и хранение результатов расчета в банке данных и т.д.

Следовательно, имитационная система предназначена для проверки последствий различных вариантов решений по управлению объектом и выбора наиболее подходящего решения. Поэтому она является наиболее развитым вариантом широко распространяющихся в настоящее время автоматизированных (человеко-машинных) систем принятия решения.

## § 5. Оценка возможных стратегий

Как только построена имитационная система, начинается этап оценки потенциальных стратегий, получаемых из системы. В ходе этой оценки исследуется чувствительность результатов к допущениям,

сделанным при построении модели. Если окажется, что некоторые допущения некорректны, то придется вернуться к этапу моделирования для уточнения модели.

Первым этапом практического решения проблем уникального выбора являются беседы консультанта (математика) с лицами, непосредственно влияющими на решение. Цель системного анализа — выбор наиболее предпочтительного решения (способа достижения поставленной цели) из множества допустимых альтернативных решений или вообще некоторое упорядочение этого множества. Однако выявление самой цели или целей представляет собой непростую задачу, которая решается математиком с помощью экспертов. После составления полного перечня критериев требуется установить меру каждого показателя. Будем считать, что набор критериев является полным, если использование любых дополнительных критериев не изменяет результатов решения задачи, а отбрасывание хотя бы одного из выбранных критериев, наоборот, приводит к изменению результатов. Иными словами, набор из  $n$  критериев можно считать полным, если, зная значения  $n$ -мерного вектора оценок по этим критериям, лицо, принимающее решение, имеет ясное представление о степени достижения главной цели. Мерой каждого показателя может быть его качественное описание. Некоторые показатели имеют хорошо определенные единицы измерения. Формирование полного перечня критериев представляет собой сложную многошаговую итеративную процедуру, которая выполняется совместно экспертами и консультантами (математиками). Оценка вариантов решений осложнена тем, что различные специалисты дают разные оценки одному и тому же варианту решения. В связи с этим одна из задач состоит в построении настолько детальных и конкретных характеристик критериев и оценок по шкалам, чтобы не возникало затруднений при их применении. При выборе шкалы оценок полезности целесообразно установить интервал возможных значений показателя. Наилучшее значение (наиболее приемлемое) удобно принять за единицу, а наименее приемлемое — за ноль. В большинстве случаев невозможно одновременно получить идеальные значения для разных показателей, так как часто они соответствуют достижению противоречивых целей. Так, требование максимальной величины какой-то

рабочей характеристики системы может не выполняться при требовании минимальной потери времени и минимальных финансовых затрат.

Для выбора варианта решения с конкретными значениями решающих переменных необходимо преобразовать векторное описание системы с многими показателями в скалярное, это можно осуществить путем качественного обобщения информации или путем объединения всех показателей в единое представление, называемое целевой функцией.

Остановимся на некоторых способах выбора единой цели для многокритериальной проблемы.

Пусть заданы  $n$  критериев, зависящих от способа действия (вектора  $x$ ):  $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ .

Требуется построить одну целевую функцию  $F(x)$ .

#### Линейная свертка

$$F(x) = \sum_{i=1}^n C_i f_i(x), \quad (1.25)$$

где  $C_i$  — некоторые положительные числа, тем или иным способом нормированные (например,  $\sum_{i=1}^n C_i = 1$ ). Коэффициенты  $C_i$  — результат экспертизы; они отражают ранжирование целей, что позволяет свести задачу со многими критериями к задаче с единственным критерием, определяемым формулой (1.25).

**Использование контрольных показателей.** Очень часто в задачах планирования и проектирования задается некоторая система нормативов:  $f_1^*, f_2^*, \dots, f_n^*$ . Это значит, например, что параметры будущей конструкции должны быть такими, чтобы максимизировать функции  $f_i(x)$  при условиях  $f_i(x) \geq f_i^*$ ,  $i = \overline{1, n}$ . В этих случаях целевую функцию удобно представить в виде

$$F(x) = \min_i \frac{f_i(x)}{f_i^*} \quad (1.26)$$

и искать вектор  $x$ , который обеспечивает максимальное значение  $F(x)$ , т. е. при данном значении вектора  $x$  величина  $F(x)$  дает значение наихудшего из показателей  $f_i(x)$ . Значит, условие  $F(x) \Rightarrow \max$  означает выбор такой системы конструктивных параметров  $x$ , которая максимизирует отношение  $i$ -го реально достигнутого значения

критерия к его контрольному значению. Если значения  $f_i^*$  жестко не заданы, то они могут быть определены в результате экспертного опроса.

Критерий (1.25) обладает следующим важным достоинством. Предположим, что ограничения, наложенные на выбор компонент вектора  $x$ , линейны:

$$\sum \alpha_s^j x^s \leq b_j, \quad (1.27)$$

как и функции  $f_i(x) = \sum_s d_s^i x^s$ . Тогда задача выбора с использованием критерия (1.25) сведется к задаче линейного программирования: определить максимум линейной формы

$$F(x) = \sum_s \sum_i C_i d_s^i x^s$$

при линейных ограничениях (1.27).

Критерий (1.26) при этих условиях обладает тем же свойством. В самом деле, введем новую переменную  $V = \min_i \frac{f_i(x)}{f_i^*}$ . Тогда к ограничениям (1.27) добавятся еще и такие:

$$f_i(x) \geq V f_i^*, \quad i = 1, \dots, n. \quad (1.28)$$

Получили задачу линейного программирования: определить максимум по  $x$  скаляра  $V$ , удовлетворяющего ограничениям (1.27), (1.28).

**Введение метрики в пространстве целевых функций.** Предположим, что решена система однокритериальных задач

$$f_i(x) \rightarrow \max, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

и найден в  $i$ -й задаче вектор  $x_i$ , доставляющий максимальное значение критерию  $f_i(x)$ :

$$f_i(x_i) = \hat{f}_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (1.29)$$

Совокупность скалярных величин  $\hat{f}_i$  определяет в пространстве критериев точку, которую назовем точкой “абсолютного максимума”.



Если векторы  $x_i$  различны, то не существует выбора, который позволил бы достичь этой точки: точка  $(\hat{f}_1, \hat{f}_2, \dots, \hat{f}_n)$  является недостижимой в пространстве критериев. Введем положительно определенную матрицу  $R = (r_{ij})$ . Тогда скалярная величина

$$h = \sqrt{\sum_{i,j} (f_i(x) - \hat{f}_i) r_{ij} (f_j(x) - \hat{f}_j)} \quad (1.30)$$

определяет в пространстве критериев некоторое расстояние от точки, соответствующей данному вектору  $x$ , до точки “абсолютного максимума”. В частном случае, когда  $R$  — единичная матрица,

$$h = \sqrt{\sum_i (f_i(x) - \hat{f}_i)^2} \quad (1.31)$$

есть евклидово расстояние от точки  $(f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x))$  до точки  $(\hat{f}_1, \hat{f}_2, \dots, \hat{f}_n)$  в пространстве критериев. В качестве нового скалярного критерия можно принять функцию  $h(x)$ , определенную соотношением (1.30). Ее минимизация дает полезную исследователю информацию: показывает возможности достижения “абсолютного максимума”.

**Компромиссы Парето.** При исследовании многокритериальных задач желательно найти способы сведения их к обычным задачам с единым критерием, поскольку для однокритериальных задач существуют хорошо разработанные методы решения. Выше уже были рассмотрены несколько способов, основанных на операции свертывания критериев.

Однако к анализу многокритериальных задач можно подойти и с другой позиции: попытаться сократить множество исходных вариантов, т.е. исключить из неформального анализа те варианты решений, которые заведомо плохи. Рассмотрим один из подобных путей, предложенных итальянским экономистом Парето.

Предположим, что сделан некоторый выбор. Обозначим его через  $x^*$  и представим, что существует некоторый другой выбор  $\hat{x}$  такой, что для всех критериев  $f_i(x)$  имеют место неравенства

$$f_i(\hat{x}) \geq f_i(x^*), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (1.32)$$

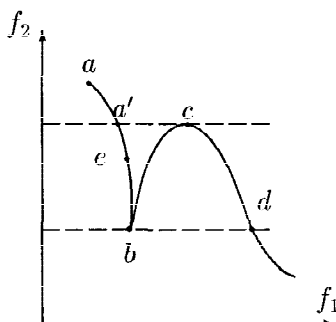


Рис. 1.5. Кривая возможных выборов на плоскости критериев  $(f_1, f_2)$

Очевидно, что выбор  $\hat{x}$  предпочтительнее  $x^*$  (здесь рассматриваем задачу о максимизации критериев  $f_i(x)$ ), поэтому все векторы  $x^*$ , удовлетворяющие (1.32), следует сразу исключить из рассмотрения. Имеет смысл заниматься сопоставлением, подвергать анализу только те векторы  $x^*$ , для которых не существует  $\hat{x}$  такого, что для всех критериев удовлетворяются неравенства (1.32).

Множество всех полученных значений  $x^*$  называется *множеством Парето*, а вектор  $x^*$  — *неулучшаемым вектором результатов* (вектором Парето), если из  $f_i(\hat{x}) \geq f_i(x^*)$  для любого  $i$  следует  $f_i(\hat{x}) = f_i(x^*)$ .

Предположим, что цели проблемы определяются двумя однозначными функциями:

$$f_1(x) \rightarrow \max, \quad f_2(x) \rightarrow \max.$$

Тогда каждому допустимому значению переменной  $x$  отвечает одна точка на плоскости  $(f_1, f_2)$ , и равенства  $f_1 = f_1(x)$ ,  $f_2 = f_2(x)$  определяют параметрическое задание некоторой кривой  $abcd$  в этой плоскости (рис. 1.5). К множеству Парето относится не вся кривая. Так, участок  $bc$ , очевидно, не принадлежит этому множеству. На этом участке изменению переменной  $x$  отвечает одновременное увеличение обеих целевых функций и, следовательно, такие варианты решений должны быть сразу исключены из дальнейшего рассмотрения. Из этих же соображений должен быть исключен участок

$a'b$ , поскольку для каждой его точки  $e$  найдется точка, принадлежащая участку  $cd$ , в которой значения функций  $f_1$  и  $f_2$  больше, чем в точке  $e$ . Следовательно, к множеству Парето могут принадлежать только участки  $aa'$  и  $cd$ , причем точка  $a'$  должна быть исключена.

В теории принятия решений существует термин “принцип Парето”, заключающийся в том, что выбирать следует только тот вектор  $x$ , который принадлежит множеству Парето. Принцип Парето не выделяет единственного решения, он только сужает множество альтернатив. Окончательный выбор остается за лицом, принимающим решение. Исследователь, математик, построив множество Парето, конечно, облегчает процедуру выбора. Принцип Парето играет очень важную роль в автоматизации проектирования. Рассмотрим пример — проектирование водохозяйственного комплекса. Результатом создания этого комплекса будет возможность обеспечить водой несколько крупных промышленных и сельскохозяйственных объектов и тем самым повысить их эффективность. Одновременно возникает и целый ряд отрицательных явлений. Большая площадь водохранилища, которая необходима для регулирования работы гидрокомплекса, приводит к застойным явлениям, большим потерям воды на испарение и т. д. Помимо этого, уменьшение количества воды в речной системе ухудшает условия рыбоводства и судоходства, а строительство промышленных комплексов увеличивает загрязнение и, следовательно, ухудшает качество воды, поступающей на поля и т. д. Ситуация оказывается многокритериальной, цели проектировщика могут быть выписаны в виде

$$f_i(x) \rightarrow \max, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Проектировщик оказывается перед необходимостью искать компромисс, и одним из путей отыскания этого компромисса будет построение множества Парето, изучение которого дает большую информацию.

Лицо, принимающее решение, видит, в частности, сколько “стоит” увеличение одного из показателей, как оно сказывается на остальных, значение которых непременно уменьшается. Это множество, как правило, весьма сложное.

Помимо критериев  $f_i(x)$  достаточно часто в распоряжении проектировщика есть еще некоторый общий критерий  $F(x)$ . Иногда

он бывает формализован, записан в явном виде. Например, таким критерием может быть стоимость проекта. В этом случае исследователю представляется возможность решить задачу до “конца”. Для этого достаточно определить вектор  $x$ , который дает решение задачи:  $F(x) \rightarrow \min$  при  $x \in P_G(f_1, \dots, f_n)$ , где  $P_G(f_1, \dots, f_n)$  — множество Парето для функций  $f_1, \dots, f_n$  на множестве  $G$  допустимых векторов  $x$ . Например, в случае водохозяйственного комплекса множество  $G$  включает такие элементы  $x_i$  ( $x_i$  — распределение воды по объектам), сумма которых не превосходит притока  $Q(x)$ .

В проблемах выбора решения большую роль играют методы последовательного анализа и отбраковки неконкурентоспособных вариантов, методы последовательного сжатия множества альтернатив.

**Численные методы построения множества Парето.** С расширением круга проблем, которые изучаются с помощью системного анализа, значение методов эффективного построения множества Парето непрерывно растет. Приближенное построение множества Парето относится к числу важных и трудных задач численного анализа.

Рассмотрим простейший случай (два критерия). Имеем задачу:

$$\begin{aligned} f_1(x) &\rightarrow \max, \\ f_2(x) &\rightarrow \max, \\ x &\in G_x. \end{aligned} \tag{1.33}$$

Каждой точке  $x \in G_x$  соотношения

$$f_1 = f_1(x), \quad f_2 = f_2(x) \tag{1.34}$$

ставят в соответствие некоторую точку  $f \in G_f$  в плоскости критериев (рис. 1.6). Соотношения (1.34) определяют отображение множества  $G_x$  на  $G_f$ .

Множество  $G_f$  носит название множества достижимости. Множество Парето представляет собой лишь часть границы множества достижимости. На рис. 1.6 множеством Парето будет дуга  $ACB$ .

Приближенное построение множества Парето сводится к последовательному решению задач математического программирования. Опишем одну из возможных схем расчета.

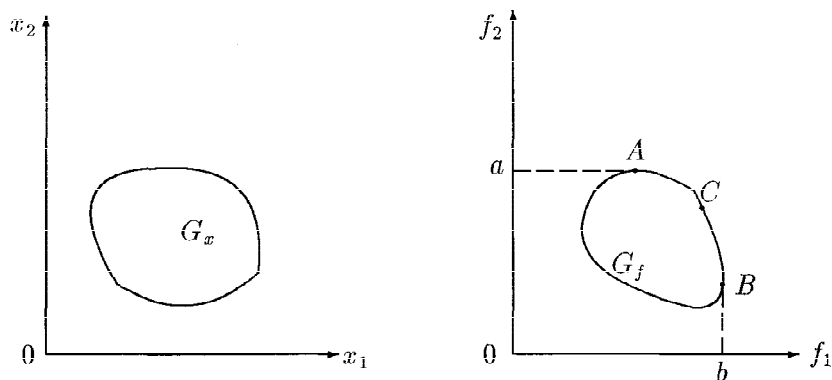


Рис. 1.6. Отображение множества  $G_x$  (в плоскости способов действий) на множество  $G_f$  (в плоскости критериев)

Фиксируем некоторые желательные значения критериев  $f_1$  и  $f_2$ :

$$f_1 = C_1, \quad f_2 = C_2.$$

Значения  $C_1$  и  $C_2$  следует выбрать так, чтобы они принадлежали множеству достижимости. Теперь решаем две оптимизационные задачи:

- 1)  $f_1(x) \rightarrow \max, \quad x \in G_x, \quad f_2(x) = C_2;$
- 2)  $f_2(x) \rightarrow \max, \quad x \in G_x, \quad f_1(x) = C_1.$

Решив эти задачи, определим точки  $a$  и  $b$  (рис.1.7). Проведя через них прямую  $l$ , получим простейшую аппроксимацию множества Парето. Для уточнения аппроксимации решаем следующие задачи:

- 3)  $f_1(x) \rightarrow \max, \quad x \in G_x, \quad f_2(x) = C_4;$
- 4)  $f_2(x) \rightarrow \max, \quad x \in G_x, \quad f_1(x) = C_3.$

Находим еще две точки —  $c$  и  $d$ , принадлежащие этому множеству. Значения  $C_3$  и  $C_4$  снова должны принадлежать множеству достижимости.

Через точки  $a, c, d$  и  $b$  проводим ломаную  $2$ , которая будет следующим приближением. Очень часто подобной информации о структуре

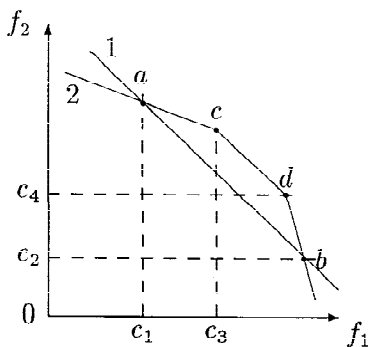


Рис. 1.7. Аппроксимация множества Парето

множества Парето уже бывает достаточно для решения практических задач.

Если множество Парето выпукло, то, увеличивая количество точек, которые определяются описанным способом, строим многогранник, аппроксимирующий это множество с любой степенью точности. Однако практика даст примеры множеств Парето, которые не являются выпуклыми. Тогда задача их аппроксимации резко усложняется.

## Глава 2

# Математическое моделирование оптимального размещения промышленных предприятий

### § 1. Общая характеристика проблемы

Интенсивное развитие промышленности и связанное с ним увеличение промышленных выбросов, загрязняющих окружающую среду, весьма ощутимо для экологического равновесия многих регионов. Локальные загрязнения в результате промышленных выбросов давно превзошли во многих городах предельно допустимые стационарные нормы. Современные темпы развития экономики требуют строительства все более мощных индустриальных объектов и комплексов. В связи с трудовыми ресурсами такие объекты обычно сооружаются в густонаселенных районах или вблизи от них. Это обстоятельство накладывает особые ограничения на размещение объектов, выбрасывающих в атмосферу аэрозоли, вредные для здоровья людей и нарушающие экологические системы данного региона.

Оптимальное размещение предприятий (с соблюдением санитарных норм загрязнения для всех экологически значимых зон) является многоаспектной и алгоритмически весьма сложной задачей. Необходимо исследовать и оценить загрязнение атмосферы и подстилающей поверхности пассивными и активными примесями. Примесь называется пассивной, если вплоть до выпадения на поверхность земли она не претерпевает изменений. Если же примесь в процессе распространения в атмосфере вступает в химические реакции с водяным паром и другими компонентами атмосферы или переходит из одного химического состояния в другое, то она называется активной.

Распространение промышленных выбросов в атмосфере происходит за счет адвективного их переноса воздушными массами и диффузии, обусловленной турбулентными пульсациями воздуха. Наблюдая за дымовым факелом из заводской трубы можно заметить, во-первых, увлечение дымового факела потоком воздуха и, во-вторых, постепенное разбухание его по мере удаления от источника — это следствие мелкомасштабной турбулентности. В результате факел приобретает форму вытянутого конуса, расширяющегося в направлении движения воздушных масс. Увеличиваясь под влиянием крупномасштабных турбулентных флуктуаций, факел распадается на изолированные вихревые образования, увлекаемые на большие расстояния от источника.

Если выбрасываемые в воздух примеси состоят из крупных частиц, то, распространяясь в атмосфере, они под действием силы тяжести начинают опускаться с определенной постоянной скоростью по закону Стокса. Естественно, что почти все примеси в конечном счете осаждаются на поверхность земли, причем тяжелые в основном под действием гравитационного поля, а легкие — в результате диффузионного процесса. Поскольку для окружающей среды наиболее опасны примеси газообразного вида типа окислов, ограничимся рассмотрением только легких соединений.

Большое значение в теории распространения загрязнений имеют флуктуации скорости и направления ветра за длительный период времени (около года), когда воздушные массы, увлекающие примеси от источника, многократно меняют направление и скорость. Такие многолетние изменения обычно описываются специальной диаграм-



мой, называемой розой ветров, в которой величина вектора пропорциональна числу повторяющихся событий, связанных с движением воздушных масс в данном направлении. Это значит, что чем длиннее векторы на диаграмме розы ветров, тем чаще движения воздушных масс в данном направлении, т.е. максимумы диаграммы розы ветров соответствуют господствующим в данном районе ветрам. Эта информация является исходной при планировании новых промышленных объектов. Однако ее недостаточно при планировании размещения предприятий среди большого числа экологически значимых зон (населенных пунктов, зон отдыха, сельскохозяйственных, лесных угодий), каждая из которых имеет свою предельно допустимую дозу загрязнения. При планировании строительства нового предприятия ограничения по санитарным нормам устанавливаются с учетом уже имеющихся загрязнений от действующих предприятий.

В данной главе рассматривается метод предвычисления областей возможного размещения промышленных предприятий с соблюдением санитарных норм загрязнения для всех экологически значимых зон, разработанный академиком Г. И. Марчуком. Данная задача решается с помощью сопряженных уравнений переноса и диффузии субстанции. Решение сопряженных задач представляет собой функцию влияния или функцию чувствительности по отношению к основному функционалу задачи. Этим функционалом, в частности, может быть полное число выпавших примесей в данной экологической зоне в течение года или санитарная опасность выпавших и взвешенных примесей.

## § 2. Основные уравнения переноса и диффузии примесей в атмосфере

### 1. Уравнение переноса

Перенос загрязняющих субстанций в атмосфере осуществляется ветровыми потоками воздуха с учетом их мелкомасштабных флуктуаций. Пусть  $\varphi(x, y, z, t)$  — интенсивность аэрозольной субстанции, мигрирующей вместе с потоком воздуха в атмосфере. Решение задачи будем искать в цилиндрической области  $G$  с поверхностью  $S$ ,

состоящей из боковой поверхности цилиндра  $\Sigma$ , нижнего основания  $\Sigma_0$  (при  $z = 0$ ) и верхнего основания  $\Sigma_H$  (при  $z = H$ ),  $x, y, z$  — декартовы координаты, ось  $z$  направлена вертикально вверх. Пусть  $u, v, w$  — составляющие вектора скорости частиц воздуха. Тогда перенос субстанции вдоль траектории частиц воздуха с сохранением ее интенсивности описывается уравнением переноса:

$$\frac{d\varphi}{dt} = 0, \quad \text{где} \quad \frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z}. \quad (2.1)$$

Для нижней части атмосферы с хорошей точностью выполняется закон сохранения массы, выраженный уравнением неразрывности:

$$\operatorname{div} \bar{u} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (2.2)$$

С учетом (2.2) уравнение (2.1) преобразуется к виду

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \operatorname{div}(\bar{u} \cdot \varphi) = 0. \quad (2.3)$$

При выводе (2.3) было использовано тождество

$$u \frac{\partial \varphi}{\partial x} + v \frac{\partial \varphi}{\partial y} + w \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \operatorname{div}(\bar{u} \cdot \varphi) - \varphi \operatorname{div} \bar{u}. \quad (2.4)$$

Вертикальная составляющая скорости удовлетворяет условию

$$w = 0 \quad \text{при} \quad z = 0, \quad z = H. \quad (2.5)$$

Для уравнения (2.3) необходимо задать начальные данные

$$\varphi = \varphi_0 \quad \text{при} \quad t = 0 \quad (2.6)$$

и условия на границе  $S$  области  $G$ :

$$\varphi = \varphi_s \quad \text{на} \quad S \quad \text{при} \quad u_n < 0, \quad (2.7)$$

где  $\varphi_0$  и  $\varphi_s$  — известные функции,  $u_n$  — проекция вектора  $\bar{u}$  на внешнюю нормаль к поверхности  $S$ . Соотношение (2.7) определяет решение на той части  $S$ , где воздушные массы вместе с исследуемой субстанцией вносятся в область  $G$ .

Точное решение задачи (2.3), (2.5)–(2.7) возможно в том случае, когда известны значения функций  $u$ ,  $v$ ,  $w$  в пространстве и во времени.

Уравнение (2.3) может быть обобщено. Так, если в процессе распространения часть субстанции входит в реакцию с внешней средой или распадается, то этот процесс можно интерпретировать как поглощение субстанции. В этом случае уравнение (2.3) перейдет в следующее:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \operatorname{div}(\bar{u}\varphi) + \sigma\varphi = 0, \quad (2.8)$$

где  $\sigma \geq 0$  — величина, обратно пропорциональная времени. Смысл этой величины будет понятен, если в (2.8) положить  $u = v = w = 0$ . Тогда уравнение (2.8) имеет решение  $\varphi = \varphi_0 e^{-\sigma t}$ . Отсюда видно, что  $\sigma$  есть величина, обратная интервалу времени, за который интенсивность субстанции по сравнению с начальной интенсивностью  $\varphi_0$  уменьшается в  $e$  раз.

Если в области определения решения имеются источники рассматриваемой загрязняющей субстанции  $\varphi$ , описываемые функцией  $f(x, y, z, t)$ , то уравнение (2.8) примет вид

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \operatorname{div}(\bar{u}\varphi) + \sigma\varphi = f. \quad (2.9)$$

Для достаточно гладких функций задача (2.9), (2.5)–(2.7) имеет единственное решение.

Рассмотрим стационарный процесс распространения субстанции. Если коэффициенты уравнений  $u$ ,  $v$ ,  $w$  и входные данные задачи  $\varphi_s$  и  $f$  не зависят от времени, то стационарная задача, соответствующая (2.9), (2.5)–(2.7), формулируется следующим образом:

$$\operatorname{div}(\bar{u}\varphi) + \sigma\varphi = f, \quad (2.10)$$

$$\varphi = \varphi_s \quad \text{на } \Sigma \text{ при } u_n < 0. \quad (2.11)$$

Задача (2.10), (2.11) описывает частный процесс переноса субстанций с неизменными во времени входными данными. Однако набор таких частных решений, соответствующих различным стационарным входным данным задачи  $\bar{u}$ ,  $f$ ,  $\varphi_s$ , может использоваться и при описании более сложных физических ситуаций, реализуемых на

практике. Предположим, что в различные периоды времени в атмосфере в данном регионе происходят те или иные типы движений воздушных масс, которые за период характерного времени можно считать стационарными. После каждого такого периода происходит перестройка движения воздушных масс и наступает новое стационарное состояние. Поскольку перестройка циркуляций происходит за период, который намного короче времени существования данного типа движений, то можно предположить, что перемена типов движений происходит мгновенно. Пусть этих типов будет  $n$ . Тогда приходим к системе независимых уравнений

$$\operatorname{div}(\bar{u}_i \varphi_i) + \sigma \varphi_i = f \quad (2.12)$$

и условий

$$\varphi_i = \varphi_{is} \quad \text{на } \Sigma \text{ при } u_{in} < 0, \quad i = \overline{1, n}. \quad (2.13)$$

Задача (2.12), (2.13), где  $\varphi_{is}$  — значение функции  $\varphi_i$  на границе  $S$ ,  $u_{in}$  — проекция вектора скорости ветра  $i$ -го типа на внешнюю нормаль к границе, соответствует каждому из интервалов времени  $t_i < t < t_{i+1}$ , длина которого  $\Delta t_i$ . Если все задачи (2.12), (2.13) решены, то решение задачи о среднем распределении примеси за период  $T = \sum_{i=1}^n \Delta t_i$  находится в виде линейной комбинации

$$\bar{\varphi} = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^n \varphi_i \Delta t_i. \quad (2.14)$$

Задачу (2.12)–(2.14) можно назвать статистической моделью.

Решение стационарных задач вида (2.10), (2.11) и (2.12)–(2.14) имеет много общего с решением задачи о среднем за некоторый период времени  $T$  распределении субстанции на основе специальным образом поставленных нестационарных задач. Действительно, рассмотрим задачу

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \operatorname{div}(\bar{u} \varphi) + \sigma \varphi = f. \quad (2.15)$$

$$\begin{aligned} \varphi &= \varphi_s \quad \text{на } \Sigma \text{ при } u_n < 0, \\ \varphi(\bar{r}, T) &= \varphi(\bar{r}, 0), \quad \bar{r} = (x, y, z) \in G. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Функции  $\bar{u}$  и  $\varphi_s$  не зависят от  $t$ . Эта задача для достаточно гладких функций имеет единственное решение. Интегрируя (2.15) в пределах  $[0, T]$ , получим

$$\operatorname{div}(\bar{u}\bar{\varphi}) + \sigma\bar{\varphi} = f, \quad \bar{\varphi} = \frac{1}{T} \int_0^T \varphi dt, \quad (2.17)$$

из которого, в силу единственности решения задачи (2.10), (2.11), следует, что среднее за период  $T$  решение задачи (2.15), (2.16) совпадает с решением задачи (2.10), (2.11).

Решения задач о среднем за период  $T$  распределении субстанций с помощью статистической модели и нестационарной задачи с некоторыми предположениями достаточно близки друг к другу.

## 2. Диффузионное приближение

Рассмотренные в предыдущем пункте модели распространения примеси в атмосфере от источников загрязнения описывают существо процесса с некоторой степенью идеализации. Представим себе случай, когда движения воздушных масс в атмосфере отсутствуют, т. е.  $u = v = w = 0$ . Тогда нестационарная задача переноса субстанций принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \sigma\varphi &= f, \\ \varphi &= \varphi_0 \text{ при } t = 0. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Если  $f$  не зависит от  $t$ , то решение задачи имеет вид

$$\varphi = \varphi_0 e^{-\sigma t} + \frac{f}{\sigma}(1 - e^{-\sigma t}) \quad (2.19)$$

и при  $t \rightarrow \infty$  переходит в решение соответствующей стационарной задачи  $\sigma\varphi = f$ ,  $\varphi = f/\sigma$ . Такая простейшая модель не описывает основных особенностей переноса субстанций от источника  $f$ . Известно, что в атмосфере примесь как бы расплывается, образуя довольно сложное распределение аэрозолей в большой окрестности от выброса. Это связано с тем, что даже в безветренную погоду атмосфера является турбулентной средой, где спонтанно образуются

мезокомасштабные флуктуации. Именно этими флуктуациями обусловлено размывание выбросов в атмосфере.

Математическое описание флуктуационных эффектов в большинстве случаев основывается на полуэмпирических соотношениях. Для атмосферных процессов используется диффузионное приближение уравнения распространения субстанций:

$$\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial t} + \operatorname{div}(u \cdot \bar{\varphi}) + \sigma \bar{\varphi} = D \bar{\varphi}, \quad (2.20)$$

$$D \bar{\varphi} = \frac{\partial}{\partial x} \mu \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \mu \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \varphi \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial z}, \quad (2.21)$$

где  $\mu \geq 0$ ,  $\varphi \geq 0$  — соответственно горизонтальный и вертикальный коэффициенты диффузии, которые определяются экспериментально, черточка над функциями обозначает осредненное значение соответствующего параметра на достаточно большом интервале времени.

Осредненный вектор скорости  $\bar{u}$  удовлетворяет уравнению неразрывности

$$\operatorname{div} \bar{u} = 0. \quad (2.22)$$

Для полной постановки задачи требуются начальные и граничные условия.

Начальные данные:

$$\bar{\varphi} = \bar{\varphi}_0 \quad \text{при } t = 0. \quad (2.23)$$

Что касается граничных условий, то они должны быть такими, чтобы задача имела единственное решение. В дальнейшем черту сверху над переменными будем опускать, предполагая, что имеем дело с осредненными параметрами.

Если имеются источники загрязняющих субстанций ( $f$ ), то вместо (2.20) рассматривается уравнение

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \operatorname{div}(u \cdot \varphi) + \sigma \varphi = D \varphi + f. \quad (2.24)$$

Граничные условия для уравнений (2.24) следующие:

$$\begin{aligned}
 \varphi &= \varphi_s && \text{на } \Sigma \text{ при } u_n < 0, \\
 \frac{\partial \varphi}{\partial n} &= 0 && \text{на } \Sigma \text{ при } u_n \geq 0, \\
 \frac{\partial \varphi}{\partial z} &= \alpha \varphi && \text{на } \Sigma_0, \\
 \frac{\partial \varphi}{\partial z} &= 0 && \text{на } \Sigma_H, \\
 w &= 0 && \text{при } z = 0, z = H
 \end{aligned} \tag{2.25}$$

(здесь  $\alpha \geq 0$  — некоторая функция, характеризующая взаимодействие примесей с подстилающей поверхностью).

Часто используется при расчетах следующая постановка граничных условий:

$$\begin{aligned}
 \varphi &= \varphi_s && \text{на } \Sigma, \\
 \frac{\partial \varphi}{\partial z} &= \alpha \varphi && \text{на } \Sigma_0, \\
 \frac{\partial \varphi}{\partial z} &= \alpha \varphi && \text{на } \Sigma_H, \\
 w &= 0 && \text{при } z = 0, z = H.
 \end{aligned} \tag{2.26}$$

Указанные постановки имеют единственное решение задачи в диффузионном приближении. Возможны и другие постановки задач, обеспечивающие единственность решения.

**Замечание.** Приближенное решение исходной “стационарной” задачи находится (так же, как и для уравнения переноса) осреднением по ансамблю частных задач вида

$$\operatorname{div}(\bar{u}_i \cdot \varphi_i) + \sigma \varphi_i = D \varphi_i + f$$

с соответствующими граничными условиями.

Среднее за период  $T$  распределение субстанции  $\hat{\varphi}$  определяется формулой

$$\hat{\varphi} = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^n \varphi_i \Delta t_i,$$

где  $T = \sum_{i=1}^n \Delta t_i$ ,  $\Delta t_i$  — время устойчивого режима движения воздушных масс данного типа.

### 3. Простейшее диффузионное уравнение

Рассмотрим процесс переноса и диффузии субстанции на простейших примерах одномерных задач. Исследуем чисто диффузионную постановку задачи:

$$\sigma\varphi - \mu \frac{d^2\varphi}{dx^2} + Q\delta(x - x_0), \quad -\infty < x < +\infty, \quad (2.27)$$

где  $Q$  — мощность источника, выбрасывающего в атмосферу аэрозоль,  $\delta(x)$  — дельта-функция. Предполагается, что решение ограничено во всей области определения. Задачу (2.27) удобно привести к эквивалентной форме без  $\delta$ -функции. Для этого проинтегрируем уравнение (2.27) в окрестности точки  $x = x_0$ :

$$\sigma \int_{x_0 - \varepsilon/2}^{x_0 + \varepsilon/2} \varphi dx = \mu \frac{d\varphi}{dx} \Big|_{x_0 + \varepsilon/2} - \mu \frac{d\varphi}{dx} \Big|_{x_0 - \varepsilon/2} + Q.$$

Переходя к пределу при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , получаем соотношение

$$\mu \frac{d\varphi}{dx} \Big|_{x_0^+} - \mu \frac{d\varphi}{dx} \Big|_{x_0^-} + Q = 0. \quad (2.28)$$

Теперь рассмотрим две области:  $-\infty < x \leq x_0$ ,  $x_0 \leq x < \infty$ , а решения обозначим  $\varphi^-$  и  $\varphi^+$  соответственно, т.е. будем рассматривать две задачи:

$$\text{а) } \mu \frac{d^2\varphi}{dx^2} - \sigma\varphi^+ = 0, \quad \varphi^+ = 0 \text{ при } x \rightarrow \infty, \quad (2.29)$$

$$\text{б) } \mu \frac{d^2\varphi}{dx^2} - \sigma\varphi^- = 0, \quad \varphi^- = 0 \text{ при } x \rightarrow -\infty. \quad (2.30)$$

Связь решений задач (2.29), (2.30) осуществляется с помощью условий

$$\begin{aligned} \mu \frac{d\varphi^+}{dx} - \mu \frac{d\varphi^-}{dx} + Q &= 0 & \text{при } x = x_0, \\ \varphi^+ &= \varphi^- & \text{при } x = x_0 \end{aligned} \quad (2.31)$$

(предполагаем, что решение задачи непрерывно во всех точках области).



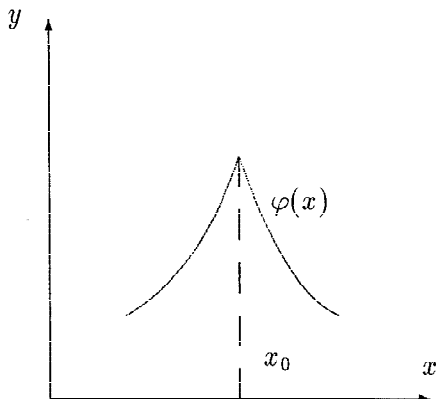


Рис. 2.1. Решение задачи (3.27)

Решениями задач (2.29) и (2.30) будут

$$\begin{aligned} \text{а) } \varphi^+ &= C_+ \exp \left\{ -\sqrt{\sigma/\mu}(x - x_0) \right\}, \\ \text{б) } \varphi^- &= C_- \exp \left\{ -\sqrt{\sigma/\mu}(x_0 - x) \right\}. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Подставляя (2.32) в (2.31) и решая линейные уравнения относительно  $C_+$  и  $C_-$ , получим

$$C_+ = C_- = \frac{Q}{2\sqrt{\mu\sigma}}.$$

Таким образом, решение задачи (2.27) имеет вид

$$\varphi(x) = \frac{Q}{2\sqrt{\mu\sigma}} \begin{cases} \exp \left\{ -\sqrt{\sigma/\mu}(x - x_0) \right\} & \text{при } x \geq x_0, \\ \exp \left\{ -\sqrt{\sigma/\mu}(x_0 - x) \right\} & \text{при } x \leq x_0. \end{cases} \quad (2.33)$$

График функции  $\varphi(x)$  приведен на рис. 2.1.

Из него видно, что в результате диффузионного процесса устанавливается решение, экспоненциально и симметрично убывающее в оба направления от  $x_0$ .

Рассмотрим более интересный случай, когда скорость потока воздушных масс отлична от нуля. Предположим, что она постоянна и положительна. Тогда имеем уравнение

$$u \frac{d\varphi}{dx} + \sigma\varphi = \mu \frac{d^2\varphi}{dx^2} + Q\delta(x - x_0) \quad (2.34)$$

на прямой  $-\infty < x < \infty$ . Аналогично рассмотренному случаю уравнение (2.34) с нулевым условием на бесконечности сведем к двум задачам:

$$\text{а) } \mu \frac{d^2\varphi^+}{dx^2} - u \frac{d\varphi^+}{dx} + \sigma\varphi^+ = 0, \quad \varphi^+ = 0 \text{ при } x \rightarrow \infty, \quad (2.35)$$

$$\text{б) } \mu \frac{d^2\varphi^-}{dx^2} - u \frac{d\varphi^-}{dx} + \sigma\varphi^- = 0, \quad \varphi^- = 0 \text{ при } x \rightarrow -\infty. \quad (2.36)$$

Связь решений задач (2.35) и (2.36), как нетрудно проверить, осуществляется с помощью соотношений (2.31).

Решения задач (2.35) и (2.36) представляются в виде

$$\text{а) } \varphi^+ = C_+ \exp \left\{ - \left( \sqrt{\frac{\sigma}{\mu} + \frac{u^2}{4\mu^2}} - \frac{u}{2\mu} \right) (x - x_0) \right\}, \quad x \geq x_0,$$

$$\text{б) } \varphi^- = C_- \exp \left\{ - \left( \sqrt{\frac{\sigma}{\mu} + \frac{u^2}{4\mu^2}} + \frac{u}{2\mu} \right) (x_0 - x) \right\}, \quad x \leq x_0.$$

Подставляя эти соотношения в (2.31), получим

$$C_+ = C_- = \frac{Q}{\sqrt{4\delta\mu + u^2}}.$$

В результате имеем решение задачи в виде

$$\varphi = \frac{Q}{\sqrt{4\delta\mu + u^2}} \begin{cases} \exp \left\{ - \left( \sqrt{\frac{\delta}{\mu} + \frac{u^2}{4\mu^2}} - \frac{u}{2\mu} \right) (x - x_0) \right\}, & x \geq x_0, \\ \exp \left\{ - \left( \sqrt{\frac{\delta}{\mu} + \frac{u^2}{4\mu^2}} + \frac{u}{2\mu} \right) (x_0 - x) \right\}, & x \leq x_0. \end{cases} \quad (2.37)$$

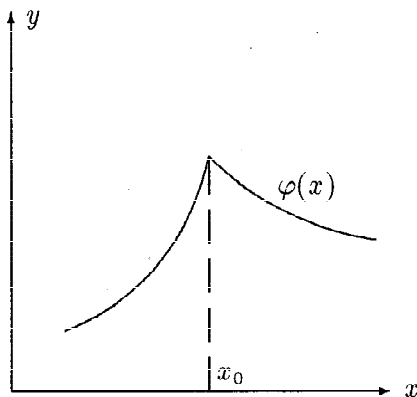


Рис. 2.2. Решение одномерной задачи переноса и диффузии субстанции

График функции  $\varphi(x)$  приведен на рис. 2.2. Видно, что при  $u > 0$  левая (по отношению к  $x = x_0$ ) часть экспоненты прижимается к  $x = x_0$ , а правая — наоборот, расплывается, что характеризует снос субстанции ветром с одновременной диффузией.

Аналогично можно рассмотреть более сложную ситуацию, когда длительное время ветер дул в одном направлении, затем переменялся на противоположный.

#### 4. Перенос и диффузия тяжелых аэрозолей

Особый интерес при изучении задач локального загрязнения окружающей среды представляют тяжелые аэрозоли. Распространяясь в атмосфере, такой аэрозоль диффундирует и под действием силы тяжести опускается на землю. Скорость опускания определяется из задачи Стокса и является постоянной величиной, направленной вниз. Поэтому, если обозначить через  $w_g$  абсолютную величину вертикальной скорости частиц под действием силы тяжести, в уравнениях переноса аэрозолей появится новое слагаемое  $w_g \frac{\partial \varphi}{\partial z}$  и задача (2.24), (2.26) переноса и диффузии принимает вид

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial u \varphi}{\partial x} + \frac{\partial v \varphi}{\partial y} + \frac{\partial (w - w_g) \varphi}{\partial z} + \sigma \varphi = \frac{\partial}{\partial z} \nu \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \mu \Delta \varphi + f,$$

$$\varphi = \varphi_0 \quad \text{при } t = 0, \quad \varphi = 0 \quad \text{на } \Sigma,$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \alpha \varphi \quad \text{на } \Sigma_0, \quad \varphi = 0 \quad \text{на } \Sigma_H.$$
(2.38)

Найдем количество аэрозоля, выпавшего на площади  $\Sigma_i \subset \Sigma_0$  за интервал времени  $0 \leq t \leq T$  на плоскости  $z = 0$ . Для этого проинтегрируем первое уравнение (2.38) по  $z$  в пределах  $0 \leq z \leq H$ .

Полагая  $\int_0^H \varphi dz = \bar{\varphi}$ ,  $\int_0^H f dz = F$  и считая  $u$  и  $v$  не зависящими от  $z$ , получаем

$$\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial t} + \frac{\partial u \bar{\varphi}}{\partial x} + \frac{\partial v \bar{\varphi}}{\partial y} + \sigma \bar{\varphi} = \mu \Delta \bar{\varphi} - (\bar{w}_g + \nu \alpha) \varphi_g + F,$$
(2.39)

где  $\varphi_g = \varphi|_{z=0}$ . При выводе (2.39) были использованы условия

$$w = 0 \quad \text{при } z = 0, \quad z = H, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \alpha \varphi \quad \text{при } z = 0$$

и естественное в данном случае условие

$$\varphi \rightarrow 0 \quad \text{при } z \rightarrow H.$$

Из уравнения (2.39) следует, что в каждую единицу времени количество аэрозоля в атмосфере над точкой  $(x, y)$  уменьшается на величину  $(w_g + \nu \alpha) \varphi_g$ . При этом  $w_g \varphi_g$  — часть аэрозолей, определяемая падением частиц под действием силы тяжести, а  $\nu \alpha \varphi_g$  — турбулентным обменом в приграничной зоне около земной поверхности. Если  $w_g \ll \nu \alpha$ , то при решении задачи о количестве выпавшего на некоторую поверхность  $\Sigma_i \subseteq \Sigma_0$  аэрозоля величиной  $w_g$  в уравнении (2.38) можно пренебречь. Если  $w_g$  сравнима с величиной  $\nu \alpha$  или превосходит ее, то вместо (2.24), (2.35) необходимо рассматривать задачу (2.38).

Рассмотрим основные функционалы задачи. Ими обычно являются либо полное количество аэрозолей в заданной области  $G$ :

$$J_i = \frac{1}{T} \int_0^T dt \int_{G_i} \varphi dG,$$
(2.40)

либо полное количество выпавшего на землю аэрозоля на площади  $\Sigma_i$  цилиндрической области  $G$ :

$$J_i = a \int_0^T dt \int_{\Sigma_i} \varphi_g d\Sigma. \quad (2.41)$$

Константа  $a$  определяется гравитационным и диффузионным механизмами выпадения аэрозоля, с учетом рассмотренного выше имеем

$$a = w_g + \nu\alpha. \quad (2.42)$$

Набор возможных функционалов может быть расширен.

### § 3. Сопряженные уравнения переноса и диффузии

Для определения областей возможного размещения промышленных предприятий с соблюдением санитарных норм загрязнения разработан метод, основанный на введении сопряженных уравнений переноса и диффузии. Рассмотрим технику получения сопряженных уравнений, соответствующих уравнению переноса и диффузии, на основе тождества Лагранжа. Рассмотрим задачу

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + A\varphi = f, \quad \varphi = \varphi_0 \quad \text{при } t = 0, \quad (2.43)$$

где  $A$  — линейный оператор в гильбертовом пространстве, заданный на множестве функций  $\varphi \in \Phi$ , каждая из которых удовлетворяет соответствующим условиям гладкости, дополнительным условиям (например граничным) и другим требованиям, вытекающим из существа задачи.

Пусть в гильбертовом пространстве  $\Phi$  скалярное произведение для любых двух функций  $g$  и  $h$  из  $\Phi$  определено следующим образом:

$$(g, h) = \int_0^T dt \int_G gh dG, \quad (2.44)$$

где  $[0, T]$  — область значений переменной  $t$ , а  $G$  — область изменения пространственных переменных. Для определенности будем считать задачу периодической, положив  $\varphi(\bar{r}, T) = \varphi(\bar{r}, 0)$ . Запишем уравнение (2.43) в виде

$$L\varphi = f, \quad (2.45)$$

где  $L = \frac{\partial}{\partial t} + A$ . Линейному оператору  $L$  поставим в соответствие сопряженный оператор  $L^*$  на основе тождества Лагранжа:

$$(g, Lh) = (h, L^*g), \quad (2.46)$$

где оператор  $L$  и функции  $g$  и  $h$  предполагаются вещественными. Полагая  $h = \varphi$ ,  $g = \varphi^*$ , имеем

$$(\varphi^*, L\varphi) = (\varphi, L^*\varphi^*). \quad (2.47)$$

Пусть

$$L^*\varphi^* = p, \quad (2.48)$$

где  $p$  — пока неопределенная функция. Тогда соотношение (2.47) в силу (2.45) принимает вид

$$(\varphi^*, f) = (\varphi, p). \quad (2.49)$$

Если  $p$  — характеристика каких-либо измерений, то основным функционалом будет

$$J = (\varphi, p). \quad (2.50)$$

Из (2.49) следует двойственная формула

$$J = (\varphi^*, f). \quad (2.51)$$

Применим этот метод к конкретной задаче

$$L = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \operatorname{div} \bar{u} \varphi + \sigma \varphi = \frac{\partial}{\partial z} \nu \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \mu \Delta \varphi + f, \quad \varphi = 0 \text{ на } \Sigma,$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \alpha \varphi \quad \text{на } \Sigma_0, \quad (2.52)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0 \quad \text{на } \Sigma_H, \quad \varphi(\bar{r}, T) = \varphi(\bar{r}, 0).$$

Предположим также, что компоненты скорости  $u, v, w$  удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \bar{u} &= 0, \\ w &= 0 \quad \text{при } z = 0, z = H. \end{aligned} \quad (2.53)$$

Рассмотрим пространство  $\Phi$  — функций, которые суммируемы с квадратом, имеют производные по всем переменным, обобщенные вторые производные по  $x, y, z$  и удовлетворяют условиям (2.52). Определим скалярное произведение

$$(g, h) = \int_0^T dt \int_G gh dG.$$

Уравнение (2.52) на функциях гильбертова пространства  $\Phi$  запишется в виде

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + A\varphi = f, \quad (2.54)$$

где

$$A = \operatorname{div}(\bar{u} \cdot) + \sigma - \frac{\partial}{\partial z} \nu \frac{\partial}{\partial z} - \mu \Delta.$$

Используя тождество Лагранжа (2.46), распишем в явной форме его левую часть:

$$\begin{aligned} (g, Lh) &= \int_0^T dt \int_G g \left( \frac{\partial h}{\partial t} + \operatorname{div}(\bar{u}h) + \sigma h - \frac{\partial}{\partial z} \nu \frac{\partial h}{\partial z} - \mu \Delta h \right) dG = \\ &= \int_G g_T h_T dG - \int_G g_0 h_0 dG + \int_0^T dt \int_{\Sigma} u_n gh d\Sigma + \sigma \int_0^T dt \int_G gh dG - \\ &\quad - \int_0^T dt \int_{\Sigma_n} \nu g \frac{\partial h}{\partial z} d\Sigma + \int_0^T dt \int_{\Sigma_0} \nu g \frac{\partial h}{\partial z} d\Sigma + \int_0^T dt \int_{\Sigma_n} \nu h \frac{\partial g}{\partial z} d\Sigma - \\ &\quad - \int_0^T dt \int_{\Sigma_0} \nu h \frac{\partial g}{\partial z} d\Sigma - \int_0^T dt \int_G h \frac{\partial}{\partial z} \nu \frac{\partial g}{\partial z} dG - \mu \int_0^T dt \int_{\Sigma} g \frac{\partial h}{\partial n} d\Sigma + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \mu \int_0^T dt \int_{\Sigma} h \frac{\partial g}{\partial n} d\Sigma - \int_0^T dt \mu h \Delta g dG - \int_0^T dt \int_G h \frac{\partial g}{\partial t} dG - \\
& - \int_0^T dt \int_G h \operatorname{div}(\bar{u} \cdot g) dG. \tag{2.55}
\end{aligned}$$

Тождество (2.55) переходит в выражение

$$(g, Lh) = \int_0^T dt \int_G h \left( -\frac{\partial g}{\partial t} - \operatorname{div}(\bar{u}g) + \sigma g - \frac{\partial}{\partial z} \nu \frac{\partial g}{\partial z} - \mu \Delta g \right) dG. \tag{2.56}$$

Оператор, стоящий в скобках, обозначим

$$L^* = -\frac{\partial}{\partial t} - \operatorname{div}(\bar{u} \cdot) + \sigma - \frac{\partial}{\partial z} \nu \frac{\partial}{\partial z} - \mu \Delta. \tag{2.57}$$

Тогда правая часть (2.56) будет скалярным произведением вида  $(h, L^*g)$ . В результате приходим к тождеству (2.46) и сопряженному оператору (2.57) в пространстве  $\Phi$ .

Формально определим сопряженную задачу

$$L^* \varphi^* = p,$$

или, в развернутом виде:

$$\begin{aligned}
& -\frac{\partial \varphi^*}{\partial t} - \operatorname{div}(\bar{u} \varphi^*) + \sigma \varphi^* - \frac{\partial}{\partial z} \nu \frac{\partial \varphi^*}{\partial z} - \mu \Delta \varphi^* = p, \\
& \varphi^* = 0 \quad \text{на } \Sigma, \\
& \frac{\partial \varphi^*}{\partial z} = \alpha \varphi^* \quad \text{на } \Sigma_0, \quad \varphi^*(\bar{r}, T) = \varphi^*(\bar{r}, 0).
\end{aligned} \tag{2.58}$$

Тогда в зависимости от выбранного  $p$  приходим к тому или иному функционалу  $J$ . В самом деле, если выберем  $h = \varphi$ ,  $g = \varphi^*$ , то в соответствии с (2.49) приходим к функционалам (2.50), (2.51).

Итак, если объектом рассмотрения является не само решение  $\varphi$ , а его некоторые функционалы, то для каждого из них может быть сформулирована собственная сопряженная задача. На первый взгляд



кажется, что наиболее естественный путь состоит в решении основной задачи, с помощью которой по формуле (2.50) можно рассчитать любой функционал. В некоторых случаях такой подход действительно оказывается наиболее целесообразным. Однако при планировании сооружений, связанных с выбросом аэрозолей, или при оценке чувствительности функционала к изменению параметров среды и ответе на другие аналогичные вопросы аппарат сопряженных уравнений оказывается незаменимым средством анализа.

В качестве примера рассмотрим следующую задачу. Пусть процесс распространения загрязняющей примеси в области  $G = (-\infty, \infty)$  описывается уравнением

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \delta \varphi - \mu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = Q \cdot \delta(x - x_0) \quad (2.59)$$

при условии

$$\varphi = 0 \quad \text{при } t = 0. \quad (2.60)$$

Требуется найти такую область  $\omega \subset G$ , чтобы при размещении источника загрязнения мощностью  $Q$  в точке  $x_0 \in \omega$  функционал вида

$$J = \varphi(\xi, t) \quad (2.61)$$

(количество загрязняющей примеси в точке  $x = \xi_1$  в момент  $t = \tau_1$ ) не превышал некоторой заданной константы  $C$ . Решение этой задачи может быть получено, по крайней мере, двумя способами.

Первый состоит в многократном решении уравнения (2.59) с различными значениями  $x_0 \in G$ , определении значения функционала (2.61) и выделении на этой основе искомой зоны  $\omega$ . Однако такой путь требует решения значительного числа задач типа (2.59), (2.60) и, очевидно, неприемлем для практической реализации.

Другой способ основан на двойственном представлении функционала (2.61) с использованием решения сопряженного уравнения. Для данной задачи такое представление имеет вид

$$J = Q \int_0^T \varphi^*(x_0, t) dt, \quad (2.62)$$

где  $\varphi^*$  — решение уравнения

$$-\frac{\partial \varphi^*}{\partial t} + \sigma \varphi^* - \mu \frac{\partial^2 \varphi^*}{\partial x^2} = \delta(x - \xi_1) \cdot \delta(t - \tau_1) \quad (2.63)$$

при начальных данных

$$\varphi^* = 0 \quad \text{при } t = T. \quad (2.64)$$

Таким образом, определение допустимой для размещения источника загрязнения зоны  $\omega \subset G$  на основе двойственного представления (2.62) функционала (2.61) требует только однократного решения задачи, сопряженной с (2.59).

Определим функцию  $\varphi^*$ , удовлетворяющую (2.63), (2.64). С этой целью введем новую переменную

$$t_1 = T - t, \quad t_1 \in [0, T]. \quad (2.65)$$

При этом задача (2.63), (2.64) перейдет в задачу

$$\frac{\partial \varphi^*}{\partial t_1} + \sigma \varphi^* - \mu \frac{\partial^2 \varphi^*}{\partial x^2} = \delta(x - \xi_1) \delta(T - t_1 - \tau_1), \quad (2.66)$$

$$\varphi^* = 0 \quad \text{при } t_1 = 0.$$

Отметим, что оператор задачи (2.66) формально совпадает с оператором задачи (2.59). Решение задачи (2.66) дается формулой

$$\varphi^*(x, t_1) = \int_0^{t_1} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\varphi}(x - \xi, t_1 - \tau) \delta(\xi - \xi_1) \delta(T - \tau - t_1) d\xi d\tau. \quad (2.67)$$

Здесь  $\bar{\varphi}(x, t)$  — фундаментальное решение оператора задачи (2.66):

$$\bar{\varphi}(x, t) = \frac{\theta(t)}{2\sqrt{\mu\pi t}} \exp \left\{ - \left( \delta t + \frac{x^2}{4\mu t} \right) \right\},$$

где  $\theta$  — функция Хевисайда:

$$\theta(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0, \\ 1, & t > 0. \end{cases}$$

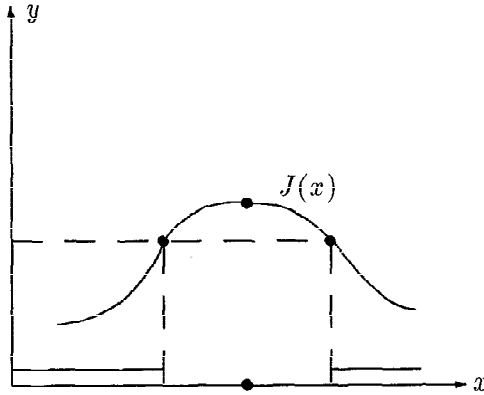


Рис. 2.3. Допустимая для размещения источника загрязнения область (двойная линия на оси абсцисс)

Возвращаясь к старым переменным, находим

$$\varphi^*(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{\mu\pi(\tau_1-t)}} \exp \left\{ - \left[ \delta(\tau_1-t) + \frac{(x-\xi)^2}{4\mu(\tau_1-t)} \right] \right\} & \text{при } t \in [0, \tau_1), \\ 0 & \text{при } t \in [\tau, T]. \end{cases} \quad (2.68)$$

В соответствии с формулой (2.67) двойственное представление (2.62) функционала (2.61) имеет вид

$$J = \frac{Q}{2\sqrt{\mu\pi}} \int_0^{\tau_1} \frac{1}{\sqrt{\tau_1-t}} \exp \left\{ - \left[ \delta(\tau_1-t) + \frac{(x_0-\xi_1)^2}{4\mu(\tau_1-t)} \right] \right\} dt \quad (2.69)$$

или

$$J = \frac{Q}{2\sqrt{\mu\pi}} \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{\sqrt{\tau_1-t_j}} \times \exp \left\{ - \left[ \delta(\tau_1-t_j) + \frac{(x_0-\xi_1)^2}{4\mu(\tau_1-t_j)} \right] \right\} \Delta t + O(\Delta t), \quad (2.70)$$

где  $t_j = j\Delta t$ ,  $\Delta t = \tau_1/k$ .

Рассмотрим функционал (2.69) как функцию  $J(x_0)$  при  $x_0 \in G$  и построим график этой функции. Допустимая для размещения источника загрязнения область  $\omega$  определится из неравенства  $J(x) < C$ .

Графическое решение рассмотренного примера приводится на рис. 2.3, где область  $\omega$  на оси абсцисс выделена двойной линией. Распределение загрязняющей примеси для каждого конкретного  $x_0 \in \omega$  находится путем решения задачи (2.59), (2.60), которое, учитывая предыдущее, запишется в виде

$$\begin{aligned} \varphi(x, t) = & \frac{Q}{2\sqrt{\mu\pi}} \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{\sqrt{t-t_j}} \times \\ & \times \exp \left\{ - \left[ \delta(t-t_j) + \frac{(x-x_0)^2}{4\mu(t-t_j)} \right] \right\} \Delta t + O(\Delta t). \end{aligned} \quad (2.71)$$

Мы рассмотрели случай нестационарной задачи. Если основная задача стационарна, то и сопряженная задача будет стационарной.

## § 4. Постановка задачи оптимального размещения предприятий

Предположим, что требуется разместить новое промышленное предприятие вблизи населенных пунктов, зон отдыха и других экологически значимых зон с таким условием, чтобы суммарное годовое их загрязнение от вредных промышленных выбросов не превышало допустимых санитарных норм и общая экологическая нагрузка на весь регион  $\Sigma_0$  за счет загрязнения была минимальной или в пределах санитарных норм.

Пусть промышленное предприятие выбрасывает в атмосферу за единицу времени на высоте  $z = h$  вредный аэрозоль с интенсивностью  $Q$ , который затем переносится воздушными массами и диффундирует под влиянием мелкомасштабной турбулентности. Предположим, что источник аэрозоля располагается в окрестности точки  $\bar{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$  и описывается функцией

$$f(\bar{r}) = Q\delta(\bar{r} - \bar{r}_0). \quad (2.72)$$

В этом случае для распределения аэрозольной субстанции  $\varphi$  получаем уравнение

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \operatorname{div} \bar{u} \varphi + \sigma \varphi = \frac{\partial}{\partial z} \nu \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \mu \Delta \varphi + Q \delta(\bar{r} - \bar{r}_0). \quad (2.73)$$

Граничные условия задаются в виде

$$\begin{aligned} \varphi &= 0 & \text{на} & \Sigma, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial z} &= \alpha \varphi & \text{на} & \Sigma_0, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial z} &= 0 & \text{на} & \Sigma_H. \end{aligned} \quad (2.74)$$

Решение задачи (2.72), (2.73) будем искать на множестве достаточно гладких периодических функций с периодом  $T$  по переменной  $t$ :

$$\varphi(\bar{r}, T) = \varphi(\bar{r}, 0). \quad (2.75)$$

Задача состоит в том, чтобы выбрать для размещения предприятия такую зону  $\omega_s \subset G$ , в которой будут соблюдены глобальные и локальные санитарные нормы загрязнения как всего региона  $\Sigma_0$ , так и его специально выбранных зон  $\Omega_k$ . Предполагается, что необходимая информация о ветре известна. Для решения задачи о распространении промышленного аэрозоля, выбрасываемого в заданной точке  $r_0 \in G$ , используются методы прямого моделирования, т.е. решается задача (2.72)–(2.75). Полученное решение интегрируется в пределах годового интервала  $0 \leq t \leq T$  и подсчитывается либо среднее за период  $T$  количество аэрозоля в единичном цилиндре над экологически значимой зоной  $\Omega_k \subset \Sigma_0$ :

$$J_k^B = b \int_0^T dt \int_{G_k} \varphi dG, \quad (2.76)$$

либо полное количество аэрозоля, осевшего на земной поверхности в той же зоне  $\Omega_k \subset \Sigma_0$ :

$$J_k^A = a \int_0^T dt \int_{\Omega_k} \varphi d\Sigma. \quad (2.77)$$

Здесь  $b = 1/T$ ; константа  $a$  отражает ту часть аэрозоля, которая попадает в почву, прежде всего это тяжелые аэрозоли, а также части легких, оказавшихся на поверхности земли за счет вертикальной диффузии. В этом случае  $a$  можно выбрать следующим образом:

$$a = \bar{w}_g + \alpha\nu. \quad (2.78)$$

Оба функционала важны для оценки загрязнения и его воздействия на экологические условия зоны  $\Omega_k$ . Функционалы (2.76), (2.77) являются частными случаями более общего функционала

$$J_p = \int_0^T dt \int_G p \varphi dG. \quad (2.79)$$

Если выбрать

$$p = \begin{cases} b, & \bar{r} \in G_k, \\ 0, & \bar{r} \notin G_k, \end{cases}$$

то приходим к функционалу (2.76). Если же принять

$$p = \begin{cases} a\delta(z), & \bar{r} \in \Omega_k, \\ 0, & \bar{r} \notin \Omega_k, \end{cases}$$

то приходим к функционалу (2.77). Напомним, что  $\Omega_k \subset \Sigma_0$  является основанием цилиндрической области  $G_k$  на плоскости  $z = 0$ .

Если промышленный объект поместить в другую точку  $\bar{r}_1 \in G$  то весь расчет следует повторить. Это значит, что решение вопроса об оптимальном размещении предприятия требует большого перебора вариантов и последующего сравнения функционалов  $J_k^A$  и  $J_k^B$  или их линейных комбинаций с определенными константами  $a$  и  $b$ :

$$J_k = J_k^A + J_k^B.$$

Так как оценка загрязнения в конечном счете связана с комбинацией функционалов  $J_k^A$  и  $J_k^B$ , то можно ввести в рассмотрение обобщенный функционал

$$J_k = \int_0^T dt \int_{G_k} [b + a\delta(z)] \varphi dG, \quad (2.80)$$

который имеет вид (2.79), если

$$p = \begin{cases} b + a\delta(z), & \text{в } G_k, \\ 0, & \text{вне } G_k. \end{cases}$$

В дальнейшем будем рассматривать только функционал (2.80).

Введем еще один важный функционал  $J_{pk}$ :

$$J_{pk} = \sum_{k=0}^m \int_0^T dt \int_{G_k} [b_k + a_k\delta(z)]\varphi dG. \quad (2.81)$$

Предполагается, что константы  $a_k$  и  $b_k$  могут быть различными для непересекающихся зон  $G_k$  и могут зависеть, например, от характера подстилающей поверхности.

Функционал (2.81) можно также записать в форме

$$J_p = \int_0^T dt \int_G p\varphi dG, \quad (2.82)$$

где

$$p = \begin{cases} b_k + a_k\delta(z), & \text{на } G_k, k = \overline{1, m}, \\ 0, & \text{вне } U_{k=1}^m G_k. \end{cases}$$

Физическая интерпретация функционала  $J_p$  следующая: функционал дает интегральный по всем экологически значимым областям  $G_k$  эффект загрязнения окружающей среды при условии, что источник промышленных выбросов находится в точке  $\bar{r}_0 \in G$ .

Этот функционал является глобальным для всей области  $G$  и всех регионов  $G_k$ .

Наряду с (2.81) рассмотрим другой глобальный функционал:

$$Y_p = \int_0^T dt \int_G p_0\varphi dG, \quad (2.83)$$

где

$$p_0 = \begin{cases} B_k + A_k\delta(z), & \bar{r} \in G_k, k = \overline{1, m}, \\ 0, & \text{вне } U_{k=1}^m G_k. \end{cases}$$

Здесь  $A_k$  и  $B_k$  — величины, связанные с санитарным (физиологическим) воздействием выбрасываемых промышленных аэрозолей на все области  $G_k \subset G$ . Например, константы  $B_k$  могут выражать корреляционные связи между количеством аэрозолей в  $G_k$  и их санитарной вредностью. Аналогично обстоит дело и с  $A_k$ . Необходимые сведения получаются на основе экспериментальных данных за несколько лет.

Рассмотрим еще одно обобщение. Предположим, что известны все сведения о физиологическом воздействии не только в наиболее важных экологических зонах  $\Omega_k$ , но и во всех других точках  $\bar{r} \in \Sigma_0$ . Тогда величины  $A_k$  и  $B_k$  являются функциями:  $A = A(x, y)$ ,  $B = B(x, y)$ .

Составим функционал  $Y_p$  с величиной

$$p_0 = B + A\delta(z) \text{ в } G. \quad (2.84)$$

Функционалы (2.83), (2.84) используются для оценки экологической нагрузки на регион, вызванной загрязнением.

Задача состоит в нахождении такой точки  $\bar{r}_0 \in G$ , что

$$Y_p = \min_{\bar{r}_0 \in G}. \quad (2.85)$$

Эта проблема может быть решена с помощью основной задачи (2.73)–(2.75) методом перебора  $\bar{r}_0$  в области  $G$ . Такой перебор требует огромных вычислений и труден в реализации даже на современных вычислительных машинах. Поэтому на практике осуществляется целенаправленный перебор с учетом розы ветров и других соображений статистического характера.

Однако задача (2.85) решается однозначно с помощью всего лишь одного варианта расчета сопряженной задачи. В этом состоит одно из замечательных свойств двойственности. Рассмотрим этот алгоритм.

Так как основной функционал задачи выбран в форме (2.83), (2.84), то в соответствии с результатами §3 сопряженной задачей по отношению к основной будет следующая:

$$-\frac{\partial \varphi^*}{\partial t} - \operatorname{div}(\bar{u}\varphi^*) + \sigma\varphi^* = \frac{\partial}{\partial z}\nu \frac{\partial \varphi^*}{\partial z} + \mu\Delta\varphi^* + p_0,$$



$$\begin{aligned} \varphi^* &= 0 && \text{на } \Sigma, \\ \frac{\partial \varphi^*}{\partial z} &= \alpha \varphi^* && \text{на } \Sigma_0, \\ \frac{\partial \varphi^*}{\partial z} &= 0 && \text{на } \Sigma_H, \\ \varphi^*(\bar{r}, T) &= \varphi^*(\bar{r}, 0). \end{aligned} \tag{2.86}$$

Если уравнение (2.73) умножить на  $\varphi^*$ , уравнение (2.86) — на  $\varphi$ , результаты проинтегрировать по всему интервалу и области  $G$ , вычесть одно из другого и воспользоваться граничными значениями и начальными данными, то в силу сопряженности задач после преобразований и упрощений придем к двойственному виду функционала  $Y_p$ :

$$Y_p = \int_0^T dt \int_G p_0 \varphi dG, \tag{2.87}$$

$$Y_p = Q \int_0^T \varphi^*(\bar{r}_0, t) dt. \tag{2.88}$$

Величину  $Y_p$  обозначим  $Y_p(\bar{r}_0)$ , поскольку этот функционал параметрически зависит от местоположения промышленного объекта  $\bar{r}_0 \in G$ .

Предположим, что сопряженная задача (2.86) решена и найдена функция  $\varphi^*(\bar{r}, t)$ . Подставляя ее в (2.88), получим

$$Y_p(\bar{r}) = Q \int_0^T \varphi^*(\bar{r}, t) dt. \tag{2.89}$$

Вспомогательную функцию  $Y_p(\bar{r})$  используем для нахождения  $\bar{r}_0$  из условия

$$Y_p(\bar{r}) = \min_{\bar{r} \in G}. \tag{2.90}$$

Точкой, минимизирующей  $Y_p(\bar{r})$ , будет  $\bar{r}_0$ . Далее необходимо построить поле функции  $Y_p(x, y, h)$ , где  $h$  — высота выброса, лимитируемая технологией строительства. В результате на плоскости  $(x, y)$  получим поле изолиний  $Y_p(x, y, h) = \text{const}$ .

Однако во многих случаях единственного решения задачи оптимизации не требуется, поскольку при окончательном решении необходимо обеспечить ряд ограничений, определяемых геологией региона, близостью трудовых ресурсов, воды и всевозможных коммуникаций. Поэтому важно выбрать целую область допустимых значений санитарных норм. Обозначим через  $\omega_G$  область, где выполняется условие

$$Y_p \leq C, \quad (2.91)$$

которая и будет решением поставленной задачи.

Вернемся к классическому решению проблемы оптимизации. Пусть  $\bar{r}_0$  найдена. Тогда, решая основную задачу (2.73)–(2.75), можно найти полную информацию о полях загрязнений уже не в глобальном, а в локальном смысле, т.е. информацию о загрязнении отдельных зон.

Если для всех зон удовлетворяются предельно допустимые санитарные дозы загрязнения, то задача решена; если нет, то требуется решать более сложную и более информативную многокритериальную задачу.

## § 5. Многокритериальная оптимизация

При глобальной оценке санитарного загрязнения всего региона  $\Sigma_0$  вредными промышленными выбросами некоторые экологически важные зоны  $\Omega_k$  могут оказаться загрязненными сверх предельно допустимых норм. Для того, чтобы этого не случилось, необходимо решать многокритериальную задачу.

Пусть  $\Omega_k$  ( $k = 1, 2, \dots, m$ ) — несколько выбранных на плоскости  $z = 0$  в области  $\Sigma_0$  экологически наиболее значимых зон: населенные пункты, зоны отдыха, резервуары питьевой воды и т.д. Требуется определить область расположения нового промышленного объекта с таким расчетом, чтобы загрязнение всех  $m$  зон  $\Omega_k$  не превышало предельно допустимых значений (если такая область на  $\Sigma_0$  существует). Если такой области на  $\Sigma_0$  найти не удастся, то можно сформулировать такие ограничения на мощность выбросов  $Q$ , при которых появится область возможного размещения предприятия.

Сначала рассмотрим более простую задачу, когда область  $\Omega_k \subset \Sigma_0$  единственна. Априори потребуем, чтобы санитарное загрязнение в ее пределах было меньше предельно допустимой нормы  $C_k$ , т. е.

$$Y_{pk} = \int_0^T dt \int_{G_k} p_{ck} \varphi dG \leq C_k, \quad (2.92)$$

где

$$p_{ck} = \begin{cases} b_k + a_k \delta(z), & \text{на } G_k, \\ 0, & \text{вне } G_k. \end{cases} \quad (2.93)$$

В отличие от предыдущего случая интегрирование в (2.92) проводится уже не по всей области  $G$ , а лишь по ее части  $G_k$ .

Тогда вместо задачи (2.86) имеем следующую:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial \varphi_k^*}{\partial t} - \operatorname{div}(\bar{u} \varphi_k^*) + \sigma \varphi_k^* &= \frac{\partial}{\partial z} \nu \frac{\partial \varphi_k^*}{\partial z} + \mu \Delta \varphi_k^* + p_{ck}, \\ \varphi_k^* &= 0 \quad \text{на } \Sigma, \\ \frac{\partial \varphi_k^*}{\partial z} &= \alpha \varphi_k^* \quad \text{на } \Sigma_0, \\ \frac{\partial \varphi_k^*}{\partial z} &= 0 \quad \text{на } \Sigma_H, \\ \varphi_k^*(\bar{r}, T) &= \varphi_k^*(\bar{r}, 0), \end{aligned} \quad (2.94)$$

где  $p_{ck}$  — функция вида (2.93). Поскольку существует принцип двойственности:

$$\begin{aligned} Y_{pk} &= \int_0^T dt \int_{G_k} p_{ck} \varphi dG, \\ Y_{pk} &= Q \int_0^T \varphi_k^*(\bar{r}_0, t) dt, \end{aligned} \quad (2.95)$$

то наряду с (2.92) выполняется эквивалентное условие

$$Y_{pk}(\bar{r}_0) = Q \int_0^T \varphi_k^*(\bar{r}_0, t) dt \leq C_k. \quad (2.96)$$

Воспользуемся этим соотношением для определения области возможного размещения предприятия. Предположим, что задача (2.94) решена, т.е. определены  $\varphi_k^*(\bar{r}, t)$ . Найдем величину  $Y_{pk}(\bar{r})$  по формуле

$$Y_{pk}(\bar{r}) = Q \int_0^T \varphi_k^*(\bar{r}, t) dt \quad (2.97)$$

и проведем изолинии  $Y_{pk}(\bar{r}) = const$ .

Можно определить область  $\omega_k \subset \Sigma_0$ , где возможно размещение промышленного предприятия. Далее вступают в действие экологические и другие критерии выбора наиболее благоприятного места для строительства. Если окажется, что области  $\omega_k$  внутри  $\Sigma_0$  не существует, то, уменьшая  $Q$ , можно всегда добиться ее появления. Это будет накладывать определенные ограничения на выбросы, а возможно, и на технологию предприятия.

Предположим, что таких экологически значимых зон  $\Omega_k$  несколько ( $k = 1, 2, \dots, m$ ). В таком случае требуется решить уже  $m$  сопряженных задач вида (2.94) и найти  $\varphi_1^*, \varphi_2^*, \dots, \varphi_m^*$ .

С помощью этих решений сформулируем  $m$  функционалов:

$$Y_{pk}(\bar{r}_0) = Q \int_0^T dt \int_{\Omega_k} \varphi_k^*(\bar{r}_0, t) d\bar{r}, \quad k = 1, 2, \dots, m \quad (2.98)$$

и получим соответственно  $m$  ограничений:

$$Y_{pk}(\bar{r}_0) \leq C_k, \quad k = 1, 2, \dots, m. \quad (2.96')$$

Далее, для каждой зоны  $\Omega_k$  найдем область возможного размещения предприятия  $\omega_k$ . Пересечение всех областей  $\omega_k$  ( $k = 1, 2, \dots, m$ ) и даст искомую область  $\omega$  для сооружения предприятия, в котором будут соблюдены санитарные нормы загрязнения всех зон  $\Omega_k$ .

С учетом изложенного в целях охраны окружающей среды реальна постановка задачи по составлению для каждого экологического района программы размещения промышленных предприятий, выбрасывающих часть отходов производства в виде аэрозолей в атмосферу. Эту работу в первую очередь нужно осуществлять при

планировании строительства объектов во вновь развиваемых экологических регионах, где возможно принятие разумных с точки зрения охраны окружающей среды решений.

Без нарушения принципиальной схемы решения оптимизационных задач могут быть учтены эффекты внешнего загрязнения объектами, расположенными в соседних регионах, и действующими промышленными предприятиями в данном регионе. Можно ввести новый функционал, связанный с экономическими затратами на восстановление окружающей среды, нарушаемой выбросами предприятия, который позволит дать достаточно полное представление о возможных последствиях загрязнения биосферы и экономических затратах на экологическое восстановление окружающей среды.

## Глава 3

# Математическое моделирование волн цунами

### § 1. Основные задачи в проблеме цунами

Среди разнообразных стихийных бедствий, которым подвержены океанские побережья, таких как тайфуны, землетрясения, вулканические извержения, наиболее опасными по своим последствиям считаются гигантские морские волны-наводнения — цунами. Цунами — японский термин, означающий необычно большую волну. Волны цунами возникают от внезапных перемещений обширных участков дна океана во время подводных землетрясений, в некоторых случаях цунами вызываются крупными подводными оползнями, падением больших масс грунта с крутых склонов берега.

В открытом океане волны очень длинные (длина до 100 км) и пологие (высота 1–2 м), поэтому не опасны. Но при подходе к берегу их высота возрастает за счет уменьшения длины и может достигать десятков метров. Проникая в глубь прибрежной территории, они вызывают большие разрушения и человеческие жертвы. Так, во время цунами, происшедшего в 1703 г. в Японии, погибло около 100 тыс. человек.

Возникнув в каком-либо месте океана, волны цунами способны распространяться на громадные расстояния, сохраняя разрушитель-

ную силу. Скорость распространения цунами в открытом океане определяется формулой  $c = \sqrt{gH}$ , где  $H$  — глубина,  $g$  — ускорение силы тяжести. В Тихом океане, средняя глубина которого порядка 4 км, скорость цунами составляет около 700 км/ч. Заметить цунами в открытом океане из-за малой высоты и большой длины практически невозможно. Существенное влияние на распространение цунами оказывает подводный рельеф дна океана. В частности, подводные хребты служат волноводами, над которыми происходит концентрация энергии.

Одним из возможных путей оценки максимальной высоты и наиболее опасного периода волны цунами для конкретного пункта и, следовательно, расчета критериев безопасности является использование математического моделирования в рамках приближенных гидродинамических моделей с учетом реальной топографии дна и береговой линии. В проблеме моделирования цунами можно выделить три класса задач в соответствии с основными этапами этого явления. Первый класс задач связан с анализом формирования начальных возмущений свободной поверхности океана и распространения их вблизи очага, второй — с изучением распространения волн цунами в открытом океане и, наконец, третий класс задач описывает выход волн на мелководье и их взаимодействие с берегом.

Рассмотрим кратко каждый из этих классов задач. В первых работах генерация волн цунами моделировалась линеаризованными уравнениями гидродинамики для потенциального движения идеальной тяжелой жидкости. В такой постановке был решен класс задач о возбуждении гравитационных волн в слое несжимаемой жидкости постоянной глубины при заданных подвижках дна той или иной формы. Однако в указанной постановке не удалось связать волну цунами непосредственно с сейсмическим очагом, поскольку не учитывались упругие свойства дна океана. В другом подходе использовались упругая модель среды и уравнения Ламэ с учетом гравитационных сил для движения частиц среды, что позволило рассмотреть в одной модели гравитационные волны в жидкости и упругие сейсмические волны в твердой среде.

На распространение волн цунами большое влияние оказывают топографические особенности океана. Простейшая постановка задачи о распространении волн цунами в океане постоянной глубины

основана на линейной теории волн малой амплитуды. При сложном рельефе дна применяется численное моделирование.

Поведение волны при выходе на берег зависит от конкретных условий, в частности, важную роль играют соотношения между глубиной бассейна и длиной волны, между высотой волны и ее длиной. Именно здесь начинают проявляться нелинейные эффекты, и необходимо учитывать дисперсию и диссипацию волны.

## § 2. Математическое моделирование волн цунами

### 1. Постановка задачи о генерации волн цунами

Простейшая модель процесса возбуждения цунами основана на линеаризованных уравнениях гидродинамики для потенциального движения идеальной жидкости, лежащей на жестком дне. В такой постановке решается целый ряд задач о возбуждении гравитационных волн в слое несжимаемой жидкости постоянной глубины при заданных подвижках дна, однако при этом не удается связать волну цунами с порождающим ее сейсмическим очагом, поскольку не учитываются упругие свойства дна.

Рассмотрим процесс возбуждения цунами в рамках упругой модели. В таком подходе в качестве модели среды выбирается слой сжимаемой жидкости, лежащий на упругом полупространстве, а в качестве уравнения движения — уравнения Ламэ с учетом гравитационных членов. Математическая постановка задачи формулируется следующим образом. Слой однородной сжимаемой жидкости (вода) залегает на однородном упругом полупространстве (породы земной коры) и находится в однородном поле силы тяжести. Пусть  $H$  — толщина слоя жидкости (глубина океана). На глубине  $h$  под дном находится модельный источник, имеющий свойства реального очага землетрясения. Уравнения Ламэ с учетом влияния поля силы тяжести записываются в виде

$$\frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial t^2} = V_0 \cdot \nabla(\operatorname{div} \bar{U}) - g\bar{k} \cdot \operatorname{div} \bar{U}, \quad 0 < z \leq H, \quad (3.1)$$



$$\frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial t^2} = (V_p^2 - V_s^2) \nabla (\operatorname{div} \bar{U}) + V_s^2 \Delta \bar{U} -$$

$$-g \bar{k} \cdot \operatorname{div} \bar{U} + \bar{F}(r, \Theta, z, t), \quad z > H. \quad (3.2)$$

Граничные условия на свободной поверхности и дне океана:

$$[V_0^2 \operatorname{div} \bar{U} - g U_z]_{z=+0} = 0, \quad (3.3)$$

$$[U_z]_{z=H+0} = [U_z]_{z=H-0}, \quad (3.4)$$

$$\left[ \frac{\partial U_z}{\partial z} + \frac{\partial U_z}{\partial r} \right]_{z=H+0} = 0, \quad \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial U_z}{\partial \Theta} + \frac{\partial U_\Theta}{\partial z} \right]_{z=H+0} = 0, \quad (3.5)$$

$$\left[ (V_p^2 - 2V_s^2) \operatorname{div} \bar{U} + 2V_s^2 \frac{\partial U_z}{\partial z} - g U_z \right]_{z=H+0} =$$

$$= \frac{\rho_0}{\rho_1} [V_0^2 \operatorname{div} \bar{U} - g U_z]_{z=H-0}. \quad (3.6)$$

Здесь  $(r, \Theta, z)$  — цилиндрическая система координат, ось  $OZ$  направлена вертикально вниз,  $\bar{k}$  — орт по оси  $z$ ,  $\bar{U}(r, \Theta, z, t) = (U_r, U_\Theta, U_z)$  — вектор смещения частиц среды относительно некоторого начального состояния статистического равновесия в гравитационном поле,  $g$  — ускорение силы тяжести,  $\rho_0$  — плотность воды,  $V_0$  — скорость звука в воде,  $F$  — функция источника (очага землетрясения),  $\rho_1$ ,  $V_p$ ,  $V_s$  — плотность, скорость продольных и поперечных волн в упругом полупространстве соответственно,  $\nabla$  — градиент,  $\Delta$  — оператор Лапласа.

Начальные условия принимаются нулевыми. В момент времени  $t = 0$  включается источник, в качестве которого на первом этапе можно рассматривать вертикальную и горизонтальную единичные сосредоточенные силы, приложенные внутри упругого полупространства в точке с координатами  $(0, 0, H + h)$ . Сформулированная модель среды позволяет изучать как гравитационные, так и упругие сейсмические волны, возбуждаемые очагом землетрясения.

Результаты расчетов генерации волн цунами по математической модели (3.1)–(3.6) используются в качестве начальных данных в задаче моделирования распространения волн цунами на участках акватории океана.

## 2. Гидродинамическое описание волн на поверхности жидкости

Рассмотрим идеальную несжимаемую жидкость, находящуюся в однородном поле сил тяжести. Предположим, что течение является потенциальным, т. е. для вектора скорости  $\vec{u} = (u, v, w)$  существует функция  $\varphi(x, y, z, t)$  такая, что  $\vec{u} = \nabla\varphi$ . Здесь  $u, v, w$  — компоненты вектора скорости по направлениям  $x, y, z$  соответственно. Прямоугольную систему координат расположим так, что ось  $Oz$  будет направлена вертикально вверх в сторону, противоположную направлению ускорения свободного падения, а невозмущенная свободная поверхность будет совпадать с горизонтальной плоскостью  $xOy$ . Здесь и далее полагаем, что жидкость заполняет собой некоторую область  $Q_T$ , ограниченную сверху свободной поверхностью  $z = \eta(x, y, t)$ , а снизу — дном:

$$z = -\tilde{H}(x, y, t) = -H(x, y) + B(x, y, t),$$

функция  $B(x, y, t)$  описывает движение дна бассейна.

Рассмотрим некоторые понятия. Под волной будем понимать любой сигнал, передающийся от одной части среды к другой с некоторой скоростью, причем он может искажаться, изменять свою величину и скорость распространения.

Любой плоский сигнал, распространяющийся вдоль положительного направления оси  $Ox$ , с помощью преобразования Фурье может быть представлен суперпозицией простых волн — мод (гармоник), имеющих вид

$$\eta = \eta_0 \cos(kx - wt), \quad (3.7)$$

где выражение

$$\Theta = kx - wt \quad (3.8)$$

называется фазой,  $k$  — волновым числом,  $w$  — частотой, причем функция  $w = w(k)$  определяется особенностями конкретной модели.

Волны называются диспергирующими, если фазовая скорость

$$C_F = w(k)/k \quad (3.9)$$

является функцией волнового числа, т. е.

$$C_F = C_F(k) \neq \text{const.} \quad (3.10)$$

Это означает, что если общее решение задачи представляет собой суперпозицию мод вида (3.7), то при выполнении условия (3.10) первоначальный сигнал будет диспергировать, т.е. его составляющие будут распространяться с различными скоростями. Следует отметить случай, когда фазовая скорость зависит не только от волнового числа, но и от амплитуды волны — при этом проявляются так называемые нелинейные эффекты.

Введем понятие групповой скорости:

$$C_g(k) = \frac{dw}{dk}. \quad (3.11)$$

Можно показать, что именно с такой скоростью распространяется энергия в цуге волн, т.е. в длинной осциллирующей группе (последовательности) волн, образовавшейся в результате дисперсии начального одиночного возмущения.

Традиционный подход к исследованию волн на воде, обусловленных гравитационными эффектами, состоит в формулировке задачи в терминах потенциала течения несжимаемой идеальной жидкости, удовлетворяющего уравнению Лапласа

$$\Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0$$

при  $(x, y, z, t) \in Q_T$  и граничным условиям на свободной поверхности и дне. Кинематическое краевое условие, имеющее вид

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} \frac{\partial\eta}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y} \frac{\partial\eta}{\partial y} - \frac{\partial\varphi}{\partial z} + \frac{\partial\eta}{\partial t} = 0 \quad \text{при } z = \eta(x, y, t), \quad (3.12)$$

следует из предположения, что частица жидкости, находившаяся в начальный момент времени на свободной поверхности, остается на ней в течение всего процесса.

Аналогичное кинематическое условие формулируется и на дне:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} \frac{\partial\tilde{H}}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y} \frac{\partial\tilde{H}}{\partial y} + \frac{\partial\varphi}{\partial z} + \frac{\partial\tilde{H}}{\partial t} = 0 \quad \text{при } z = -\tilde{H}(x, y, t). \quad (3.13)$$

Динамическое краевое условие на свободной поверхности формулируется исходя из того, что давление  $p$  сохраняет на ней постоянное значение, равное атмосферному:

$$p = p_a - \text{const} \quad \text{при } z = \eta(x, y, t). \quad (3.14)$$

Постоянная  $p_a$  может быть выбрана равной нулю без нарушения общности. Условие (3.14) является основным в теории волн и отличает задачи этого класса от других задач гидродинамики.

Так как рассматриваемое движение потенциальное, давление внутри жидкости может быть определено из интеграла Бернулли:

$$\frac{p}{\rho} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} - gZ - \frac{1}{2}|\bar{U}|^2 + f(t), \quad (3.15)$$

где  $\rho$  — плотность жидкости,  $f(t)$  — произвольная функция, которая может быть присоединена к функции  $\varphi(x, y, z, t)$ .

Записывая интеграл Бернулли в точках свободной поверхности жидкости, получим

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right] - g\eta = \text{const}, \quad (3.16)$$

где все производные от потенциала  $\varphi$  вычисляются на свободной поверхности  $z = \eta(x, y, t)$ .

В начальный момент времени задаются форма свободной поверхности:

$$\eta(x, y, 0) = \eta_0(x, y) \quad (3.17)$$

и начальное распределение потенциала скоростей:

$$\varphi(x, y, z, 0) = \varphi_0(x, y, z), \quad (3.18)$$

причем функция  $\varphi_0(x, y, z)$  должна удовлетворять уравнению Лапласа.

В переменных давление, компоненты скорости задача сводится к решению уравнений Эйлера:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} + W \frac{\partial U}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x},$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial t} + U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} + W \frac{\partial V}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}, \\ \frac{\partial W}{\partial t} + U \frac{\partial W}{\partial x} + V \frac{\partial W}{\partial y} + W \frac{\partial W}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g, \\ \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Для потенциальных безвихревых течений имеют место соотношения

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial V}{\partial x}, \quad \frac{\partial V}{\partial z} = \frac{\partial W}{\partial y}, \quad \frac{\partial U}{\partial z} = \frac{\partial W}{\partial x}. \quad (3.20)$$

Граничные условия записываются в виде

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + U \frac{\partial \eta}{\partial x} + V \frac{\partial \eta}{\partial y} - W = 0, \quad p = 0 \quad \text{при} \quad z = \eta(x, y, t), \quad (3.21)$$

$$U \frac{\partial \tilde{H}}{\partial x} + V \frac{\partial \tilde{H}}{\partial y} + W = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial t} \quad \text{при} \quad z = -\tilde{H}(x, y, t). \quad (3.22)$$

В начальный момент времени задаются распределения скоростей  $\bar{U}(x, y, z, 0) = \bar{U}_0(x, y, z)$  и положение свободной поверхности  $\eta(x, y, 0) = \eta_0(x, y)$ .

Сложность сформулированных задач связана с необходимостью удовлетворения нелинейным краевым условиям на неизвестной свободной поверхности.

Рассмотрим приближенную модель, описывающую распространение волн на поверхности жидкости, основанную на уравнениях теории мелкой воды. Вывод уравнений мелкой воды из точных уравнений гидродинамики осуществляется путем получения последовательных приближений при разложении всех величин по степеням малого параметра, равного отношению глубины водоема к длине распространяющейся волны. В случае удержания в уравнениях членов первого порядка малости относительно малого параметра получают уравнения

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{U}}{\partial t} + \bar{U} \cdot \text{grad} \bar{U} + \bar{g} \cdot \text{grad} \eta &= \bar{F}, \\ \frac{\partial \eta}{\partial t} + \text{div}((H + \eta)\bar{U}) &= 0. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Здесь  $\bar{U} = (U, V)$ ,  $\text{grad} = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right)$ ,  $\bar{F}$  — вектор, учитывающий силы Кариолиса, донного трения и напряжения ветра. Пренебрегая в системе уравнений (3.23) нелинейными членами  $\bar{U} \cdot \text{grad} \bar{U}$  и полагая, что высота волны  $\eta$  мала по сравнению с глубиной, приходим к линеаризованным уравнениям теории мелкой воды:

$$\frac{\partial \bar{U}}{\partial t} + g \cdot \text{grad} \eta = \bar{F}, \quad \frac{\partial \eta}{\partial t} + \text{div}(H \bar{U}) = 0. \quad (3.24)$$

В рамках моделей (3.23), (3.24) легко можно учесть движение дна водоема, записав соответствующие уравнения неразрывности в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial \eta}{\partial t} + \text{div}((H + \eta - B) \bar{U}) &= \frac{\partial B}{\partial t}, \\ \frac{\partial \eta}{\partial t} + \text{div}((H - B) \bar{U}) &= \frac{\partial B}{\partial t}, \end{aligned}$$

где функция  $B(x, y, t)$  описывает движение дна водоема.

Для линеаризованных уравнений мелкой воды скорость распространения фронта волны  $c = \sqrt{gH}$ . Используя процесс построения приближенных гидродинамических моделей, описывающих волновые процессы на свободной поверхности тяжелой жидкости, можно получить математические модели, учитывающие как нелинейные, так и дисперсионные эффекты. Такие модели называют нелинейно-дисперсионными. Простейшей моделью этого класса является уравнение Кортевега — де Вриза:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + (C_0 + C_1 \eta) \frac{\partial \eta}{\partial x} + \nu \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} = 0, \quad (3.25)$$

где  $C_0, C_1, \nu$  — постоянные. Одним из решений уравнения (3.25) является уединенная волна, состоящая из единственного горба и имеющая бесконечный период. Форма ее свободной поверхности и скорость распространения описываются соотношениями

$$\eta = \eta_0 \text{sec} h^2 \{ (C_1 \eta_0 / 12\nu)^{1/2} (x - Vt) \},$$

$$V = -(C_0 + \frac{1}{3} C_1 \eta_0).$$

Скорость распространения такой волны зависит от амплитуды  $\eta_0$ . Этот нелинейный эффект обеспечивается членом  $C_1 \eta \frac{\partial \eta}{\partial x}$ . Дисперсионные свойства решения зависят от величины слагаемого  $\nu \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3}$ . Для изучения влияния дисперсионных эффектов на характеристики волн цунами применяются различные модификации нелинейно-дисперсионных моделей.

При решении прикладных задач, связанных с распространением волны цунами в океане с реальным рельефом дна, используется численное моделирование.

### 3. Моделирование генерации волн цунами

Рассмотрим процесс генерации волн цунами в рамках одномерной нелинейной системы уравнений мелкой воды:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + g \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} [(H + \eta - B)U] = \frac{\partial B}{\partial t}. \quad (3.26)$$

Данный подход позволяет совместить процессы моделирования генерации и распространения волны цунами, учитывая при этом эффекты реальной батиметрии водоема, остаточных изменений рельефа дна и наложения последующих возмущений на распространяющуюся по океану волну. Сейсмические характеристики источника землетрясения оказывают влияние через функцию  $B(x, t)$ .

В последнее время из гидродинамических моделей, описывающих генерацию волн типа цунами, наиболее широко применяется модель потенциального течения тяжелой идеальной несжимаемой жидкости.

## § 3. Выход на берег и разрушение волн цунами

Когда волны цунами доходят до мелководья, скорость их резко уменьшается, одновременно возрастают амплитуды. Ограничение свободного пространства по бокам, например при входе цунами в узкие заливы и устья рек, приводит к еще большему возрастанию высоты волн.

Поведение волны при выходе на берег зависит от конкретных условий, в частности, важную роль играют соотношения между глубиной бассейна и длиной волны, между высотой волны и ее длиной. Именно здесь начинают проявляться нелинейные эффекты. Выделяют следующие характерные явления, наблюдаемые при выходе длинной волны на берег:

- 1) набегание на берег (затопление берега) без разрушения волны;
- 2) разрушение волны возле ее гребня с сохранением симметричной формы в целом;
- 3) полное разрушение волны, опрокидывание ее и образование бора ("прыжка").

Существует несколько подходов к решению задач такого рода. Применение полной модели гидродинамики вызывает большие трудности, связанные со свободными границами. При решении задач о движении воды широко применяются приближенные гидродинамические модели, получающиеся из полных уравнений гидродинамики с помощью ряда упрощающих предположений, которые вытекают из общих физических условий, наблюдаемых в данном классе задач.

При изучении вопросов, связанных с выходом волны на мелководье и берег, чаще всего используют нелинейную теорию мелкой воды. Рассмотрим одномерную постановку задачи о выходе волны на берег, осуществленную Дж. Стокером в 1948 г. Эта задача часто используется в качестве теста.

Одномерный вариант системы уравнений мелкой воды (3.23) имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{\partial \eta}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(U(\eta + H)) &= 0. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Предположим, что в начальный момент времени  $t = 0$  жидкость находилась в состоянии покоя:

$$U(x, 0) = \eta(x, 0) = 0. \quad (3.28)$$

На расстоянии  $X$  от берега в точке  $x = 0$  задано возмущение в виде поднятия уровня жидкости:

$$\eta(0, t) = \bar{\eta}(t). \quad (3.29)$$



Требуется определить движение воды при  $t > 0$ . Вначале рассмотрим частный случай задачи (3.27)–(3.29), когда возмущение задано в виде синусоиды

$$\eta(0, t) = \eta_0 \sin \omega t, \quad (3.30)$$

а дно имеет нулевой наклон, т. е.

$$H(x, t) \equiv H_0 = \text{const}. \quad (3.31)$$

В этом случае волна распространяется в покоящуюся жидкость постоянной глубины. Решение задачи (3.27), (3.30), (3.31) может быть получено методом характеристик в плоскости  $x, t$ . Волна, представляющая решение этой задачи, не непрерывна и в момент времени  $t^* = 2h_0/(3\omega\eta_0)$  в точке  $x^* = t^*\sqrt{gH_0}$  разрушается.

Если волна распространяется на побережье с уменьшающейся глубиной, то не существует семейства прямых характеристик и вычисления становятся намного труднее. Поэтому для решения задачи (3.27)–(3.29) обычно применяются приближенные методы конечных разностей. Опишем один из способов решения сформулированной задачи. Введением функции  $\Phi(x, t)$  такой, что

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = U, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial t} = gH - a^2 - \frac{1}{2} \frac{\partial \Phi}{\partial x} + M, \quad a^2 = g(\eta + H), \quad M = \text{const},$$

система уравнений (3.27) сводится к уравнению для потенциала скорости  $\Phi$ :

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + 2U \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial t} + (u^2 - a^2) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = g \frac{\partial H}{\partial x}. \quad (3.32)$$

Далее с помощью преобразования Лежандра  $\Psi = xu - \Phi + Mt$  уравнение (3.32) примет следующий вид:

$$\left[ a^2 - \left( u - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial u \partial t} \right)^2 \right] + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} \cdot \frac{\partial^2 \Psi}{\partial u^2} = -g \frac{\partial H}{\partial x} \Big|_{x=\Psi_u}, \quad (3.33)$$

где

$$a^2 = gH \Big|_{x=\Psi_u} + \frac{\partial \Psi}{\partial t} - \frac{1}{2} u^2, \quad \Psi_u = \frac{\partial \Psi}{\partial u}.$$

Решение уравнения (3.33) ищется в виде

$$\Psi(u, t) = \sum_{k=0}^{\infty} a^{(k)}(t) u^k,$$

т.е. используется метод представления решения нелинейных гиперболических уравнений в форме характеристических рядов. После нахождения по специальным формулам коэффициентов ряда определяют скорость течения  $u(x, t)$  и форму волны  $\eta(x, t)$ .

Если  $gH(x) = v(X - x)$ ,  $m = \text{const}$ , где  $X$  — расстояние места возмущения от берега,  $m$  — наклон берега, то можно найти время образования бора:

$$t^* = \frac{2mX}{3g\bar{\eta}_t^0} - \frac{m(mX)^{3/2}}{18(g\bar{\eta}_t^0)^2},$$

где  $\bar{\eta}_t^0 = \left. \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial t} \right|_{t=0}$ .

Уравнение (3.33) решается до момента образования бора. Затем, используя условия на разрыве, получают уравнение

$$\dot{x}^3 - u\dot{x}^2 - a\dot{x} + u\frac{a^2}{2} = 0, \quad (3.34)$$

где  $x = x(t)$  — пространственная координата волны; точка обозначает дифференцирование по  $t$ . Начальное условие для уравнения (3.34) следует из того факта, что разрыв происходит на характеристике при  $t = t^*$ ,  $x = x^*$ . Уравнение (3.34) решается численно. В результате вычислений определяются величины, характеризующие поведение бора при выходе на мелководье: местонахождение бора, скорость его распространения, скорость течения за волной, высота волны. Анализ результатов для возмущения вида  $\eta(t) = \eta_0 \sin \omega t$  показал, что чем больше мелководье, т.е. чем больше  $X$ , чем меньше наклон дна  $m$  и больше скорость подъема воды в точке возмущения  $\omega$ , тем больше высота волн, выходящих на берег.

Для исследования задачи, связанной с выходом волны цунами на мелководье и берег, используются численные методы решения нелинейной системы уравнений мелкой воды.

## § 4. Применение лучевой теории к задачам о распространении волн цунами

Для успешной защиты населения тех участков побережья, где опасность разрушений от волн цунами вполне реальна, необходимо как

можно более точно определить время прихода волны цунами от очага к побережью. Местоположение эпицентра подводного землетрясения с помощью сейсмографов устанавливается достаточно быстро. Затем возникает задача определения времени движения волны цунами от известного источника до интересующей точки на побережье при заданном распределении глубин океана.

В линейном приближении можно считать, что скорость фронта волны цунами не зависит от ее амплитуды и определяется по формуле Лагранжа:

$$c = \sqrt{gH}. \quad (3.35)$$

Некоторые особенности распространения волн цунами в акваториях с известной батиметрией можно обнаружить, рассматривая только кинематику этих волн.

Фронтом волны называют геометрическое место точек, в которое возмущения от рассматриваемого источника приходят в один и тот же момент времени.

Из-за зависимости скорости распространения фронта волны от глубины океана  $H$  волновые лучи, являющиеся линиями, ортогональными фронту цунами, вообще говоря, не будут прямыми линиями для переменной глубины акватории.

Рассмотрим следующую задачу: имеется прямоугольный участок прибрежной зоны океана  $ABCD$  (рис. 3.1) со сторонами длиной  $a$  и  $b$ . Точку  $A$ , находящуюся на берегу, будем считать началом декартовой системы координат  $(x, y)$ . Предположим, что глубина линейно увеличивается от стороны  $AD$  к стороне  $BC$  по закону

$$H(x, y) = \operatorname{tg}\alpha \cdot y, \quad H(B) = H(C) = a \operatorname{tg}\alpha = H_0, \quad H(A) = H(D) = 0,$$

где  $\alpha$  — угол наклона дна к горизонту.

Пусть в точке  $C$  в момент времени  $t = 0$  произошло цунамигенное землетрясение. Задача состоит в том, чтобы определить время, через которое волна достигнет точки  $A$ . Образовавшаяся в результате землетрясения волна цунами будет распространяться во всех направлениях, однако существует некоторая оптимальная траектория, по которой возмущение достигнет точки  $A$  за кратчайшее время. Именно эту траекторию необходимо найти, а также определить время распространения возмущения вдоль нее.

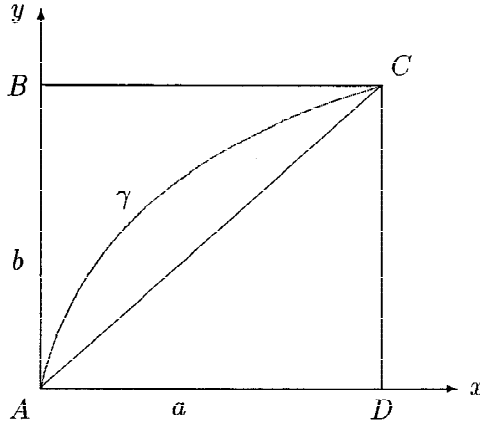


Рис. 3.1. Схема задачи о нахождении времени прихода волны цунами от очага до точки на берегу

Ввиду зависимости скорости распространения фронта волны от глубины оптимальная траектория не будет прямой линией, соединяющей точки  $C$  и  $A$ , а будет некоторая кривая, лежащая справа от диагонали  $AC$ , если двигаться от точки  $C$  к точке  $A$ , т.е. в области больших глубин (рис. 3.1). Время движения волны вдоль кривой  $\gamma$

$$T = \int_{\gamma} \frac{d\gamma}{\sqrt{gH}} = \int_{\gamma} \frac{\sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}}{\sqrt{g\tilde{y}t\alpha}} dx. \quad (3.36)$$

Для определения оптимальной траектории необходимо найти минимум интеграла (3.36) по всем возможным кривым  $\gamma$ , соединяющим точки  $C$  и  $A$ . Воспользуемся механической аналогией. Пусть имеются две точки  $A(0,0)$  и  $C(a,b)$ , расположенные на вертикальной плоскости  $(\tilde{x}, \tilde{y})$ , ось  $o\tilde{y}$  направлена вниз и совпадает с направлением действия силы тяжести (рис. 3.2).

Требуется найти такую кривую, соединяющую точки  $A$  и  $C$ , по которой шарик, скатываясь под действием силы тяжести из точки  $A$ , достигнет точки  $C$  за наименьшее время, причем шарик начинает движение из состояния покоя. В силу закона о сохранении энергии модуль скорости шарика будет выражаться формулой

$$V = \sqrt{2g\tilde{y}}.$$

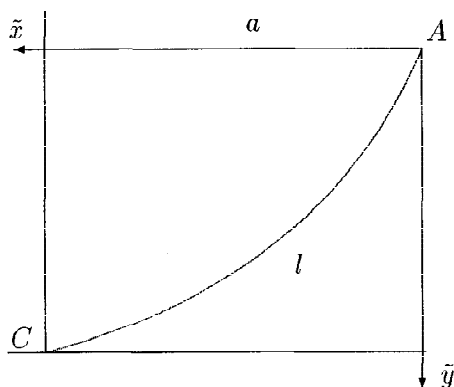


Рис. 3.2. Схема задачи о брахистохроне

В этом случае время движения шарика вдоль кривой  $l$ , соединяющей точки  $A$  и  $C$ , можно описать интегралом

$$T_1 = \int_l \frac{\sqrt{1 + (\tilde{y}')^2}}{\sqrt{2g\tilde{y}}} d\tilde{x}. \quad (3.37)$$

Сравнивая формулы (3.36) и (3.37), получаем, что времена  $T$  и  $T_1$  различаются на постоянный множитель, при этом  $T_1 = \sqrt{\frac{tg\alpha}{2}}T$ , т.е. во втором случае требуется минимизировать тот же интеграл, что и в задаче о распространении волн цунами.

Задача о скатывании шарика — это так называемая задача о брахистохроне, которая решается с помощью методов вариационного исчисления.

Решением этой задачи, т.е. оптимальной траекторией, будет циклоида, которая в параметрической форме записывается в виде

$$\begin{aligned} \tilde{x} &= c_1(t - \sin t), \\ \tilde{y} &= c_1(1 - \cos t), \end{aligned} \quad (3.38)$$

где радиус катящегося круга  $c_1$  определяется из условия прохождения циклоиды через точку  $(a, b)$ . В точке  $(a, b)$  параметр  $t$  принимает значение

$$t = t^* = \arccos\left(1 - \frac{b}{c_1}\right).$$

Далее, время движения шарика из точки  $A$  в точку  $C$  вдоль циклоиды выражается интегралом

$$\begin{aligned} T_1 &= \int_0^a \frac{\sqrt{1 + (\dot{y}')^2}}{\sqrt{2g\dot{y}}} d\bar{x} = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^{t^*} \frac{\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \frac{t}{2}}}{\sqrt{c_1/(1 + \operatorname{ctg}^2 \frac{t}{2})}} d\bar{x}(t) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^{t^*} \sqrt{c_1} dt = \frac{\sqrt{c_1}}{\sqrt{2g}} t^*. \end{aligned}$$

Если волна цунами распространяется в бассейне с наклонным дном, то вместо скорости  $\sqrt{2g\dot{y}}$  в интеграле будет стоять  $\sqrt{g \operatorname{tg} \alpha y}$ . Следовательно, для времени распространения волны цунами из точки  $C(a, b)$  в точку  $A(0, 0)$  будет справедливо выражение

$$T = \frac{\sqrt{c_1}}{\sqrt{g \operatorname{tg} \alpha}} \arccos \left( 1 - \frac{b}{c_1} \right), \quad (3.39)$$

где постоянная  $c_1$  определяется из условия прохождения циклоиды (3.38) через точку  $(a, b)$ . Для оптимальной траектории в виде циклоиды можно сделать некоторые качественные выводы. Если  $a/b > \pi/2$ , то оптимальная траектория не будет монотонно приближаться к берегу. Сначала она несколько отойдет от берега, а потом начнет приближаться к нему (рис. 3.3). Очевидно, что для двух произвольных точек в океане на участке с постоянным уклоном дна оптимальной траекторией, как и в случае с одной точкой на берегу, будет проходящая через эти две точки циклоида, поскольку при выводе формы оптимальной траектории не использовалось то обстоятельство, что одна точка находилась на берегу.

Можно показать, что в любой момент времени фронт волны будет ортогонален оптимальной траектории.

Вдоль каждого луча (оптимальной траектории) можно оценить изменение амплитуды волны, пользуясь понятием геометрического расхождения лучевой трубки. На расстоянии  $\Delta x$  от точки  $A$  рассмотрим еще одну точку на берегу —  $A_1$ . Найдём наряду с лучом, соединяющим  $C$  и  $A$ , оптимальную траекторию между точками  $C$  и  $A_1$ . Пусть лучи в точке  $C$  пересекаются под углом  $\Delta \varphi$ . Если на

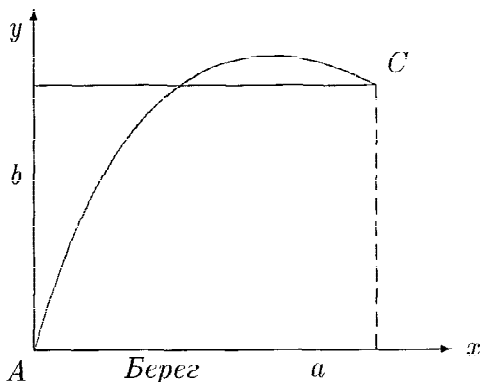


Рис. 3.3. Оптимальная траектория в случае  $a > b \frac{\pi}{2}$

расстоянии  $l$  от источника цунами (где фронт волны уже сформировался) волна имеет амплитуду 1 м, то вблизи точки  $A$  (на глубине  $H_A$ ) в силу закона Грина амплитуда цунами будет равна

$$\eta = \frac{\Delta\varphi \cdot l}{\Delta x} \sqrt[4]{\frac{H_0}{H_A}}, \quad (3.40)$$

где  $H_0$  — глубина в очаге  $C$ . Амплитуда пришедшей волны оценивается на некоторой конечной глубине  $H$ , т.к. на малых глубинах велики нелинейные эффекты и данная оценка будет неверной.

Можно рассмотреть иной подход к задаче нахождения лучей или оптимальных траекторий. Пусть в исследуемой области океана задано произвольное распределение глубин  $H = H(x, y)$ . Процесс распространения возмущений (в частности, волн) в изотропной среде описывается уравнением Эйконала:

$$|\Delta\tau| = \frac{1}{C^2(x, y)}, \quad (3.41)$$

где  $C(x, y)$  — скорость распространения волн в точке  $(x, y)$ ,  $\tau(x, y, M) = t$  — кривая фронта в момент времени  $t$ ,  $M(x_0, y_0)$  — источник возмущений.

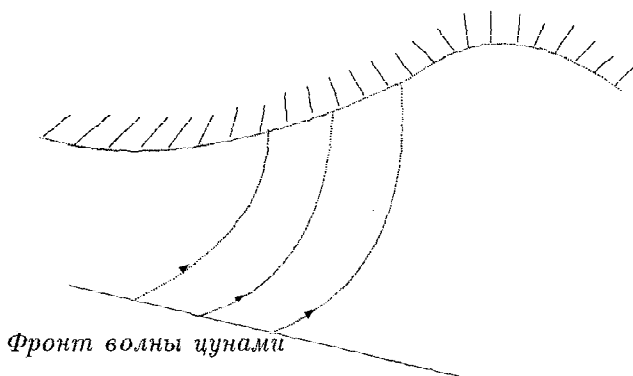


Рис. 3.4. Пример распространения лучей

Известно, что для нахождения траектории луча, выходящего из точки  $M$ , достаточно решить систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{d\bar{x}}{dt} \bar{P} \cdot C^2(x, y), \quad \frac{d\bar{P}}{dt} = \nabla \ln \left( \frac{1}{C(x, y)} \right), \quad (3.42)$$

где  $\bar{P} = \nabla \tau(x, y, M)$ ,  $\bar{x}$  — вектор с компонентами  $x, y$ .

Начальные условия:

$$\bar{x}|_{t=0} = (x_0, y_0), \quad \bar{P}|_{t=0} = \frac{\bar{v}_0}{C(x_0, y_0)}, \quad (3.43)$$

где  $\bar{v}_0$  — произвольный единичный вектор, задающий начальное направление выхода луча из точки  $M$ . Решая задачу (3.42), (3.43), находят  $\bar{x}, \bar{P}$  как функции  $t$  и параметров  $(x_0, y_0)$  и  $\bar{v}_0$ :

$$\bar{x} = \bar{f}_1(t, x_0, y_0, \bar{v}_0), \quad \bar{P} = \bar{f}_2(t, x_0, y_0, \bar{v}_0). \quad (3.44)$$

Наиболее простым методом численного решения задачи (3.42), (3.43) является метод Рунге — Кутты.

Если требуется построить лучи от точечного источника цунами, то в начальных условиях (3.43) изменяется вектор  $\bar{v}_0$ , задающий начальное направление выхода луча, а координаты  $x_0, y_0$  остаются неизменными.



Для построения волновых лучей, соответствующих плоской волне, в условиях (3.43) изменяются координаты точек выхода лучей  $(x_0, y_0)$ , единичный вектор  $\bar{y}_0$  остается постоянным.

На рис. 3.4 показан пример расчета лучей для плоской волны. Решая задачи (3.42), (3.43), можно построить сетку, состоящую из лучей и фронтов волны, по которой можно оценить время прихода волны цунами в различные пункты побережья.

## § 5. Расчет карт времен добегания волн цунами

Волны цунами относятся к наиболее опасным природным катастрофам. Во многих странах действуют национальные службы предупреждения цунами, призванные оповещать население о приближении волны и принимать необходимые меры для уменьшения ущерба.

Высокая скорость распространения цунами в океане, достигающая сотен километров в час, во многих случаях не позволяет прогнозировать эволюцию волны в реальном масштабе времени. Отсюда вытекает важность предварительного обеспечения работ по решению задач оперативного прогноза. Поскольку в линейном приближении время распространения длинных волн от источника к пункту наблюдения и обратно равно, возможен предварительный расчет карты времен добегания волн для конкретного пункта, принимаемого при этом за источник возмущения (обратные изохроны), и затем, при поступлении информации о происшедшем цунамигенном землетрясении, оценка времени прихода цунами в данный пункт по известному местоположению очага. Такие карты не несут информации о динамических характеристиках волны (амплитуде, периоде и т. д.).

Впервые Атлас карт обратных изохрон был изготовлен в 1947 г. для нескольких пунктов Тихоокеанского побережья Американской береговой службой после катастрофического Алеутского цунами в апреле 1946 г. В 1971 г. он был существенно пересмотрен и дополнен и активно использовался национальными службами предупреждения цунами. Вычислительным центром СО АН СССР (г. Красноярск) по контракту с МОК ЮНЕСКО были выполнены работы по рас-

чету карт времен добегаания волн цунами для ряда новых пунктов Тихоокеанского побережья.

Приведем краткий обзор методов расчета карт времен добегаания волн цунами. Все известные методы основаны на различных приближенных волновых теориях.

В ранних работах для определения скорости движения волны использовалось выражение

$$c^2 = (g\lambda/2\pi)\operatorname{tg}H(2\pi H/\lambda),$$

где  $\lambda$  — длина волны,  $c$  — скорость волны,  $H$  — глубина океана,  $g$  — ускорение свободного падения. Так как длины волн цунами составляют 300–400 км, а средняя глубина океана около 4 км, то при  $H \ll \lambda$  следует

$$c^2 = gH. \quad (3.45)$$

В качестве конкретного луча с траекторией  $S$  время распространения определяется формулой

$$\tau = \int \frac{dS}{c}.$$

В качестве траектории лучей рассматривались дуги больших кругов, соединяющих заданные точки.

Применение таких приближенных траекторий распространения волн не обеспечивало достаточную точность расчета временных характеристик. Позднее для расчета времен добегаания волн использовалось прямое интегрирование лучевого уравнения

$$\frac{d^2\gamma}{dt^2} + p\frac{d\gamma}{dS} + q\gamma = 0, \quad (3.46)$$

где

$$p = -\frac{\cos\alpha}{c} \frac{\partial c}{\partial x} - \frac{\sin\alpha}{c} \frac{\partial c}{\partial y}, \quad \gamma = \frac{l}{l_0},$$

$$q = -\frac{\sin^2\alpha}{c^2} \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} - \frac{2\sin\alpha \cos\alpha}{c^2} \frac{\partial^2 c}{\partial x \partial y} + \frac{\cos^2\alpha}{c^2} \frac{\partial^2 c}{\partial y^2},$$

$l$ ,  $l_0$  — ширина лучевой трубки в произвольной и начальных точках соответственно;  $S$  — траектория волнового луча;  $\alpha$  — угол наклона волнового луча к оси  $X$ ;  $x$ ,  $y$  — координаты;  $c$  — скорость распространения волн, определяемая по формуле (3.45).

Уравнение (3.46) решается либо методом Кельвина с аппроксимацией интегральной кривой фрагментами дуг большого круга, либо с помощью конечно-разностных методов.

Простейшие энергетические соотношения, определяющие соотношение энергии в лучевой трубке, позволяют вычислить высоту волны  $\xi$ :

$$\xi_2/\xi_1 = (c_1/c_2)^{1/2}(l_1/l_2)^{1/2}. \quad (3.47)$$

В областях, сложных по неоднородному расположению глубин, возникают особенности распространения возмущений (каустики, фокусы), в этих случаях формула (3.47) для расчета высот волн становится неприменимой.

Познакомимся с методом построения траекторий и фронтов распространения волн в неоднородных средах, названным *сеточной итерационной методикой*, в котором окончательный результат получается путем построения сходящейся последовательности взаимно ортогональных траекторий и фронтов.

Эта методика основана на минимизации функционала

$$T^* = \int_S \frac{dS}{c} \quad (3.48)$$

по всем возможным траекториям  $S$ , соединяющим заданные начальные и конечные точки.

В качестве начальных траекторий используются дуги большого круга, соединяющие источник с заданными точками на берегу. Далее по фиксированному временному интервалу на траекториях отмечаются точки с одинаковым временем добегания волны, соединение которых образует волновой фронт.

В методе используется сферическая система координат, начало смещается в источник и длина дуги определяется по формуле

$$dS = R[(\Delta\varphi)^2 + \cos^2\varphi_1(\Delta\psi)^2]^{1/2},$$

где  $R$  — радиус Земли,  $\varphi_1$  — широта,  $\psi_1$  — долгота текущей точки;  $\Delta\varphi$  и  $\Delta\psi$  — приращение широты и долготы соответственно.

Для уточнения траектории используется минимизация функционала (3.48). Затем выполняется уточнение волнового фронта по

заданному интервалу времени. Такой итерационный процесс повторяется до тех пор, пока построение сетки “траектория — фронт” не будет изменяться в пределах заданной точности. Преодоление особенностей распространения возмущений (каустики, фокусов) осуществляется с использованием алгоритма, по которому каждому узлу сетки ставится в соответствие время распространения волны от источника до этого узла и указывается непосредственно предшествующий по траектории узел. Основные недостатки метода связаны с его итерационной структурой, которая приводит к значительному росту требуемой памяти ЭВМ для хранения узлов сетки и всех ее характеристик, особенно при построении трансокеанских траекторий.

Отдельную группу методов расчета времен добегания составляют методы, использующие принцип Гюйгенса. В них по заданному пространственному интервалу определяется локальное время, необходимое волне для прохождения интервала. Существенной особенностью здесь является использование дискретной батиметрической информации и определение поля времен добегания в фиксированном наборе точек.

В процессе построения такого временного поля все узлы сетки разбиваются на три множества, в которых:

“1” — время добегания уже определено (и они исключаются из дальнейшего расчета);

“2” — получена предварительная оценка времени добегания;

“3” — время добегания еще не определено.

Вводится понятие “область влияния узла”, т.е. множества узлов, близких к рассматриваемому согласно некоторому критерию. Считается, что возмущение может прийти от заданного узла только до узлов из его области влияния.

Рассмотрим два узла, принадлежащих одной области влияния. Полагают, что сигнал распространяется по дуге большого круга со скоростью, равной среднему арифметическому локальных скоростей распространения в конечных узлах  $A$  и  $B$ , согласно формуле

$$T = 2L/(C_A + C_B),$$

в которой

$$L = R \arccos(\sin \varphi_A \sin \varphi_B + \cos \varphi_B + \cos \Delta \Psi),$$

$\varphi_A, \varphi_B$  — широты узлов  $A$  и  $B$  соответственно,  $\Delta\Psi$  — разность их долгот,  $C_A, C_B$  определяются по формуле (3.45).

Для уточнения времени добегания от источника до  $B$  используется минимизирующее соотношение

$$T_B^{n+1} = T_B^n + \min_A T_{A,B}, \quad (3.49)$$

где узлы  $A$  принадлежат области влияния узла  $B$ .

Вначале устанавливается принадлежность всех узлов источника возмущения множеству "2". На каждом шаге алгоритма из этого множества выбирается тот узел, время распространения до которого минимально, и он переводится в множество "1". Узлам множества "3", попавшим в область влияния множества "2", присваивается время, определенное по формуле (3.49), и они переходят в множество "2". После того как для всех узлов определено время распространения, можно, используя интерполяционные методики, по заданному временному интервалу построить волновые фронты.

Математическая модель для построения карт времен добегания, основанная на теории мелкой воды, при линеаризации сводится к уравнению Эйконала, описывающему временные характеристики распространения волн. Такой подход позволяет, оставаясь в рамках одной математической модели, определять траекторию луча и волновой фронт, не привлекая дополнительных гипотез, требующих специального обоснования.

Следует обращать внимание на различные способы обработки батиметрической информации, которые могут приводить к вариации времен добегания цунами порядка 3–5 минут на час распространения волны. Поэтому важное значение имеют интерполяционные или аппроксимационные процедуры, применяемые для вычисления глубин океана.

На основе описанных математических моделей разработаны численные алгоритмы и компьютерные программы для проведения вычислительных экспериментов в проблеме цунами.

## Глава 4

# Охрана и рациональное использование водных ресурсов

### § 1. О проблеме охраны водных ресурсов

Качество окружающей среды — одно из важных показателей жизненного уровня как социально-экономической категории. Без четкого представления о методах рационального использования водных ресурсов невозможно дальнейшее развитие промышленности, рыбного и сельского хозяйства. Комплексное освоение водных ресурсов требует тщательного и продолжительного изучения режимов рек, природных условий, влияния водохозяйственных мероприятий и возможных изменений режимов рек на отдельные отрасли народного хозяйства и окружающую среду.

Одна из важнейших проблем, которые ставит перед человечеством научно-технический прогресс, — проблема “чистой воды”. По оценкам ученых, через несколько десятилетий чистая пресная вода станет важнейшим ресурсом.

Вода занимает особое положение среди природных богатств Земли — она незаменима. К истощению водных ресурсов ведет не рост расходуемой воды, а ее загрязнение. Вредные примеси все чаще обнаруживаются в океане за сотни километров от берегов и основных

судоходных линий. Загрязнение воды представляет собой нередко чрезвычайно серьезную угрозу. Если поток поступающих в водоем загрязнений превышает способности экосистемы водоема к самоочищению, они накапливаются в донных отложениях, и негативные процессы усугубляются так называемым вторичным загрязнением.

Гидросфера объединяет все свободные воды, которые могут передвигаться под влиянием солнечной энергии и сил гравитации, переходить из одного состояния в другое. Вода Земли находится в непрерывном движении. Круговорот воды связывает воедино все части гидросферы, образуя в целом замкнутую систему: океан — атмосфера — суша.

Вода — своеобразный минерал, обеспечивающий существование живых организмов на Земле, входит в состав клеток и тканей любого животного и растения. Сложнейшие реакции в животных и растительных организмах могут протекать только в присутствии воды. Климат и погода на Земле во многом зависят и определяются наличием водных пространств и содержанием водяного пара в атмосфере. Вода необходима и для производства электроэнергии, и в промышленности, для последней характерен рост водоемких технологий.

Изучение водных ресурсов Земли в связи с непрерывным увеличением их потребления показало, что в ряде стран с развитой экономикой назрела угроза недостатка воды.

Причины истощения кроются не только в неравномерном распределении водных ресурсов, но и в том, что вода после ее использования загрязняется и не подвергается эффективной очистке.

Рассмотрим глобальные и региональные аспекты водной проблемы. Основной глобальной проблемой следует считать загрязнение воды. Мировой безвозвратный расход пресной воды — величина малая в масштабах планетного круговорота воды.

Региональные водохозяйственные проблемы значительно “старше” и сложнее глобальных. Запасы пресной воды распределены по поверхности Земли крайне неравномерно: в одних районах ее избыток, в других — острый дефицит. Как показывают известные исторические факты, влияние хозяйственной деятельности на водный режим, нерациональное ведение хозяйства приводило к высыханию рек

на больших территориях, к возникновению пустынь. Вода — один из немногих ресурсов, транспортировка которых в нужных количествах чрезвычайно трудна или невозможна, и поэтому региональные проблемы много острее глобальных.

Существует три основных аспекта региональных водохозяйственных проблем: увеличение безвозвратного потребления воды, загрязнение водоемов и искусственное перераспределение стока.

Загрязнение воды представляет собой нередко чрезвычайно серьезную угрозу. Очистка становится все более дорогостоящей и все менее надежной, в некоторых районах загрязненность водоемов препятствует развитию промышленности.

Как правило, в регионах, где водохозяйственные проблемы стоят остро, в той или иной степени имеют место и антропогенные загрязнения, и нарушение естественного режима водоемов, и безвозвратное изъятие воды.

Вода, как уже говорилось, занимает особое положение среди природных богатств Земли — она незаменима. Искрадут запасы металлов — быть может, удастся заменить их пластмассами; не хватит растительных и животных белков — научатся получать синтетические; даже вместо обычного воздуха пригодна в некоторых случаях искусственная смесь газов. Вода же будет необходима во все века и всюду, где существуют земные формы жизни.

Самый крупный водопотребитель в нашей стране — сельское хозяйство, на втором месте стоят промышленность и энергетика, на третьем — коммунальное хозяйство городов. Огромное количество воды рек и водохранилищ идет на орошение. Подсчитано, что только для производства суточной нормы пищевых продуктов в расчете на одного человека требуется не менее  $6 \text{ м}^3$  воды, много расходуется и животноводством.

Для промышленности вода столь же необходимый элемент, как уголь, медь, железо и другие природные ресурсы. Для выплавки 1 тонны стали требуется в сто с лишним раз больше воды. Если ежегодно мировое потребление минеральных ресурсов составляет 7–8 млрд. тонн, то воды расходуется 7–8 млрд. тонн ежесуточно.

В наши дни исключительно большое значение имеет вода как источник энергии. Изменение режима рек, вызванное строитель-



ством ГЭС, приводит к аккумулярованию воды в водохранилищах, что позволяет более рационально использовать водные ресурсы в различных отраслях народного хозяйства.

Большое влияние оказывают на окружающую среду тепловые сбросы атомных и тепловых электростанций (АЭС и ТЭС). Современные крупные теплоэлектростанции потребляют огромное количество воды. Только одна станция мощностью в 300 тыс. кВт. расходует до 120 м<sup>3</sup>/с. Тепловые сбросы атомных электростанций в окружающую среду, по сравнению с другими предприятиями, очень велики, поэтому разрабатываются такие системы охлаждения, которые оказывают минимальное экологическое воздействие на окружающую среду.

Особое место в использовании водных ресурсов занимает водопотребление для нужд населения. При этом обязательными являются бесперебойность водоснабжения, а также строгое соблюдение научно обоснованных санитарно-гигиенических нормативов. Потребление воды на душу населения в целом по стране составляет около 500 литров в сутки.

Большое значение имеют водные ресурсы для развития рыбного хозяйства.

Во второй половине XX в. перед человечеством встала проблема, которую не предвидели даже самые изобретательные фантасты: нехватка чистой питьевой воды. Естественно, острый дефицит испытывают прежде всего промышленно развитые страны, в которых антропогенная деятельность проявляется наиболее интенсивно и оказывает сильное воздействие на окружающий мир.

Кардинальное решение проблемы охраны и рационального использования воды предполагает непрременную перестройку технологии большинства промышленных предприятий таким образом, чтобы было сведено до минимума потребление свежей воды и использовалась она только в замкнутом цикле.

Перспективным методом вторичного использования отработанных вод является применение в сельском хозяйстве бытовых сточных вод и некоторых промышленных стоков (в первую очередь, содержащих такие необходимые элементы питания растений, как азот, фосфор, калий).

Для сохранения водных ресурсов планеты человеку предстоит ответить на множество различных вопросов. Решение этой проблемы должно опираться на комплексные исследования, учитывающие различные ее стороны: технико-экономические, технологические, социальные, политические и этические.

Основу для познания закономерностей процесса формирования гидрологического режима составляют непрерывные в течение длительного времени наблюдения на реках, озерах, водохранилищах, водотоках. Для изучения физических закономерностей водных объектов используется экспериментальный метод (лабораторные и натурные измерения).

При изучении распространения в природных средах таких загрязнителей антропогенного происхождения, как избыточное тепло или химические отходы тепловых электростанций, промышленных предприятий и сельского хозяйства, широко используются математические модели и численные (машинные) эксперименты на ЭВМ.

Распространение загрязняющих веществ в жидких средах определяется двумя процессами: конвективным переносом вследствие осредненного движения среды и диффузией за счет турбулентных пульсаций.

## **§ 2. Модели переноса и диффузии загрязнений в водоемах**

Рассмотрим математические модели переноса и диффузии промышленных выбросов. Перенос загрязняющих субстанций в жидкости осуществляется потоками воды с учетом мелкомасштабных флуктуаций. Осредненный поток субстанций, переносимых водными массами, имеет адвективную и конвективную составляющие, а их осредненные флуктуационные движения можно интерпретировать как диффузию на фоне основного осредненного движения.

В приближении сплошной среды уравнение, описывающее распространение загрязняющих веществ в водоемах, получается из закона сохранения непрерывных неоднородных сред. Закон сохранения для фиксированного объема формулируется следующим обра-

зом. Скорость изменения вещества в объеме  $\Omega$  равна сумме потоков через его границу  $\Gamma$  и внутренних источников:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \varphi d\Omega = \int_{\Gamma} (\varphi_{\kappa} + \varphi_m) d\Gamma + \int_{\Omega} (f - \sigma \varphi) d\Omega, \quad (4.1)$$

где  $\varphi(x, y, z, t)$  — интенсивность загрязняющей субстанции, мигрирующей вместе с потоком воды;  $f$  — внутренние источники вещества;  $\sigma \geq 0$  — коэффициент, характеризующий поглощение вещества вследствие распада или реакции с внешней средой;  $\varphi_m$  — поток вещества через границу за счет турбулентной диффузии;  $\varphi_{\kappa}$  — поток вещества, переносимый течением;  $\varphi_{\kappa}$  и  $\varphi_m$  определяются соотношениями

$$\begin{aligned} \varphi_{\kappa} &= -\varphi(\vec{V} \cdot \vec{n}), \\ \varphi_m &= -(\vec{q} \cdot \vec{n}). \end{aligned} \quad (4.2)$$

Здесь  $\vec{V} = (u, v, w)$  — вектор скорости движения воды,  $\vec{n}$  — внешняя нормаль к границе  $\Gamma$ ,  $q_x = -\mu \frac{\partial \varphi}{\partial x}$ ,  $q_y = -\mu \frac{\partial \varphi}{\partial y}$  — горизонтальные составляющие диффузионного потока,  $q_z = -\nu \frac{\partial \varphi}{\partial z}$  — вертикальная составляющая диффузионного потока,  $\mu \geq 0$ ,  $\nu \geq 0$  — соответственно горизонтальный и вертикальный коэффициенты диффузии, определяемые с помощью экспериментальных данных.

Для достаточно гладких функций уравнение (4.1) с учетом (4.2) равносильно дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \operatorname{div}(\varphi \vec{V}) + \sigma \varphi = D\varphi + f, \quad (4.3)$$

где

$$D\varphi = \frac{\partial}{\partial x} \mu \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \mu \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \nu \frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

В общем случае необходимо учитывать силы тяжести. Распространяясь в водоеме, загрязнения диффундируют и под действием силы тяжести опускаются на дно. Скорость такого опускания определяется решением задачи Стокса (о медленном стационарном обтекании шара вязкой жидкостью без учета инерционных членов в

уравнениях движения) и является величиной постоянной, направленной вниз. В уравнении переноса примесей появляется новое слагаемое  $w_g \frac{\partial \varphi}{\partial z}$ , где  $w_g$  — абсолютная величина вертикальной скорости частиц под действием силы тяжести. В этом случае уравнение переноса и диффузии вещества принимает вид

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial u \varphi}{\partial x} + \frac{\partial v \varphi}{\partial y} + \frac{\partial (w - w_g) \varphi}{\partial z} + \sigma \varphi = D \Delta \varphi + f \quad (4.4)$$

(ось  $z$  направлена вверх).

Для определения количества вещества, выпавшего на площади  $\Sigma$  за интервал времени  $0 \leq t \leq T$ , необходимо проинтегрировать уравнение (4.4) по  $z$  в пределах  $-H \leq z \leq 0$  ( $H$  — глубина водоема). Полагая  $\int_{-H}^0 \varphi dz = \hat{\varphi}$ ,  $\int_{-H}^0 f dz = F$  и считая  $u$  и  $v$  в рассматриваемой зоне не зависящими от  $z$ , получим уравнение

$$\frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial t} + \frac{\partial u \hat{\varphi}}{\partial x} + \frac{\partial v \hat{\varphi}}{\partial y} + \sigma \hat{\varphi} = \mu \Delta \hat{\varphi} - (w_g + \nu \alpha) \varphi_g + F, \quad (4.5)$$

где  $\varphi_g = \varphi|_{z=-H}$ ,  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ . При выводе (4.5) использовались условия

$$\begin{aligned} w &= 0 && \text{при } z = 0 \text{ и } z = -H, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial z} &= \alpha \varphi && \text{при } z = -H, \\ \varphi &\rightarrow 0 && \text{при } z \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Из уравнения (4.5) следует, что в единицу времени количество примесей в воде над точкой  $(x, y)$  уменьшается на величину  $(w_g + \nu \alpha) \varphi_g$ . При этом  $w_g \varphi_g$  — часть примесей, связанная с падением частиц под действием силы тяжести, а  $\nu \alpha \varphi_g$  — с турбулентным обменом в приграничной зоне около земной поверхности. Если  $w_g \ll \nu \alpha$ , то при решении задачи о количестве выпавших на некоторую поверхность  $\Sigma$  примесей можно в уравнении (4.4) пренебречь величиной  $w_g$ . Если  $w_g$  сравнима с величиной  $\nu \alpha$  или превосходит ее, то вместо уравнения (4.3) необходимо рассматривать уравнение (4.5).

### § 3. Тепловой баланс водных объектов

При решении многих гидрологических задач широкое использование находят законы сохранения энергии и материи, записанные в форме уравнений теплового и водного баланса, применительно к условиям водных объектов.

Использование уравнения теплового баланса позволяет решать задачи, относящиеся к области расчета нагревания и охлаждения воды в реках и озерах, таяния снега, испарения воды, нарастания льда, и выявлять закономерности развития ряда других важных гидрологических процессов, совершающихся под влиянием теплообмена между водными объектами и окружающей средой. При составлении уравнения теплового баланса (УТБ) необходимо учитывать все потоки тепла, поглощаемые водным объектом или расходуемые им через поверхности раздела, которые ограничивают его от окружающего пространства.

Различают два вида УТБ — поверхности и объема — и множество вариантов: в одном объеме и время бесконечно малы, в другом они конечны, в третьем — одна величина конечна, а другая бесконечно мала. В результате УТБ могут иметь форму алгебраических, дифференциальных, интегральных и смешанных уравнений.

В общем виде УТБ относительно объема может быть сформулировано следующим образом. Алгебраическая сумма тепловых потоков, поступающих в рассматриваемый объем всеми тремя способами теплопередачи, и теплового потока, действующего внутри объема, равна скорости изменения теплосодержания объема:

$$\iint_F (q_T + q_k + q_s) dF + \iiint_V q_v dV = \iiint_V c\rho \frac{\partial T}{\partial t} dV. \quad (4.6)$$

Здесь  $V$  — объем;  $F$  — поверхность, ограничивающая объем  $V$ ;  $t$  — время;  $T$  — температура;  $\rho$  — плотность;  $c$  — удельная теплоемкость;  $q_T$  — тепловой поток за счет теплопроводности;  $q_k$  — теплота за счет конвективной теплопроводности;  $q_s$  — интенсивность теплового излучения;  $q_v$  — мощность внутренних источников теплоты. Внутренними источниками могут быть скрытая теплота фазового перехода (при образовании льда), диссипация энергии при течении жидкости (переход части механической энергии в тепловую).

Если  $d\Omega$  — неподвижный элементарный параллелепипед с гранями  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$ , через которые протекает жидкость, то из уравнения (4.6) получается уравнение теплового баланса в виде

$$\begin{aligned}
 -c\rho \left( V_x \frac{\partial T}{\partial t} + V_y \frac{\partial T}{\partial y} + V_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda_x \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \\
 + \frac{\partial}{\partial y} \left( \lambda_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \lambda_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) + q_v = c\rho \frac{\partial T}{\partial t},
 \end{aligned}
 \tag{4.7}$$

где  $\lambda_x$ ,  $\lambda_y$ ,  $\lambda_z$  — коэффициенты теплопроводности по соответствующим направлениям,  $V_x$ ,  $V_y$ ,  $V_z$  — проекции вектора скорости.

Для изотропной среды коэффициенты  $\lambda_x = \lambda_y = \lambda_z = \lambda$ , тогда уравнение (4.7) в векторной форме примет вид

$$\rho c \left[ \frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) T \right] = \operatorname{div}(\lambda \nabla T) + q_v
 \tag{4.8}$$

или

$$\rho c \frac{dT}{dt} = \operatorname{div}(\lambda \nabla T) + q_v.
 \tag{4.8'}$$

Здесь  $\vec{V}$  — вектор скорости движения жидкости,  $\nabla$  — оператор Гамильтона,  $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla)$  — субстанциональная производная.

Вводя обозначение  $\alpha = \frac{\lambda}{\rho c}$ , называемое коэффициентом температуропроводности, для случая  $\lambda = \text{const}$  имеем уравнение теплового баланса:

$$\frac{dT}{dt} = \alpha \cdot \Delta T + \frac{q_v}{c\rho},
 \tag{4.9}$$

где  $\Delta$  — оператор Лапласа.

При решении практических задач, основываясь на исследованиях процесса переноса, принимают ряд допущений. Так, для определения температурного режима реки, как правило, считают, что перенос тепла происходит в основном в продольном направлении (по оси  $x$ ) и пренебрежимо мал в поперечном (по оси  $y$ ), а в вертикальном направлении перенос тепла идет в основном за счет теплопроводности. При этом принимают, что коэффициент теплопроводности может быть охарактеризован с достаточной для практики точностью

его средним значением ( $\lambda$ ) для всей толщи. В этом случае уравнение теплопроводности принимает вид

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\lambda}{c\rho} \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{q_v}{c\rho}. \quad (4.10)$$

Иногда проводят упрощение, пользуясь тем, что коэффициент теплопроводности велик, это позволяет принять  $\lambda = \infty$  и считать температуру по глубине одинаковой, тогда имеем

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial t} + u \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} = \frac{q_F}{\rho c}. \quad (4.11)$$

Здесь  $\bar{T}$  — средняя температура воды в сечении,  $q_F$  — теплообмен через границу с внешней средой.

Для определения теплового режима водохранилища УТБ используется в виде

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{c\rho} \frac{\partial}{\partial z} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right). \quad (4.12)$$

Обмен с ложем и атмосферой учитывается в виде граничных условий ( $z = 0$  на поверхности,  $z = -H$  — на дне водоема):

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=0} = S_{\text{пов}} \quad (4.13)$$

(при наличии ледяного покрова  $T|_{z=0} = 0$ );

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=-H} = S_{\text{дно}}, \quad \text{или} \quad T|_{z=-H} = T_{\text{дно}}, \quad (4.14)$$

где  $S_{\text{пов}}$  — потери (или приток) тепла с водной поверхности,  $S_{\text{дно}}$  — теплообмен с ложем.

Полученные дифференциальные уравнения описывают целый класс явлений теплопроводности. Для полного математического описания конкретного процесса необходимо задать условия однозначности.

Условия однозначности включают в себя:

— геометрические условия, характеризующие форму и размеры тела;

- физические условия, характеризующие физические свойства среды и тела, распределения внутренних источников теплоты;
- начальные условия;
- граничные условия, характеризующие взаимодействие рассматриваемого тела с окружающей средой.

Начальные условия необходимы при рассмотрении нестационарных процессов и состоят в задании закона распределения температуры внутри тела (по толщине слоя воды, например) в начальный момент времени.

Граничные условия могут быть заданы несколькими способами.

*Граничные условия первого рода.* Задается распределение температуры на поверхности тела (или на поверхности, ограничивающей рассматриваемый объем) для каждого момента времени:

$$T_c = f(x, y, z, t),$$

где  $T_c$  — температура на поверхности тела,  $x, y, z$  — координаты поверхности тела.

*Граничные условия второго рода.* Задаются значения теплового потока для каждой точки поверхности тела и любого момента времени:

$$q_n = f(x, y, z, t),$$

здесь  $q_n$  — плотность теплового потока на поверхности тела,  $x, y, z$  — координаты поверхности тела.

*Граничные условия третьего рода.* Задаются температура окружающей среды  $T_{ж}$  и закон теплообмена между поверхностью тела и окружающей средой. Для описания процесса теплообмена между поверхностью тела и средой используется закон Ньютона — Рихмана. Согласно этому закону количество теплоты, отдаваемое единицей поверхности тела в единицу времени, пропорционально разности температур поверхности тела  $T_n$  и окружающей среды  $T_c$ :

$$q = \alpha(T_n - T_c),$$

здесь  $\alpha$  — коэффициент теплоотдачи.

Согласно закону сохранения энергии количество теплоты, которое отводится с единицы поверхности в единицу времени вследствие



теплоотдачи, должно равняться количеству теплоты, подводимому к единице поверхности в единицу времени вследствие теплопроводности из внутренних объемов тела:

$$\alpha(T_n - T_c) = -\lambda \left( \frac{\partial T}{\partial n} \right)_c,$$

где  $n$  — нормаль к поверхности тела, индекс  $n$  означает, что температура и градиент относятся к поверхности тела.

Иногда невозможно задать ни одно из перечисленных граничных условий, и тогда приходится решать сопряженную задачу. При решении таких задач должны выполняться условия равенства температур и тепловых потоков по обе стороны от границы раздела. В общем случае условия сопряженности можно записать как

$$\lambda_1 \left( \frac{\partial T_1}{\partial n} \right)_\Gamma = \lambda_2 \left( \frac{\partial T_2}{\partial n} \right)_\Gamma + q_v(x_\Gamma, y_\Gamma, z_\Gamma, t),$$

здесь  $q_v(x_\Gamma, y_\Gamma, z_\Gamma, t)$  — источники теплоты на поверхности границы,  $T_1, T_2, \lambda_1, \lambda_2$  — соответственно температуры и коэффициенты теплопроводности соприкасающихся сред,  $x_\Gamma, y_\Gamma, z_\Gamma$  — координаты поверхности раздела сред.

Дифференциальное уравнение теплового баланса и заданные условия однозначности дают полную математическую формулировку краевой задачи теплопроводности. Поставленная задача решается аналитическими или численными методами.

## § 4. Водный баланс

Метод водного баланса основан на следующем законе сохранения: для любого объема пространства, ограниченного некоторой произвольной поверхностью, количество, вошедшее внутрь этого объема, за вычетом количества воды, вышедшего наружу, должно равняться увеличению (или уменьшению) количества ее внутри данного объема. Это равенство справедливо для любого промежутка времени и для любого произвольно взятого пространства, ограниченного замкнутой поверхностью.

Водный баланс речного водосбора отражает основные с точки зрения гидрологии звенья процесса круговорота воды в природе. С

помощью метода водного баланса представляется возможным производить сопоставление отдельных источников поступления влаги в различные периоды времени в пределы изучаемой территории и устанавливать степень их влияния на общий ход формирования водного режима изучаемого объекта.

Рассмотрим составление уравнения водного баланса для произвольно взятой части земной поверхности. Контур, ограничивающий рассматриваемую часть земной поверхности, в общем случае пересекает входящие и выходящие водотоки. Через этот контур мысленно проведем вертикальную поверхность, которая будет боковой поверхностью выделенного объема. Эту боковую поверхность продолжим до горизонта, ниже которого воды не проникают (например, до водонепроницаемого слоя).

Приходную часть баланса влаги в рассматриваемом объеме будут составлять:

- осадки  $x$ , выпавшие за рассматриваемый период времени на поверхность выделенного объема;
- количество влаги  $z_1$ , конденсирующейся в почве и на ее поверхности;
- количество воды  $w_1$ , поступившей путем подземного притока;
- количество воды  $y_1$ , поступившей на данную площадь через поверхностные водотоки (руслый и склоновый сток).

Расход влаги из рассматриваемого объема может осуществляться следующими путями:

- испарением  $z_2$  с поверхности воды, снега, почвы, растительного покрова;
- оттоком воды  $w_2$  путем подземного стока;
- стеканием воды  $y_2$  поверхностными водотоками (руслый и склоновый сток);
- использованием воды в народном хозяйстве  $v_2$  (безвозвратное использование).

Пусть  $u$  — изменение запасов влаги в бассейне. Все величины, входящие в уравнение баланса, обычно выражают не в виде объема, а в виде слоя, т. е. объема, поделенного на площадь рассматриваемой территории.

В соответствии с принятыми обозначениями общее уравнение баланса влаги для произвольного контура и произвольного промежутка времени запишется в виде

$$u = x + y_1 + z_1 + w_1 - z_2 - y_2 - w_2 - v_2. \quad (4.15)$$

Если рассматривается речной бассейн, для которого можно точно провести линию водораздела, то в этом случае замкнутую линию водосбора будет пересекать только один вытекающий водоток ( $y_1 = 0$ ). Величина  $w = w_2 - w_1$ , полученная от деления на площадь водозабора разности подземного притока и оттока, совершающихся по периметру контура, убывает для подобных фигур с возрастанием их размеров, т.е. при прочих равных условиях член  $w$  будет тем меньше, чем больше площадь бассейна. Поэтому для достаточно большого бассейна в уравнении водного баланса можно пренебречь членом  $w$ , а также  $v_2$ . Применительно к этому случаю уравнение (4.15) упрощается:

$$u = x - y_2 - z,$$

здесь  $z = (z_2 - z_1)$  — испарение за вычетом конденсации.

Рассмотрим теперь не произвольный период времени, а гидрологический год, под которым понимается такой годичный период, в течение которого завершается цикл накопления и расходования влаги на поверхности бассейна. В этот цикл необходимо включить периоды накопления снега, снеготаяния и половодья, интенсивных дождей и по возможности стока этих дождевых вод. Теоретически начало гидрологического года различно для каждой климатической зоны и даже для каждого года в зависимости от гидрологической и метеорологической обстановки, что приводит к значительному усложнению расчетов. Поэтому обработка гидрологических и метеорологических данных в пределах гидрологического года производится главным образом при исследовании специальных вопросов и при научных разработках.

Следовательно, в уравнении водного баланса для гидрологического года член  $u$  будет означать накопление или расходование подземных вод. Знак  $u$  будет меняться в разные годы, так как в засушливые годы часть подземных вод будет расходоваться на сток

и испарение, а во влажные, наоборот, часть осадков пойдет на пополнение запасов подземных вод. Поэтому применительно к многолетнему периоду, включающему в себя и засушливые и влажные годы, можно написать

$$\bar{x} = \bar{y} + \bar{z}, \quad (4.16)$$

так как в пределе (при достаточно большом числе лет  $n$ )  $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n u_i$  будет стремиться к нулю.

В уравнении (4.16)  $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum x$  — среднее многолетнее значение (норма) осадков,  $\bar{y} = \frac{1}{n} \sum y_2$  — норма стока,  $\bar{z} = \frac{1}{n} \sum z$  — норма испарения.

Применительно к бессточному бассейну, например к бассейну озера ( $\bar{y} = 0$ ), уравнение баланса для многолетнего периода примет следующий простой вид:

$$\bar{x} = \bar{z},$$

т. е. для бессточного бассейна осадки за многолетний период равны испарению.

Рассмотрим каждый из составляющих членов уравнения баланса влаги речного бассейна в общем виде. Измерение осадков менее сложно по сравнению с другими элементами водного баланса, распределение их по земной поверхности изучено наиболее подробно. Количество осадков оценивается толщиной слоя воды (в миллиметрах), выпавшей на горизонтальную поверхность. Количество твердых осадков (снега) также измеряется толщиной слоя воды, получающегося после их таяния. На формирование осадков наиболее существенное влияние оказывает рельеф, в меньшей степени — растительность и водная поверхность. Зимой влияние рельефа более существенно, чем летом, так как облака зимой образуются на меньшей высоте. Необходимо учитывать характер выпадения осадков. При интенсивных дождях вода не успевает просачиваться в почву и бурными потоками стекает в речную сеть. Наоборот, при малоинтенсивных, но длительных дождях создаются более благоприятные условия для пополнения запасов грунтовых вод.

Роль конденсаций как дополнительного фактора, способствующего увеличению запасов влаги, обычно невелика по сравнению с общим объемом влаги в уравнении водного баланса.

Непосредственное измерение расхода воды на испарение, происходящее с поверхности воды, снега и льда, почвы и растений, затруднено. Обычно оценка этой составляющей водного баланса производится расчетным путем.

Сток  $u$  может быть измерен приемами гидрометрии сравнительно точно.

Подземный водообмен через контур  $w$  обычно не учитывается, во первых, ввиду его незначительной величины (особенно для больших территорий) по сравнению с остальными составляющими водного баланса, во-вторых, из-за чрезвычайной сложности его определения.

Изменение запасов влаги  $u$  в пределах рассматриваемого объема складывается из изменения запасов поверхностных и подземных вод. Изменение запасов поверхностных вод может быть учтено приближенно по данным наблюдений за уровнем озер, рек, прудов, снегомерных съемок. Вопрос о колебаниях запасов подземных вод и влажности почво-грунтов точной количественной оценке для достаточно крупных водосборов не поддается. Расходы на хозяйственную деятельность обычно не учитываются.

Количество возможных для использования ресурсов поверхностных и подземных вод, потребности в воде населения и всех отраслей народного хозяйства в пределах какой-либо территории, экономического района или населенного пункта выражают обычно в форме водохозяйственного баланса.

## § 5. Имитационная система "Азовское море"

### 1. Экологический очерк Азовского моря

В бассейне Азовского моря сложился развитый индустриально-аграрный комплекс. На его территории сосредоточена 1/3 общесоюзных запасов железных руд, запасы углей составляют 17% общесоюзных; запасы газа оцениваются в 10% от общих запасов страны. Регион обладает развитой промышленностью и является крупным сельскохозяйственным районом страны. В производство электроэнергии основной вклад вносит теплоэнергетика.

Рассматриваемый регион включает в себя уникальное солонатоводное Азовское море, вся акватория которого освоена в рыбохо-

зяйственном отношении. Основными потребителями водных ресурсов являются: 1) сельское хозяйство, 2) промышленность, теплоэнергетика и коммунальное хозяйство, 3) рыбное хозяйство, 4) население (для обеспечения условий жизни населения требуются большие объемы качественной пресной воды).

При моделировании экосистемы моря в целом учитываются 20 видов фитопланктона, 8 видов зоопланктона, 8 видов бентоса, 16 видов рыб (составляющих основную часть биомассы водоема).

Интенсивность процессов в экосистеме зависит от факторов внешней среды: температурного режима, ветров, солнечной активности, осадков, испарения и др.

Один из важных моментов — водообмен между различными частями моря и связанное с ним перераспределение растворенных и взвешенных в воде веществ и организмов.

Определяющую роль среди абиотических компонентов экосистемы для многих процессов играет растворенный кислород. В последние годы кислородный режим значительно ухудшился.

**Биогенные элементы.** Концентрация в море азот- и фосфорсодержащих соединений регулируется как соотношением их балансовых компонентов, так и кинетикой внутреннего кругооборота. Важной статьей баланса является и водообмен с Черным морем.

**Качество вод.** Химическое загрязнение вод Азовского моря оказывает существенное отрицательное воздействие на экосистему моря. Наиболее распространенные компоненты загрязнения — нефтепродукты, фенольные соединения, детергенты и пестициды.

За последние годы осуществлен ряд водоохраных мероприятий на предприятиях и в населенных пунктах, расположенных на побережье моря.

**Фитопланктон** Азовского моря — основной производитель органического вещества. Он во многом определяет состояние кормовой базы и, следовательно, условия обитания промысловых рыб. В море выделяют два основных комплекса водорослей: холодноводный и тепловодный. В течение года в связи с колебанием температуры воды наблюдается преобладание одного из представителей этих двух типов. Значительные колебания биомассы фитопланктона обусловлены разной реакцией ведущих типов фитопланктона на изменение

основных факторов среды: освещенности, температуры, солености и концентрации биогеносодержащих соединений в воде.

**Зоопланктон** Азовского моря насчитывает 185 видов, относящихся к морским, солоноватоводным реликтовым и пресноводным комплексам. Основная доля биомассы зоопланктона приходится на 2–3 доминирующих вида в каждый сезон. Для моделирования целесообразно выделить три возрастные стадии в развитии зоопланктонных организмов, так как процессы в различных возрастных группах протекают с неодинаковой интенсивностью. С термическим режимом водоема связаны сроки пребывания зоопланктонных организмов в различных возрастных группах, а также интенсивность размножения. Важную роль в изменении биомассы зоопланктона играет процесс питания. Основу питания зоопланктона составляют фитопланктон и детрит. Количество корма, потребляемого зоопланктоном, рассчитывается на основании данных о количестве энергии, необходимой для покрытия затрат на энергетический обмен и на образование новой биомассы как за счет роста организма, так и за счет размножения.

**Бентос.** В Азовском море насчитывается до 180 видов зообентоса. Основными экологическими факторами, обуславливающими распространение данной фауны и учитываемыми в модели, являются: 1) соленость воды; 2) кислородный режим; 3) состояние грунта; 4) степень обеспеченности пищей; 5) температурный режим.

**Рыбные популяции.** В Азовском море обитает 104 вида рыб. При исследовании принята следующая схема: часть популяций моделируется индивидуально, другая — объединяется в один блок для более грубого моделирования. Перечислим основные рыбные популяции Азовского моря:

бычок-кругляк — типичный представитель солоноватоводного комплекса;

хамса — одна из наиболее многочисленных рыб, уступающая по численности только тюльке;

тюлька — самый многочисленный вид рыб, основной потребитель зоопланктона моря;

судак — наиболее массовый хищник;

осетровые — наиболее ценные промысловые рыбы — представлены тремя видами: белугой, севрюгой и осетром;

лещ — ценный и массовый бентофаг;

тарань — одна из важнейших промысловых рыб Азовского бассейна.

**Прочие рыбы.** Из множества видов рыб Азовского моря выбраны 8 популяций — пять видов, зимующих в Черном море, и три вида, живущих постоянно в Азовском: атерина, трехиглая колюшка, черноморско-азовская проходная сельдь, азовский пузанок, султанка, перкарина, бычок-сирман, бычок Книповича.

## 2. Общее описание имитационной системы “Азовское море”

В основу построения имитационной системы “Азовское море” (ИСАМ) положен длительный диалог “математик—естественник”, в ходе которого проводилась подробная дискуссия о выборе процессов, подлежащих моделированию, компонентов вектора состояния, участков однородности экосистемы, формировались экспертные оценки многих параметров модели. Подробное описание системы приводится в работе “Рациональное использование водных ресурсов бассейна Азовского моря. Математические модели” ( М., 1981).

В ИСАМ Азовское море разделено на 7 районов. Это деление обусловлено существенными различиями химико-биологических характеристик указанных районов, а также относительной однородностью их внутри отдельного района. Состояние экосистемы в каждом районе характеризуется вектором состояния, компоненты которого, называемые ингредиентами, представляют собой концентрации различных веществ в воде, биомассы популяций. Предполагается, что внутри каждого района имеет место однородность по всем характеристикам.

Ингредиенты изменяются в процессах с течением времени, принятого дискретным и меняющегося в ИС с шагом в 5 суток. Как правило, каждый процесс воздействует на сравнительно малое число параметров. С другой стороны, можно указать такие группы ингредиентов, в которых происходящие с ними процессы обладают определенными общими чертами. Эти соображения подсказывают естественное разбиение ИС на блоки. Размер вектора состояния рай-



она равен 151. Фактически используется 120 компонентов. Остальные, резервные, позволяют при дальнейшем совершенствовании ИС включать новые ингредиенты, не учитываемые ранее.

Моделируемые в блоках процессы происходят разными способами, с разной интенсивностью в зависимости от внешних факторов. Система состоит из 16 блоков. Рассмотрим моделируемые в них процессы.

I. Блок "Внешние факторы". Процессы в экосистеме в конечном счете определяются внешними по отношению к ней факторами. На каждом такте работы ИС этот блок выдает на ближайшую пятитидневку значения трех групп факторов, учитываемых в ИС:

- климатообусловленных (ветер, осадки, температура воды, интенсивность солнечной радиации, объем испарения, поступление азота и фосфора);
- гидрометеорологических, испытывающих антропогенное влияние (сток рек, минерализация речных вод);
- оперативного управления (планы по вылову рыбы и выпуску в море молоди, параметры регулирования водообмена через Керченский пролив).

Этот блок извлекает требуемую информацию из банка данных, выполняет ее обработку в зависимости от выбранного режима и обеспечивает все блоки ИС информацией о факторах внешней среды, в частности, через блок вводится задание режима управляющих воздействий.

Данный блок может работать в нескольких режимах. При ретроспективном анализе он выдает фактические значения параметров, наблюдавшиеся в действительности. Эти величины либо измерены непосредственно, либо вычислены на основании таких измерений. В этом случае работа блока заключается в выдаче на каждом шаге необходимой информации, хранящейся в специальном банке данных ИС. Во втором режиме работы — при проведении прогнозных расчетов — используется комплекс программ, с помощью которых в блоке производится прогноз климатообусловленных факторов, связанных с антропогенным воздействием. Другая часть факторов антропогенного воздействия задается непосредственно на основе планируемых мероприятий. Прогнозирование климатообусловленных фак-

торов осуществляется с использованием процедур прогнозирования временных рядов.

Анализ динамики экосистемы и сравнительная оценка разных водохозяйственных мероприятий могут быть произведены и без точного прогнозирования климатообусловленных факторов. Для этого могут быть использованы методы вариантного прогноза, что также предусмотрено структурой блока.

Факторы второй и третьей группы моделируются с использованием как процедур прогнозирования, так и задания фактических величин или алгоритмов управления.

Таким образом, блок “Внешние факторы” содержит информацию об основных параметрах настройки экосистемы, осуществляет их обработку и передачу в другие блоки ИС.

II. Блок “Динамика вод” предназначен для описания процесса переноса растворенных и взвешенных в воде ингредиентов и изменения их концентраций в различных районах моря.

Входами блока являются скорость и направление ветра, а также величины стока рек Дона и Кубани. По заданным внешним условиям вычисляются объемы воды, в соответствующую пятидневку перетекающие между районами моря.

Объемы районов моря определяются по следующим формулам:

$$V_i(t+1) = V_{i0} + \Delta H_i(t+1) \cdot S_i, \quad (4.17)$$

где  $V_i(t+1)$  — объем  $i$ -го района в момент времени  $t+1$ ,  $V_{i0}$  — объем  $i$ -го района при горизонтальном расположении поверхности моря,  $\Delta H_i(t+1)$  — изменение глубины  $i$ -го района, вызванное ветровой деятельностью,  $S_i$  — площадь  $i$ -го района. В этой части алгоритма учитывается систематическое преобладание испарения с поверхности моря над осадками. Средняя за пятидневку величина этого превышения характеризует уменьшение объема моря, связанное с испарением. Она делится пропорционально площадям поверхностей районов и вычитается из объемов каждого из них.

Следующий шаг работы блока состоит в вычислении величин  $V_{ij}(t+1)$  — объемов воды, перетекающих из  $i$ -го района в  $j$ -й в

$(t+1)$ -й период. При этом  $V_{ij} = 0$  в том случае, если  $i$ -й и  $j$ -й районы не имеют общей границы. Предполагается, что

$$V_{ij} = V_{ij}^{(1)} + V_{ij}^{(2)}. \quad (4.18)$$

Составляющая  $V_{ij}^{(1)}$  характеризует постоянный водообмен между соседними районами, связанный лишь с хаотическим движением молекул воды и взаимопроникновением водных масс на границе районов и зависящий от скорости ветра.

Второе слагаемое  $V_{ij}^{(2)}$  — это величина перетока из  $i$ -го района в  $j$  й, обусловленная стоками рек и тем, что объем каждого из районов в момент  $t+1$  должен равняться вычисленному ранее значению  $V_i(t+1)$ . При расчете  $V_{ij}^{(2)}$  используются простые балансовые соотношения.

Заключительный этап работы блока — вычисление концентраций рассматриваемых веществ. При этом используются все те же балансовые соотношения с учетом вычисленных значений  $V_i$  и  $V_{ij}$ .

В работе блока используется много параметров, значения которых не измеряются непосредственно. Их величины подбираются так, чтобы при многократной работе блока на известном материале результаты расчетов давали наименьшее расхождение с наблюдавшимися ранее концентрациями этих веществ по районам моря. Идентификация была проведена по результатам измерений солености отдельных районов Азовского моря. Проверка работы блока по независимому ряду наблюдений показала хорошее совпадение расчетных и фактических значений солености.

Блочная структура ИСАМ дает возможность и верифицировать отдельно каждый блок и, в случае необходимости, заменять его другими блоками, имеющими те же входы и выходы.

III. Блок "Кислород". В этом блоке моделируются обогащение воды кислородом при фотосинтезе и атмосферной аэрации, распределение растворенного кислорода между поверхностными и придонными слоями, потребление его при биохимических процессах.

Поскольку в пределах одного района моря могут существовать участки, различающиеся по содержанию растворенного кислорода, оказалось целесообразным провести более тонкое районирование — разбиение ряда районов на секции. Значения концентраций кисло-

рода в придонных и поверхностных слоях секций определяются отдельно. При моделировании были приняты следующие допущения:

- вертикальный турбулентный обмен между слоями и аэрация поверхностного слоя много более существенны в насыщении воды кислородом, чем горизонтальный обмен объемами воды между секциями;

- основным для обогащения кислородом придонного слоя считается турбулентный обмен между верхним и нижним слоями;

- перепады температуры и солености между поверхностным и придонным слоями не учитываются, так как они незначительно влияют на перепады концентраций кислорода;

- фотосинтетическая аэрация придонного слоя не рассматривается ввиду ее малости;

- расход кислорода на дыхание всех биологических форм, кроме бентоса, не учитывается из-за его малости по сравнению с другими составляющими кислородного баланса.

Для моделирования динамики кислорода использованы дифференциальные уравнения первого порядка.

IV. Блок “Биогенные элементы” описывает круговорот в ИС соединений азота и фосфора с учетом процессов распада, переноса, изъятия, потребления и абразии берегов.

Концентрация в море азото- и фосфоросодержащих соединений регулируется одновременно как соответствующими соотношениями их балансовых компонентов, так и кинетикой внутренних круговоротов. Определенные компоненты, относящиеся к азотосодержащим соединениям, на следующем временном шаге осуществляется в виде трех последовательных процессов:

- изменения компонентов вследствие поступления азота из окружающей среды;

- превращения одних форм азота в другие (биохимические процессы превращения форм азота рассматриваются как процессы химической кинетики, поэтому используются принятые в описании химических процессов обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка);

- оседания азотосодержащих соединений на дно (из-за малой изученности вопроса моделируется простейшим образом: считается,

что при концентрации азота в придонном слое равной или меньшей 4 мг/л оседание не происходит, а при большей 4 мг/л происходит равномерное оседание).

Структура моделей динамики фосфоросодержащих соединений аналогична структуре азотосодержащих.

Влияние других биогенных элементов (например железа) на экосистемы Азовского моря изучено еще недостаточно; возможно, в будущем динамика некоторых из них будет моделироваться.

V. Блок "Качество вод" определяет изменения в концентрациях загрязняющих веществ за пятидневку с учетом распада и поступления новых порций этих веществ. В результате хозяйственной деятельности в воды моря попадают загрязнители, воздействующие на экосистему. Загрязнители, присутствующие в воде, можно разделить на две группы: консервативные и неконсервативные. Концентрация консервативных уменьшается в основном из-за разбавления и седиментации. Концентрация неконсервативных, помимо разбавления, уменьшается за счет одного или нескольких из следующих процессов: 1) химических реакций, 2) адсорбции и седиментации, 3) биохимических превращений, 4) радиоактивного распада.

Учитывая большое количество типов загрязняющих веществ, поступающих в море, их объединяют в группы. В блоке рассматриваются четыре группы: фенолы, пестициды, детергенты, нефтепродукты.

В основу моделирующего алгоритма положен баланс загрязняющих веществ в каждом районе моря за один шаг работы модели.

Изменения концентраций этих веществ происходят вследствие перечисленных процессов.

#### *Моделирование кормовой базы иктиофауны*

VI. Блок "Фитопланктон". Важным при моделировании динамики фитопланктона является выбор видов, которые учитываются в модели. Разработаны два режима функционирования блока. В первом, более простом, в каждом районе прослеживается динамика 20 видов. Во втором режиме на расчетном шаге для каждого района из всего списка рассматриваемых видов выбирается 10, являющихся при данных внешних условиях доминантами, и прослеживается их динамика.

VII. Блок “Зоопланктон”. В блоке моделируются процессы питания, роста, метаболизма, гибели зоопланктона, переход по стадиям роста. Используются следующие переменные: средняя соленость, средняя температура, средняя глубина каждого района, удельные биомассы групп видов зоопланктона.

VIII. Блок “Бентос” описывает динамику семи ведущих видов донных беспозвоночных. Моделируются процессы питания, роста, метаболизма, гибели бентоса, изменение пространственной структуры биоценозов.

#### *Моделирование рыбных популяций*

В блоках, описывающих динамику рыбных популяций (IX — “Бычок”, X — “Судак”, XI — “Лещ”, XII — “Гарань”, XIII — “Осетровые”, XIV — “Тюлька”, XV — “Хамса”, XVI — “Прочие рыбы”) учитываются процессы питания, дыхания, отмирания, размножения, миграции, промыслового воздействия.

Процесс питания популяций (возрастных групп) моделируется автономно в виде процедуры “Корм”, к которой обращаются все блоки. При разработке этой процедуры использованы следующие допущения.

- Для каждой популяции (возрастной группы) существует вектор рационов  $\bar{R}$ , который характеризует биомассы организмов, представляющих собой основные объекты питания рассматриваемой популяции.

- Для рассматриваемого района сформирован вектор  $\bar{k}$ , компоненты которого расположены в соответствии с компонентами вектора  $\bar{R}$  и являются значениями биомасс соответствующих кормовых объектов в данном районе.

- Кормовые объекты считаются полностью взаимозаменяемыми в рационе, т.е. увеличение биомассы считается прямо пропорциональным количеству съеденного корма без учета его состава по компонентам.

С описанной системой ИСАМ проведена большая серия экспериментов. Важной особенностью системы является весьма значительное число звеньев регулирования, а также обратных и перекрестных связей, вследствие чего система становится многоконтурной.

Имитационные эксперименты с моделью обнаружили реакции экосистемы Азовского моря на различные варианты управляющих

воздействий. К регулируемым объектам отнесены ценные промысловые породы рыб. К параметрам настройки относятся: общий сток Дона и Кубани, качество сточных вод, пополнение рыбных сообществ за счет искусственного рыборазведения, температурный режим моря, количество осадков, режим испарения. Часть этих параметров настройки контролируется, часть нет. К контролируемым относятся общий сток Дона и Кубани, качество сточных вод, водообмен через Керченский пролив, норма отлова, пополнение рыбных сообществ.

Работы по развертыванию и эксплуатации ИСАМ продолжают-ся. В настоящее время еще рано считать все полученные результаты достаточно надежными, чтобы принимать на их основе решения о водохозяйственной политике в регионе. Тем не менее следует отметить, что описанная разработка уже нашла практическое применение: система используется при прогнозировании состояния Азовского моря, и результаты, полученные с ее помощью, учитывались Государственной экспертной комиссией при рассмотрении проектов строительства регулирующих гидротехнических сооружений в Керченском проливе.

## **§ 6. Водохранилища и окружающая природная среда**

Интенсивное использование водных ресурсов связано с созданием искусственных водосемов-водохранилищ различных размеров, позволяющих накапливать воду в период избытка речного стока и использовать ее затем для выработки энергии, водоснабжения, орошения полей, увеличения глубины рек в межень и др. На территории стран СНГ насчитывается более 150 крупных водохранилищ, объем каждого из которых превышает 100 млн. м<sup>3</sup>. По площади водного зеркала такие водоемы намного превосходят большинство природных озер. Кроме того, имеется несколько тысяч малых и средних озер. Суммарный объем воды в водохранилищах составляет около 600 км<sup>3</sup>.

По гидрологическому режиму водохранилища — водоемы замедленного водообмена; питают их воды основной реки и ее притоков. Как уже говорилось, разные районы России далеко не одинаково

обеспечены водными ресурсами. Так, в Якутии удельный сток на одного жителя составляет более 1 млн. м<sup>3</sup>, в Красноярском крае — 5 тыс., в Челябинской области — немногим более 2 тыс., а в Московской области — лишь 1,6 тыс. м<sup>3</sup>. Чтобы сбалансировать такую неравномерность, в нашей стране осуществляется широкая программа водохозяйственного и гидроэнергетического строительства. Однако зарегулирование стока рек плотинами и образование водохранилищ имеет отрицательные последствия для водного хозяйства и окружающей среды.

При строительстве водохранилища резко уменьшается проточность, турбулентность воды, сокращается водообмен, создаются условия для возникновения застойных зон. Затопленные плодородные почвы и растительность обогащают воду большим количеством питательных веществ, что приводит к изменению гидрохимического состава воды, к созданию благоприятных условий для развития водорослей.

Многие водохранилища созданы на равнинных реках. В связи с этим возникла целая проблема мелководий, площадь которых в ряде случаев достаточно велика. В таком водохранилище, как Киевское море, до 50% водного зеркала приходится на мелководье. Фактически мелководья не играют существенной роли в накоплении запасов воды, в то же время они занимают большие площади сельскохозяйственных угодий, подтапливают окружающие земли. Мелководья, а затем и водохранилища, стали ареной нашествия сине-зеленых водорослей.

Вредные последствия, вызываемые мелководьями, можно устранить путем обвалования зон мелководий. На обвалованных пространствах возможна организация нерестовых хозяйств и рыбободных заводов с использованием основной части водохранилища, а также выращивание риса, трав и других сельскохозяйственных культур.

Строительство высоконапорных ГЭС в горных районах позволяет не только вырабатывать электроэнергию, но и регулировать сток при малой площади затопленных земель и отсутствии мелководий. После заполнения водохранилища образуются зоны подтопления, связанные с подъемом уровня грунтовых вод. Ширина зоны



подтопления может быть весьма значительной и в ряде случаев измеряется многими километрами. Повышение уровня грунтовых вод приводит к заболачиванию земель, подтоплению различных сооружений и ухудшению санитарных условий местности. Рассмотрим пример Богучанской ГЭС, которая будет четвертой крупной электростанцией на Ангаре (действующие ГЭС — Иркутская, Братская и Усть-Илимская). Ее проектная мощность 4 млн. кВт. Перед проектировщиками стояла задача создать такой проект, при котором максимально использовались бы местные ресурсы. На первом этапе проектных работ было рассмотрено два варианта места строительства Богучанской ГЭС: в районе Мурских порогов и на Кодишском створе. Хотя мурский вариант позволил бы вырабатывать большее количество энергии, от него отказались — слишком большой район с очень ценными лесами оказался бы затопленным.

Частые колебания уровня воды в водохранилище вызывают размывы и обрушение берегов. Процессы размыва усиливаются и динамическим воздействием волн.

Переформирование берегов и дна крупных искусственных водоемов совершается десятилетиями. Наблюдения показали, что через 5–10 лет после создания водоема начинается медленное движение наносов по направлению к плотине. Необходим тщательный учет динамики берегов водохранилищ при проектировании городского и сельского, гражданского и промышленного строительства, транспорта и т. д.

Санитарное действие текущей воды в реке, оздоравливающее русло, долину и прилегающую местность, нельзя недооценивать. При создании водохранилищ, особенно их каскадов, необходимо сохранять в режиме регулирования стока элементы паводочного режима, периодически делать “промывку” преобразованной речной системы, хотя дополнительное расходование воды в этих целях нанесет некоторый ущерб другим потребителям. Регулирование стока водохранилищами вызывает изменение гидрохимического режима.

При заполнении крупнейших водохранилищ наблюдалось прогибание земной коры и усиление сейсмической активности (например, на реке Колорадо в США, на западе Индии, при создании Братского и Красноярского водохранилищ).

Водоохранилища оказывают влияние на местный климат. Наблюдения метеорологических станций показывают, что климат прибрежной зоны приобретает ряд новых постоянных черт, до создания водохранилища отсутствовавших. Одна из причин — различия в альбедо водной поверхности и суши. Другая состоит в том, что над акваторией происходит размыв нижней облачности, а это обуславливает увеличение суммарной радиации над водохранилищем на 3–10%. Изменение облачности отражается на атмосферных осадках. Главной причиной уменьшения (увеличения) осадков вблизи водохранилищ является изменение характеристик воздушной массы при ее движении над водой.

На величину изменения температуры воздуха в прибрежной зоне водохранилища и направленность процесса (охлаждение или потепление) влияет разность температур поверхности ( $T_n$ ) и воздуха над сушей ( $T$ ). Изменения под действием антропогенных факторов нередко бывают малыми по причине естественных флуктуаций. Кошечные результаты зависят от того, суммируются или взаимно гасятся антропогенные и естественные воздействия.

Примером влияния водоема на климат может служить Вилюйское водохранилище — одно из самых северных искусственных морей России. За последние годы под влиянием Вилюйского моря местный климат значительно смягчился. Новый на Крайнем Севере водоем стал не только зоной отдыха населения, но и своеобразной “кухней” микроклимата. По наблюдениям специалистов гидрометеослужбы, влияние водохранилища наиболее ярко проявляется поздней осенью, когда возникают существенные различия в температурном режиме воздушных масс, вызывающие образование облачности и увеличение количества осадков. Ниже плотины формируется влажный оазис, где русло реки, несмотря на якутские морозы, на протяжении 50 км свободно ото льда. В районе водохранилища увеличилась урожайность грибов и ягод. Стало больше лосей, белок, диких оленей и других животных; обилие рыбы в водохранилище позволило создать специализированный рыболовный госпромхоз.

Зарегулирование рек плотинами гидроузлов вносит существенные изменения в природные условия и экономику народного хозяйства в долине реки не только выше, но и ниже гидроузла. приме-

ром таких изменений являются последствия строительства Красноярской ГЭС. Аккумуляция в водохранилище главным образом паводочного стока обусловила пониженную температуру воды в нижнем бьефе ГЭС. Максимальная температура воды в нижнем бьефе понизилась с 22–23°C до 10–12°C. В результате на значительном протяжении от ГЭС жители прибрежной зоны лишены мест купания, а в районе г. Красноярска, где в результате концентрации производства на население накладываются разнообразные нагрузки, существует наиболее острая потребность в отдыхе.

На участках Енисея, расположенных в нижнем бьефе, существенно изменился характер формирования ледостава, зимой сброс воды из водохранилища приводит к образованию незамерзающей полыньи длиной до 300 км, вызывающей повышение влажности воздуха в г. Красноярске и увеличивающей число туманных дней.

Изменение гидротермического режима Енисея в нижнем бьефе (в связи с созданием водохранилища) привело к изменению микроклимата г. Красноярска, оказало влияние на речную флору и фауну.

С другой стороны, теплая вода водохранилищ (в зимнее время) может использоваться для регулирования размера полыньи и ледового режима реки в нижнем бьефе. В результате можно предотвратить образование мощных заторов льда. После строительства Красноярской ГЭС удлинились сроки речной навигации в нижнем бьефе, что значительно улучшило снабжение промышленных районов Запоярья.

Следовательно, изменение гидротермического режима реки после строительства ГЭС имеет как положительные, так и отрицательные влияния на экологию и экономику прибрежных районов.

Эта проблема имеет комплексный характер и требует совместных усилий ученых различных специальностей для системного анализа экологических, экономических и других факторов, создания комплекса вычислительных программ.

На рис. 4.1 приведена схема влияния водохранилища на природную среду.

**Морфологические факторы:** характер берегов, распределение глубин и очертание котловины — влияют на условия перемещения и перераспределения тепла, поступающего в водоем.



Рис. 4.1. Схема влияния водохранилища на окружающую среду

На формирование температурного режима может влиять и минерализация воды: при значительной минерализации создаются своеобразные условия для конвективного перемешивания в период нагрева или остывания, кроме того, вследствие уменьшения теплоемкости увеличивается амплитуда суточных колебаний температуры.

**Сезонные изменения температуры.** Основной теплообмен водоема осуществляется через его поверхность. За счет различия температуры воды и ложа, а также грунтового питания водоема происходит теплообмен и с ложем. Но решающим фактором, определяющим весь годовой ход теплообмена водоема, являются метеоусловия. Их изменения в течение года и внутри сезонов определяют изменения интенсивности теплообмена с водой, направление результирующего потока тепла. Происходящие с годовой цикличностью, они формируют так называемый годовой термический цикл водоема. В общем случае в годовом термическом цикле можно выделить пять периодов: весеннее нагревание, летнее нагревание, осеннее остывание, зимнее остывание и зимнее нагревание.

**Период весеннего нагревания** начинается с появлением результирующего теплового потока, направленного в воду, и заканчивается при достижении водой  $+4^{\circ}\text{C}$  — температуры максимальной плотности, прекращающей конвективное перемешивание за счет прогрева воды. На замерзающих водоемах этот период может начаться еще при сплошном ледяном покрове, если солнечная радиация проникает через лед и, нагревая воду, создает неустойчивое распределение температуры с максимумом у поверхности. Распределение температуры по вертикали характеризуется либо возрастанием ко дну с максимальной температурой у дна не выше  $+4^{\circ}\text{C}$  (обратная стратификация), либо одинаковой температурой по всей вертикали (гомотермия). В соответствии с этим в период весеннего нагревания выделяют две фазы: нагревание в условиях обратной стратификации и нагревание в условиях гомотермии. Существование этих фаз и продолжительность всего периода весеннего нагревания зависят от особенностей конкретного водоема.

**Период летнего нагревания** начинается с момента установления температуры максимальной плотности и заканчивается при достижении максимума температуры, т. е. в момент прекращения

нагрева, когда приход тепла к водоему равняется его расходу. Интенсивный прогрев поверхности воды приводит к уменьшению плотности верхних слоев, что препятствует перемешиванию верхних слоев с глубинными, более плотными водами. Возникает так называемая прямая температурная стратификация с максимальной температурой на поверхности. Интенсивное перемешивание верхних слоев (при ветре, волнении) и замедление процесса вертикального перемешивания из-за возрастания плотности с глубиной приводят к появлению в толще воды трех характерных для летнего периода зон, каждой со своим термическим, химическим, биологическим и световым режимом.

Верхний слой с наиболее высокими температурами воды подвержен прогреву и перемешиванию, вследствие чего температура по глубине в этом слое убывает незначительно. Средний слой характеризуется наибольшими градиентами температуры и плотности (слой скачка). Разность температур в этом слое может достигать до  $20^{\circ}\text{C}$ , а температурный градиент до  $8-10^{\circ}\text{C}$  на 1 м. Придонный — относительно холодный слой, который летом почти не подвержен перемешиванию и отличается плавным и незначительным понижением температуры с глубиной.

**Виды перемешивания.** Под перемешиванием понимается обмен между отдельными слоями или объемами водоема. При передвижении происходит смешение различных объемов вод в месте их соприкосновения и выравнивание физико-химических и других характеристик в слоях, вовлеченных в перемешивание.

Перемешивание может быть молекулярным и молярным. При неоднородном нагреве неподвижной толщи воды вследствие хаотического теплового движения молекул с разными скоростями на границах неподвижных слоев с различной температурой происходит переход молекул с большей скоростью движения в менее нагретый слой. Перенос кинетической энергии выравнивает распределение температуры у границ слоев. Как правило, молекулярное перемешивание не играет существенной роли в режиме большинства водоемов из-за подвижности среды.

Большое значение имеет молярное перемешивание, осуществляемое в виде перемещения относительно больших объемов воды, пере-

носящих заключенные в них примеси (взвеси, соли) и свойства (количество тепла). Молярное перемешивание является следствием неупорядоченного, вихревого (турбулентного) движения, вызываемого термическими (конвективное перемешивание) или динамическими (вынужденная конвекция) причинами.

Конвективное перемешивание (свободная конвекция) возникает при неустойчивой стратификации, когда плотность поверхностных слоев выше. Более плотная вода опускается в глубину до слоя с соответствующей плотностью, а на поверхность выталкивается глубинная менее плотная вода.

Динамическое перемешивание возникает при наличии вертикальных и горизонтальных градиентов скорости, создающихся за счет трения на поверхностях раздела: внутри водной толщи, у дна и у поверхности воды.

**Период осеннего охлаждения** начинается с появления теплового потока, направленного из воды в атмосферу и заканчивается установлением температуры максимальной плотности. По мере охлаждения наблюдается выравнивание температуры по глубине, исчезновение слоя скачка и формирование осенней гомотермии, наступающей тем скорее, чем интенсивнее идет перемешивание при остывании. При осенней гомотермии вертикальное перемешивание не прекращается до тех пор, пока вся вода не остынет до температуры максимальной плотности.

**Период зимнего остывания** начинается с момента, когда осенняя гомотермия на озерах сменяется обратной стратификацией, характеризующейся максимумом температуры у дна (не выше  $+4^{\circ}\text{C}$ ) и ее понижением к поверхности. В период зимнего остывания выделяют две фазы: а) охлаждение при открытой поверхности воды, б) охлаждение под ледяным покровом. При ледяном покрове интенсивность теплообмена воды с атмосферой существенно замедляется.

**Период зимнего нагревания** наступает после установления ледостава и наблюдается только при притоке тепла от ложа. Нагрев нижних слоев способствует сохранению обратной стратификации.

В отличие от водоемов замедленного водообмена — озер и водохранилищ — в руслах рек за счет интенсивного турбулентного

перемешивания и малого объема воды нагревание или охлаждение происходит почти одновременно по всему сечению потока, изменения температуры по глубине незначительны и не превышают десятых долей градуса. Неоднородность распределения температуры по сечению может наблюдаться за счет притока или замедления перемешивания на глубоких плесах крупных рек.

*Уравнение теплового баланса*

Тепловой баланс водоема определяет изменения термического режима. В тепловом балансе в соответствии с направлением поступления тепла в водоем можно выделить три потока:

- Теплообмен через поверхность водоема за счет поглощения солнечной радиации  $S_p$ ; собственного излучения воды  $S_{и}$ ; поглощения водой встречного излучения атмосферы  $S_a$ ; теплообмена с атмосферой за счет конвекции (турбулентный теплообмен  $P$ ); теплообмена при испарении или конденсации воды  $S_{ис}$ ; теплообмена с осадками, выпадающими на поверхность воды  $S_{ос}$ ; в период замерзания или вскрытия водоема — затрат тепла на таяние льда или выделение тепла при ледообразовании  $S_{л}$ .

- Теплообмен с ложем водоема  $S_{дно}$ , происходящий путем непосредственного его контакта с водой, а также за счет теплообмена с грунтовыми водами  $S_{гр}$ .

- Прочие виды прихода—расхода тепла: теплообмен с водами притоков  $S_{пр}$  или сток воды за пределы водоема  $S_{ст}$ , приводящий к выносу тепла; тепло, образующееся за счет перехода механической энергии в тепловую при движении воды в водоеме  $S_{дин}$ ; а также тепло  $S_b$ , выделяющееся при биологических и биохимических процессах, протекающих в водоемах.

Уравнение теплового баланса, описывающее изменение количества тепла в водной массе водоема, может быть записано в виде

$$S_p - S_{и} + S_a \pm P \pm S_{ис} \pm S_{ос} \pm S_{л} \pm S_{дно} \pm S_{гр} + \\ + S_{пр} - S_{ст} + S_{дин} + S_b = \pm \Delta S, \quad (4.19)$$

где  $\Delta S$  — изменение количества тепла в водоеме.

Соотношение величин, входящих в уравнение теплового баланса, непостоянно и зависит от времени года, климатических и метеорологических условий, размеров и высоты расположения водоема над



уровнем моря. Составляющие  $S_p$ ,  $S_a$ ,  $S_{\text{дин}}$  характеризуют приток тепла к воде;  $S_n$ ,  $S_{\text{ст}}$  — потери тепла. Члены  $P$ ,  $S_{\text{ис}}$ ,  $S_{\text{ос}}$ ,  $S_{\text{дно}}$ ,  $S_{\text{Гр}}$  могут менять знак в зависимости от условий.

Если уравнение теплового баланса решается для периода ледохода, то расчет составляющих теплообмена поверхности водоема необходимо вести с учетом площади, покрытой льдом, и радиационных характеристик льда. Составляющие уравнения теплового баланса водоема в формуле (4.19) могут быть рассчитаны на основании измерения характеристик, обуславливающих теплообмен, и метеоэлементов (солнечная радиация, скорость ветра, температура и влажность воздуха, облачность, температура воды и т. д.). Рассмотрим методики определения составляющих теплообмена  $S_p$ ,  $S_n$ ,  $S_{\text{ис}}$ .

#### *Суммарная солнечная радиация*

Для расчета суммарной солнечной радиации  $S_p$  разработан ряд формул, в которых учитываются предельная солнечная радиация при ясном небе, облачность и ряд других факторов, снижающих интенсивность радиации.

Браславским А. П. для определения суммарной солнечной радиации  $S_p$   $\left[ \frac{\text{кал}}{\text{см}^2 \text{сут}} \right]$  предложена расчетная зависимость вида

$$S_p = S_{n0} k_e k_z \left\{ 1 - n \left[ \frac{k_n N_n}{10} + \frac{k_{b+c}(N_0 - N_n)}{10} \right] \right\} \frac{1}{1 - \Psi A_r} (1 - A_r). \quad (4.20)$$

Здесь  $S_{n0}$  — суммарная радиация на горизонтальную поверхность, описываемая по таблице Браславского;  $k_z$  и  $k_e$  — коэффициенты, учитывающие влияние высоты над уровнем моря и отклонения влажности воздуха от его среднеширотного значения;  $n$  — коэффициент, характеризующий относительную плотность облачного покрова, определяемый в зависимости от географического положения места;  $k_n$  и  $k_{b+c}$  — коэффициенты, характеризующие непропускание облаками нижнего и верхнего ярусов суммарной солнечной радиации;  $N_0$  и  $N_n$  — общая и нижняя облачность в баллах;  $A_r$  — среднее суточное альбедо суммарной солнечной радиации, определяемое по таблице в зависимости от облачности и широты места. Величина альбедо  $A_r$  характеризует отражательную способность тела и определяет долю солнечной радиации, отраженную от водной поверхности;  $\Psi$  — доля повторно рассеянной и повторно отраженной

облаками по направлению к земле коротковолновой радиации, определяемая по формуле

$$\Psi = 0.3 + 0.05N_n + 0.042(N_0 - N_n).$$

### *Испарение*

Затрата тепла на испарение определяется по формуле

$$S_{ис} = 4.1(e_0 + e_{200})[1 + 0.8W_{200} + f(\Delta T)],$$

где  $e_0$  — максимальная упругость водяных паров при температуре поверхности воды;  $e_{200}$  — абсолютная влажность воздуха на высоте 2 м;  $f(\Delta T)$  — функция, учитывающая увеличение интенсивности испарения при положительной разности температур  $\Delta T$  (вода — воздух).

### *Излучение поверхности воды*

Излучение поверхности воды  $S_{из}$  является расходной статьей уравнения теплового баланса. Интенсивность излучения согласно закону Стефана — Больцмана зависит от температуры тела и его лучеиспускательной способности:

$$S_{из} = \beta\sigma(273 + T)^4, \quad (4.21)$$

где  $\beta$  — лучеиспускательная способность воды (для водной поверхности среднее значение  $\beta$  равно 0.95);  $\sigma$  — постоянная Стефана — Больцмана. Формула (4.21) может быть использована и для расчета излучения с поверхности снега и льда (при значениях  $\beta$  для снега 0.99 и для льда 0.95).

Расчеты процессов тепло- и массопереноса в водоемах имеют большое значение в развитии методов прогноза состояния водных экосистем.

## Глава 5

# Моделирование водных экосистем

### § 1. Пресноводные экосистемы.

#### Характеристика входных потоков

Научно-технический прогресс, развитие сельского хозяйства, урбанизация привели к загрязнению природных вод. Проблема загрязнения вод приобрела глобальный характер. В настоящее время выделяют химическое, физическое, биологическое, тепловое, радиоактивное типы загрязнений.

Загрязняющие вещества, в зависимости от типа и источника загрязнения, разными путями попадают в водную среду. Они могут поступать из атмосферы; могут быть смыты склоновым стоком с сельскохозяйственных полей и угодий в подземные и речные воды; загрязнение также может быть бактериальным в результате развития и отмирания водной растительности и др. Поступление загрязняющих веществ в водоем может происходить непрерывно (по времени) или в результате залпового сброса, в виде точечных и распределенных в пространстве источников.

При имитационном моделировании качества воды необходимо совместное описание гидрофизических и химико-биологических процессов. Задача моделирования заключается в том, чтобы научиться предвидеть возможно более отдаленные последствия вмешательства

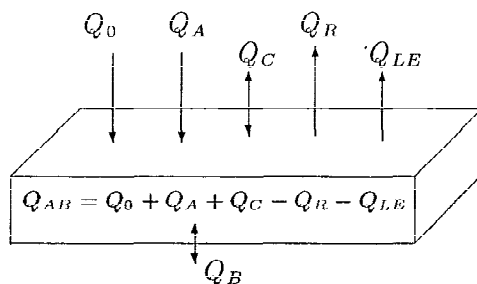


Рис. 5.1. Тепловой баланс системы вода—атмосфера

человека в установившийся в природе кругооборот веществ и уметь нейтрализовать нежелательные результаты.

Под экосистемой понимают единый природно-антропогенный комплекс, образованный живыми организмами и средой их обитания, в котором экологические компоненты связаны между собой причинно-следственными связями, обменом веществ и распределением потока энергии. Водная экосистема является элементом системы более высокого порядка — биосферы. Водоем — открытая система, связанная с окружающей средой входными и выходными потоками.

Остановимся на описании входных потоков. К ним относятся метеорологические, гидрологические, антропогенные, биотические и геологические факторы.

**Солнечная радиация.** Особое место среди метеорологических входных факторов занимает солнечная радиация, которая оказывает существенное влияние на тепловой баланс в поверхностном слое воды, а также на другие метеорологические переменные. Количество суммарной радиации, приходящееся на единицу горизонтальной поверхности в верхнем слое атмосферы, вычисляется по известным соотношениям и зависит от географической широты, времени года и суток. Величина суммарной радиации на уровне моря зависит от целого ряда характеристик атмосферы, таких как содержание газов (кислорода, азота, озона), водяного пара, аэрозолей, облачности. Для количественных оценок этих эффектов используются различные модели.

**Тепловой баланс поверхности земли.** Процесс развития жизни на суше и в воде в значительной степени зависит не только от радиационного, но и от теплового баланса. Схема теплового баланса показана на рис. 5.1, где  $Q_0$  — суммарная солнечная радиация;  $Q_A$  — атмосферная радиация;  $Q_C$  — турбулентный теплообмен;  $Q_R$  — собственное излучение воды;  $Q_{LE}$  — теплообмен при испарении.

Аналогичный теплообмен  $Q_B$  осуществляется в более глубоких слоях воды. В водных потоках следует учитывать в тепловом балансе поступления тепла благодаря притоку воды, потери тепла за счет оттока воды, адвективный теплообмен с другими частями водоема, теплообмен вследствие диффузии и теплопроводности.

При построении математических моделей экосистем используются метеорологические переменные (температура и влажность воздуха, давление, облачность, ветер), значения которых измеряются службами погоды.

**Гидрологические входные параметры.** Гидрологический баланс водного объекта характеризуется следующими составляющими баланса: осадки, поверхностная конденсация, горизонтальный приток воды (из поверхностных источников и грунта), испарение и горизонтальный отток. Значения перечисленных параметров либо берутся из данных прямых гидрологических измерений, либо определяются расчетами.

**Антропогенные воздействия.** В результате деятельности человека происходит заметное ухудшение окружающей среды. К наиболее отрицательным последствиям человеческой деятельности относится загрязнение окружающей среды, в частности воды. Вопросы использования и охраны воды приобретают огромное значение.

В хозяйственной деятельности человечеству требуется по массе больше воды, чем всех остальных видов сырья вместе взятых. В воду поступают различные типы загрязняющих веществ, которые можно разделить на консервативные и неконсервативные. Концентрация консервативных веществ изменяется только разбавлением, а неконсервативных — в том числе и химическими взаимодействиями, физико-химическими процессами и биохимическими реакциями. Соответственно и по-разному выводятся уравнения переноса загрязняющих веществ.

**Биотические воздействия** связаны главным образом с растительным миром, например, с вырубанием лесных массивов, поступлением в водоем листьев деревьев и кустарников.

Для математического моделирования химического, теплового и радиационного загрязнений, независимо от специфики загрязняющих веществ, применяют уравнение общего вида:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \operatorname{div}(c\vec{v}) = \operatorname{div}(D\nabla c) + F(c) - \sigma c,$$

где  $c$  — какая-либо из переменных: концентрация загрязняющих веществ, температура воды, концентрация радионуклидов, растворенного в воде кислорода или его дефицит и др.

**Гидрофизические процессы.** Экологические процессы происходят в конкретной окружающей физической среде, которая описывается следующими основными моделями гидрофизики:

- модели морфометрии водотока;
- гидродинамическая теория переноса тепла и распределения потоков;
- моделирование распределения света.

Гидрофизические параметры водоема являются входными переменными для химических и гидробиологических моделей.

Для полной оценки антропогенного воздействия на водные экосистемы необходимо уметь прогнозировать гидротермические и ледовые режимы водотоков, моделировать поля течений и процессы переноса тепла в стратифицированных водоемах.

**Математические модели морфометрии водотоков.** Для схематизации водотоков используется информация о глубине и ширине ложа водоема, уклоне дна (для русел рек). Для озер обычно проводятся измерения глубины, и результаты представляются в виде зависимостей площадей или объемов от глубины. Выполняется геометрическая аппроксимация имеющейся информации, координаты которой хранятся в памяти ЭВМ.

## § 2. Основные уравнения температурно-стратифицированных течений

В задачах динамики течений в озерах и водохранилищах используется система координат, связанная с вращающейся земной поверхностью. В силу этого система уравнений, описывающая течение воды, отличается от обычных уравнений гидромеханики дополнительными членами, учитывающими ускорение Кориолиса, а также тем, что потенциал земного притяжения заменяется на потенциал силы тяжести — равнодействующей земного притяжения и центробежной силы, вызываемой вращением Земли.

При исследовании турбулентных течений используются уравнения Рейнольдса для осредненных величин, содержащие члены турбулентного переноса количества движения и тепла.

Уравнения движения стратифицированной жидкости в приближении Буссинеска в безразмерных переменных имеют вид

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial u}{\partial t} + \text{Ro}(\vec{V} \cdot \nabla)u - \frac{B}{L}v = \\
 & = -\frac{\partial p}{\partial x} + E_x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + E_y \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + E_z \frac{\partial}{\partial z} \left( K \frac{\partial u}{\partial z} \right), \\
 & \frac{\partial v}{\partial t} + \text{Ro}(\vec{V} \cdot \nabla)v + \frac{L}{B}u = \\
 & = -\left(\frac{L}{B}\right)^2 \frac{\partial p}{\partial y} + E_x \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + E_y \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + E_z \frac{\partial}{\partial z} \left( K \frac{\partial v}{\partial z} \right), \\
 & \frac{\partial w}{\partial t} + \text{Ro}(\vec{V} \cdot \nabla)w = -\left(\frac{L}{H}\right)^2 \frac{\partial p}{\partial z} + \left(\frac{L}{H}\right)^2 \frac{\text{Ro}}{\text{Fr}^2} \rho + E_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \\
 & + E_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + E_z \frac{\partial}{\partial z} \left( K \frac{\partial w}{\partial z} \right), \\
 & \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \\
 & \frac{\partial T}{\partial t} + \text{Ro}(\vec{V} \cdot \nabla)T =
 \end{aligned} \tag{5.1}$$

$$= \frac{Ro}{Pe_x} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{L}{B} \frac{Ro}{Pe_y} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{L}{H} \frac{Ro}{Pe_z} \frac{\partial}{\partial z} \left( a \frac{\partial T}{\partial z} \right),$$

$$\rho = \rho(T).$$

Здесь  $x, y, z$  — безразмерные координаты, отнесенные соответственно к  $L, B, H$ , ось  $z$  направлена вниз,  $L, B, H$  — характерные значения длины, ширины и глубины соответственно;  $\vec{V} = (u, v, w)$  — вектор скорости,  $u$  отнесена к  $u_0$ ,  $v$  — к  $\frac{B}{L} u_0$ ,  $w$  — к  $\frac{H}{L} u_0$ ,  $u_0$  — характерное значение скорости;  $\rho$  — отклонение плотности от  $\rho_0$ , отнесенное к  $\Delta\rho$  ( $\Delta\rho = \rho_{\max} - \rho_{\min}$ ,  $\rho_0$  — характерное значение плотности);  $p$  — давление, отнесенное к  $(\rho_0 f L u_0)$ ,  $f = 2\Omega \sin \varphi$  — параметр Кориолиса;  $\varphi$  — широта местности;  $\Omega$  — угловая скорость вращения Земли;  $T$  — температура воды;  $Ro = \frac{u_0}{fL}$  — число Кибеля — Россби;  $E_x = \frac{k}{fL^2}$ ,  $E_y = \frac{k}{fB^2}$ ,  $E_z = \frac{k_0}{fH^2}$  — соответственно горизонтальные и вертикальные числа Экмана;  $Pe_x = \frac{u_0 L}{\alpha}$ ,  $Pe_y = \frac{u_0 B}{\alpha}$ ,  $Pe_z = \frac{u_0 H}{a_0}$  — горизонтальные и вертикальное числа Пекле;  $k, \alpha$  — коэффициенты горизонтального турбулентного обмена (обычно считаются постоянными);  $k_z, a_z$  — коэффициенты вертикального турбулентного обмена, которые могут быть найдены с помощью полуэмпирических моделей турбулентности;  $k_0, a_0$  — характерные значения параметров  $k_z$  и  $a_z$ ,  $K = k_z/k_0$ ,  $a = a_z/a_0$ ;  $Fr = \frac{u_0}{\sqrt{gH\Delta\rho/\rho_0}}$  — плотностное число Фруда;  $g$  — ускорение свободного падения. Вертикальное число Экмана выражается через числа Кибеля — Россби и Рейнольдса:  $E_z = \left(\frac{L}{H}\right) \frac{Ro}{Re}$ , где  $Re = \frac{u_0 H}{k_0}$  — число Рейнольдса.

Для пресной воды можно использовать простую зависимость плотности воды от температуры (в безразмерном виде):

$$\rho = \frac{-0.68 \cdot 10^{-5} (T - 4)^2}{\Delta\rho}. \quad (5.2)$$

Для большинства водоемов суши вертикальный размер водоема значительно меньше характерных горизонтальных размеров. Из проекции уравнения движения на ось  $z$  следует, что с большой степенью точности выполняется приближение гидростатики. Однако



в области, примыкающей к водозабору, где  $L \sim H$ , вертикальное ускорение одного порядка с градиентом давления, и в этой области гидростатическое приближение неприменимо. При  $L \sim H$  и  $Re \gg 1$  можно пренебречь влиянием вязкости. При исследовании течений в озерах и водохранилищах также пренебрегают горизонтальным турбулентным обменом и используют уравнения в приближении пограничного слоя:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \text{Ro}(\vec{V} \cdot \nabla)u - \frac{B}{L}v &= -\frac{\partial p}{\partial x} + E_z \frac{\partial}{\partial z} \left( K \frac{\partial u}{\partial z} \right), \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \text{Ro}(\vec{V} \cdot \nabla)v + \frac{L}{B}u &= -\left(\frac{L}{B}\right)^2 \frac{\partial p}{\partial y} + E_z \frac{\partial}{\partial z} \left( K \frac{\partial v}{\partial z} \right), \\ \frac{\partial p}{\partial z} &= \frac{\text{Ro}}{\text{Fr}^2} \rho, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial T}{\partial t} + \text{Ro}(\vec{V} \cdot \nabla)T &= \frac{L}{H} \frac{\text{Ro}}{Pe_z} \frac{\partial}{\partial z} \left( a_z \frac{\partial T}{\partial z} \right). \end{aligned} \quad (5.3)$$

В уравнении для температуры иногда учитывается поглощение коротковолнового излучения:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla)T = \frac{1}{Pe_z} \frac{\partial}{\partial z} \left[ a_z \frac{\partial T}{\partial z} \right] + \alpha \beta \hat{F}_i e^{-\beta z}, \quad (5.4)$$

где  $\hat{F}_i$  — поток коротковолнового излучения, отнесенный к характерной теплоте, переносимой конвекцией ( $C_p \rho_0 u_0 T_0$ );  $\beta$  — коэффициент поглощения излучения;  $C_p$  — теплоемкость воды; постоянная  $\alpha$  равна либо 1, либо 0.4.

Для постановки конкретных задач необходимо задать начальные и граничные условия. В начальный момент времени в области течения известны поля скоростей и температуры:

$$\begin{aligned} u \Big|_{t=0} &= u_0(x, y, z), & v \Big|_{t=0} &= v_0(x, y, z), \\ w \Big|_{t=0} &= w_0(x, y, z), & T \Big|_{t=0} &= T_0(x, y, z). \end{aligned} \quad (5.5)$$

Граничные условия: на свободной поверхности ( $z = 0$ ) задается касательное трение ветра, условие “твердой крышки” для вертикальной

составляющей скорости и теплообмен водной поверхностью с атмосферой:

$$K \frac{\partial u}{\partial z} = -\hat{\tau}_x \text{Re}, \quad K \frac{\partial v}{\partial z} = -\hat{\tau}_y \text{Re}, \quad w = 0, \quad K \frac{\partial T}{\partial z} = -\hat{S}_n, \quad (5.6)$$

где  $\hat{\tau}_x = \tau_x / (\rho_0 u_0^2)$ ,  $\hat{\tau}_y = \tau_y / (\rho_0 u_0^2)$ ,  $\tau_x, \tau_y$  — составляющие напряжения трения;  $\hat{S}_n = S_n / (C_p \rho_0 k_0 T_0 / H)$ ,  $S_n$  — полный поток тепла через свободную поверхность, который представляют в виде

$$S_n = (1 - \alpha) F_i - F_{\phi} - S_t - S_e, \quad (5.7)$$

где  $F_{\phi}$  — эффективное длинноволновое излучение,  $S_t$  — турбулентный обмен между водной поверхностью и атмосферой,  $S_e$  — поток тепла, обусловленный испарением. Для составляющих теплового потока через свободную поверхность  $F_i$ ,  $F_{\phi}$ ,  $S_t$ ,  $S_e$  существуют различные формулы. При определении теплообмена с атмосферой учитывается влияние облачности, ветра, влажности, температуры воздуха, альбедо воды и ряд других параметров.

На дне водоема при  $z = H$  ставятся условия прилипания и задается теплообмен с дном:

$$u = v = w = 0, \quad K \frac{\partial T}{\partial z} = -\hat{S}_{dn}, \quad (5.8)$$

где  $\hat{S}_{dn}$  — теплообмен с ложем водоема, отнесенный к характерной теплоте  $(C_p \rho_0 k_0 T_0 / H)$ . Аналогичные условия ставятся на боковой поверхности. В некоторых работах для дна задаются условия скольжения:

$$K \frac{\partial u}{\partial z} = C_1 |u| u \text{Re}, \quad K \frac{\partial v}{\partial z} = C_1 |v| v \text{Re}, \quad (5.9)$$

$C_1$  — эмпирический коэффициент.

На границе втекания считаются известными составляющие вектора скорости и температура. На выходной границе задаются составляющие вектора скорости и ставится “мягкое” граничное условие для температуры  $\left( \frac{\partial T}{\partial x} = 0 \right)$ .

Система уравнений турбулентных температурно-стратифицированных течений замыкается с помощью полуэмпирических моделей турбулентности. Наиболее распространенной является  $k$ - $\varepsilon$ -модель турбулентности, основанная на использовании уравнений переноса

кинетической энергии ( $k$ ) и скорости диссипации этой энергии ( $\varepsilon$ ). Как было отмечено выше, в области течения, примыкающей к водозабору, гидростатическое приближение неприменимо. Здесь необходимо использовать полную систему уравнений (5.1). Для изучения течения неоднородной несжимаемой жидкости применяется система уравнений Павье — Стокса в приближении Буссинеска:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} &= \frac{\rho}{\rho_0} \vec{g} - \frac{1}{\rho_0} \nabla p + \nu \Delta \vec{V}, \\ \operatorname{div} \vec{V} &= 0, \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) \rho &= 0, \end{aligned} \quad (5.10)$$

где  $\nu$  — коэффициент кинематической вязкости. Систему (5.10) обычно используют для описания процессов, в которых можно пренебречь влиянием диффузии и теплопроводности на динамику течений. В реальных условиях необходимо учитывать зависимость плотности жидкости от температуры.

В безразмерных переменных система (5.10) принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} &= \frac{\rho}{\operatorname{Fr}^2} \vec{K}_3 - \frac{1}{\rho_0} \nabla p + \frac{1}{\operatorname{Re}} \Delta \vec{V}, \\ \operatorname{div} \vec{V} &= 0, \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) \rho &= 0, \end{aligned} \quad (5.11)$$

где  $\vec{K}_3$  — единичный вектор в направлении оси  $Oz$ .

Систему (5.11) можно записать относительно переменных векторный потенциал — вихрь:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) \rho &= 0, \\ \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{\omega} - (\vec{\omega} \cdot \nabla) \vec{V} &= \frac{1}{\operatorname{Re}} \Delta \vec{\omega} + \frac{1}{\operatorname{Fr}^2} \vec{F}, \\ \vec{\omega} &= \operatorname{rot} \vec{\psi}, \\ \Delta \vec{\psi} &= -\vec{\omega}, \end{aligned} \quad (5.12)$$

где  $\vec{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$  — вектор вихря,  $\vec{\psi} = (\psi_1, \psi_2, \psi_3)$  — векторный потенциал,  $\vec{F} = \left(0, \frac{\partial \rho}{\partial x}, 0\right)$ .

В двумерном случае  $\vec{\psi} = (0, \psi, 0)$ ,  $\vec{\omega} = (0, \omega, 0)$  и система (5.12) принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) \rho &= 0, \\ \frac{\partial \omega}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) \omega &= \frac{1}{Fr^2} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{1}{Re} \Delta \omega, \\ \Delta \psi &= -\omega, \\ u &= \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad w = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \end{aligned} \tag{5.13}$$

Здесь  $x_1 = x$ ,  $x_2 = y$ ,  $x_3 = z$ ,  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ ,  $\vec{V} = (u, 0, w)$ . Система (5.13) часто используется для исследования плоских течений несжимаемой жидкости.

### § 3. Приближенные модели стратифицированных течений

#### 1. Аналитические решения для установившихся течений

Рассматриваются двумерные стационарные течения тяжелой неоднородной невязкой жидкости. Требуется определить параметры течения стратифицированной жидкости в двумерном водоеме, на одном конце которого жидкость втекает, а на другом вытекает из отверстия, расположенного на расстоянии  $h$  от свободной поверхности;  $b$ ,  $d$  — размеры отверстий, через которые протекает жидкость;  $L$  — длина водоема; плоскость  $x = 0$  совпадает с границей, в которой расположено водозаборное отверстие, в исследуемой области  $x \leq 0$  (рис. 5.2). Стационарные плоские течения идеальной жидкости в поле силы тяжести в приближении Буссинеска описывают системой

уравнений (5.13) (в которой  $\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial \omega}{\partial t} = 0$ ):

$$\begin{aligned} (\vec{V} \cdot \nabla)\rho &= 0, \\ (\vec{V} \cdot \nabla)\omega &= \frac{1}{\text{Fr}^2} \frac{\partial \rho}{\partial x}, \\ \Delta\psi &= -\omega, \\ u &= \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad w = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \end{aligned} \tag{5.14}$$

Перейдем в уравнениях (5.14) к переменным  $x, \psi$ :

$$\begin{aligned} d\psi &= -w dx + u dz, \\ \frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \Big|_{\psi} - w \frac{\partial}{\partial \psi}, \\ \frac{d}{dt} &= u \frac{\partial}{\partial x} + w \frac{\partial}{\partial x} = u \frac{\partial}{\partial x} \Big|_{\psi}. \end{aligned}$$

С учетом этих соотношений уравнения для плотности и вихря легко интегрируются. В результате задача сводится к решению уравнения Пуассона для функции тока:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = -\omega, \tag{5.15}$$

где  $\omega = -\frac{1}{\text{Fr}^2} \frac{\partial \rho}{\partial \psi} z + f(\psi)$ ;  $\rho(\psi)$  и  $f(\psi)$  — произвольные функции. Уравнение (5.15) является частным случаем уравнения Дюбрель — Жакотена в приближении Буссинеска.

Если плотность есть линейная функция  $\psi$ , т.е.  $\frac{d\rho}{d\psi} = \text{const}$ , то  $\omega = -\mu^2 z + f(\psi)$ , где  $\mu^2 = \frac{1}{\text{Fr}^2} \frac{\partial \rho}{\partial \psi}$ .

Пусть требуется оценить картину течения, которая формируется в зависимости от условий водозабора и стратификации, в предположении, что на достаточно большом удалении поток плоскопараллельный (т.е.  $\psi = z, \omega = 0$ ). В этом случае произвольная

функция  $f(\psi)$  равна  $\mu^2\psi$ . Следовательно, выбирают такой класс решений уравнений (5.14), который включает плоскопараллельные безвихревые потоки. В данном случае картина течения зависит от стратификации, расхода и положения водозаборного отверстия.

Рассмотрим задачу с известными распределениями скоростей во входном и выходном отверстиях. Свободная поверхность заменена “твердой крышкой”. Требуется найти функцию тока, которая является решением уравнения Гельмгольца

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \mu^2(z - \psi) \quad (5.16)$$

и удовлетворяет следующим граничным условиям:

$$\begin{aligned} \psi &= 0 && \text{при } z = 0, && -L \leq x \leq 0, \\ \psi &= 1 && \text{при } z = 1, && -L \leq x \leq 0, \\ \psi &= H(z - h, d) && \text{при } x = 0, && 0 \leq z \leq 1, \\ \psi &= H(z, b) && \text{при } x = -L, && 0 \leq z \leq 1, \end{aligned} \quad (5.17)$$

где  $H(z - h, d)$ ,  $H(z, b)$  — известные функции.

Если скорости во входном и выходном отверстиях равномерны по сечению, то эти функции задаются следующим образом:

$$H(z - h, d) = \begin{cases} 0, & 0 \leq z \leq h, \\ (z - h)/d, & h \leq z \leq h + d, \\ 1, & h + d \leq z \leq 1, \end{cases} \quad (5.18)$$

$$H(z, b) = H(z - 0, b).$$

Методом разделения переменных находится решение уравнения (5.16), удовлетворяющее условиям (5.17), (5.18):

$$\begin{aligned} \psi &= z + \sum_{n=1}^m \sin(n\pi z) \left[ A_n \cos \left( x \sqrt{\mu^2 - n^2\pi^2} \right) + B_n \sin \left( x \sqrt{\mu^2 - n^2\pi^2} \right) \right] + \\ &+ \sum_{n=m+1}^{\infty} \sin(n\pi z) \left[ A_n e^{x \sqrt{n^2\pi^2 - \mu^2}} + B_n e^{-x \sqrt{n^2\pi^2 - \mu^2}} \right], \end{aligned} \quad (5.19)$$

где  $m$  определяется из условия  $m\pi < \mu \leq (m+1)\pi$  (при  $\mu \leq \pi$ ,  $m = 0$ ).

Разлагая в ряд Фурье функции  $H(z - h, d)$ ,  $H(z, b)$ ,  $z$ , из (5.17) и (5.19) находим  $A_n$  и  $B_n$ :

при  $n \leq m$

$$A_n = \frac{4 \sin \frac{n\pi d}{2} \cos \left[ n\pi \left( h + \frac{d}{2} \right) \right]}{n^2 \pi^2 d},$$

$$B_n = \frac{2 \sin(n\pi b)}{n^2 \pi^2 d} - \frac{A_n \cos(L\sqrt{\mu^2 - n^2 \pi^2})}{\sin(L\sqrt{\mu^2 - n^2 \pi^2})};$$
(5.20)

при  $n > m + 1$

$$A_n = \frac{a_n e^{L\sqrt{n^2 \pi^2 - \mu^2}} - b_n}{e^{L\sqrt{n^2 \pi^2 - \mu^2}} - e^{-L\sqrt{n^2 \pi^2 - \mu^2}}},$$

$$B_n = \frac{b_n - a_n e^{L\sqrt{n^2 \pi^2 - \mu^2}}}{e^{L\sqrt{n^2 \pi^2 - \mu^2}} - e^{-L\sqrt{n^2 \pi^2 - \mu^2}}},$$

$$a_n = \frac{4 \sin \frac{n\pi d}{2} \cos \left[ n\pi \left( h + \frac{d}{2} \right) \right]}{n^2 \pi^2 d}, \quad b_n = \frac{2 \sin(n\pi b)}{n^2 \pi^2 b}.$$

Для  $\mu = m\pi$  слагаемое в (5.19), соответствующее значению  $n = m$ , определяется по формуле

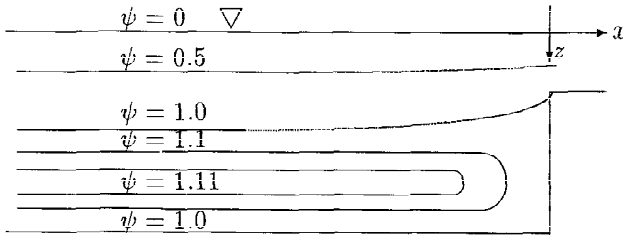
$$\sin(m\pi z) \left[ a_m \left( 1 - \frac{x}{L} \right) + b_m \frac{x}{L} \right].$$
(5.21)

Это слагаемое получается из (5.19) и (5.20) предельным переходом при  $\mu \rightarrow m\pi$ .

Решение (5.19), (5.20) пригодно и для описания течений однородной жидкости ( $\mu = 0$ ).

Если найдено ограниченное решение в полубесконечной области ( $L \rightarrow \infty$ ), удовлетворяющее при  $x \rightarrow -\infty$  условию  $\frac{\partial \psi}{\partial x} = 0$  ( $v = 0$ ), то для вычисления функции  $\psi$  применяется формула

$$\psi = z + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\pi z) e^{x\sqrt{n^2 \pi^2 - \mu^2}}, \quad \mu \leq \pi.$$
(5.22)

Рис. 5.2. Картина линий тока для  $\Gamma\gamma = 1/\pi$ 

Коэффициенты  $A_n$  определяются из условия при  $x = 0$  путем разложения в ряд Фурье функций  $y$  и  $H(y - h, d)$ :

$$A_n = \frac{4 \sin\left(\frac{n\pi d}{2}\right) \cos\left(\frac{n\pi d}{2} + n\pi h\right)}{n^2 \pi^2 d}. \quad (5.23)$$

Если истечение происходит из очень узкой щели, расположенной в углу прямоугольного канала, т.е.  $h = d = 0$ , то получим следующее решение:

$$\psi = z + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin(n\pi z) e^{x\sqrt{n^2\pi^2 - \mu^2}}. \quad (5.24)$$

Решение (5.22), (5.23) в отличие от (5.24) позволяет определить влияние размеров и положения водозаборного отверстия на картину истечения. Из решения (5.22) при  $x \rightarrow -\infty$  следует

$$\psi \approx z + A_1 \sin(\pi z) e^{x\sqrt{\pi^2 - \mu^2}}. \quad (5.25)$$

Отсюда видно, что при  $\mu < \pi$  на достаточном удалении от водозаборного отверстия скорость течения равномерна по глубине. Если  $\mu = \pi$ , то появляются области возвратных течений (рис. 5.2).

Построенные решения можно использовать для качественной оценки картины течения стратифицированной жидкости, а также в качестве теста для численных решений.



## 2. Приближенное решение для медленных течений стратифицированной вязкой жидкости

Рассмотрим случай медленных течений в водоемах вытянутой формы большой протяженности ( $u_0 \ll \sqrt{gH}$ ,  $L \gg H$ ,  $L \gg B$ ). Оценим влияние сил Кориолиса. Отношение ( $\sigma$ ) геострофического члена к бароклинной составляющей градиента давления с учетом гидростатического приближения равно  $\sigma = \frac{B \text{Fr}^2}{L \text{Ro}}$ .

Например, пусть  $u_0 = 0.1$  м/с,  $B = 2 \cdot 10^3$  м,  $H = 50$  м,  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>,  $f = 10^{-4}$  с<sup>-1</sup>,  $\Delta\rho/\rho_0 = 10^{-3}$ , тогда  $\text{Fr}^2 = 0.02$ ,  $\frac{L}{B}\text{Ro} = 0.5$ . Поэтому для водохранилищ с параметрами, близкими к рассмотренному примеру, можно пренебречь влиянием сил Кориолиса. Для медленных течений в водохранилищах большой протяженности число Кибеля — Россби мало, и в уравнениях количества движения можно опустить нелинейные инерционные члены.

В этом случае для течений в водоемах вытянутой формы задачу упрощают путем перехода к двумерной схеме течения с применением операции осреднения по ширине. С учетом рассмотренных ранее упрощений осредненные по ширине водоема уравнения (в размерном виде) приводят к виду

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{b} \frac{\partial}{\partial z} \left( bK_z \frac{\partial u}{\partial z} \right) - \frac{S \cdot \tau_1}{b}, \\ \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial z} &= \frac{g\rho}{\rho_0}, \\ \frac{\partial bu}{\partial x} + \frac{\partial bw}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + w \frac{\partial T}{\partial z} &= \frac{1}{b} \frac{\partial}{\partial z} \left( bK_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \frac{\alpha\beta}{C_p\rho_0} F_1 e^{-\beta z}, \end{aligned} \tag{5.26}$$

где  $u, \rho, S, T$  — средние по ширине значения,  $b = b_1(x, z) + b_2(x, z)$  — ширина водоема,  $\tau_1 = \frac{\lambda}{8}|u|u$  — напряжение трения на боковой поверхности,  $\lambda$  — коэффициент сопротивления трения,

$$S = \sum_{i=1}^2 \left[ 1 + \left( \frac{\partial b_i}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial b_i}{\partial z} \right)^2 \right]^{1/2}.$$

Коэффициент вертикального турбулентного обмена  $K_z(z)$  определяют по формуле Обухова:

$$K_z(z) = (0.05h)^2 \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 - \frac{g}{\rho_0} \frac{\partial \rho}{\partial z}}$$

( $h$  — толщина верхнего квазиоднородного слоя). В качестве начальных и граничных условий для системы (5.26) принимают условия (5.6)–(5.8). На границе втекания задают  $u, T$ , на выходной границе ставят “мягкое” граничное условие для температуры  $\left(\frac{\partial T}{\partial x} = 0\right)$ .

Для относительно широких волохранилиц ( $B \gg H$ ) схематизируем поперечное сечение трапецией с малым изменением ширины, т.е.  $\frac{\partial b}{\partial z} \ll 1$ . Такая схематизация не учитывает мелководные (прибрежные) участки. В этом случае в уравнениях (5.26) можно пренебречь изменением  $b(x, z)$  от  $z$ . Преобразуем систему (5.26) при  $b = b_0 + b_1(x)$  ( $b_0 = \text{const}$ ) с помощью введения функции тока  $\psi$ :

$$\left(1 + \frac{b_1}{b_0}\right) u = \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad \left(1 + \frac{b_1}{b_0}\right) w = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (5.27)$$

Для определения функции  $\psi$  в случае малого изменения напряжения трения на боковой поверхности по глубине получаем уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = -\left(1 + \frac{b_1}{b_0}\right) \frac{g}{\rho_0} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(K_z \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}\right), \quad (5.28)$$

которое описывает медленные течения неоднородной жидкости. Граничные условия для функции тока имеют вид при  $z = 0$ :

$$\psi = 0, \quad K_z \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = -\frac{\tau}{\rho_0}, \quad (5.29)$$

при  $z = H$ :

$$\psi = q, \quad \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0 \quad (\text{или условие проскальзывания } \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0),$$

где  $q$  — удельный расход на единицу ширины.

Поверхностное касательное напряжение определяется по формуле

$$\tau = \rho_a(1.15 + 0.05W_{10})10^{-3}W_{10}^2.$$

Здесь  $\rho_a$  — плотность воздуха,  $W_{10}$  — скорость ветра на высоте 10 м над водной поверхностью.

В нестационарной задаче необходимо задать начальное условие  $\psi|_{t=0} = \psi_0(x, z)$ .

Для медленных двумерных течений стратифицированной жидкости из уравнений (5.13) в приближении пограничного слоя получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 \omega}{\partial z^2} + \frac{1}{\text{Fr}^2} \frac{\partial \rho}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} &= -\omega, \\ u \frac{\partial \rho}{\partial x} + w \frac{\partial \rho}{\partial z} &= 0, \\ u &= \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad w = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \end{aligned} \tag{5.30}$$

После перехода в этой системе к переменным  $(x, \psi)$  и предположения, что  $\frac{\partial \rho}{\partial \psi} = \text{const}$ , систему (5.30) приводим к уравнению

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right) - \frac{\text{Re}}{\text{Fr}^2} \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0.$$

Это уравнение, удовлетворяющее условиям проскальзывания на горизонтальных границах, имеет решение

$$\psi = \psi_\infty + \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-d_n x} \sin(n\pi z), \tag{5.31}$$

где

$$d_n = \frac{\text{Re}/\text{Fr}^2 - \sqrt{(\text{Re}^2/\text{Fr}^4) + 4\pi^6 n^6}}{2\pi^2 n^2}, \quad \psi = \psi_\infty \quad \text{при } x \rightarrow -\infty.$$

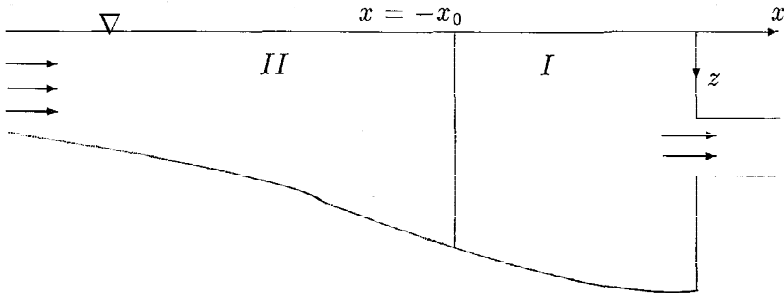


Рис. 5.3. Схема проточного водоема большой протяженности

Коэффициенты  $a_n$  определяются из условия в створе  $x = -x_0$ .

Если положить  $x_0 = 0$ , т.е. применить решение (5.31) для всего водоема, то  $a_n = A_n$ , где  $A_n$  находится по формулам (5.23).

Однако для области течения, примыкающей к водозабору (приплогинный участок, рис. 5.3), пригодно невязкое приближение (5.15). В линейном приближении уравнения (5.14) приводятся к уравнению (5.15), в котором вихрь определяется по формуле

$$\omega = \frac{1}{\Gamma r^2} \frac{d\rho^0}{dz} \cdot \psi + f(z), \quad (5.32)$$

где  $\rho^0 = \rho^0(z)$  — распределение плотности,  $f(z)$  — произвольная функция.

Для определения течения неоднородной жидкости в водоеме большой протяженности с учетом особенностей течения на приплогинном участке необходимо склеить решение (5.31) и (5.15), (5.32) в створе  $x = -x_0$ . Если  $\frac{d\rho^0}{dz} = \text{const}$ , то  $\omega = \mu^2 \psi + f(z)$ ,  $\mu^2 = \frac{1}{\Gamma r^2} \frac{d\rho^0}{dz}$  и из условий непрерывности функции тока, вектора скорости и завихренности в сечении  $x = -x_0$  определяется произвольная функция  $f(z)$ , коэффициенты разложения (5.31)  $a_n$  и решение  $\psi_1$  в области I для  $\mu \leq \pi$ :

$$f(z) = -\mu^2 z + \sum_{n=1}^{\infty} (r_n^2 - d_n^2) e^{d_n x_0} \cdot a_n \sin n\pi z,$$

при  $\mu < \pi$

$$a_n = \frac{A_n e^{-d_n x_0}}{0.5 \left( \frac{d_n^2}{r_n^2} - \frac{d_n}{r_n} \right) e^{r_n x_0} + 0.5 \left( \frac{d_n^2}{r_n^2} - \frac{d_n}{r_n} \right) e^{-r_n x_0} + \frac{r^2 - d_n^2}{r_n^2}},$$

$$\psi_1 = z + \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_n e^{r_n x} + \beta_n e^{-r_n x}) \sin n\pi z + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin(n\pi z) e^{d_n x_0};$$

при  $\mu = \pi$

$$a_1 = \frac{A_1 e^{-d_1 x_0}}{1 - x_0 d_1 + 0.5 x_0^2 d_1^2},$$

$$\psi_1 = z + (0.5 d_1^2 e^{d_1 x_0} x^2 + C_1 x + B_1) a_1 \sin \pi z + \\ + \sum_{n=2}^{\infty} (\lambda_n e^{r_n x} + \beta_n e^{-r_n x}) \sin n\pi z + \sum_{n=2}^{\infty} B_n \sin(n\pi z) e^{d_n x_0},$$

$$r_n = \pi^2 n^2 - \mu^2.$$

Здесь коэффициенты  $\lambda_n$ ,  $\beta_n$ ,  $B_n$ ,  $C_1$  выражаются через  $\mu$ ,  $n$ ,  $d_n$ ,  $a_n$ ,  $x_0$ .

Построенное решение учитывает взаимодействие течений в ближней (прилегающей к водозабору) и дальней зонах проточного водоема.

Для оценки стационарных стратифицированных течений в водоемах большой протяженности с переменной глубиной  $z = H(x)$  запишем уравнение (5.28) в переменных  $\xi = x$ ,  $\eta = z/H(x)$ :

$$\frac{1}{H^4} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \left( K_z \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right) = \left( 1 + \frac{b_1}{b_0} \right) \frac{g}{\rho_0} \left( \frac{\partial \rho}{\partial \xi} - \eta \cdot \frac{dH}{d\xi} \frac{\partial \rho}{\partial \eta} \right). \quad (5.33)$$

Приближенная математическая модель, основанная на уравнении (5.33), учитывает следующие факторы изучаемых течений: стратификацию, влияние вязкости, изменение глубины и площади поперечного сечения проточного водоема.

Температурный режим слабопроточного водоема определяется из решения задачи относительно температуры, т.е. решение последнего уравнения системы (5.26) с учетом граничных условий на свободной поверхности, на дне и на границе втекания. Коэффициент вертикального турбулентного обмена  $K_z(z)$  считается известным.

## § 4. Моделирование гидротермического режима реки

В большинстве прикладных гидравлических задач при исследовании неустановившихся течений в открытых руслах ограничиваются одномерной постановкой. Математические модели основаны на использовании классических уравнений Сен-Венана:

$$\begin{aligned}
 B \frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} &= q, \\
 (1 - Fr_1) \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{g\omega} \left( \frac{\partial Q}{\partial t} + 2v \frac{\partial Q}{\partial x} \right) &= \\
 &= \left( i_0 + \frac{1}{B} \frac{\partial \omega}{\partial x_h} \right) Fr_1 - \frac{Q|Q|}{\omega C^2 R^2}, \quad (5.34)
 \end{aligned}$$

где  $t$  — время;  $x$  — координата, направленная вдоль потока;  $Q$  — расход;  $\omega$  — площадь поперечного сечения русла (живого сечения);  $B$  — ширина свободной поверхности потока;  $z$  — уровень поверхности воды;  $i_0 = -\frac{dz_{\text{дн}}}{dx}$  — уклон дна;  $z = z_{\text{дн}}$  — ордината дна русла;  $v = Q/\omega$  — средняя по сечению скорость воды;  $g$  — ускорение силы тяжести;  $R$  — гидравлический радиус;  $C = C(R)$  — коэффициент Шези, определяемый по формулам Маннинга, Павловского, Железнякова и др.;  $Fr_1 = v^2/a^2$  — число Фруда;  $a = \sqrt{g\omega/B}$  — скорость распространения малых возмущений;  $q$  — путевой приток на единицу длины водотока;  $\frac{\partial \omega}{\partial x_h} = \frac{\partial \omega}{\partial x} \Big|_{h=\text{const}}$ ;  $h$  — глубина. Геометрия русла задается в виде  $z = z_{\text{дн}}(x)$ ;  $b = b(x, \xi)$  — ширина русла на расстоянии  $\xi$  от дна. Тогда по известной глубине  $h = z - z_{\text{дн}}$  определяются  $B, \omega, R$ :

$$\begin{aligned}
 B &= b(x, h) = \frac{\partial \omega}{\partial h}, \\
 \omega &= \int_0^h b(x, \xi) d\xi, \quad R = \omega/\chi, \\
 \chi &= b(x, 0) + 2 \int_0^h \sqrt{1 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial b}{\partial \xi} \right)^2} d\xi, \quad (5.35)
 \end{aligned}$$

$$C = \frac{1}{n} R^{1/6},$$

где  $\chi$  — смоченный периметр.

Для широких русел ( $B \gg h$ ) гидравлический радиус равен средней глубине:  $R = h_{cp} = \omega/B$ .

При решении системы (5.34) для докритических течений ( $Fr_1 < 1$ ), которые реализуются обычно в реальных руслах рек, в области  $x_0 \leq x \leq x_L$ ,  $t > 0$  задаются по одному граничному условию на левой ( $x = x_0$ ) и правой ( $x = x_L$ ) границах:

$$\begin{aligned} Q|_{x=x_0} = f_1(t) \quad \text{или} \quad h|_{x=x_0} = h(t), \\ h|_{x=x_L} = h(q) \quad \text{или} \quad h|_{x=x_L} = h(t). \end{aligned} \quad (5.36)$$

Для нестационарных задач необходимо знать распределения искомых функций по длине водотока в начальный момент времени:

$$Q|_{t=0} = Q^0(x), \quad h|_{t=0} = h^0(x). \quad (5.37)$$

При расчете неустановившегося движения воды в реальных условиях необходима схематизация русла водотока. Весь водоток разбивается на отдельные участки, на которых основные характеристики изменяются непрерывно. Для простоты полагают, что внутри участка геометрические характеристики водотока изменяются по линейному закону. Границей двух участков может быть: 1) скачок расхода; 2) разрыв или резкое изменение геометрических характеристик русла; 3) наличие водпоста. Притоки (оттоки) учитываются в граничных условиях — условиях сопряжения для расхода и уровня.

При наличии ледяного покрова уменьшается пропускная способность русла. Это связано с увеличением сопротивления движения воды, поэтому для подледного потока применяют приведенный коэффициент шероховатости, учитывающий шероховатость поверхности льда и русла:

$$n_{пр} = \frac{\chi n + \chi_{л} n_{л}}{\chi + \chi_{л}},$$

где  $\chi$  — смоченный периметр русла,  $\chi_{л}$  — часть смоченного периметра, соответствующая нижней поверхности ледяного покрова,

$n$  — шероховатость русла,  $n_{\pi}$  — шероховатость нижней поверхности льда,  $n_{\text{пр}}$  — приведенный коэффициент шероховатости русла. Гидравлический радиус находится по формуле  $R_{\pi} = \omega / (\chi + \chi_{\pi})$ .

Иногда для оценки скорости течения на достаточно протяженном участке реки используют стационарное приближение ( $z = z(x)$ ,  $Q \equiv \text{const}$ ):

$$(1 - \text{Fr}_1) \frac{\partial z}{\partial x} = \left( i_0 + \frac{1}{B} \frac{\partial \omega}{\partial x_h} \right) \text{Fr}_1 - \frac{Q^2}{\omega^2 C^2 R}. \quad (5.38)$$

Зная уровень воды на границе рассматриваемого участка, из уравнения (5.38) с учетом соотношений (5.35) находятся  $\omega(x)$  и  $C(x)$ , а из формулы  $v = Q/\omega$  определяется скорость течения.

**Упрощенное уравнение для расчета температурного режима реки.** Температурный режим водных потоков описывается уравнением теплопроводности Фурье — Кирхгофа:

$$c\rho \left( \frac{\partial T}{\partial t} + v_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_y \frac{\partial T}{\partial y} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda_x \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \lambda_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \lambda_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) + S_v, \quad (5.39)$$

где  $x, y, z$  — декартовы координаты (ось  $x$  направлена вдоль потока, ось  $z$  — по вертикали вниз),  $t$  — время,  $T$  — температура,  $v_x, v_y, v_z$  — составляющие вектора скорости,  $c$  — удельная теплоемкость среды,  $\rho$  — плотность среды,  $S_v$  — внутренние источники тепла. Для водных потоков в руслах рек и каналов обычно принимают  $v_y = v_z = 0$  ( $v_x = v$ ),  $\frac{\partial}{\partial y} \left( \lambda_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) = 0$ , тогда из уравнения теплопроводности (5.39) следует

$$\frac{\partial T}{\partial t} + v \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{1}{c\rho} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda_x \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \lambda_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) + S_v \right].$$

В естественных руслах поток турбулизированный, поэтому температура воды в фиксированном сечении мало изменяется по глубине ( $\lambda_z = \infty$ ). В качестве дальнейшего предположения пренебрегаем изменением температуры за счет продольной ( $\lambda_x$ ) теплопроводности



по сравнению с конвективным переносом. Тогда, учитывая граничные условия на поверхности воды и на дне, получим упрощенное уравнение переноса для температуры:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + v \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{S_n + S_{\text{дно}} + \bar{S}_v \cdot B}{c\rho} \cdot \frac{1}{\omega} + \frac{q(T_q - T)}{\omega}. \quad (5.40)$$

Здесь  $S_n$  — полный поток тепла через свободную поверхность;  $S_{\text{дно}}$  — теплообмен с ложем водоема;  $S_v = S_{\text{дин}} + S_{\text{шт}}$ ,  $S_{\text{дин}}$  — тепло, образующееся при движении воды за счет перехода механической энергии в тепловую;  $S_{\text{шт}}$  — источник тепла за счет шугообразования;  $\bar{S}_v = S_v \cdot \frac{\omega}{B}$ ;  $q$  — распределенный приток воды;  $T_q$  — температура воды, поступающей с притоком;  $B$  — ширина свободной поверхности потока;  $\omega$  — площадь живого сечения русла.

Полный поток тепла через свободную поверхность обычно представляется в виде

$$S_n = S_{sn} + S_a - S_r - S_t - S_c = S_{an} - S_t - S_c, \quad (5.41)$$

где  $S_{sn}$  — поглощенное солнечное излучение (ккал/(м<sup>2</sup>·ч)),  $S_a$  — поглощенное водой атмосферное излучение,  $S_r$  — длинноволновое излучение водной поверхности,  $S_t$  — турбулентный обмен между водной поверхностью и атмосферой,  $S_c$  — поток тепла, обусловленный испарением,  $S_{an}$  — суммарный радиационный теплообмен.

Существуют различные формулы для вычисления составляющих теплового потока через свободную поверхность. Ниже для определения  $S_n$  будем использовать две методики.

Составляющие теплообмена через свободную поверхность определяются соотношениями

$$\begin{aligned} S_{an} &= 0.94S_c(1 - 0.65C_o^2) + \\ &+ 4.46 \cdot 10^{-13}(1 + 0.17C_o^2)(T_a + 273.15)^6 - 264 - 4.7T_s, \\ S_t &= 0.459f_1(W_2)(T_s - T_0), \\ S_c &= f(W_2)(e_s - e_a). \end{aligned} \quad (5.42)$$

Здесь  $S_{an}$  — радиационный теплообмен;  $S_c$  — солнечная радиация при ясном небе;  $T_a$  — температура воздуха (°C);  $T_s$  — температура

поверхности воды,  $C_o$  — облачность (доли единицы);  $e_a$  — давление насыщенного пара в атмосфере, измеренное на одной высоте с  $T_a$ ;  $e_s$  — давление насыщенного пара при данной температуре водной поверхности (мб);  $f_1(W_2)$  — функция скорости ветра для теплового потока (ккал/(ч·м<sup>2</sup>) миллиметров ртутного столба);  $W_2$  — скорость ветра на высоте 2 м (м/с).

Функция  $f_1(W_2)$  определяется формулами:

$$f_1(W_2) = \begin{cases} 4.3W_2 & \text{— для естественной} \\ & \text{неподогретой} \\ & \text{водной поверхности} \\ & (\Delta\theta < 0.0148W_2^3), \\ 3.54W_2 + 3.09(\Delta\theta)^{1/3} & \text{— для искусственно} \\ & \text{подогретой} \\ & \text{водной поверхности} \\ & (\Delta\theta \geq 0.0148W_2^3). \end{cases} \quad (5.43)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \Delta\theta &= \frac{T_s + 273.15}{1 - 0.378e_s/p} - \frac{T_a + 273.15}{1 - 0.378e_a/p} \\ e_s &= 25.4 \exp\left(17.62 - \frac{5278}{T_s + 273.15}\right), \\ e_a &= 25.4 \exp\left(17.62 - \frac{5278}{T_a + 273.15}\right), \\ T_d &= \frac{(T_a + 273.15)5278}{5278 - \ln \psi(T_a + 273.15)} - 273.15, \end{aligned} \quad (5.44)$$

где  $T_a$  — температура конденсации (°C);  $p$  — атмосферное давление (миллиметры ртутного столба);  $\psi$  — относительная влажность воздуха.

Для вычисления составляющих теплообмена через свободную поверхность применяются также следующие формулы:

$$\begin{aligned}
 S_t &= 1.625(K + W_2)(T_a - T_s), \\
 S_e &= 2.549(K + W_2)(e_s - e_a), \\
 \frac{1}{1.163} S_{an} &= S_e(1 - r)(1 - 0.14C_o - 0.53C_n) - \\
 &- 0.91\sigma(273.15 + T_s)^4 + \\
 &+ \sigma(0.62 + 0.05\sqrt{e})(1 + 0.12C_o + 0.12C_n)(273.15 + T_a),
 \end{aligned} \tag{5.45}$$

где  $K$  — коэффициент, зависящий от разности температур между водой и воздухом, задается табличным способом;  $C_o$ ,  $C_n$  — общая и нижняя облачность (доли единицы);  $r$  — коэффициент отражения водной поверхности (альбедо);  $\sigma = 5.67 \cdot 10^{-7}$  — постоянная Стефана — Больцмана;  $e$  — упругость водяного пара у подстилающей поверхности.

Если радиационный теплообмен находить по соотношению (5.42), то для полного потока тепла через свободную поверхность можно получить формулу

$$\begin{aligned}
 S_n &= S_{an} + 4.46 \cdot 10^{-13}(T_a + 273.15)^6(1 + 0.17C_o^2) - \\
 &- \left\{ 264 + 4.7T_s + f(W_2)[(e_s - e_a) + a_1 \cdot 0.459(T_s - T_a)] \right\},
 \end{aligned} \tag{5.46}$$

включающую обе методики.

В первом случае:  $a_1 = 1$ ,  $f(W_2)$  вычисляется по (5.43). Во втором случае:  $a_1 = 1.396$ ,  $f(W_2) = 2.537(K + W_2)$ .

Иногда полный поток тепла через свободную поверхность представляется в виде

$$\frac{S_n}{c\rho} = K_e(T_e - T), \quad K_e = \frac{K_T}{c\rho}. \tag{5.47}$$

В этих формулах  $K_T$  — коэффициент теплообмена на поверхности воды (ккал/м<sup>2</sup>·ч·°С),  $K_e = \frac{K_T}{3.6 \cdot 10^6}$  м/с,  $T_e$  — равновесная температура, определяемая как температура, при которой для данных метеорологических условий полный поток тепла  $S_n$  равен нулю. Величины  $T_e$  и  $K_e$  определяются из уравнения для полного потока тепла

через свободную поверхность (5.42), (5.46). Из уравнения  $S_n = C$  при  $T_S = T_e$  итерационным методом определяется  $T_e$ . Пролифференцировав по  $T_S$  соотношение для полного потока тепла (5.46) в некоторой средней точке  $T_S^* = \frac{1}{2}(T_S + T_e)$ , получаем соотношение для определения  $K_T$ :

$$K_T = 4.7 + f(W_2)(\beta_S + 0.459\alpha_1), \quad (5.48)$$

где

$$\beta_S = 25.4 \frac{5278}{(T_S^* + 273.15)^2} \exp \left( 17.62 - \frac{5278}{(T_S^* + 273.15)^2} \right).$$

На температурный режим водотока согласно уравнению (5.40) оказывают влияние геометрия русла, скорость течения, поток тепла через свободную поверхность, зависящий от метеоданных и температуры воды, тепловые сбросы.

При наличии притока температуру воды на границе участков будем определять как средневзвешенную:

$$T_+ = \frac{T_- Q_- + T_{\text{пр}} Q_{\text{пр}}}{Q_- + Q_{\text{пр}}}. \quad (5.49)$$

Знак “+” относится к величине параметра в начале участка, “-” — к значению параметра в конце предыдущего участка,  $Q_{\text{пр}}$ ,  $T_{\text{пр}}$  — расход и температура притока.

Представляет интерес выяснение основных причин, вызывающих увеличение длины полыньи в нижнем бьефе Красноярской ГЭС в сравнении с близкими по климатическим условиям, напорам, величинам сбросных расходов воды и характеру регулирования Усть-Илимской и Братской ГЭС. Сравнительная характеристика Красноярской и ангарских ГЭС приводится в таблице. Качественные оценки длины полыньи можно получить, используя стационарное решение уравнения (5.40), из которого следует

$$x_0 = \frac{\omega v}{K_e B} \ln \left( 1 - \frac{T_0}{T_e} \right). \quad (5.50)$$

Здесь  $x_0$  — расстояние от ГЭС до створа нулевой изотермы (нулевой изотермой называют сечение, в котором вода достигает нулевой

Таблица 5.1

Сравнительная характеристика Красноярской и ангарских ГЭС

ГЭС	Напор (м)	Сбросные расходы воды на выходе с ГЭС зимой (м <sup>3</sup> /с)	Температура воды на выходе с ГЭС зимой (0°С)	Уклоны в нижнем бьефе	Длина полынны (км)	Период наблюдений
Братская	106	1000-3900	3.0-1.1	0.07-0.32	20-95	1962-1980
Усть-Илимская	89	1050-3810	2.9-0.74	0.10-0.37	25-52	1976-1982
Красноярская	100	1600-4000	3.3-1.2	0.15-1.36	105-310	1969-1986

температуры);  $T_0$  — температура воды, поступающей из водохранилища. Величина  $q = \frac{\omega}{B}v = \frac{Q_{сб}}{B}$  — гидравлическая характеристика потока, характеризующая удельный расход воды (на единицу ширины русла),  $Q_{сб}$  — расход воды через турбины ГЭС.

Средние значения ширины реки ниже Красноярской ГЭС — 600 м, ниже Усть-Илимской ГЭС — 1200 м. Для Енисея ниже Красноярской ГЭС характерно компактное русло шириной 400–800 м и глубиной 3–8 м. Для Ангары ниже Усть-Илимской и Братской ГЭС характерна русловая долина шириной 600–3000 м и глубинами до 3.5 м, что и приводит к более быстрому охлаждению потока в нижних бьефах ангарских ГЭС. При среднесуточных  $Q_{сб} = 2500$  м<sup>3</sup>/с для Красноярской ГЭС и 2300 м<sup>3</sup>/с для Усть-Илимской соответствующие величины удельного расхода равны 4.2 м<sup>2</sup>/с и 1.9 м<sup>2</sup>/с. В силу этого согласно (5.50) при прочих близких параметрах должно быть различие значений  $x_0$  в 2.2 раза. Заметное влияние на температурный режим Енисея в нижнем бьефе Красноярской ГЭС оказывают также тепловые сбросы, в то время как в нижних бьефах Братской

и Усть-Илимской ГЭС тепловые сбросы отсутствуют. Таким образом, увеличенная полынья ниже Красноярской ГЭС в сравнении с Братской и Усть-Илимской ГЭС при прочих равных условиях, определяется повышенными удельными сбросными расходами воды и наличием тепловых стоков.

## § 5. Математическое моделирование динамики кромки ледяного покрова в нижнем бьефе ГЭС

Строительство крупных гидроэлектростанций приводит к изменению температурного и ледового режимов реки в нижнем бьефе ГЭС. Длина образующейся полыньи зависит от температуры воды, сбрасываемой в нижний бьеф из водохранилища, режима пусков ГЭС, метеословий, а также тепловых сбросов промышленных предприятий. Наблюдения за перемещением кромки ледяного покрова (ЛП) показывают, что скорость наступления ледостава на Енисее может меняться от 1–2 км/сут до 30–40 км/сут, а иногда достигает 80 км/сут. В период потеплений может происходить резкое отступление кромки ЛП. В пунктах наблюдений в течение зимы фиксируют 2–4 подвижки.

Основными вопросами ледотермического режима открытых водотоков являются исследования изменений во времени створа кромки ЛП, толщины его по длине водотока, расхода и общего количества образующейся шуги. Различают три основных ледотермических режима в каналах и нижних бьефах ГЭС:

- 1) перемещение кромки льда вверх по течению (наступление), имеет место, когда кромка ЛП расположена ниже створа нулевой изотермы;

- 2) отступление кромки ЛП (температура воды у кромки льда выше нуля);

- 3) кромка ледяного покрова не перемещается.

Обычно нижний бьеф разбивается на несколько участков. Для первого режима выделяют от трех до семи участков. В данной работе при исследовании первого режима ограничимся расчетной схемой,

рассматривающей три участка:

I — от плотины ГЭС до нулевой изотермы;

II — от нулевой изотермы до кромки ЛП;

III — устойчивый ледяной покров.

Для второго и третьего режимов выделяют два участка:

I — от плотины до створа кромки ЛП;

II — ниже створа кромки ЛП.

При математическом моделировании ледотермического режима реки исходная задача разделяется на подзадачи, каждая из которых описывает отдельные физические явления (гидротермический режим реки, процессы ледообразования, динамику кромки ЛП). Численное моделирование гидроледотермического режима реки основывается на использовании одномерных уравнений Сен-Венана и упрощенного уравнения переноса для температуры.

Для изучения процессов ледообразования и динамики кромки ЛП выделяются следующие задачи: определение изменения толщины льда; определение общего количества образующейся шуги; моделирование перемещения кромки ЛП.

## 1. Математическая модель для определения толщины речного льда и положения кромки льда при отступлении

Рассматриваются участки водотоков, на которых сформировался сплошной ледяной покров. В практических расчетах часто используется приближенная модель, основанная на квазистационарном температурном режиме в затвердевшей области. В этом случае из баланса тепловых потоков на границе раздела вода—лед с учетом скрытой теплоты фазового перехода получают уравнение

$$L\rho_{\text{л}}\frac{d\xi}{dt} = \lambda_{\text{л}}\frac{T_{\text{ф}} - T_{\text{п}}}{\xi} - S_{\text{в-л}}. \quad (5.51)$$

Здесь  $\xi$  — толщина льда,  $\rho_{\text{л}}$  — плотность льда;  $\lambda_{\text{л}}$  — коэффициент теплопроводности льда,  $T_{\text{ф}}$  — температура плавления льда (для пресной воды  $T_{\text{ф}} = 0^{\circ}\text{C}$ ),  $T_{\text{п}}$  — температура поверхности льда,  $L$  — скрытая теплота плавления,  $t$  — время,  $S_{\text{в-л}}$  — поток тепла из толщи

водной массы. По закону Ньютона  $S_{в-л}$  представляется в виде

$$S_{в-л} = \alpha(T_{в} - T_{ф}), \quad (5.52)$$

где  $T_{в}$  — температура воды,  $\alpha$  — коэффициент внешней теплопроводности, для определения которого используется соотношение

$$\alpha = 0.023 \cdot \lambda_{в} \cdot \text{Pr}^{1/3} \cdot \text{Re}^{0.8} / D_{э}, \quad (5.53)$$

где  $D_{э} = 4\omega/p$  — эквивалентный диаметр сечения водотока,  $\omega$  — площадь поперечного сечения,  $p$  — периметр,  $\text{Pr}$  — число Прандтля,  $\text{Re}$  — число Рейнольдса,  $\lambda_{в}$  — коэффициент физической теплопроводности воды,  $\lambda_{в} = 0.0012$  кал/(с·см·°C).

В естественных условиях лед практически всегда покрыт слоем снега. Тепловое сопротивление слоя снега учитывается уравнением (5.51) с заменой  $\xi$  в правой части на  $\xi_{э} = \xi + \xi_{с} \cdot \lambda_{л}/\lambda_{с}$ , где  $\xi_{с} \frac{\lambda_{л}}{\lambda_{с}}$  — эквивалентная толщина слоя снега,  $\lambda_{с}$  — коэффициент теплопроводности снега.

Если температура воздуха меняется в больших пределах, а лед достаточно толстый, то профиль температуры в нем может отличаться от линейного. Уточнить приближенное решение можно с помощью последовательных приближений. В качестве нулевого приближения берется линейный профиль температуры в слое льда. Подставляя найденную температуру в левую часть уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial T_{л}}{\partial t} = \alpha_{л} \frac{\partial^2 T_{л}}{\partial y^2},$$

находим первое приближение:

$$T_{л}^{(1)} = T_{п} + \frac{T_{ф} - T_{п}}{\xi} z + \frac{z}{\alpha_{л}} \left( \frac{z}{2} - \frac{z^2}{6\xi} - \frac{\xi}{3} \right) \frac{dT_{п}}{dt} - \frac{T_{ф} - T_{п}}{6\alpha_{л}} \left( \frac{z^2}{\xi^2} - 1 \right) \frac{d\xi}{dt}, \quad (5.54)$$

где  $\alpha_{л}$  — коэффициент температуропроводности льда.

Учитывая соотношение (5.54), из условия Стефана (5.51) получаем уравнение

$$\left[ L\rho_{л} + \frac{\lambda_{л}(T_{ф} - T_{п})}{3\alpha_{л}} \right] \frac{d\xi}{dt} = \lambda_{л} \frac{T_{ф} - T_{п}}{\xi} + \frac{\lambda_{л}}{6\alpha_{л}} \frac{dT_{п}}{dt} - S_{в-л}. \quad (5.55)$$



Для определения температуры поверхности снежно-ледяного покрова используются эмпирические формулы.

Таким образом, изменение толщины льда описывается уравнением (5.51) или (5.55).

Если распределение температуры воды изменяется так, что поток, добегаая до кромки ЛП, не успевает остыть до  $0^{\circ}\text{C}$ , то кромка льда может либо отступать, либо оставаться на месте. Когда температура подледного потока достаточно высока, происходит подтаивание ледяного покрова снизу и толщина льда может уменьшаться до критического значения  $\xi_{\min}$ , определяемого из условия механической устойчивости ледяного покрова у кромки. Обычно используется следующая зависимость  $\xi_{\min}$  от скорости потока  $v$ :

$$\xi_{\min} = \begin{cases} v^2 & \text{при } v \leq 1 \text{ м/с,} \\ 0.5(1 + v) & \text{при } v > 1 \text{ м/с.} \end{cases}$$

Считается, что если идет процесс стаивания, то в ближайшей к кромке ( $x = x_{\text{кр}}$ ) точке  $x_1$ , где  $\xi$  достигает значения  $\xi_{\min}$ , происходит скалывание ЛП, таким образом, получается новое значение  $x_{\text{кр}}$  ( $x_{\text{кр}} = x_1$ ). С помощью данной процедуры находится положение кромки ЛП при отступлении.

## 2. Моделирование наступления кромки ледяного покрова

Если нулевая изотерма находится выше кромки ледяного покрова, то кромка льда перемещается вверх по потоку. На участке ниже нулевой изотермы при охлаждении водной поверхности образуется ледяной материал (шуга), который большей частью задерживается у кромки и способствует нарастанию ледяного поля. Скорость перемещения кромки по льду вверх по реке определяется объемом ледяного материала и начальной толщиной льда (на кромке). Для оценки расхода шуги используется уравнение баланса шуги:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{Q_{\text{ш}}}{v_{\text{ш}}} \right) + \frac{\partial Q_{\text{ш}}}{\partial x} = B \frac{S_n}{L \rho_{\text{л}}}, \quad (5.56)$$

где  $Q_{\text{ш}}$  — расход шуги,  $v_{\text{ш}}$  — скорость перемещения шуги вниз по течению (предполагается, что  $v_{\text{ш}}$  равна скорости потока),  $B$  — ширина

свободной поверхности,  $S_n$  — теплообмен водной поверхностью. Для определения расхода шуги обычно применяют стационарное приближение

$$\frac{\partial Q_n}{\partial x} = B \frac{S_n}{L\rho_n}. \quad (5.57)$$

Для уравнений (5.56) и (5.57) задается граничное условие в начальном створе:

$$Q_n \Big|_{x=x_0} = 0. \quad (5.58)$$

Предполагается, что весь ледовый материал, образованный на участке от  $x_0$  до  $x_{кр}$ , идет на формирование ЛП. Здесь  $x = x_0$  — координата, характеризующая положение нулевой изотермы,  $x = x_{кр}$  — положение кромки ЛП. Условие баланса ледового материала представляется в виде

$$\frac{dx_{кр}}{dt} = - \frac{Q_{лкр}}{B_{кр} \cdot \xi_{мин}}, \quad (5.59)$$

где  $Q_{лкр}$  — расход ледового материала у кромки,  $B_{кр}$  — ширина русла у кромки.

Если на участке шугообразования имеются притоки теплой воды, то их можно приближенно учесть следующим способом. Пусть  $Q_n^1$  — объем ледяного материала в створе впадения притока, тогда количество тепла, требуемое для таяния всего льда за единицу времени  $W_n = L\rho_n Q_n^1$ . Тепло, поступающее с притоком в единицу времени, оценивается величиной  $W_{пр} = c\rho Q_{пр} T_{пр}$ , где  $Q_{пр}$  и  $T_{пр}$  — расход и температура воды притока соответственно,  $\rho$  — плотность воды,  $c$  — удельная теплоемкость воды.

Если  $\mu = \frac{W_{пр}}{W_n} > 1$ , то ледяной материал частично растает и количество оставшегося льда (в предположении, что на участке  $(x_{пр}, x_{пр} + \Delta x)$  все тепло, приносимое притоком, пойдет на таяние льда) находится по соотношению

$$Q_n^+ = Q_n^1 - \frac{c\rho(Q_{пр} \cdot T_{пр})}{L\rho_n}. \quad (5.60)$$

В этом случае при решении уравнения (5.56) или (5.57) на участке  $(x_{пр}, x_{пр} + \Delta x)$  учитывается условие (5.60).

Если  $\mu \leq 1$ , то лед может растаять полностью, а вода нагреется выше нуля. Предполагается, что весь лед  $Q_{\text{л}}^1$  успевает растаять на участке  $(x_{\text{пр}}, x_{\text{пр}} + \Delta x)$ , средневзвешенное значение температуры оценивается формулой

$$T^+ = \frac{T_{\text{пр}} Q_{\text{пр}}}{Q_1 + Q_{\text{пр}}} - \frac{L \rho_{\text{л}} Q_{\text{л}}^+}{c \rho (Q_1 + Q_{\text{пр}})}, \quad (5.61)$$

где  $Q_1$  — расход основного потока,  $T^+$  — температура воды после перемешивания. Ниже створа  $(x_{\text{пр}} + \Delta x)$  температура воды в реке определяется из решения уравнения переноса с учетом граничного условия (5.61).

Для уравнений (5.56) и (5.59) необходимо задать начальные условия

$$Q_{\text{л}} \Big|_{t=0} = Q_{\text{л}}^0(x), \quad x_{\text{кр}} \Big|_{t=0} = x_{\text{кр}}^0. \quad (5.62)$$

Уравнения (5.56), (5.57), (5.59) с учетом условий (5.58), (5.60)–(5.62) решаются численно.

Рассмотренная модель позволяет найти перемещение кромки ЛП вверх по течению.

Описанные модели учитывают влияние неоднородности морфометрических характеристик по длине реки, нестационарности метеоусловий и гидравлических характеристик потока на динамику кромки ледяного покрова.

Выполнены расчеты на ЭВМ температурного и ледового режимов Енисея в нижнем бьефе Красноярской ГЭС для реальных метеоданных и расходов зимы 1984–1985 гг., в которых использовались данные о геометрии рассматриваемого участка русла в 47 створах, данные о температуре и расходе притоков, об уклонах свободной поверхности реки и шероховатости русла. На рис. 5.4 приведены результаты расчетов движения нулевой изотермы и ледяной кромки и данные натурных наблюдений, которые получены Красноярским территориальным управлением Госкомгидромета СССР. Видно, что теоретические результаты согласуются с данными наблюдений за динамикой полыньи в рассматриваемый период.

Были проведены численные эксперименты по определению влияния на ледовый режим нижнего бьефа Красноярской ГЭС температуры воды, сбрасываемой из водохранилища. В представленных

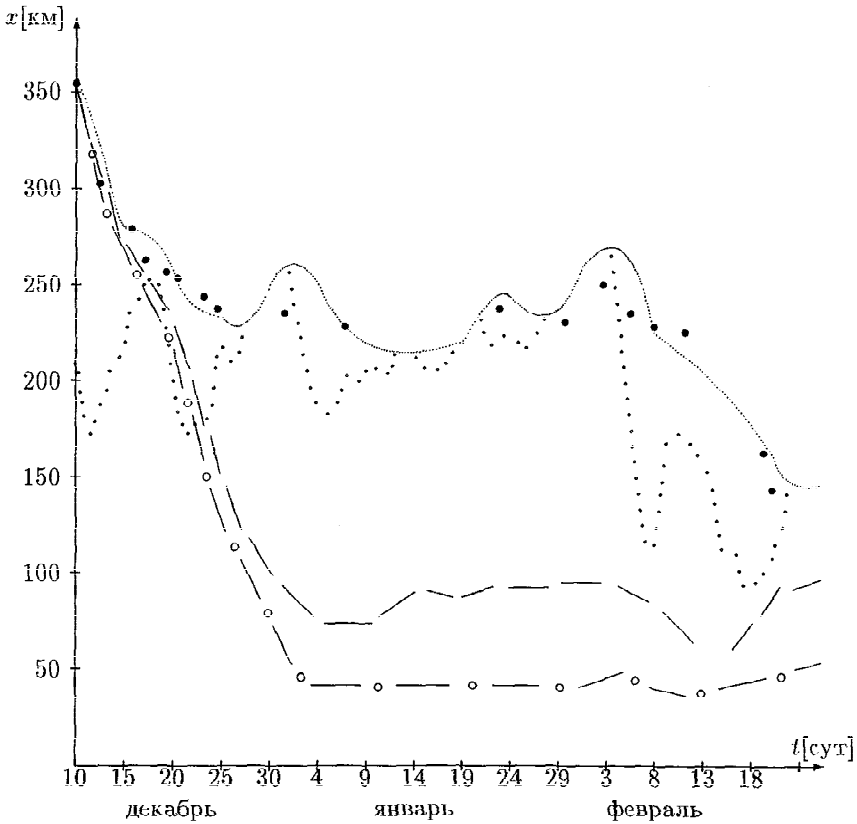


Рис. 5.4. Натурные данные и расчеты динамики полыньи в нижнем бьефе Красноярской ГЭС для зимы 1984–1985 гг.:

- — положение кромки льда, натурные данные;
- — — — — положение кромки льда, расчет  $T_n = 3.4 \pm 2^\circ\text{C}$ ,  $Q$  — переменная;
- ⋯ — — — — — положение нулевой изотермы, расчет;
- — — — — положение кромки льда, расчет ( $T_n = 0.9^\circ\text{C}$ ,  $Q = 2540 \text{ м}^3/\text{с}$ );
- - - - - положение кромки льда, расчет ( $T_n = 0.9^\circ\text{C}$ ,  $Q = 1800 \text{ м}^3/\text{с}$ )

на рис. 5.4 расчетах температура воды в створе ГЭС изменялась от 1°C в декабре до 0.5°C в феврале (в естественных условиях она менялась от 3.4°C до 2°C соответственно). Результаты расчетов показывают, что если бы удалось понизить температуру вытекающей из водохранилища воды до указанных значений, то минимальная длина полыньи сократилась бы приблизительно на 100 км.

Рассмотренные численные алгоритмы позволяют описать динамику кромки ледяного покрова в нижнем бьефе ГЭС и оценить влияние различных параметров на длину полыньи.

## § 6. Моделирование кислородного режима водоемов и водотоков

Один из основных показателей жизнедеятельности водной среды — растворенный кислород (РК). Критерием загрязнения отходами является биохимическое потребление кислорода (БПК), за счет которого в основном уменьшается содержание РК в реке и, следовательно, ухудшается качество воды. В силу важности взаимодействия между РК и БПК при исследовании качества воды широко применяются РК и БПК модели.

Математические модели процессов самоочищения позволяют получить распределение концентрации органического вещества и растворенного кислорода в водотоках. В моделях различного уровня учитываются: поступление кислорода за счет фотосинтеза; поступление кислорода из атмосферы; расход кислорода на биохимическое окисление органики в воде; расход кислорода на дыхание водорослей, потребление донными отложениями и на нитрификацию. Скорость биохимического окисления сильно зависит от интенсивности перемешивания воды. Гидрофизические факторы целиком определяют скорость поступления кислорода в воду из атмосферы, а также в значительной степени воздействуют на интенсивность фотосинтеза и скорость потребления кислорода донными отложениями.

На рис. 5.5 показаны процессы, которые считаются определяющими в РК- и БПК-взаимодействии.

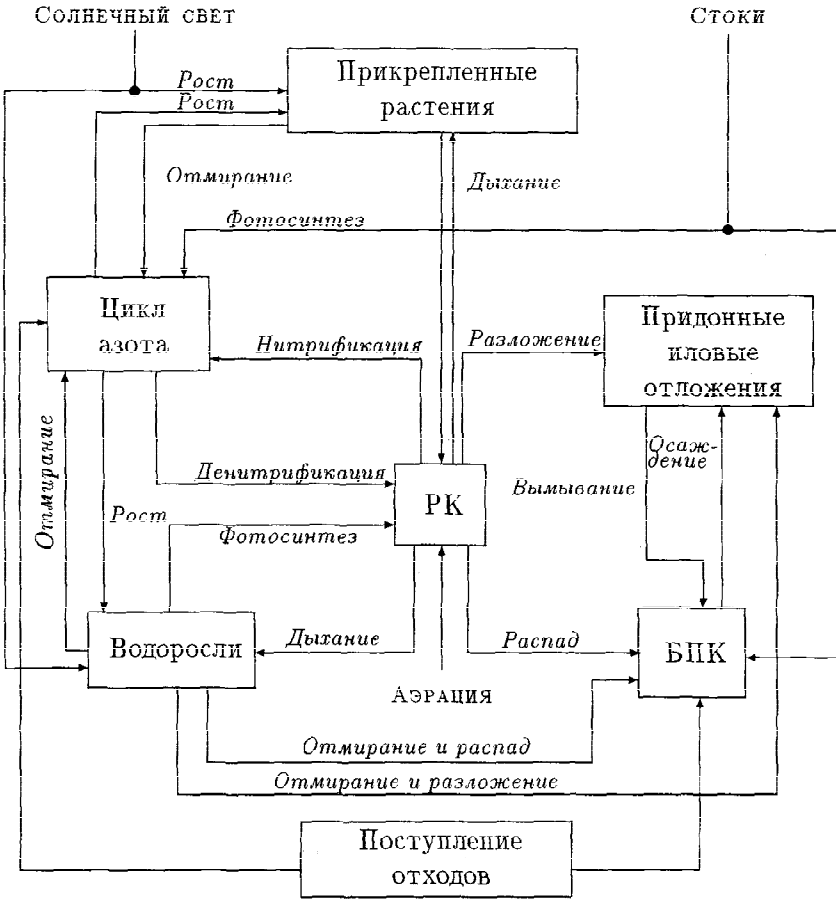


Рис. 5.5. Факторы, влияющие на взаимодействие РК и БПК

Первая математическая модель качества воды была предложена в работах Стритера и Фелпса. Уравнения модели имеют вид:

$$\begin{aligned} \text{РК:} \quad \frac{dc}{dt} &= k_2(c_s - c) - k_1x, \\ \text{БПК:} \quad \frac{dx}{dt} &= -k_1x. \end{aligned} \tag{5.63}$$

Здесь  $c$  — концентрация растворенного кислорода (РК);  $c_s$  — концентрация насыщения кислорода;  $x$  — концентрация легкобиокисляемого органического вещества, измеренная в единицах потребления кислорода (БПК);  $k_1$  — постоянная скорости распада БПК (скорость биохимического окисления);  $k_2$  — постоянная скорости реаэрации для РК, зависящая от температуры воды;  $t$  — время. Для “поршневой” модели время  $t$  для водотока трактуется как время добегаания, что будет неверным при неравномерном распределении кислорода по сечению реки.

Однако согласно схеме, описывающей факторы, влияющие на взаимодействие РК и БПК, уравнения (5.63) являются существенным упрощением процессов взаимодействия РК и БПК.

Имеется большой набор эмпирических формул для определения  $k_2$ . Для более точных расчетов применяются значения коэффициента реаэрации, найденные экспериментально.

Часто применяются формулы вида

$$k_2 = \alpha \cdot u^a \cdot h^{-b}, \tag{5.64}$$

где  $\alpha$  — коэффициент пропорциональности,  $u$  — скорость течения,  $h$  — глубина потока,  $a, b$  — постоянные.

Для отдельных участков реки Фелпсом и Стритером построены аналитические решения уравнений (5.63), которые широко используются в практических расчетах.

В дальнейших работах применялись модификации модели Фелпса — Стритера, в которых линейная зависимость интенсивности реакции от концентрации органического вещества заменена более сложными функциональными зависимостями.

В работе Доббинза предложены уравнения:

$$\begin{aligned} \text{РК:} \quad \frac{dc}{dt} &= k_2(c_s - c) - k_1x + D_B, \\ \text{БПК:} \quad \frac{dx}{dt} &= -k_1x - k_3x + L_a. \end{aligned} \quad (5.65)$$

В этих уравнениях введены новые параметры:  $k_3$  — постоянная скорости ухода БПК за счет осаждения и/или адсорбции;  $D_B$  — общая скорость увеличения концентрации РК в реке за счет процессов разложения придонных иловых отложений и фотосинтеза растений;  $L_a$  — общая скорость увеличения концентрации БПК в реке, например, за счет местного поверхностного стока.

В работе Кемпа предлагаются следующие уравнения:

$$\begin{aligned} \text{РК:} \quad \frac{dc}{dt} &= k_2(c_s - c) - k_1x + P', \\ \text{БПК:} \quad \frac{dx}{dt} &= -k_1x - k_3x + p. \end{aligned} \quad (5.66)$$

Здесь  $P'$  — скорость поступления РК за счет фотосинтеза, осуществляемого водорослями;  $p$  — скорость поступления БПК в проточную систему за счет вымывания из придонных иловых отложений.

Существует много других модификаций моделей РК — БПК.

Развитием перечисленных моделей явилась разработка методики расчета РК и БПК для водоемов и водотоков произвольной конфигурации. С этой целью рассматривается обобщение уравнений вида (5.63), учитывающее адвективный и диффузионный переносы веществ. Пусть  $x(r, t)$  — концентрация БПК в момент  $t$  в точке водотока с пространственной координатой  $r$ . Изменение БПК во времени и в пространстве описывается уравнением

$$\frac{\partial x}{\partial t} + V(r, t) \frac{\partial x}{\partial r} = D \frac{\partial^2 x}{\partial r^2} - k_1x + f(r, t), \quad (5.67)$$

где  $V(r, t)$  — скорость течения,  $D$  — коэффициент турбулентной диффузии,  $f(r, t)$  — поступление загрязнений (БПК) в водоток. Аналогичный вид имеет уравнение для РК.

Уравнения вида (5.67) можно записать для двумерных и трехмерных задач. Поле скоростей находится из решения гидротермической задачи.



## § 7. Гидрохимические модели.

### Модели динамики фосфора

Гидрохимические процессы являются одними из основных, оказывающих влияние на водные экосистемы. В качестве примера возьмем фосфор — питательное вещество для водорослей. В математических моделях учитываются последовательности стадий трансформации форм фосфора в водной среде. Рассмотрим модель, в которой учитывается взаимодействие растворенных минерального (DIP) и органического (DOP) соединений фосфора (P), его фракций в составе детрита (PD), биомасс фитопланктона (FP) и бактерий (BP). В данной модели учитываются те фракции фосфора и те процессы, которые имеют первостепенное значение в динамике экосистемы, в развитии фитопланктона и при эвтрофировании водных объектов: продукция фитопланктона и потребление водорослями минерального фосфора, бактериальная продукция и минерализация органического фосфора, метаболические выделения фитопланктона и бактерий, их отмирание с образованием детрита и его последующим разложением, а также обменные процессы биогенным веществом в слое вода — дно.

Напомним основные понятия.

*Эвтрофирование* — накопление в водных объектах биогенных элементов под воздействием антропогенных или природных факторов. Ведет сначала к повышенной биологической продуктивности водных бассейнов, а затем с возрастающей нехваткой кислорода — к заморам.

*Фитопланктон* — совокупность микроскопических растений, обитающих в воде и пассивно передвигающихся под влиянием водных течений.

*Детрит* — мелкие частицы остатков организмов и их выделений в водной среде (взвешенные в воде или осевшие на дно водоема).

Математическая модель динамики фосфора основана на уравнении общего вида:

$$\frac{\partial C_i}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) C_i = R_i + G_i. \quad (5.68)$$

Здесь  $C_1 = \text{DOP}$ ,  $C_2 = \text{DIP}$ ,  $C_3 = \text{PD}$ ,  $C_4 = \text{FP}$ ,  $C_5 = \text{BP}$ ,  $G_i (i = \overline{1,5})$  —

постоянные,  $R_i = R_i(C_j)$  — линейные функции,  $\vec{V}$  — вектор скорости течения.

Уравнения (5.68) можно применять для расчетов цикла биохимической трансформации соединений фосфора в речных водотоках, в верхних и нижних слоях слабопроточных водоемов.

**Требования к качеству вод.** В настоящее время проводятся исследования по изучению особенностей антропогенного изменения химических и биологических свойств воды. Установлено, что вода может быть носителем целого ряда токсических веществ, создающих угрозу здоровью населения и существованию водных экосистем.

Водным путем передаются многие заболевания (брюшной тиф, холера, дизентерия, вирусный гепатит и т. п.). Особенно опасно химическое загрязнение водоемов — токсические соединения вызывают обратимые и необратимые генетические изменения в человеческом организме.

В настоящее время разработаны международные, европейские и национальные стандарты на воду питьевую и природную, используемую в качестве источника централизованного водоснабжения. Установленные предельно допустимые концентрации (ПДК) обеспечивают безвредность воды для здоровья человека при ее длительном употреблении и без дополнительной подготовки. Например, для некоторых показателей принимаются следующие значения: растворимый кислород — 7 мг/л; БПК<sub>5</sub> — 3 мг  $O_2$ /л; хлор — 200 мг/л; фенолы — 0,001 мг/л. Нормативная база рыбоохраны имеет свои особенности, к которым относится большая жесткость требований, чем у генетических нормативов. Рыбохозяйственные нормативы требуют полного отсутствия многих загрязняющих веществ (ДДТ, гексахлоран и т. п.).

Качество воды, ее минерализация, по-разному влияют на рост, развитие и качество выращенной на орошаемых землях сельскохозяйственной продукции. Использование минерализованных вод для орошения может привести к изменению физико-химических свойств почв, повлиять на их плодородие, а также урожайность и качество урожая.

Качество воды имеет большое значение и для выпуска промышленной продукции, особенно пищевой и фармацевтической.

## Глава 6

# Математические модели глобального развития

### § 1. Краткий обзор работ по глобальному моделированию

В настоящее время проблема “Человек и среда его обитания” широко обсуждается во всем мире. Рост населения, истощение природных ресурсов, отрицательные последствия воздействия человека на окружающую среду, нехватка продуктов питания в некоторых развивающихся странах — вот основные аспекты этой проблемы. В условиях научно-технической революции воздействие человека на окружающую его среду приобрело масштабы, которые можно сравнить с природными процессами. Возникла реальная угроза необратимых отрицательных последствий. Современные социально-экономические процессы взаимодействия человека и окружающей среды настолько сложны и масштабны, что нельзя пассивно надеяться на их стихийную адаптацию в желательном направлении. Возникает задача — изучить действие всех в совокупности факторов, обуславливающих развитие человечества, найти пути сознательного управления этим развитием.

В этих условиях важным инструментом анализа управления развитием сложных систем становятся методы математического моделирования. Методологической базой комплексного исследования

наиболее важных сторон развития человеческого общества является системный анализ. Системный анализ — это прикладная дисциплина, занимающаяся решением конкретных проблем, возникающих в процессе проектирования и анализа сложных технических, биологических, экономических и прочих систем.

## 1. Глобальные модели Форрестера и Мидоуза

Первая попытка формализовать глобальное описание экологических процессов была предпринята в 1971 г. американским исследователем Дж. Форрестером. В своей книге “Мировая динамика” Форрестер предложил некоторый вариант модели экономического развития, содержащий лишь два экологических параметра: численность населения и загрязнение среды. Модель позволяла оценивать взаимное влияние этих параметров, с одной стороны, и темпов экономического развития — с другой. Хотя, как писал сам Форрестер, основная задача его книги была чисто методической, а модель носила учебный характер, роль его работы в развитии исследований глобального характера трудно переоценить. Впервые была продемонстрирована принципиальная возможность объединить производственные, социальные и экологические процессы одним формализмом.

Через год после “Мировой динамики” вышла в свет книга “Пределы роста”, написанная группой ученых под руководством Д. Мидоуза. Если книгу Форрестера заметил лишь узкий круг специалистов, то работа Мидоуза превратилась в бестселлер, была издана небывалыми тиражами на многих языках мира. Успех этой книге принесла манера подачи материала: читатель оказывался подавленным экспоненциально растущей неотвратимостью надвигающегося кризиса. Модель Мидоуза — “Мир-3” — представляет собой систему нелинейных дифференциальных уравнений, описывающих динамику взаимодействия таких секторов, как народонаселение, промышленность, сельское хозяйство, невозобновляемые природные ресурсы, загрязнение среды и др. Авторы работы не ставили перед собой задачу точного предсказания определенных событий в определенные моменты времени. Целью их работы было выявление общих качественных тенденций процесса взаимосвязанного изменения основных

переменных системы, анализ чувствительности результатов по отношению к различным заложенным в модель предположениям.

Работы Форрестера и Мидоуза вызвали широкий отклик в мировой литературе. Высказывались критические замечания, предлагались различные альтернативные варианты. Принципиальным недостатком математических моделей “Мир-2” и “Мир-3” являлось то, что эти модели не отражали возможности сознательного воздействия человека на процесс развития. Но следует отметить определенное положительное значение указанных работ. Впервые были системно проанализированы некоторые глобальные экономические, демографические и экологические процессы. Причинно-следственные связи моделей построены специалистами в соответствующих областях знаний на основе большого фактического материала. Функционирование моделей изучено методом системной динамики.

## **2. Проект “Стратегия выживания” Месаровича — Пестеля**

Следующим этапом в работах по глобальному моделированию явился проект “Стратегия выживания”, который возглавили М. Месарович (США) и Э. Пестель (ФРГ). Критикуя модель “Мир-3” как “механическую”, Месаревич и Пестель выдвигают задачу построения “кибернетической” модели мира. Основные принципы ее построения могут быть сформулированы в следующих трех тезисах:

1. Модель, отражающая сложные процессы взаимодействия человека с окружающей средой, должна основываться на теории многоуровневых иерархических систем.

2. Модель должна быть управляемой, т. е. включать в себя процесс принятия решений, что позволяет учесть возможность сознательного воздействия человека на развитие мировой системы. Для этого необходимо обеспечить работу в режиме диалога между исследователем модели и ЭВМ.

3. Мир следует рассматривать не как единое однородное целое, а как систему взаимодействующих регионов, различающихся уровнем развития, населенностью и т. д.

В модели Месаровича — Пестеля (М-П-модель) все страны мира, в соответствии с их социально-экономическими структурами и

уровнями развития, объединены в 10 регионов; каждый регион описывается системой региональных подмоделей, их структура — одна и та же для всех регионов, отличие — в начальных данных и значениях параметров. Связь регионов осуществляется через миграцию населения, импорт и экспорт продукции.

Особое место в проекте “Стратегия выживания” занимает энергетическая модель “Нефтяной кризис”, представленная для исследования распределения между регионами добычи и потребления нефти.

Это — специально созданная самостоятельная модель, в состав которой входят в агрегированном виде подмодели экономики и демографии наряду с основными подмоделями нефтяных ресурсов: спросом на нефть и ее предложением.

В подмоделях проекта Месаровича — Пестеля целый ряд параметров остаются неопределенными при написании системы уравнений. Управление осуществляется выбором того или иного “сценария”, т.е. набором значений этих параметров на всем рассматриваемом промежутке времени. Сценарий выбирается лицом, принимающим решение (ЛПР), или исследователем, проводящим анализ проблем. После выбора сценария система уравнений подмодели становится замкнутой, и ЭВМ однозначно просчитывает ее траекторию. Для каждой подмодели заранее определяется конечный набор параметров возможных сценариев, которые объединяются в дерево допустимых решений.

ЛПР выбирает приемлемый с его точки зрения сценарий путем исследования (в режиме диалога с ЭВМ) траекторий, соответствующих разным ветвям дерева допустимых решений.

Таким образом, последовательность общения ЛПР и ЭВМ в М-П-модели принимает следующий вид: 1) ЛПР задает сценарий (управление); 2) ЭВМ просчитывает траекторию; 3) ЛПР оценивает результаты.

Если результат неудовлетворителен, ЛПР задает новое управление и т.д. Вопрос о том, как ЛПР выбирает управление и в состоянии ли он найти желаемое решение путем перебора управляющих воздействий, остается открытым. Несмотря на недостатки, работа группы Месаровича — Пестеля — новый шаг в моделировании мирового развития.

### 3. Латиноамериканская модель глобального развития

В 1974 г. группа аргентинских ученых во главе с профессором А. Эррерой получила предварительные результаты работы над латиноамериканской моделью глобального развития. Предпосылкой для выполнения работы при обсуждении модели “Мир-3” послужил тезис о том, что основные преграды на пути гармонического развития человечества заключаются главным образом в неравномерном распределении богатства между различными странами. Группа Эрреры исходила из утверждения, что кризис уже наступил, так как в условиях голода, высокой детской смертности, неграмотности, в плохих жилищных условиях живет большинство населения развивающихся стран. Однако этот кризис не связывается с истощением невозобновляемых природных ресурсов, загрязнением окружающей среды или чрезмерным ростом населения этих стран. Утверждается, что кризисные явления носят социальный характер, являются следствием порочности системы ценностей общества потребления.

В модели Эрреры за основную цель развития человеческого общества принято достижение удовлетворительных условий жизни всеми странами мира, а не просто рост материального потребления. Под удовлетворительными условиями понимаются некоторые достаточно высокие уровни медицинского обслуживания, образования, обеспеченности питанием и жильем.

Для проведения исследований была создана глобальная модель, рассматривающая мир как систему четырех взаимодействующих регионов: 1) Африки, 2) Латинской Америки, 3) Азии и Океании, 4) развитых стран.

Взаимодействие регионов включает международную торговлю и безвозмездную помощь. Развитие каждого региона описывается стандартной системой пяти взаимосвязанных подмоделей: экономики, народонаселения, урбанизации и жилищного строительства, образования, питания. Центральное место во всей глобальной модели занимает подмодель питания. Она состоит из трех секторов: земледелия, животноводства и рыбного промысла.

Стратегия управления развитием каждого региона находится как решение некоторой задачи оптимизации. В качестве исходных управляющих воздействий выбраны доли капитала и трудовых ресурсов,

распределяемые по секторам подмодели экономики, а также цены на продукцию этих секторов. Оптимальные управляющие воздействия должны удовлетворять заданной системе ограничений и минимизировать некоторый скалярный критерий. Ограничения определяют желательное направление и темпы развития региона. Критерий строится как линейная комбинация штрафных функций-отклонений условий жизни от удовлетворительных уровней.

Исследование глобальной модели проводилось для двух основных сценариев взаимодействия регионов. В первом сценарии предполагается отсутствие экономической помощи развитых стран другим регионам. Расчеты показали, что в этом случае регион развитых стран быстро достигает удовлетворительных условий жизни. Регион Латинской Америки выходит на этот уровень примерно через 40 лет, а Азия и Африка, даже при оптимальном управлении, не только не достигают такого уровня, но и испытывают ухудшение всех основных жизненных параметров.

Второй сценарий предполагает помощь со стороны развитых стран регионам Азии и Африки, начиная с 1980 г. Эта помощь должна за 10 лет возрасти с 0,2 до 2% ежегодного конечного продукта фондообразующего сектора экономики региона развитых стран и далее оставаться постоянной. В этом случае было найдено оптимальное управление, дающее приемлемое решение для всех регионов со времени выхода на удовлетворительный уровень в 57 и 65 лет для Азии и Африки соответственно.

Качественный вывод авторов о необходимости помощи наименее развитым из развивающихся стран не вызывает сомнений. Однако их конкретные рекомендации и количественные оценки неубедительны, ибо модель, претендующая на серьезный анализ мировых кризисных явлений и поиск путей их преодоления, не может рассматривать мир вообще. Она должна быть не просто региональной, но отражать в первую очередь социально-экономические структуры и их динамику в каждом из регионов. Ошибочным является объединение в один регион развитых стран государств с различными социально-экономическими системами и представление их как единого экономического и социально-политического целого с общими закономерностями и целями развития. В работе не учитываются также ре-



ально существующие проблемы – истощение традиционных сырьевых и энергетических ресурсов, загрязнение окружающей среды и др. Проблема помощи развивающимся странам рассматривается в модели в отрыве от этих и ряда других важных вопросов, в частности от разоружения, а оно может высвободить громадные средства, необходимые для достижения удовлетворительных условий жизни в развивающихся странах. Исследование ограничено лишь двумя возможными сценариями.

Однако в методологическом подходе группы Эрреры имеется ряд положительных элементов: введение управляющих воздействий, постановка некоторой задачи оптимизации, использование векторной величины, удовлетворительные условия жизни в качестве показателя функционирования системы.

#### 4. Японский проект “Новый взгляд на развитие”

Широкие исследования по проблемам глобального развития проводятся японскими учеными. Наиболее известен проект “Новый взгляд на развитие”, разработанный группой ученых под руководством проф. Я. Кайа. Авторы проекта исходят из того, что важнейшие проблемы современного мира связаны с нехваткой продуктов питания, безработицей и низким уровнем производства в большинстве развивающихся стран. Авторы проекта поставили перед собой задачу найти такую стратегию (управление моделью глобального развития), которая обеспечила бы быстрый экономический рост развивающихся стран при стабилизации или уменьшении темпов мирового промышленного развития.

Как известно, экономика большинства развивающихся стран основана на сельском хозяйстве и добыче сырья. По мнению авторов проекта, продолжение подобной специализации не может обеспечить устойчивый продолжительный экономический рост. Авторы считают, что наиболее приемлемой стратегией управления для развивающихся стран является развитие промышленности и именно тех ее отраслей, производительность которых не падает с ростом производства. Однако на этом естественном пути, по мнению авторов проекта, существуют такие серьезные преграды, как нехватка собственных капиталов, отсутствие квалифицированной рабочей силы

и рынков сбыта, так как вряд ли развивающиеся страны способны конкурировать с развитыми. Таким образом, развивающиеся страны не смогут довести свою промышленность до сколько-нибудь значительного уровня, если развитые страны не перестроят структуру своей экономики и не представят часть своего внутреннего рынка для сбыта промышленной продукции развивающихся стран. Именно такая перестройка экономики считается наиболее действенной помощью развивающимся странам.

Для поиска оптимальных путей проекта перестройки была создана многорегиональная, многоотраслевая математическая модель глобального развития, в которой рассматриваются 9 регионов. Динамика развития каждого региона описывается тремя взаимодействующими подмоделями: производства, спроса и народонаселения. С помощью этой модели проведено исследование двух возможных сценариев мирового развития: сценарий А — максимальное увеличение мирового валового продукта на душу населения; сценарий В — предпочтительное развитие экономики развивающихся стран. Исследование проводилось путем решения оптимизационной задачи на интервале времени с 1970 по 2010 г.

Получены следующие результаты. Для сценария А найдены управляющие воздействия, обеспечивающие рост валового продукта на душу населения для всех регионов. Однако темпы роста производства регионов развитых стран оказались по-прежнему выше, и разрыв между производством развитых и развивающихся стран все увеличивается.

Сценарию В соответствует некоторое снижение темпов роста доходов развитых стран при значительном их увеличении для развивающихся, при этом разрыв в доходах на душу населения для регионов развитых и развивающихся стран сохраняется. По этому сценарию рост доходов развивающихся регионов обеспечивается за счет перестройки структуры экономики всех регионов.

Исследования показали, что если в целях экономической независимости все регионы будут стремиться к самообеспечению (кроме сырьевых ресурсов), то уровень доходов на душу населения к 2010 г. для Японии, Западной Европы и всех регионов развивающихся стран будет ниже, чем по сценарию В.

Авторы модели провели также исследование влияния на мировое развитие ежегодной безвозмездной помощи развивающимся странам. Объем помощи предполагался равным 1% ежегодного валового продукта регионов развитых стран. Решение задачи оптимизации по сценарию А показало, что такая помощь приведет к увеличению валового мирового продукта 2010 г. на 2%. По сценарию В эта помощь увеличит валовый мировой продукт 2010 г. на 6%. Авторам проекта удалось обнаружить эффект качественного изменения динамики мирового развития при сравнительно небольших изменениях политики инвестиций внутри регионов и между регионами.

Японский проект по постановке проблемы, структуре модели и методам ее использования близок к латиноамериканской модели глобального развития. Проекту также присущи формальный подход к анализу проблемы, значительное упрощение экологической модели, описание всех регионов одинаковой системой простых подмоделей.

## **5. Программы дальнейших работ по глобальному моделированию**

Группа голландских ученых под руководством проф. Х. Линнемана работала над “Проблемой удвоения населения”, сосредоточив внимание на продовольственной проблеме и считая ее наиболее актуальной. Исходя из предположения, что с 1970 г. до конца века население земного шара увеличится в два раза, ставился вопрос, как обеспечить население питанием, если уже сейчас ряд регионов мира испытывает острый дефицит продовольствия. С помощью математической модели предполагалось оценить максимально возможное производство продовольствия планеты, а также получить прогноз развития сельского хозяйства в различных районах мира при условии сохранения современных социально-экономических структур и тенденций развития.

Проект Линнемана есть пример специализированной глобальной модели, ориентированной на решение продовольственной проблемы. Сельскохозяйственный сектор рассматривается в модели достаточно подробно. Вместе с тем вызывает сомнение подход авторов к вопросу о взаимодействии этого сектора с другими секторами. Все основные показатели роста населения, развития промышленности, даже от-

раслей, непосредственно обслуживающих сельское хозяйство, считаются заданными и вводятся извне. Капиталовложения в сельское хозяйство вычисляются вне связи с общим механизмом распределения годового промышленного продукта. При таком подходе теряются основные преимущества глобального моделирования — системный характер анализа с учетом взаимного влияния различных факторов и процессов. При построении специализированных моделей должны сохраняться их связи с остальной частью глобальной модели.

Специализированная модель японских исследователей “Будущее Японии в изменяющемся мире” ориентирована на детальный анализ долгосрочного развития одной страны с учетом ее взаимодействия с агрегированной мировой системой. Проект предполагается использовать для определения оптимальной стратегии управления экономикой Японии с учетом основных тенденций мирового экономического развития и возможных изменений окружающей среды.

Во многих странах мира начаты исследования различных аспектов долгосрочного развития как отдельных государств и регионов, так и мира в целом.

Так, в министерстве окружающей среды Великобритании под руководством П. Робертса разработана “английская” модель глобального развития. В модели исследуются различные демографические стратегии, анализируются вопросы рационального использования природных ресурсов, оцениваются размеры возможной помощи развивающимся странам.

Под руководством К. Фримена в Великобритании на другой глобальной модели начаты исследования возможных путей уменьшения неравномерности распределения благ как внутри государства, так и между государствами.

В конце 1974 г. лауреат Нобелевской премии по экономике проф. Дж. Тинберген представил проект “Обновление международного порядка”, в котором делается попытка разработать новые формы международного сотрудничества (экономические, научно-технические и политические). В отличие от других рассмотренных выше работ в работе Тинбергена содержится попытка представить конкретный проект изменений мировой экономики, которые, по его мнению, должны обеспечить бескризисное развитие. Эти изменения включа-

ют создание некоторого наднационального органа, планирующего мировую экономику, и передачу ему части суверенных прав государств. Однако остается неясным, как практически реализовать эти изменения.

В конце 1976 г. ООН опубликована работа известного экономиста США В. Леонтьева "Будущее мировой экономики", содержащая перечень условий, при соблюдении которых появляется возможность бескризисного развития. Однако Леонтьев не указывает путей, ведущих к выполнению этих условий.

Рекомендации, предлагаемые в работе Тинбергена и в некоторых других рассмотренных работах, представляются утопичными, так как капиталистические правительства и тем более монополии вряд ли пойдут добровольно на снижение своих доходов, чтобы повысить доходы развивающихся стран.

Из приведенного обзора (хотя и не полного) видно, что работа по моделированию глобального развития неуклонно расширяется и углубляется во всем мире.

## § 2. Глобальная динамическая модель Форрестера

Для изучения сложных систем с нелинейными обратными связями применяется и развивается системно-динамический метод Форрестера. Моделирование основано на выполнении какого-либо закона сохранения. В этом методе прежде всего предполагается, что сложная система может быть структурно представлена в виде системы резервуаров, через каждый из которых протекает свой вид жидкости. Количество  $y_i$  жидкости, содержащейся в  $i$ -м резервуаре, является фазовой переменной и в каждый момент времени  $t$  определяется разностью скоростей (темпов)  $V_i^+ - V_i^-$  ее прихода  $V_i^+$  и расхода  $V_i^-$ :

$$\frac{dy_i}{dt} = V_i^+ - V_i^-, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (6.1)$$

Предполагается также, что эти скорости в замкнутой системе могут зависеть от уровней всех резервуаров системы (а если система

не замкнута, то и от внешних переменных факторов). Могут быть учтены, кроме того, зависимости между переменными, известные из каких-либо априорных соображений, а также экспериментальные взаимосвязи. Эти зависимости могут быть нелинейными, в частности, соответствующие функции заданы таблично.

Моделирование сложной системы методом системной динамики выполняется в несколько этапов. Первым этапом является концептуализация (постановка задачи). Она начинается со словесного описания сложной системы; далее дается точная формулировка вопроса, на который требуется ответить; затем определяются основные переменные и интервал времени, на котором следует рассмотреть поведение системы; приводится перечень параметров, которые следует при этом учитывать, перечень диапазонов изменений этих параметров и других исходных данных. Закачивается первый этап построением так называемой причинной диаграммы, которая указывает, какие переменные и их комбинации (факторы) влияют на каждую переменную и в какую сторону (увеличения или уменьшения), в частности, при этом обнаруживаются петли обратных связей, имеющиеся в системе.

Вторым этапом является математическое описание модели системы. Для его получения сначала строится так называемая потоковая диаграмма, соответствующая причинной диаграмме, построенной на первом этапе. Потокковая диаграмма представляет собой связанную стрелками совокупность обозначений резервуаров, скоростей потоков (входного и выходного) через каждый из них, априорных аналитических соотношений и табличных зависимостей. Затем зависимостям между переменными и зависимостям скоростей от переменных придается конкретный аналитический вид и выписываются дифференциальные уравнения.

Третий этап моделирования — анализ модели. Для его выполнения производится численное интегрирование уравнений модели на ЭВМ, сравнение результатов с известными данными, характеризующими поведение моделируемой системы, выявляются параметры, к изменению которых модель наиболее чувствительна, и варьирование других параметров, влияющих на решение. В результате дается оценка пригодности модели для решения изучаемой задачи, и если

модель оказалась недостаточно хорошей, то могут быть изменены ее структура, учитываемые факторы и т. д. После этого все три этапа повторяются. И так до тех пор, пока модель не будет признана достаточно хорошим приближением к моделируемой системе.

В модели Форрестера взаимодействие природы и общества описывается пятью обыкновенными дифференциальными уравнениями, определяющими (вместе с начальными данными) следующие пять фазовых переменных как функции времени  $t$ :

$P$  — население (число людей, населяющих Землю);

$K$  — капитал (основные фонды);

$X$  — доля сельскохозяйственного капитала (доля сельскохозяйственных фондов от их общего количества  $K$ );

$R$  — ресурсы (невозобновляемые природные ресурсы всей Земли);

$Z$  — загрязнение Земли.

Единицей капитала  $K$  считается условная величина — капитал, приходящийся на душу населения в начальный момент времени  $t_0$ ; величина  $X$  — безразмерная (так как является отношением сельскохозяйственного капитала к полному); единицей ресурсов  $R$  считается годовое потребление ресурсов на человека в момент  $t_0$ ; за единицу загрязнения  $Z$  принимается условная величина — загрязнение, приходящееся на одного человека в момент времени  $t_0$ .

Строя модель, Форрестер считает, что влияние переменных  $P$ ,  $K$ ,  $X$ ,  $R$ ,  $Z$  друг на друга в основном сказывается через естественные процессы и такие факторы, как относительная численность населения  $P_p$ , удельный капитал  $K_p$ , материальный уровень жизни  $C$ , загрязненность  $Z_p$  (удельное загрязнение) и уровень питания  $F_p$ . Здесь

$$P_p = \frac{P}{P_0}, \quad K_p = \frac{K}{P}, \quad Z_p = \frac{Z}{P}, \quad P_0 = P(t_0). \quad (6.2)$$

Величины  $C$  и  $F_p$  будут определены ниже.

При составлении дифференциальных уравнений Форрестер, как обычно, предполагает, что правая часть каждого из уравнений состоит из двух слагаемых — положительного и отрицательного, разность модулей которых определяет рост или убывание переменной. Исключение составляет лишь уравнение для  $R$ , правая часть которого не содержит положительного слагаемого, поскольку невозоб-

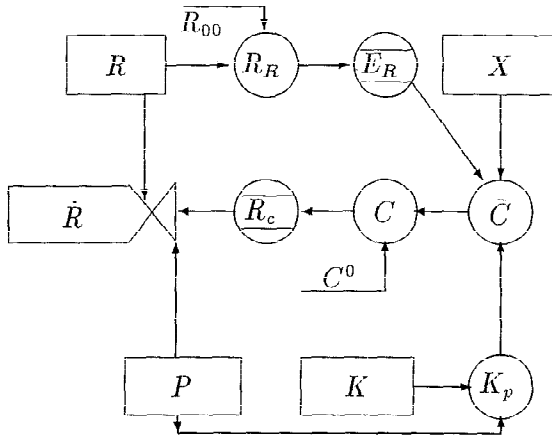


Рис. 6.1. Поточковая диаграмма для вывода уравнения расходования невозобновляемых ресурсов:  $R_{00}$  — исходные ресурсы,  $R_R$  — доля оставшихся ресурсов,  $E_R$  — экстракционный множитель,  $R$  — темпы добычи ресурсов,  $R_c$  — удельное потребление ресурсов,  $C$  — материальный уровень жизни,  $\tilde{C}$  — эффективный промышленный капитал,  $C^0$  — нормирующий делитель,  $K_p$  — удельный капитал

новляемые ресурсы могут только потребляться. Это простейшее уравнение определяется потоковой диаграммой, содержащей лишь одну скорость — темпы добычи ресурсов (рис. 6.1). Темпы пропорциональны количеству  $P$  людей, потребляющих ресурсы, а удельное потребление ресурсов  $R_c$  предполагается заданным табличной зависимостью (рис. 6.2) от материального уровня  $C$ .

В системной динамике приняты следующие обозначения: прямоугольник — для фазовой переменной; прямоугольник с треугольником — для скоростей; кружки — для факторов; кружки с двумя параллельными хордами — для табличных зависимостей; полочки — для констант.

Здесь и ниже индекс задаваемой табличной функции указывает на ее аргумент.



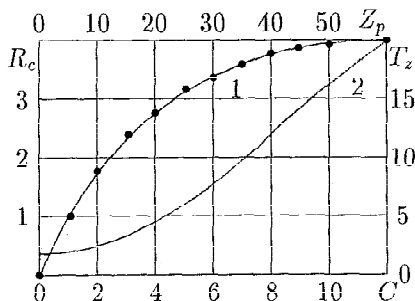


Рис. 6.2. Заданные зависимости удельного потребления ресурсов  $R_c$  от материального уровня  $C$  (1) и характерного времени  $T_z$  рассасывания загрязнения от удельного загрязнения  $Z_p$  (2)

Величина  $C$  определяется эффективным промышленным удельным капиталом:

$$\bar{C} = E_R(1 - X)K_p, \quad (6.3)$$

эффективным в том смысле, что с помощью множителя  $\bar{E}_R$  учитывается возрастание трудности добычи ресурсов по мере их истощения. Множитель  $E_R$  называется экстракционным: его зависимость от отношения  $R_R = \frac{R}{R_{00}}$  оставшихся ресурсов к ресурсам в некоторый исходный момент  $t$  задается таблицей.

По определению полагаются

$$R_0 = R(t_0), \quad R_R^0 = \frac{R_0}{R_{00}}, \quad E_R^0 = E_R(R_R^0); \quad (6.4)$$

$$C^0 = E_R^0(1 - X^0), \quad C = \bar{C}/C^0. \quad (6.5)$$

В соответствии с потоковой диаграммой (рис. 6.1) получаем уравнение расходования ресурсов

$$\frac{dR}{dt} = -P_0 R_c(C). \quad (6.6)$$

Зависимость  $R_c(C)$  на рис. 6.2 при  $c < 1$  линейна, в области  $c > 1$  она учитывает замедление темпов добычи ресурсов с ростом материального уровня жизни, т. е. по мере насыщения общества предметами промышленного производства, на которые эти ресурсы главным образом и расходуются.

**Уравнения для капитала и уровня загрязнения.** Уравнение для основных фондов  $K$  определяется диаграммой Форрестера и имеет вид

$$\frac{dK}{dt} = K_2 - K_1, \quad (6.7)$$

где  $K_2 = PC_k K_c$ ,  $K_1 = K/T_k$ .

Прирост  $K_2$  капитала (основных фондов) в единицу времени пропорционален населению. Величина  $C_k$  выражает некоторую нормальную скорость (скорость в момент  $t_0$ ) генерации капиталовложений на душу населения. Множитель  $K_c$  выражает возрастание возможности населения вкладывать средства в расширение производства, когда материальный уровень жизни повышается. Отклонение возрастания от линейного в сторону насыщения объясняется естественным ослаблением желания населения увеличивать свою обеспеченность с ростом самой обеспеченности.

Убыль  $K_1$  капитала связана с износом и устареванием основных фондов, а  $T_k$  — принятая в проекте постоянная нормального износа; процесс выхода основных фондов из строя носил бы экспоненциальный характер, если бы не было генерации капитала.

Похожая на предыдущую другая потоковая диаграмма Форрестера определяет и похожее уравнение для загрязнения:

$$\frac{dZ}{dt} = Z_2 - Z_1, \quad (6.8)$$

где  $Z_2 = PZ_0 Z_k$ ,  $Z_1 = Z/T_z$ .

Множитель  $Z_0$  есть постоянная нормальная скорость генерации загрязнения в расчете на одного человека. Далее она предполагается равной единице при описанном выше выборе единицы загрязнения. Множитель  $Z_k (K_p)$  задает рост загрязненности с ростом удельного капитала. Формула для скорости  $Z_1$  рассасывания загрязнения, как и формула для  $K_1$ , предполагает экспоненциальный характер процесса, когда не поступают новые загрязнения. В модели Форрестера время  $T_z (Z_p)$  монотонно возрастает таблично заданным образом с ростом величины  $Z_p$ .

**Уровень питания и уравнение сельскохозяйственного сектора.** Изменение доли  $X$  сельскохозяйственного капитала (от

всего капитала  $K$ ) определяется уравнением

$$\frac{dX}{dt} = X_2 - X_1. \quad (6.9)$$

Понятие уровня питания  $F_p$  имеет существенное значение и в уравнении для  $X$ , и в уравнении для  $P$ .

Для определения  $F_p$  вначале находится нормированная величина удельных капиталовложений в сельское хозяйство:

$$X_p = \frac{K_p X}{X_0}. \quad (6.10)$$

Далее вводится зависимость продуктивности  $F_x$  сельского хозяйства от  $X_p$ . Качественный характер этой зависимости определяется следующими соображениями:

1) при убывании удельных капиталовложений в сельское хозяйство продуктивность  $F_x$  падает, но не до нуля, так как сельское хозяйство будет что-то давать даже при отсутствии капиталовложений;

2) рост продуктивности  $F_x$  должен постоянно слабеть, совершенно исчезая, когда величина  $X_p$ , возрастая, превысит необходимые затраты (на механизацию, удобрение почв и другие известные способы повышения продуктивности сельского хозяйства).

Затем вводятся множители  $V_z$  и  $V_p$ , учитывающие понижение продуктивности сельского хозяйства соответственно из-за роста загрязнения и плотности населения  $P_p$ . Рост  $P_p$  (урбанизации) вызывает застройку продуктивных угодий жилыми, промышленными и транспортными сооружениями. Продуктивность снижается также из-за роста удельного загрязнения  $Z_p$ , вызванного, например, промышленными и сельскохозяйственными отходами на земле и в водах, отрицательно влияющих на растения и животных.

Характер зависимостей  $V_p(P_p)$  и  $V_z(Z_p)$  различен при малых значениях аргументов. При малой плотности населения, естественно, землю экономят меньше, чем при большой. Поэтому при убывании  $P_p$  от 1 до 0 сельскохозяйственная продуктивность существенно возрастает. А при убывании  $Z_p$  от 1 до 0 продуктивность может измениться слабо.

Принимается следующее определение уровня питания:

$$F_p = F_x V_p V_x. \quad (6.11)$$

Величина  $F_p$  влияет на скорость прироста сельскохозяйственного капитала двояко. Во-первых, она непосредственно определяет (как аргумент) значение функции  $X_F(F_p)$ , которая предполагается заданной в виде таблицы и входит в скорость  $X_2$  в качестве основной переменной:

$$X_2 = \frac{X_F(F_p)X_Q(Q)}{T_2}, \quad (6.12)$$

где  $T_2 = \text{const}$ .

Во-вторых, величина  $F_p$  влияет на  $X_2$  через один из компонентов так называемого качества жизни, входящего в аргумент  $Q$  функции  $X_Q(Q)$ :

$$Q = \frac{Q_c(C)}{Q_F(F_p)}, \quad (6.13)$$

где  $Q_c(C)$  — “вещевой” компонент качества жизни,  $Q_F(F_p)$  — “пищевой” компонент качества жизни.

Множитель  $X_Q$  в (6.12) учитывает возрастание “необходимого” значения  $X_F$  при отставании пищевого компонента качества жизни от материального.

Время  $T_2$  по Форрестеру представляет собой время реализации доли  $X_F X_Q$  (при  $X_1 = 0$ ), так что эффективная скорость роста  $X_2$  выражается формулой (6.12).

Величина  $X_1$  износа основных фондов выражается обычной формулой:

$$X_1 = \frac{X}{T_x}, \quad (6.14)$$

где  $T_x$  — постоянная износа, т.е. среднее время жизни основных фондов в сельском хозяйстве.

Форрестер далее принимает, что времена  $T_2$  и  $T_x$  равны. Тогда уравнение (6.9) можно записать в виде

$$\frac{dX}{dt} = \frac{X_F X_Q - X}{T_x}. \quad (6.15)$$

Множитель  $X_Q$  учитывает влияние качества жизни. Для нормального качества жизни ( $X_Q = 1$ ) величина  $X_F$  отслеживает величину  $X$  с постоянным запаздыванием  $T_x$ , и для  $X_F = \text{const}$  уравнение (6.15) имеет установившееся решение  $X = X_F$ .

Тогда для каждого значения  $F_p$  зависимость  $X_p$  от  $F_p$  указывает, по существу, соответствующее необходимое значение  $X$ .

**Уравнение демографического сектора.** Уравнение, определяющее изменение населения  $P$ , имеет стандартный вид:

$$\frac{dP}{dt} = B - D, \quad (6.16)$$

где  $B = PC_B V_c B_p B_F B_z$ ,  $D = PC_D D_c D_p D_F D_z$ , и выражает просто баланс между рождаемостью  $B$  и смертностью  $D$ . Множители  $B_i$  и  $D_i$  ( $i = c, p, F, z$ ) выражают соответственно влияние ранее рассмотренных факторов:  $c$  — материальный уровень жизни,  $P_p$  — плотность населения,  $F_p$  — уровень питания,  $Z_p$  — удельное загрязнение. Константы  $C_B$  и  $C_D$  — коэффициенты рождаемости и смертности при  $t = t_0$ , зависимости  $B_c, B_p, B_F, B_z, D_c, D_p, D_F, D_z$  задаются в виде таблиц.

**Некоторые результаты, полученные с помощью модели Форрестера.** Итак, модель Форрестера выражается пятью простыми, хотя и нелинейными уравнениями (6.6)–(6.9), (6.16), соотношениями (6.2)–(6.5), (6.10)–(6.14) и двадцатью нелинейными таблично заданными зависимостями [для  $R_c, T_z, E_R, K_c, Z_k, F_x, V_z, V_p, Q_c, X_F, Q_c, X_Q, B_c, D_c, D_p, B_p, B_z, D_z, B_F, D_F$ ].

Поведение модели, структура и уравнения которой описаны ранее, было рассмотрено Форрестером в интервале времени с 1900 по 2100 г. Начальные данные и поведение основных переменных на интервале с 1900 по 1970 г. известны из истории. Хотя в задачу такого рода модели не входит точное предсказание определенных событий в определенные моменты времени, а целью ее является выявление общих тенденций процесса развития системы, тем не менее уравнения модели целесообразно было подкорректировать на интервале времени с известным характером изменения переменных, что и было сделано в интервале с 1900 по 1970 г. с помощью варьирования некоторых параметров модели и табличных зависимостей в пределах той точности, с которой они известны из исторических данных.

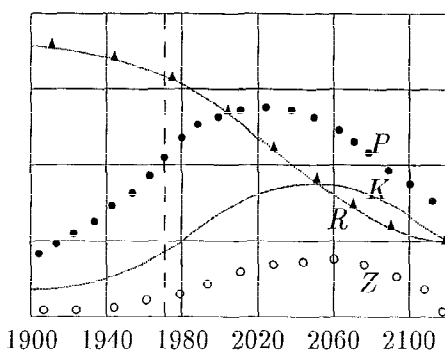


Рис. 6.3. Изменение основных характеристик глобального развития со временем, по Форрестеру

Были приняты следующие значения исходных данных на момент  $t_{00} = 1900$  г.:

$$P_{00} = 1.65 \cdot 10^9 \text{ чел.};$$

$K_{00} = 0.4 \cdot 10^9$  единиц капитала (принимается, что в 1900 г. на человека приходилось вчетверо меньше капитала, чем в 1970 г.);

$$X_{00} = 0.2;$$

$R_{00} = 900 \cdot 10^9$  единиц ресурсов (предполагается, что начиная с 1900 г. ресурсов хватило бы на 250 лет при скорости их потребления, существовавшей в 1970 г.);

$Z_{00} = 0.2 \cdot 10^9$  единиц загрязнения (считается, что в 1900 г. на душу населения приходилось в восемь раз меньше загрязнений, чем в 1970 г.).

В результате фазовые переменные в интервале с 1900 по 1970 г. стали вести себя именно так, как известно из исторических данных. Это позволяло надеяться, что параметры модели определены количественно верно и, по-видимому, качественно правильно — учтены причинно-следственные связи и основные тенденции глобального развития. После этого численное интегрирование было продолжено на интервале с  $t_0 = 1970$  г. по  $t_k = 2100$  г.

В результате этого расчета получилась картина развития, представленная на рис. 6.3. Видно, что после периода монотонного роста численность населения  $P$  с 2025 г. начинает уменьшаться, причем за 75 лет сокращается в полтора раза, т.е. почти на 2 млрд. че-

ловек. Невозобновляемых природных ресурсов  $R$  к 2100 г. остается меньше трети современных запасов, уровень загрязнений  $Z$  к 2050 г. в несколько раз превышает уровень 1970 г., а затем начинает падать, что является следствием общего упадка промышленности и сокращения численности населения. Форрестер пробовал изменять по очереди параметры модели в разумных пределах (такие, как запасы невозобновляемых ресурсов, их потребление на душу населения, продуктивность сельского хозяйства), но общая картина упадка сохранилась.

Таким образом, при сохранении современных тенденций развития общества неизбежен серьезный кризис во взаимодействии человека и среды в рассмотренный период времени. Этот кризис автор модели объясняет противоречием между ограниченностью природных ресурсов и ростом капитала, промышленного и сельскохозяйственного производства. Именно этот рост вместе с ростом населения и темпов его потребления и приводит к быстрому загрязнению среды, истощению ресурсов, росту смертности, упадку производства. Далее Форрестер для избежания упадка стал вводить в модель сразу несколько серьезных изменений типа ограничений рождаемости, потребления ресурсов, генерации загрязнений и пр. В результате он получил совокупность ограничений, стабилизирующих развитие на некоторых уровнях в пределах рассматриваемого интервала времени. Но это кажущееся равновесие, поскольку невозобновляемые ресурсы все равно убывают и, главное, неясно, как к этому равновесию перейти.

### § 3. Глобальная динамическая модель группы Мидоуза "Мир-3"

#### 1. О дополнительных факторах (к модели "Мир-2"), учитываемых моделью "Мир-3"

Прежде всего в основу модели "Мир-3" положена однопродуктовая макроэкономическая модель с секторами промышленным, сельскохозяйственным и сервисным, в то время как в модели Форрестера макроэкономическая модель не выделена, а конечный распределяемый

продукт не рассматривается даже в качестве вспомогательной переменной. В модели “Мир-3” таким продуктом является результат промышленного производства, и его выработка определяется производственной функцией, учитывающей не только влияние нехватки трудовых ресурсов, но также уменьшение производственной отдачи с истощением ресурсов.

В модели “Мир-3” производство услуг выделено в самостоятельный сектор экономики. К нему, в частности, относится здравоохранение, непосредственно влияющее на демографические процессы, на среднюю продолжительность жизни населения и эффективность контроля над рождаемостью.

Демографический сектор модели “Мир-3” содержит четыре возрастные по-разному функционирующие группы. В этом секторе учитывается зависимость рождаемости от желаемого размера семьи, от контроля над рождаемостью, от промышленного производства на душу населения и т. д.; учитывается зависимость продолжительности жизни от загрязнений, плотности населения, уровня питания и пр.

В сельскохозяйственном секторе модели “Мир-3” учитывается ограниченность земель, не только обрабатываемых, но и потенциально пригодных для обработки, а также сокращение обрабатываемых земель вследствие процессов эрозии и урбанизации. Каждый из этих процессов описан самостоятельным дифференциальным уравнением.

Рассмотрен процесс перераспределения капиталовложений, направляемых либо на повышение урожайности старых земель, либо на распашку новых в зависимости от того, какое из применений капитала дает большую выгоду.

В секторе загрязнений учитывается различное промышленное и сельскохозяйственное загрязнение среды, в частности, промышленное загрязнение связано главным образом с добычей и переработкой невозобновляемых минеральных ресурсов.

Наконец, важным преимуществом модели “Мир-3” перед моделью “Мир-2” является учет того, что многие переменные эффективно влияют не в исходном, а в сглаженном по времени виде, т. е. после того как претерпевают некоторое “размазывание” по времени,



совмещенное с запаздыванием того или иного порядка. Для учета сглаживаний—запаздываний одновременно с основными уравнениями в модели "Мир-3" решаются вспомогательные дифференциальные уравнения.

Такое уравнение для получения запаздывания сглаживания первого порядка от функции  $f(t)$  имеет вид

$$\frac{df_1}{dt} = \frac{f(t) - f_1(t)}{\tau},$$

где  $f(t)$  — известная функция  $t$ , а константа  $\tau$  — характерное время запаздывания при сглаживании.

Решение  $f_1(t)$  этого уравнения при начальном данном  $f_1(t_0) = f(t_0)$  называется сглаживанием первого порядка от функции  $f(t)$  и далее записывается в виде  $f_1^{(\tau)}(t)$ , где верхний индекс означает время запаздывания в годах, а нижний — порядок сглаживания. Если это решение подставить в уравнение вместо  $f(t)$ , то решение  $f_2^{(\tau)}(t)$  нового уравнения при тех же начальных данных будет называться сглаживанием второго порядка от функции  $f(t)$ . Аналогично определяют и сглаживания более высоких порядков от функции  $f(t)$ .

Такой прием позволяет учесть, например, что затраты  $I_H(t)$  на получение урожая приносят эффект не сразу, а с запаздыванием в два года, так что эффективной является функция  $I_{H_1}^{(2)}(t)$ .

Аналогично учитывается, что выброс загрязнений  $z(t)$  в момент  $t$  сказывается на всей Земле не сразу и не в исходном виде, а в виде  $z_3^{(20)}(t)$ , т. е. в сглаженном виде (с 20-летним запаздыванием третьего порядка).

## 2. Об основных переменных модели

В модели "Мир-3", как в и модели "Мир-2", взаимодействие природы и общества описывается обыкновенными дифференциальными уравнениями, с переменными, определяющими следующие функции времени:  $P$  — население;  $R$  — невозобновляемые природные ресурсы Земли;  $Z$  — загрязнения. Основными переменными, кроме указанных, являются также:

$A$  — приносящие урожай возделанные площади Земли;

$Y$  — естественное плодородие (урожайность земли);

$K$  — капиталовложения (основные производственные фонды на Земле).

Переменные  $P, A, K$  дезагрегированы на части:

$$P = P_1 + P_2 + P_3 + P_4, \quad (6.17)$$

где  $P_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) — число людей соответственно в возрасте от 0 до 15, от 15 до 45, от 45 до 65, от 65 лет и старше;

$$A = A_T - A_p - A_v - A_s, \quad (6.18)$$

где  $A_T = \text{const} = 3.2 \cdot 10^9$  га — площадь всех пригодных для возделывания земель суши;  $A_p$  — потенциально годные для обработки, но еще не возделанные площади;  $A_v$  — урбанизованные площади, т.е. занятые постройками, отвалами пустой породы, дорогами и другими коммуникациями;  $A_s$  — земельные площади, выведенные из строя почвенной эрозией.

$$K = K_I + K_s,$$

где  $K_I$  — основные фонды промышленных предприятий,  $K_s$  — основные фонды сервисных предприятий. Здесь сервис понимается в широком смысле, т.е. охватывает все виды услуг, включая здравоохранение, образование и т.д.

Модель “Мир-3” содержит 12 основных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка для 12 переменных ( $R, Z, Y, P_1, P_2, P_3, P_4, A_p, A_v, A_s, K_I, K_s$ ). Кроме того, она содержит еще 16 вспомогательных уравнений, связанных с запаздыванием и сглаживанием влияния некоторых факторов на процесс развития, т.е. на фазовую траекторию системы.

### 3. Об основных результатах, полученных группой Мидоуза

Из рассмотренного выше видно, что модель “Мир-3” гораздо шире и глубже модели “Мир-2”. Ее оригинальное описание группой Мидоуза занимает около 900 страниц. Некоторое представление о модели “Мир-3” в целом дает ее краткая блок-схема (рис. 6.4).

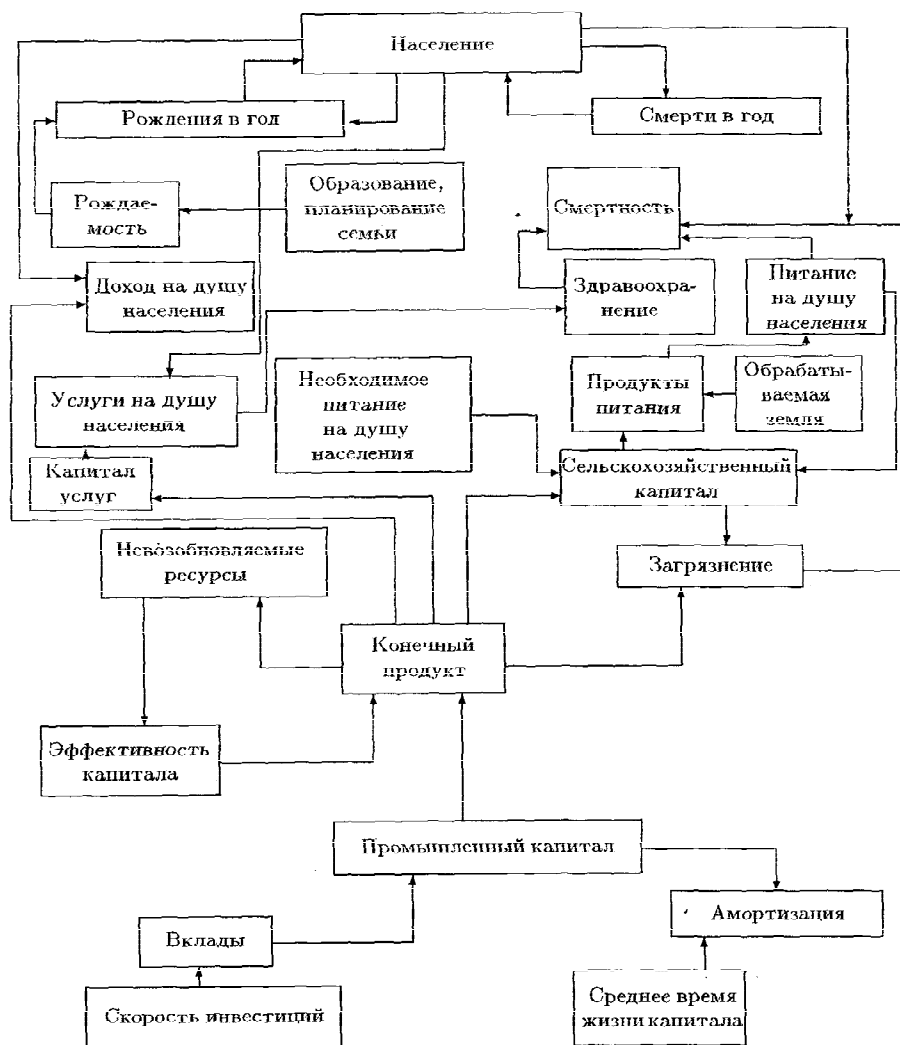


Рис. 6.4. Структурная схема модели "Мир-3"

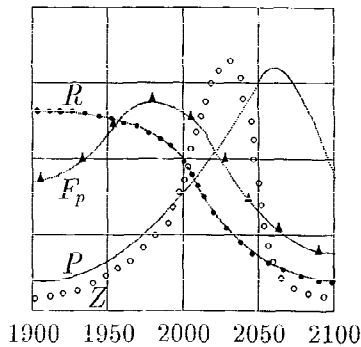


Рис. 6.5. Динамика развития мировой системы по модели "Мир-3", при сохранении современных тенденций

Интересно, что при всех различиях эти модели весьма близки по своим результатам.

Группа Мидоуза, как и Форрестер, не ставила своей целью предсказание будущих событий, а стремилась выявить общие закономерности и качественные тенденции процесса взаимосвязанного изменения основных переменных системы, проанализировать чувствительность модели по отношению к заложенным в нее предположениям.

Интегрирование уравнений проводилось с 1900 по 2100 г. Так же, как и у Форрестера, модель была оттарирована по имеющимся историческим данным на участке с 1900 по 1970 г. и давала то же, что и модель "Мир-2".

В интервале с 1970 по 2100 г. поведение модели "Мир-3" оказалось качественно очень похожим на поведение модели "Мир-2".

Данные расчетов на рис. 6.5 показывают, что вслед за периодом роста населения, капитала, уровня жизни должна последовать катастрофа, выражающаяся в чрезмерном росте загрязнения Земли, истощении природных ресурсов, укладке промышленного производства, уменьшении населения.

Была также рассмотрена модель с настолько увеличенными исходными запасами природных ресурсов, что практически их можно считать неограниченными. Соответствующий расчет показал, что

катастрофа не исчезла, а наступила несколько позже и уже от чрезмерного роста загрязнения, а не от нехватки ресурсов. Тогда была рассмотрена модель с совершенным контролем за загрязнениями, при котором их уровень не мог превышать заданного приемлемого значения. Оказалось, что катастрофа все равно возникает, но уже от нехватки продуктов питания для взрослого населения.

После этого была рассмотрена модель с неограниченными ресурсами и удвоенной продуктивностью сельского хозяйства. В этом случае катастрофа наступает вновь от чрезмерного роста населения и загрязнения.

Кроме описанных моделей, были рассмотрены модели с таким контролем рождаемости, при котором размер семьи совпадает с желаемым, а также с абсолютным контролем, при котором рождаемость равна в точности смертности. Но и в этих моделях катастрофы избежать не удалось — она наступала от чрезмерного расширения производства и истощения ресурсов.

Проведенный анализ показал, что ни одна из описанных выше мер, взятая в отдельности, не обеспечивает желаемой стабилизации процесса развития, и мир может избежать катастрофы только при комплексном введении в ближайшее время следующего ряда ограничений:

1. Численность населения стабилизируется (начиная с 1975 г.).
2. Индустриальный капитал растет лишь до 1980 г. и далее полагается постоянным.
3. Потребление ресурсов на душу населения ограничивается до  $1/8$  от уровня 1970 г.
4. Время жизни капитала увеличивается в 1.5 раза.
5. Удельная генерация загрязнений уменьшается до  $1/4$  от уровня 1970 г.

Такое состояние называется глобальным равновесием (хотя запасы ресурсов все время убывают — примерно на  $1/3$  от уровня 1970 г. каждые 150 лет). Однако модель не дает ответа на вопрос, как достичь этих уровней, так что вопрос о возможности перехода к этому "глобальному равновесию" у Мидоуза остается открытым. При этом наиболее неясным представляется управление рождаемостью с целью ее уменьшения.

## § 4. Задачи управления для дополненной глобальной модели Мидоуза

В критических замечаниях, высказанных в процессе обсуждения моделей “Мир-2” и “Мир-3” за рубежом и в СССР, не только указывались те или иные предпосылки, но и предлагались также новые варианты блоков моделей, различные варианты дезагрегации моделей.

Очевидно, что модель “Мир-3” не может претендовать на роль “мировой” модели. В лучшем случае она более или менее верно отражает агрегированные связи и закономерности, характерные для промышленно развитых капиталистических стран. Необходима дезагрегация модели по регионам, т.е. построение различных взаимодействующих моделей, например модели восточноевропейских стран, модели развитых капиталистических стран, модели развивающихся стран.

Однако основным недостатком моделей “Мир-2” и “Мир-3” (по мнению советских исследователей) является то, что они не отражают возможности сознательного воздействия человека на процесс развития. Распределение капиталовложений в различные секторы этих моделей жестко зафиксировано табличными функциями и не отражает возможности сознательного управления на достаточно большом промежутке в будущем.

Ниже будет рассмотрена задача управления для дополнительной глобальной модели Мидоуза.

**Проблема “векторного критерия и роль ЛПР в процессе управления”.** В постановке задачи оптимального управления развитием глобальной динамической системы существенным является определение критерия оптимальности и ограничений.

Анализ любой крупной региональной проблемы развития показывает, что каждая страна либо группа стран может обладать своим набором целей и управляющих воздействий. Однако не только стремления различных стран часто противоположны, но и сами цели, критерии качества в каждой из стран содержат трудносовместимые требования.

**Анализ результатов численного эксперимента на модели типа “Мир-3”.** Рассмотрим результаты решения задачи оптимизации при различных значениях производительности капитала добычи нетрадиционных ресурсов.

Основной результат, полученный авторами исходной модели “Мир-3”, — возможное поведение мировой социально-экономической системы до 2100 г. при сохранении существующих тенденций: рост населения и промышленного производства приводит к быстрому истощению невозобновляемых ресурсов. В результате промышленность вынуждена тратить все больше средств на добычу сырья, что ведет к резкому падению промышленного производства и как следствие — к катастрофическому падению остальных показателей системы.

Были проведены расчеты по решению задачи оптимизации при различных значениях производительности капитала добычи нетрадиционных ресурсов.

Рассмотрим два варианта.

*Вариант 1.*  $1/\beta = f(t)$  — научно-технический прогресс в разработке нетрадиционных ресурсов ( $\beta C$  — стоимость добычи единицы нетрадиционных ресурсов). Исследуется поведение системы при постепенном росте производительности капитала добычи нетрадиционных ресурсов.

Предполагается, что  $1/\beta$  на интервале (1975–2100) возрастает экспоненциально от 0.05 до 0.2, что соответствует ежегодному приросту около 1.1%.

Поиск управляющих воздействий проводился в два этапа. Цель первого этапа — предотвращение падения  $L$  (средней продолжительности жизни). После решения этой задачи на втором этапе поиска сделана попытка поднять уровень питания. Несмотря на то, что при таком низком темпе научно-технического прогресса в разработке нетрадиционных ресурсов ( $1/\beta$  не достигает значения 0.1 к 2040 г.) и наблюдается значительная нехватка капиталовложений, удается избежать падения основных показателей системы.

*Вариант 2.* Разоружение и научно-технический прогресс. В исходной модели “Мир-3” предполагается, что 10% ежегодных капиталовложений направляется на военные расходы, которые включены в

конечное потребление. Предположим, что расходы на вооружение сокращаются с темпом 5% в год.

Рассмотрены возможности системы при росте производительности капитала добычи нетрадиционных ресурсов  $1/\beta$ , равном 1.1% в год. Проведены расчеты поиска управляющих воздействий, обеспечивающих рост  $L$  до 67 лет.

Анализ результатов показал, что существуют возможности для дальнейшего улучшения характеристик системы, так что использование управления в корне меняет выводы Мидоуза.

**Исследования стационарных решений задачи управления для модели типа "Мир-3"**. Как показал анализ численного эксперимента на модели "Мир-3", даже в лучшем из полученных вариантов в конце рассматриваемого интервала времени начинается падение уровня питания. Система уравнений модели Мидоуза не имеет ненулевых стационарных режимов по следующим причинам: невозобновляемые ресурсы монотонно убывают с неравной нулю скоростью; обрабатываемые земли необратимо уничтожаются эрозией. Поэтому глобальное равновесие, которое рекомендуют авторы, неизбежно сменится упадком.

В системе уравнений дополненной модели положение с ресурсами исправляется путем введения слагаемых, представляющих добычу нетрадиционных ресурсов. Если приравнять правые части уравнений к нулю, что необходимо при определении стационарного режима, то для исходной модели Мидоуза стационарное решение является нулевым.

В системе уравнений дополненной модели ненулевые стационарные решения не появляются (хотя и введены управляющие воздействия), что связано с тем, что эрозия остается и необратимо уничтожает обрабатываемые земли.

Чтобы исправить положение, необходимо восстанавливать земли, выводимые из строя эрозией, что потребует дополнительных инвестиций в сельское хозяйство, т.е. затраты некоторой доли годового индустриального продукта  $I$ . Предполагается также, что борьба с эрозией будет производиться так, чтобы не возникла дополнительная генерация загрязнений на Земле.



В этом случае для определения стационарного решения создается система из 14 конечных соотношений. Для облегчения решения полученной системы используется прием, в котором некоторые управления не задаются заранее, а находятся из уравнений. Задаются же наиболее удобно входящие в уравнения фазовые переменные. Проведенные исследования показали, что управляемая модель, в отличие от исходной, допускает стационарные (ненулевые) решения.

Авторы управляемой модели не ставили перед собой задачу разработки новой модели развития общества. Они лишь показали, что введение управляющих воздействий в известные модели позволяет избежать экологического кризиса и оценить соответствующие необходимые затраты общества и изменения в составе и структуре отраслей хозяйства.

Решение комплексной проблемы — построения модели глобального развития — потребует координации усилий специалистов различных областей знаний: философов, экономистов, социологов, математиков, специалистов по теории управления и др.

## § 5. Глобальная модель биосферы

### 1. Общее описание модели

Глобальная модель биосферы, разработанная в Вычислительном центре РАН, представляет собой попытку совместного описания сложных процессов биотической и абиотической природы. Цель ее — изучение изменений некоторых характеристик биосферы при различных вариантах социального и экономического развития, а главное — нахождение тех путей, выявление тех критериев и принципов, которые могли бы обеспечить возможность совместного стабильного развития человеческого рода и биосферы при достаточно высоком уровне развития общества.

Модель биосферы состоит из взаимодействующих блоков, разрабатываемых относительно автономно. Такая структура модели (модульный принцип) позволяет наращивать степень детализации каждого блока без необходимости менять структуру других блоков.

Длительность отражаемых в модели процессов составляет десятки, максимум сотни лет — таково характерное время процессов взаимодействия человека с окружающей средой. В качестве временного шага моделирования выбран один год.

При описании биосферы выделяется три пространственных блока: атмосфера, океан и регионы суши. Если разделение суши на регионы связано с природными, экономическими или политическими границами, то атмосфера и океан в принятом описании считаются едиными. Последнее предположение тем более оправдано, что процессы перемешивания в атмосфере и океане протекают гораздо быстрее, чем на суше (например, для атмосферы характерное время перемешивания составляет всего несколько месяцев).

Состояние каждого блока модели определяется набором некоторых переменных (рис. 6.6), которые в совокупности и составляют вектор основных фазовых переменных модели.

Все принятые переменные в настоящее время хорошо изучены в достаточно агрегированном виде; известны качественные, а иногда и количественные характеристики связей между ними. Однако синтез имеющейся информации ранее не проводился. При этом учитывается структура внутренних и внешних биогеохимических, экологических, социальных и экономических связей. В модели использована в основном вся имеющаяся в литературе информация о протекающих в биосфере процессах, об их количественных характеристиках и т. п.

В целом модель описывается задачей Коши для системы обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений, отражающих все связи между рассматриваемыми компонентами регионов биосферы. Модель реализована в виде программы на языке Фортран-IV и используется в ВЦ РАН и в качестве учебной — в МГУ.

В модели более 400 коэффициентов, требующих количественного определения, и около 200 связей, нуждающихся в математическом описании. Количественные значения коэффициентов определялись по многочисленным литературным источникам (табл. 6.1).

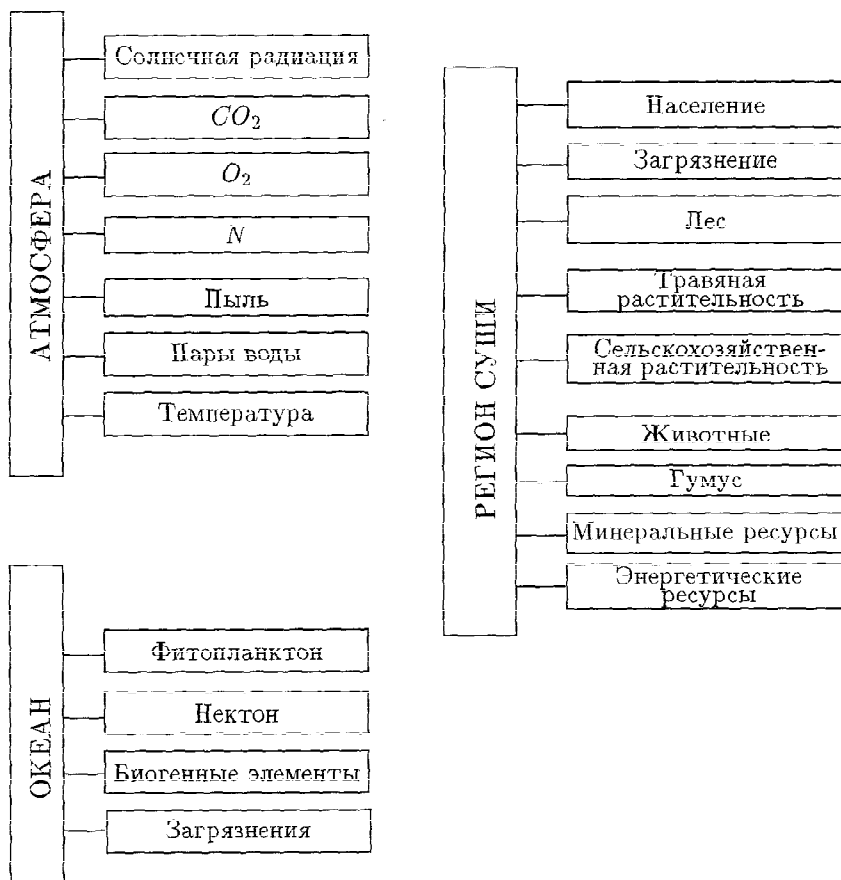


Рис. 6.6. Основные блоки глобальной модели биосферы

Таблица 6.1

## Характерные параметры биосферы

Параметр	Числовое значение
Площадь биосферы (тыс. км <sup>2</sup> )	509 000
В том числе:	
суши	147 610
океана	361 390
лесов	4 072
пригодных для земледелия земель	3 140
используемых сейчас для земледелия площадей	1 370
Уровень энергии солнечной радиации на поверхности Земли, при котором может наступить оледенение (кал/мин)	$2.548 \cdot 10^{18}$
КПД использования солнечной энергии (%):	
биосферой в целом	0.13
сушей	$0.3 \div 0.46$
океаном	$0.04 \div 0.07$
Альбедо системы Земля — атмосфера	0.3
Средняя годовая температура атмосферы у поверхности Земли (°C)	14.5
Общая масса атмосферы (млрд. т)	$5.13 \cdot 10^6$
Промышленные запасы каменного угля на земном шаре (млрд. т)	7 640
Потребление энергии на душу населения в Европе (тыс. ккал./сут)	70
Темпы ежегодного увеличения производства энергии в среднем на человека (%)	4
Темп роста потребления человечеством невозобновимых ресурсов (% в год)	5
Количество выбрасываемых в атмосферу промышленных отходов (млрд. т/год)	15
Количество загрязнений, попадающих в океаны (млрд. т/год)	1.5
Количество пыли в атмосфере (т)	$10.5 \cdot 10^6$

Окончание табл. 6.1

Параметр	Числовое значение
Ежегодное поступление пыли (т) в атмосферу в результате:	
пыльных бурь	$5.4 \cdot 10^7$
антропогенных воздействий	$1.8 \cdot 10^7$
Биомасса биосферы (млрд. т сухого вещества)	1 840
В том числе:	
нектон (млрд. т)	5.3
Запасы животной пищи (млн. т)	725
Объем пищевых продуктов, добываемых человеком (млрд. т):	
на суше	1.3
в океане	0.017
Чистая первичная продукция биосферы (ккал/год)	$65.2 \cdot 10^{16} \div$ $68.69 \cdot 10^{16}$
В том числе:	
на суше	$37.8 \cdot 10^{16} \div$ $42.6 \cdot 10^{16}$
в океане	$26.1 \cdot 10^{16} \div$ $27.4 \cdot 10^{16}$
Потребление ПП (%):	
нектоном	50
животными	30
населением	1
отмирание ПП	19
Запасы гумуса почв (млрд. т)	2 400
Рост народонаселения в 1970 г. (%):	
рождаемость	33.8
смертность	10

## 2. Атмосфера

**Баланс энергии.** Основу биогеоденотического процесса биосферы составляет энергообмен, описываемый уравнением сохранения энер-

гии. В модели учитываются только два источника энергии: излучение солнца (главный источник) и сгорание топлива биогенного происхождения. Баланс энергии можно представить в виде уравнения

$$E_0 + E = E_1 + E_2 + E_3, \quad (6.19)$$

где  $E_0$  — энергия излучения солнца, поступающая в биосферу;  $E$  — энергия антропогенного происхождения;  $E_1$  — энергия, отражаемая в космос;  $E_2$  — часть солнечной энергии, которая идет на нагревание атмосферы;  $E_3$  — энергия солнца, вступающая в контакт с фотосинтезирующими элементами биосферы. Величина  $E_1$  зависит от альбедо, которое в свою очередь определяется площадью ледников, запыленностью атмосферы и структурой растительного покрова. В модели альбедо полагается постоянным за рассматриваемый промежуток времени. Величина  $E_2$  также зависит от запыленности атмосферы и от плотности облачного покрова.

**Круговорот кислорода.** Наличие кислорода определяет протекание многих метаболических процессов в атмосфере. Хотя, согласно современным оценкам, количество кислорода в биосфере стабилизировано, в модели учитываются существующие режимы обмена кислородом между различными компонентами биосферы и регионами и возможность нарушения равновесия.

**Круговорот углекислого газа.** Один из наиболее интенсивных и значительных биосферных процессов — круговорот углерода. Присутствие углерода в атмосфере, в основном в виде  $CO_2$ , в значительной степени определяет климат планеты. В свою очередь, от климатических факторов и от количества  $CO_2$  в атмосфере в каждый момент зависит интенсивность как ассимиляции атмосферного  $CO_2$  растениями, так и его выделения в атмосферу в результате разложения мертвого органического вещества почвы. Само содержание  $CO_2$  в атмосфере определяется балансом потребления  $CO_2$  и выделения его в этих двух процессах. Все новые порции  $CO_2$  поступают в атмосферу в результате вулканической деятельности. Существенно влияют на круговорот углерода антропогенные факторы. Человек включает в углеродный цикл огромные количества ископаемого углерода, сжигая нефть, газ и каменный уголь. Все большее количество содержащейся в океане углекислоты поступает

Таблица 6.2

**Числовые характеристики глобальных потоков  $CO_2$   
в биосфере**

Процесс	Количественная характеристика
Концентрация $CO_2$ в атмосфере в 1970 г. (%)	0.0319
Масса $CO_2$ в атмосфере (т)	$2.1 \cdot 10^{10}$
Ежегодная ассимиляция $CO_2$ (т):	
растениями суши	$6 \cdot 10^{10}$
фитопланктоном	$0.46 \cdot 10^{12}$
Среднегодовой прирост $CO_2$ в миллионных долях по объему:	
1962–1965	0.46
1970–1971	1.48
Скорость производства $CO_2$ людьми (т/год)	$16 \cdot 10^9$
Скорость поступления $CO_2$ из недр земли (т/год)	$1 \div 10^8$
Скорость выделения $CO_2$ за счет разложения гумуса и дыхания (т/год)	$3 \cdot 10^{11}$
Количество растворенного $CO_2$ в гидросфере (т)	$13 \cdot 10^{13}$
Количество $CO_2$ , выделяемого человеком или животными при дыхании ( $m^3$ /год)	124
Оптимальная концентрация $CO_2$ для дыхания и фотосинтеза (%)	0.03

в атмосферу вследствие увеличения температуры атмосферы. Количественные характеристики глобальных процессов кругооборота  $CO_2$  приводятся в табл. 6.2.

**Круговорот азота.** С этим циклом в конечном счете связана продуктивность всех естественных и искусственных ценозов. Азотный цикл неразрывно связан с процессами, происходящими в почве, с той цепочкой химических превращений, в ходе которых отмирающая органика превращается в гумус и питательные вещества для растений. Кроме того, циркуляцию азота очень трудно отделить от влагооборота. В модели рассматривается упрощенная схема круговорота азота. В дальнейшем эта схема может усложняться с учетом различных почвенных и климатических зон и связей между зонами.

**Круговорот воды.** В атмосфере вода содержится в газообразном состоянии, и характер ее циркуляции определяется всей совокупностью биосферных процессов. Относительное содержание воды в атмосфере невелико, однако она имеет огромное значение как один из основных факторов замутнения атмосферы (облачность), во многом определяющий климат. Кроме того, от количества осадков и влажности существенным образом зависит биопродуктивность растений.

В рассматриваемой модели была принята упрощенная схема круговорота воды, учитывающая потоки водяного пара между регионами суши и между сушей и океаном, выпадение осадков, испарение с поверхностей океана и суши, а также транспирацию растений.

**Климат.** Особое место в модели занимает блок климата. От климата зависит сама возможность жизни на Земле и тем более существование человеческой цивилизации, причем диапазон параметров, при котором жизнь может существовать, крайне узок. Если средняя температура атмосферы уменьшится на 2–3 градуса, начнется необратимый процесс образования ледников и, следовательно, дальнейшее понижение температуры, так как по мере роста площади ледников будет возрастать альbedo Земли, т.е. количество солнечной энергии, отражаемой в космос. Это приведет к тому, что количество солнечной энергии, поступающей на Землю, уменьшится. Последнее вызовет дальнейшее понижение средней температуры атмосферы и т.д.

Повышение средней температуры атмосферы на 2–4 градуса (оценка приближенная) тоже катастрофично — это может привести к необратимому таянию ледников, прежде всего в Антарктиде, т.е. к повышению уровня мирового океана. В результате наиболее плодородные и густонаселенные районы земного шара окажутся под водой. Таким образом, модель климата должна относиться к числу базовых моделей биосферы. Однако в настоящее время удовлетворительных способов прогнозирования и оценки основных параметров климата пока нет.

Для проведения иллюстративных (методических) расчетов применяются простейшие зависимости, позволяющие определить (оценить) лишь один параметр — среднюю температуру атмосферы как



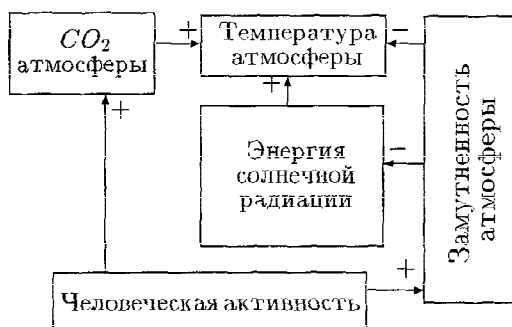


Рис. 6.7. Схема причинно-следственных связей в системе климатических переменных

функцию количества углекислого газа, значений энергии солнечной радиации и запыленности атмосферы.

На рис. 6.7 представлены причинно-следственные связи, принятые в системе климатических переменных; знак у стрелки указывает на характер влияния — увеличение или уменьшение.

### 3. Океан

Для целей данной работы блок “океан” достаточно представить точечной моделью (т.е. моделью с идеальным перемешиванием), содержащей следующие переменные: количество фитопланктона, зоопланктона, nekтона и биогенных питательных элементов, уровень загрязненности океана, содержание  $CO_2$  в верхнем слое перемешивания и в глубинных слоях океана.

В последнее время океан начал играть важную роль как источник пищи для человека. Однако в общем валовом производстве пищи на его долю пока приходится около 1% (в энергетическом эквиваленте). Для использования имеющихся резервов океанических экосистем требуется разработка методов рационального и культурного хозяйствования.

В модели учитывается также важное значение океана в газовом балансе атмосферы, прежде всего в обмене  $CO_2$ . Обмен  $CO_2$  между

атмосферой и океаном зависит в значительной степени от температуры атмосферы и от увеличивающегося в ней за последние годы содержания  $CO_2$ , т.е. от тех факторов, которые прямо связаны с производственной деятельностью человека.

**Фитопланктон.** Главным источником органического вещества в океане служит фотосинтез. Скорость фотосинтеза зависит от освещенности, температуры, концентрации биогенных элементов, биомассы фитопланктона и от других факторов.

**Биогенные элементы.** В модели принята схема вертикального круговорота биогенных элементов. Считается, что в глубинных слоях океана (глубже 200 м) запасы биогенов не ограничены, так что они могут лимитировать фотосинтез только в верхних слоях.

Биогенные элементы переносятся в фотическую зону восходящими течениями и вертикальным перемещиванием. Выводятся биогены из верхнего слоя в основном в виде "дождя трупов". Скорость ассимиляции биогенных элементов фитопланктоном пропорциональна интенсивности фотосинтеза.

**Нектон.** Скорость изменения биомассы нектона регулируется температурой окружающей среды, характером и напряженностью трофических связей (рацион), а также естественной смертностью, смертностью в результате загрязнений и смертностью в результате эксплуатации популяций (вылова). (Естественно, введение такого обобщенного элемента экосистемы океана как нектон — лишь грубое приближение к реально существующей структуре этой системы. Однако для первичного варианта рассматриваемой модели такое приближение достаточно. Нектон — пищевой ресурс человечества, и при более тонком описании структуры пищевых связей в динамике человеческой популяции будет необходима дальнейшая детализация).

#### 4. Регион суши

**Растительность.** Растительный покров суши отличается большим разнообразием видов, широким диапазоном показателей продуктивности и интенсивности газообмена. Так, валовая первичная биопродукция суши колеблется от 28 140 ккал/м<sup>2</sup> за год в тропических лесах до 480 ккал/м<sup>2</sup> в пустыне. Чтобы учесть все многообра-

зие форм растительности и сохранить точечный характер блоков модели, принимается понятие региона суши, что позволяет без введения пространственных координат приближенно учесть зональный характер растительного покрова Земли. В рамках модели рассматриваются три типа растительности: леса, сельскохозяйственные растения и естественная травяная растительность.

Изменение биомассы растительности каждого типа описывается дифференциальным уравнением первого порядка:

$$\frac{dx_i}{dt} = R_x^{(i)} - M_x^{(i)} - x_i \sum_j C_{ij} R_j, \quad (6.20)$$

где  $R^{(i)}$  — скорость фотосинтеза (сложная функция освещенности, влажности, состояния гумуса, количества вносимых удобрений, газового режима атмосферы и т.д.);  $M_x^{(i)}$  — скорость отмирания растений; сумма в правой части уравнения отражает реальное потребление биомассы растений животными и людьми.

**Животные.** Продукция фотосинтеза потребляется населяющими Землю животными. В модели они рассматриваются как единая фазовая переменная биосферы, характеризующаяся некоторыми средними скоростями роста и отмирания. В свою очередь биопродукция животных потребляется человеком.

**Гумус.** Большую роль в глобальных циклах вещества и энергии играют почвообразовательные процессы, сопровождаемые биохимической деятельностью организмов. В рамках модели все многочисленные этапы образования почвенного гумуса, который является последним звеном в цепи биохимического преобразования органического вещества, объединены для каждого региона в один компонент — “гумус”.

В качестве начального значения количества гумуса в биосфере принята усредненная оценка, равная  $2.3 \cdot 10^{12}$  т. Принято также, что скорость изменения количества гумуса зависит от интенсивности накопления органических отходов жизнедеятельности растений. Считается, что интенсивность разложения прямо пропорциональна массе разлагающегося вещества и возрастает экспоненциально с увеличением температуры до некоторого предела. В модели также учтено, что скорость разложения гумуса уменьшается при отклоне-

нии влажности от некоторого оптимального значения и при значительном повышении или понижении температуры.

**Население.** Наибольшую трудность при моделировании представляет описание демографического блока. Демографические характеристики не только определяют структуру резерва рабочей силы, но и влияют на все стороны экономики и биосферу в целом. В основе любого демографического описания лежит балансовое соотношение вида

$$\frac{dP}{dt} = (\alpha - \beta)P, \quad (6.21)$$

где  $P$  — численность населения,  $\alpha$  — коэффициент рождаемости,  $\beta$  — коэффициент смертности. Подобное балансовое соотношение можно записывать в дифференциальной или разностной форме, с учетом миграции, возраста и т. д. Но все эти модификации и усложнения не изменяют сколько-нибудь существенно смысла этого уравнения, которое является одним из законов сохранения. Наиболее сложные вопросы связаны с описанием процессов рождаемости и смертности. Что касается коэффициента смертности, то он в основном зависит от уровня жизни, затрат на здравоохранение, вложенный в сельское хозяйство, жилищное строительство, борьбу с загрязнением. Статистическая обработка показала, что из этих параметров можно составить некоторый безразмерный параметр, играющий роль “характеристики жизни”. Коэффициент смертности  $\beta$  является монотонно убывающей функцией этого параметра. В модели учитываются различные показатели смертности для зрелых и детских возрастов.

Найденные статистические зависимости коэффициентов смертности незначительно отличаются для разных регионов. А вот коэффициент рождаемости, характер его зависимости от тех или иных величин очень сильно меняется от региона к региону. На основании регрессионного анализа демографической статистики были получены зависимости коэффициента рождаемости от коэффициента смертности для районов с низким уровнем жизни и зависимость  $\beta$  от дохода на душу населения в развитых странах (рис. 6.8, 6.9).

Качественный характер зависимости коэффициента рождаемости от среднего дохода на душу населения в развитых странах показан на рис. 6.9. Вначале по мере роста жизненного уровня ро-

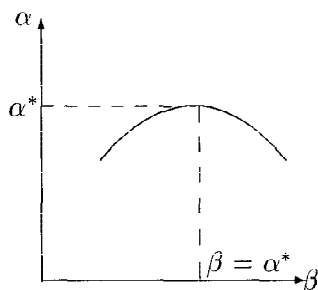


Рис. 6.8. Зависимость коэффициента рождаемости от коэффициента смертности

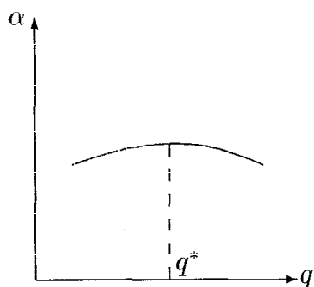


Рис. 6.9. Зависимость коэффициента рождаемости от среднего дохода на душу населения в развитых странах мира

ждаемость растет. Однако этот процесс происходит лишь до тех пор, пока средний доход не достигает некоторой величины  $q^*$ . Если  $q > q^*$ , то рождаемость начинает монотонно убывать.

## 5. Человеческая активность

В последние годы человеку принадлежит в биосфере одна из главных ролей. Если до недавнего времени можно было сказать о его эволюции как элемента биосферы, то сегодня рост независимости человека от биотической среды и увеличение нагрузки на биосферу позволяют говорить о совместной эволюции (коэволюции) биосферы и человека. Приведем некоторые данные. За последние 30 лет человечество потребило столько же минерального сырья, сколько за всю предыдущую историю. Производство энергии в расчете на душу населения растет по экспоненте с ежегодным приростом в среднем на 4–5%. Человечество изымает из океана и наземных экосистем  $17 \cdot 10^6$  т/год и  $1.3 \cdot 10^9$  т/год пищевых продуктов соответственно. И хотя еще есть определенный резерв повышения продуктивности экосистем биосферы, все же, по оценкам специалистов, современный уровень эксплуатации этих систем стал весьма напряженным.

Чтобы отразить зависимость роста народонаселения от количественных и качественных характеристик биосферы, в модель наряду с блоком “население” вводятся блоки “человеческая деятельность”, “генерация загрязнений” и “производство энергии”.

**Блок “человеческая деятельность”.** Антропогенное воздействие на окружающую среду весьма разнообразно. Как уже указывалось выше, выбросы в атмосферу  $CO_2$  и аэрозолей изменяют тепловой режим планеты. Но антропогенные воздействия не ограничиваются влиянием на атмосферу. Все воздействия параметризуются в модели следующими характеристиками:

1) скоростью генерации загрязнений в расчете на одного человека (характеризующей жизненный уровень и технологию общественного производства);

2) показателями скорости рассасывания загрязнений;

3) интенсивностью расходования минеральных ресурсов;

4) показателями скорости включения в сельскохозяйственный оборот всех пригодных для обработки земель и повышения продуктивности агроэкосистем;

5) долей капиталовложений в развитие сельского хозяйства, в восстановление ресурсов, в разработку новых видов ресурсов и в борьбу с загрязнением.

В этом блоке учитывается возможность изменения с течением времени коэффициентов взаимного обмена ресурсами и пищей между регионами суши.

**Генерация загрязнений и производство энергии.** На Земле в целом и в биосфере в частности происходит крупномасштабный круговорот энергии и вещества. До начала прошлого века человек располагал лишь солнечной энергией, высвобождавшейся при различных биологических процессах. Но за последние полтора столетия положение дел в корне изменилось, а после того, как началось использование ядерной энергии, перед человечеством открылись новые перспективы. Общее количество производимой человечеством энергии удваивается за 7–10 лет. Рост народонаселения и соответствующее возрастание производства энергии приводят к загрязнению атмосферы, почвы, воды и повышению температуры окружающей среды. По имеющимся оценкам, на нашей планете ежегодно

сжигается 2.7 млрд. т угля и 1.6 млрд т нефти, вносится в почву более 1.25 млн. т пестицидов. При этом в атмосферу ежегодно добавляется  $1.5 \cdot 10^{10}$  т  $CO_2$  и расходуется  $9 \cdot 10^9$  т  $O_2$ . В результате постоянно возрастает концентрация  $CO_2$  и сокращается количество  $O_2$ .

В модели рассматривается обобщенный компонент “загрязнения”, который отражает лишь усредненные характеристики загрязнителей различных типов.

Для определения скорости изменения концентрации загрязнений  $R_z$  в  $i$ -м регионе используется уравнение Форрестера (6.8), отражающее увеличение  $R_z$  пропорционально росту численности населения с зависящим от времени коэффициентом. При этом предполагается, что  $R_z$  возрастает с увеличением материального уровня жизни населения.

Загрязнения ликвидируются в ходе естественного разложения и искусственной нейтрализации. Скорость искусственной нейтрализации линейно зависит от объема выделяемых для этой цели ресурсов и обратно пропорциональна стоимости ликвидации единицы объема или веса загрязнителя. Океан загрязняется веществами, попадающими в него из всех регионов суши. В модели учитывается уменьшение прозрачности воды, снижение скорости роста биомассы и увеличение коэффициента смертности в результате загрязнения океана.

**Минеральные ресурсы.** Скорости геологических процессов, ведущих к образованию полезных ископаемых, пренебрежимо малы, так что ресурсы полезных ископаемых для ближайших поколений практически можно считать невозобновляемыми. Темпы расходования невозобновляемых минеральных ресурсов в последние десятилетия постоянно возрастают примерно пропорционально численности населения.

По имеющимся оценкам, каменного угля, нефти и природного газа должно хватить человечеству на ближайшие 150–200 лет. Следовательно, в ближайшие два столетия человечеству необходимо будет перейти на использование новых источников энергии.

Для описания процессов изменения количества невозобновляемых ресурсов биосферы используется обобщенное уравнение Форрестера (6.6). Процесс перехода к новым минеральным ресурсам отожде-

ствляется с заменой одних начальных условий другими через какой-то промежуток времени.

**Оценка риска воздействия на окружающую среду.** Этот вопрос стал актуальным сейчас, спустя тысячелетия после того, как в сложном мире природы появился *homo sapiens*. Его деятельность по освоению земель и постоянному приспособлению окружающей среды к своим нуждам привела в наше время к опасности необратимых сдвигов в существующем глобальном динамическом равновесии. Опишем состояние биосферы обобщенным показателем  $R$ . Деятельность каждого региона нацелена на достижение определенных безопасных значений  $R$ . Тогда вероятность пересечения некоторой предельной верхней границы на фазовой плоскости  $(R, t)$  может служить показателем величины риска воздействия на окружающую среду.

**Региональность управления биосферой.** Перечисленные выше блоки модели описывают причинно-следственные энергетические связи между компонентами атмосферы, океана и суши. Деление суши на регионы предполагает, что эти связи по своему характеру и количественным признакам могут быть различными для различных регионов. Таким способом в модель вводится возможная региональность управления с учетом, в частности, разделения поверхности суши на территории различных государств. Поиск оптимальных решений требует создания теории математического моделирования социально-экономических процессов, основой которой может служить теория коалиционных динамических игр, разрабатываемая в ВЦ РАН.

**Эксперименты с моделью.** Для проведения экспериментов с моделью необходимо иметь набор различных сценариев, рассматривающих варианты будущего развития общества, различные политики управления, оценки темпов научно-технического прогресса и т. п.

Рассмотрим несколько модельных экспериментов. В первом из них поставлен вопрос: как будут изменяться отдельные параметры биосферы при сохранении существующих тенденций. В этом эксперименте предполагалось, что остаются неизменными (на уровне 1970 г.) структура инвестиций в промышленность и сельское хозяйство, особенности демографических процессов, темпы развития



энергетики, характеристики загрязнения атмосферы и некоторые другие тенденции и параметры. Результаты моделирования показывают, что средняя температура колеблется с периодом около 200 лет, но не выходит за пределы отрезка  $13-17^{\circ}\text{C}$ . Любопытно, что в середине XXII в. возникает ситуация, характерная для далекого геологического прошлого: жаркий климат, высокая концентрация кислорода и бурное развитие зеленой растительности. Запыленность атмосферы резко возрастает, увеличиваясь к 2125 г. в 4 раза по сравнению с 1970 г. Из-за быстрого роста населения (до 2100 г.) обеспеченность пищей падает почти на 50%. Совокупное действие загрязнения окружающей среды и уменьшение белкового компонента рациона приводит к резкому падению плотности населения. После периода падения, продолжающегося свыше ста лет, наступает период относительной стабилизации — на уровне, соответствующем современному. Все остальные переменные к 2400 г. также возвращаются к значениям, близким к современным. Модель может быть весьма полезна для изучения различных гипотетических ситуаций, так как проводить прямые эксперименты над биосферой или над некоторыми ее подсистемами невозможно. Например, было бы полезно в познавательных целях проследить влияние на динамику биосферы таких параметров, как темпы освоения пригодных для использования в сельском хозяйстве земель и распределение капиталовложений. Оказывается, что если к 2000 г. площадь земель под сельским хозяйством будет увеличена на 10%, продуктивность животноводства возрастет на 10%, а интенсивность генерации загрязнений уменьшится на 10%, то к 2200 г. по сравнению с ситуацией, когда этих изменений нет, численность населения, загрязненность среды и замутненность атмосферы возрастают на 3.1, 20.8 и 1.2% соответственно. Потребность в капиталовложениях в сельское хозяйство уменьшается на 4.7%, обеспеченность пищей улучшается всего лишь на 6.8%, а уровень материальной обеспеченности возрастает на 5.8%.

Оценим чувствительность модели к изменению распределения капиталовложений. Пусть распределения капиталовложений описываются двухступенчатыми функциями со скачком в 2000 г. Оказывается, даже в этом простом классе управляющих воздействий существует ситуация, когда параметры модели биосферы принима-

ют приемлемые для человека значения: достаточно увеличить капиталовложения в восстановление природных ресурсов и борьбу с загрязнениями после 2000 г. в 2 и 10 раз соответственно.

В данном параграфе описана модель глобальных процессов в биосфере, построенная на основе использования системного подхода. Задача подобных моделей — давать оценки изменения тенденций развития в результате тех или иных решений и выявлять возможность опасных экологических ситуаций. Рассмотренная выше модель еще чересчур груба для того, чтобы ее использовать как рабочий инструмент.

Для повышения адекватности модели необходимо ввести в нее еще дополнительные блоки, отражающие экономические, политические факторы и последствия НТР, а также точнее учесть взаимосвязи в уже имеющихся блоках.

# Приложение.

## Конференция ООН по окружающей среде и развитию

В июне 1992 г. в Рио-де-Жанейро состоялась Конференция ООН по окружающей среде и развитию. Эта конференция войдет в историю как начало сознательного поворота нашей цивилизации на новый путь развития — развития, при котором человек поумерит свою гордыню и потребительский эгоизм и постарается жить в ладу с Природой. Чрезмерная ее эксплуатация грозит ответными реакциями, губительными для человечества.

Массированное воздействие на окружающую среду — характерная черта промышленной революции, которая особенно быстрыми темпами пошла после второй мировой войны. Нынешнее поколение является участником и свидетелем создания реактивной и турбовинтовой авиации, развития телевидения, средств телекоммуникаций и вычислительной техники, становления атомной энергии, выхода человека в космос и т. д.

Промышленное развитие является основой экономического развития, а следовательно, и подъема социально-экономического уровня жизни общества. Однако промышленное развитие во всем мире шло без должного учета исчерпаемости многих видов невозобновляемых ресурсов и понимания того обстоятельства, что восстановительные способности живой природы не беспредельны.

Следует заметить, что значительная часть принципиально новых технических и технологических решений последних десятилетий родилась в ходе фантастических по своим масштабам работ в области совершенствования и наращивания различных вооружений и сопряженных с ними систем.

Сегодня угроза выживанию пришла со стороны окружающей природной среды, быстро деградирующей под натиском человеческой деятельности. Угроза эта имеет глобальный общепланетарный характер, затрагивающий все страны, всю нашу цивилизацию.

Возможное глобальное потепление климата, истощение стратосферного озонового слоя, кислотные дожди, накопление в почве промышленных районов токсических тяжелых металлов и пестицидов в сельскохозяйственных зонах, загрязнение больших территорий радионуклидами заставили человечество задуматься над вопросом — можно ли жить так дальше?!

На конференции отмечалось, что назрела историческая необходимость и нравственная обязанность сформировать новую модель (развития), в которой благополучие всех и сохранение окружающей среды были бы обязательно синонимами.

Нельзя обеспечить экологическую безопасность планеты в социально несправедливом мире. Центральными вопросами проблемы являются: характер производства и потребления в промышленно развитой части мира, который подрывает системы, поддерживающие жизнь на Земле; взрывоопасный рост населения преимущественно в развивающейся части мира.

Численность населения должна быть стабилизирована. Если этого не сделать самим, то об этом позаботится природа, причем значительно более жестко. Необходимо добиться соответствия деятельности и численности человечества с законами природы.

Требуется осуществить наиболее важный после сельскохозяйственной и промышленной революции переход к устойчивому развитию. Под термином “устойчивое развитие” понимают такую модель движения вперед, при которой достигается удовлетворение жизненных потребностей нынешнего поколения людей с сохранением такой возможности для будущих поколений.

Основные документы конференции: Декларация Рио-де-Жанейро по окружающей среде и развитию; Рамочная конвенция ООН об

изменении климата; Конвенция ООН о биологическом разнообразии; Заявление; Повестка дня на XXI век.

### *1. Декларация Рио-де-Жанейро по окружающей среде и развитию*

Понятие устойчивого развития включает в себя признание того, что:

— в центре внимания находятся люди, которые должны иметь право на здоровую и плодотворную жизнь в гармонии с природой;

— охрана окружающей среды должна стать неотъемлемым компонентом процесса развития и не может рассматриваться в отрыве от него;

— право на развитие должно реализоваться таким образом, чтобы в равной мере обеспечить удовлетворение потребностей в развитии и сохранении окружающей среды как нынешнего, так и будущих поколений;

— необходимо уменьшение разрыва в уровне жизни народов мира.

В Декларации отмечается, что для достижения устойчивого развития и более высокого уровня жизни для всех народов государства должны уменьшить и исключить неспособствующие устойчивому развитию модели производства и потребления, подчеркивается необходимость широкого международного сотрудничества в области научных исследований и использования их результатов, распространения новых технологий с целью содействия реализации концепции устойчивого развития.

Декларация свидетельствует о необходимости перевода усилий по сохранению окружающей среды и реализации устойчивого развития в ранг государственной политики, с которой должны сверяться все экономические и политические решения.

### *2. Рамочная конвенция ООН об изменении климата*

В этом документе отмечается, что в результате человеческой деятельности произошло существенное увеличение концентрации парниковых газов в атмосфере, усиливающей парниковый эффект и приводящей к дополнительному усредненному потеплению поверхности и атмосферы Земли. Поэтому следует защищать климатическую систему на благо нынешнего и будущих поколений человечества, принимать предупредительные меры в целях прогнозирования, предотвращения или сведения к минимуму причин изменения климата и смягчения его отрицательных последствий.

### *3. Конвенция ООН о биологическом разнообразии*

Целями Конвенции являются сохранение биологического разнообразия, устойчивое использование его компонентов, предоставление необходимого доступа к генетическим ресурсам и передача соответствующих технологий.

*4. Заявление с изложением принципов для глобального консенсуса в отношении рационального использования, сохранения и освоения всех видов леса*

В Заявлении подчеркивается важное значение лесов для поддержания всех форм жизни и экономического развития и отмечается, что каждое государство в соответствии со своим национальным законодательством должно обеспечить управление и развитие своих лесов, сообразуясь со своими потребностями и уровнем социально-экономического развития, принять надлежащие меры по защите лесов от вредного воздействия загрязнения окружающей среды, включая загрязнение воздуха, пожары, насекомых-вредителей и заболевания.

### *5. Повестка дня на XXI век*

Принятый Конференцией документ является суперпрограммой, ориентированной на подготовку мирового сообщества к решению тех проблем, с которыми столкнулась наша цивилизация, вступая в XXI век. Документ состоит из 40 глав, сгруппированных в четыре раздела. Далее излагается краткое описание этого документа.

**В преамбуле** констатируется, что человечество переживает решающий момент в своей истории. Противоречия между сложившимся характером развития цивилизации и природой достигли предела. Дальнейшее движение по этому пути ведет к глобальной катастрофе, когда природа отплатит человечеству изменением климата, засухами и опустыниванием, эпидемиями, голодом и мором.

**Раздел I. Социальные и экономические аспекты.** Осознание того, что человечество может выжить только сообща и что поэтому увековечивание существующего разрыва в уровне жизни развитых и развивающихся стран абсолютно недопустимо, выводит проблему существующих мировых диспропорций экономического развития на одно из центральных мест при поиске путей обеспечения сбалансированности развития и сохранения окружающей среды,

Для решения проблем окружающей среды и развития государства должны образоваться новая форма партнерских отношений, которая обяжет все государства осуществлять постоянный и конструктивный диалог в целях создания более эффективной и справедливой экономики, учитывая все большую взаимозависимость сообщества наций и тот факт, что устойчивое развитие должно стать приоритетным вопросом в повестке дня мирового сообщества.

Перед всеми странами ставится задача: обеспечить всем людям возможность зарабатывать на устойчивой основе средства к существованию, базовое образование и первичное медико-санитарное обслуживание, обеспечить чистой пресной водой. Организации Объединенных Наций и другим международным структурам рекомендовалось содействовать развитию международного сотрудничества в целях устранения коренных причин нищеты.

Обращается внимание на необходимость экономичного, предельно рационального использования всех видов природных ресурсов на всех уровнях.

Существует тесная взаимосвязь между демографическими тенденциями и возможностями перехода к устойчивому развитию. Рост населения Земли усиливает и без того уже достигшую предела нагрузку на окружающую среду. Предлагается повысить во всех слоях общества понимание взаимосвязи между демографическими тенденциями и факторами, с одной стороны, и устойчивым развитием — с другой. Необходимо обеспечить координацию и осуществление просветительской деятельности в области народонаселения и устойчивого развития в рамках как формальной, так и неформальной систем образования.

Документ рекомендует всем странам усилить в своей национальной политике внимание к демографическим проблемам и их взаимосвязи с возможностями перехода на рельсы устойчивого развития.

В документе отмечается, что все страны должны принять необходимые меры по созданию и совершенствованию национальных систем здравоохранения и разработке национальных планов действий, адекватных нарастающей по разным причинам угрозе здоровью населения, обеспечив их стыковку с международными программами. Подчеркивается, что основополагающей частью деятельности на на-

циональном и международном уровнях является обеспечение людей безопасным и отвечающим санитарным нормам жильем. Специально обращается внимание на необходимость поощрения развития городов средних размеров и их участия в программах международной сети “Экоустойчивые города”. Высокая плотность населения в городах, представляющая сегодня серьезные проблемы, открывает в то же время при надлежащем управлении широкие возможности для создания устойчивой инфраструктуры охраны окружающей среды (водоснабжение, санитария, канализация, удаление твердых отходов), развитию и поддержанию которой следует уделять особое внимание. Тесно примыкает к этому вопросу проблема организации в населенных пунктах надежных и экологически приемлемых систем энергетики и транспорта.

Ставится задача преодоления традиционного разделения вопросов экономики, социальной сферы и экологии и перехода к комплексному учету всех факторов при принятии решений на всех уровнях с обеспечением более широкого участия общественности в подготовке таких решений. Правительствам рекомендуется принять национальную стратегию устойчивого развития на основе осуществления решений, принятых на конференции. К числу ее целей должно относиться обеспечение социально надежного экономического развития, при котором осуществляются мероприятия по охране ресурсов и окружающей среды в интересах будущих поколений.

**Раздел II. Сохранение и рациональное использование ресурсов в целях развития.** Обращается внимание на необходимость углубления понимания всей совокупности процессов, которые влияют на атмосферу Земли в глобальном, региональном и местном масштабах и, в свою очередь, испытывают воздействие со стороны атмосферы; углубления понимания экономических и социальных последствий атмосферных изменений, а также разработки мер по смягчению этих последствий. Особое внимание должно быть уделено стимулированию промышленности в поисках разработки и внедрения новых безопасных экологически приемлемых технологий.

Для обеспечения более эффективного и производительного использования Земли и ее природных ресурсов, для возможности удовлетворения на устойчивой основе потребностей будущих поколений



необходима разработка и реализация комплексного подхода к планированию и рациональному использованию земельных ресурсов, учитывающего экологические и социально-экономические факторы, все компоненты земельных ресурсов, региональные особенности, права коренного населения. Важными элементами этой работы являются: подготовка кадастров продуктивности земель, разработка региональной политики и территориальных планов землепользования, внедрение более современных систем обработки земли и подготовки квалифицированных специалистов в области землепользования.

Одним из важнейших элементов биосферы являются леса. В настоящее время над лесными угодьями мира нависла угроза неконтролируемой деградации и преобразования лесных массивов в другие виды земель. Поэтому назрела необходимость принять достаточно решительные меры по сохранению всех видов лесов и лесных угодий, сознавая их многогранную роль и разнообразие функций, на основе целостного и рационального подхода к устойчивому и экологически безопасному развитию лесного хозяйства.

Обращается внимание на борьбу с опустыниванием. Каждая страна должна уделить серьезное внимание развитию национальных систем наблюдения за деградацией земельных ресурсов и опустыниванием, вызываемыми климатическими колебаниями и деятельностью человека.

Ожидается, что численность населения планеты, составляющая сейчас 5.4 млрд. человек, к 2025 г. будет насчитывать 8.5 млрд. человек, 83% которых будут проживать в развивающихся странах. Однако вопрос о возможности удовлетворения потребностей населения такой численности в продовольственных и других сельскохозяйственных товарах за счет имеющихся ресурсов и при нынешнем уровне развития технологии остается открытым. В этой ситуации внимание должно уделяться прежде всего сохранению и наращиванию потенциала плодородных сельскохозяйственных земель и совершенствованию сельскохозяйственного производства с целью всемерного повышения его продуктивности, а также систем хранения и распределения продукции.

В ходе Конференции ООН большинством стран подписана Конвенция по сохранению биологического разнообразия. Каждая стра-

на должна разработать национальную стратегию охраны биологического разнообразия и устойчивого использования биологических ресурсов, принимать необходимые меры по ее реализации. Правительства должны создавать механизмы для совершенствования, разработки и устойчивого использования биотехнологий и их безопасной передачи, в частности развивающимся странам, с учетом потенциального вклада биотехнологии в сохранение биологического разнообразия и устойчивого использования биологических ресурсов. Можно рассчитывать на то, что биотехнология внесет весомый вклад в повышение уровня медицинского обслуживания людей и продуктивности в сельском хозяйстве, в повышение эффективности промышленных процессов переработки сырья и утилизации отходов и т. д.

В документе отмечается важность защиты океанов, всех видов морей и прибрежных районов и констатируется, что для предотвращения деградации морской среды необходим скорее профилактический и упреждающий подход, нежели основанный на принципе реагирования. Определенные рекомендации приведены и по предотвращению загрязнения, связанного с деятельностью непосредственно на море, включая разработку методов и средств борьбы с нефтяными разливами.

Рекомендации документа направлены на сохранение качества ресурсов пресной воды, применение комплексных подходов к освоению водных ресурсов, ведению водного хозяйства и водопользованию.

Следует принимать во внимание: а) максимальное использование существующих проектов путем их оживления, оптимизации управления; б) новые или альтернативные чистые технологии; в) экологически и социально приемлемую гидроэнергетику.

Существенное значение имеет разработка глобальных гидрологических моделей для уточнения анализа последствий изменения климата и широкомасштабной оценки водных ресурсов, а также научные исследования, направленные на ликвидацию пробела между гидрологией и экологией и понимание взаимодействия между гидрологическими потоками и биохимическими процессами, определяющими качество вод.

Рекомендуется усилить службы мониторинга по климатическим и гидрологическим параметрам (для оценки возможной угрозы).

Широкое использование химических веществ, промышленные выбросы, захоронение отходов химических производств и различного рода аварийные ситуации привели к тому, что масштаб химического загрязнения природной среды наиболее крупных промышленных районов мира достиг весьма высокого уровня. В случае использования хлорфторуглеродов в промышленных и бытовых холодильных системах и в аэрозольных товарах последствия загрязнения (разрушение стратосферного озонового слоя) приобретают глобальный характер. Не менее серьезно накопление химических веществ, в том числе токсичных, в продуктах питания. В рамках этого раздела документа внимание сосредоточено на шести направлениях:

- Расширение и ускорение процесса проведения международной оценки опасностей, связанных с химическими веществами.
- Согласование классификации и маркировки химических веществ.
- Обмен информацией о токсичных химических веществах и связанных с ними опасностях.
- Разработка программ по снижению степени опасности.
- Расширение национальных возможностей и наращивание потенциала по управлению использованием химических веществ.
- Предотвращение незаконного международного оборота токсичных и опасных продуктов.

Приоритетным направлением является минимизация отходов на всех стадиях производства путем перехода на более чистые технологии, совершенствования утилизации или экологически безопасного уничтожения на тех же производствах, где они образуются, чтобы исключить транспортировку. Обращается особое внимание на обеспечение безопасности обращения с радиоактивными отходами, их транспортировки, хранения и удаления.

**Раздел III. Усиление роли основных групп населения.** Вовлечению всех социальных групп населения в реализацию концепции устойчивого развития на всех уровнях подготовки и принятия решений посвящены положения и цели данного раздела.

Правительствам предлагается обеспечить активное участие женщин в подготовке и принятии экономических и политических решений: разработать и внедрить четкую государственную политику и

руководящие принципы, стратегии и планы для достижения равенства во всех аспектах жизни общества, включая содействие обеспечению грамотности, образования, профессиональной подготовки, питания, медицинского обслуживания, а также занятию женщинами основных руководящих должностей и их участию в мероприятиях по охране и рациональному использованию окружающей среды.

Каждой стране и Организации Объединенных Наций следует поддерживать деятельность по пропаганде и созданию механизмов, способствующих вовлечению представителей молодежи во все процессы, осуществляемые в рамках ООН, с тем, чтобы оказывать влияние на эти процессы. Наиболее уязвимой от ухудшения окружающей среды частью человечества являются дети, поэтому во всех целевых установках и программах должны быть в полной мере учтены их интересы.

Необходимо в рамках национальных и международных усилий по обеспечению экологически безопасного и устойчивого развития уделять должное внимание и содействовать повышению роли коренных народов и местных общин, а также признавать и укреплять эту роль. Правительствам рекомендуется обратить внимание на необходимость защиты земель коренных народов от видов деятельности, являющихся экологически небезопасными или, по мнению затрагиваемых народов, неприемлемыми в социальном и культурном плане.

Отмечается необходимость плодотворного диалога на национальном уровне между всеми правительствами и неправительственными организациями с тем, чтобы признать и укрепить их соответствующую роль в осуществлении экологически безопасного и устойчивого развития.

Жизненно важную роль в просвещении общественности, ее мобилизации и ориентировании на достижение устойчивого развития играют местные власти. Конференция рекомендует местным властям на основании консультаций со всеми заинтересованными сторонами разработать и утвердить "Местные повестки дня на XXI век".

Концепция устойчивого развития должна претворяться в жизнь на справедливой основе, а для этого необходимо активное участие профсоюзов в принятии решений, касающихся разработки, осуще-

ствления и оценки национальных и международных стратегий и программ в области охраны окружающей среды и развития, в том числе политики занятости, отраслевых стратегий, регулирования рабочей силы и передачи технологий.

Основной путь к устойчивому развитию — внедрение технологий и процессов, при которых ресурсы используются более эффективно и в то же время образуется меньше отходов, а экономический рычаг в условиях рыночных механизмов — ценообразование, отражающее затраты на экологизацию производства, для чего должны быть разработаны концепция и методология оценки таких затрат. Концепция экологически чистого производства предполагает обеспечение оптимальной эффективности на каждой стадии “жизненного” цикла продукта.

Особая ответственность возлагается на научные и технические круги. Важно, чтобы как принимающие решения руководители, которые содействуют определению государственной политики, так и широкие круги общественности лучше сознавали и понимали роль науки в деятельности человечества. Особое внимание должно быть уделено, учитывая сложность задач, организации междисциплинарных исследований и взаимодействию с правительством и общественностью по всем проблемам окружающей среды и устойчивого развития.

**Раздел IV. Средства осуществления.** Рассматривается вопрос о финансовых ресурсах и механизмах. В целом финансированием деятельности по осуществлению Повестки дня на XXI век будут заниматься государственный и частный секторы самой страны, где ведется эта деятельность. Для развивающихся стран, в первую очередь для наименее развитых из них, одним из основных источников внешнего финансирования является фонд Официальной поддержки развития (ОПР). Развитые страны подтверждают свое обязательство достичь признанного ими показателя Организации Объединенных Наций для ОПР, составляющего 0.7% валового национального продукта, причем некоторые страны согласны достичь этой цели к 2000 г.

Необходимым условием расширения возможностей, в частности развивающихся стран, в плане достижения устойчивого развития,

поддержания стабильных темпов развития мировой экономики, обеспечения защиты окружающей среды и уменьшения масштабов нищеты и человеческих страданий является внедрение новых эффективных технологий. Важным для всех стран является расширение доступа к информации, касающейся новых технологий, что обеспечивает возможность выбора наиболее приемлемых. Правительства должны разработать политику передачи экологически приемлемых технологий, являющихся общественной или государственной собственностью; создать благоприятные условия, побуждающие государственный и частный секторы к совершенствованию, сбыту и применению экологически чистых технологий; расширить возможности разработки экологически чистых технологий.

Отмечается важная роль науки в поисках путей обеспечения устойчивого развития. Каждой стране рекомендуется принять меры по разработке экологической политики и политики в области развития на основе самых надежных научных знаний и оценок и по широкомасштабному расширению научной базы и укреплению научно-исследовательского потенциала в областях, связанных с окружающей средой. Ставятся задачи обеспечения лучшего понимания взаимосвязей между антропогенными и природными системами, совершенствования методов прогнозирования воздействия на природную среду различных вариантов развития. Для их решения важно накапливать надежные данные на основе систем мониторинга всех уровней, расширять фронт исследований по многим направлениям естественных наук, особенно междисциплинарных, и наращивать возможности моделирования глобальных природных и социально-экономических процессов. Необходимо предусмотреть мероприятия по наращиванию и закреплению кадрового потенциала науки и созданию инфраструктуры, включая современное оборудование, научную литературу, информационную базу и т. д.

Рассматривается вопрос, связанный с содействием просвещению, информированию населения и подготовке кадров. Основные направления:

- переориентация просвещения на проблемы устойчивости развития;
- расширение информированности населения;
- содействие профессиональной подготовке.

Межправительственные мероприятия будут осуществляться в рамках системы ООН. Предполагается разрабатывать международные правовые документы и механизмы в области устойчивого развития, обеспечивающие должный баланс между охраной окружающей среды и потребностями развития. Особое внимание рекомендуется уделить нормам международного права по мерам предотвращения крупномасштабного разрушения окружающей среды во время военных конфликтов, мерам по обеспечению безопасного и экологически обоснованного использования ядерной энергии и механизмов урегулирования межгосударственных конфликтов и споров по вопросам защиты окружающей среды и развития.

Конференция ООН по окружающей среде и развитию констатировала невозможность движения развивающихся стран по пути, которым пришли к своему благополучию развитые страны. Эта модель признана ведущей к катастрофе, и в связи с этим провозглашена необходимость перехода мирового сообщества на рельсы устойчивого развития, обеспечивающего должный баланс между решением социально-экономических проблем и сохранением окружающей среды, удовлетворением основных жизненных потребностей нынешнего поколения с сохранением таких возможностей для будущих поколений. Если человечество не сделает этого, то его ждет катастрофа.

Совершить революционный переход к новому партнерскому типу взаимоотношений в мире, к новому характеру производства и потребления человечество сможет только в том случае, если все слои общества во всех странах осознают безусловную необходимость такого перехода и будут всемерно содействовать ему.

# Список литературы

1. Белолипецкий В. М., Дулов В. Г. Дополнительные главы естествознания. Применение законов сохранения в математическом моделировании: Учеб. пособие / Краснояр. гос. ун-т. — Красноярск, 1987. — 69 с.
2. Оценка влияния ГЭС на гидроледотермический режим реки / В. М. Белолипецкий, С. Н. Генова, В. Ю. Костюк, В. Б. Туговиков // Метеорология и гидрология. — 1993. — № 5. — С. 86–91.
3. Белолипецкий В. М., Костюк В. Ю., Шокин Ю. И. Математическое моделирование течений стратифицированной жидкости. — Новосибирск: Наука, Сиб. отд-ние, 1991. — 176 с.
4. Белолипецкий В. М. Математические модели окружающей среды: Учеб. пособие. — Ч. 1, 2. — Красноярск, 1995.
5. Васильев О. Ф., Воеводин А. Ф. Математическое моделирование качества воды в системах открытых русел // Динамика сплошной среды. — Новосибирск. — Вып. 22. — 1975. — С. 77–88.
6. Вендров С. Л., Дьяконов К. Н. Водохранилища и окружающая среда. — М.: Наука, 1976.
7. Вычислительный эксперимент в проблеме цунами / Ю. И. Шокин, Л. Б. Чубаров, Ан. Г. Марчук, К. В. Симонов. — Новосибирск: Наука, Сиб. отд-ние, 1989. — 168 с.
8. Джефферс Дж. Введение в системный анализ: применение в экологии. — М.: Мир, 1981. — 256 с.
9. Математические модели глобального развития / В. А. Егоров, Ю. Н. Каллистов, В. Б. Митрофанов, А. А. Пионтковский. — И.: Гидрометеоздат, 1980. — 192 с.



10. Коштыг В. А. Конференция ООН по окружающей среде и развитию, Рио-де-Жанейро, июнь 1992: Информационный отчет. — Новосибирск: РАН, Сиб. отд-ние, 1992. — 62 с.
11. Марчук Ан. Г., Чубаров Л. Б., Шокин Ю. И. Численное моделирование волн цунами. — Новосибирск: Наука, 1983. — 175 с.
12. Марчук Г. И. Математическое моделирование в проблеме окружающей среды. — М.: Наука, 1982. — 320 с.
13. Моисеев Н. Н. Математические задачи системного анализа. — М.: Наука, 1981. — 488 с.
14. На пути к построению модели динамических процессов в биосфере / Н. Н. Моисеев, В. Ф. Крапивин, Ю. М. Свирижев, А. М. Тарко // Вестник АН СССР. — 1979. — № 10. — С. 88–104.
15. Моисеев Н. Н. Человек, среда, общество. — М.: Наука, 1982. — 240 с.
16. Никитин Д. П., Новиков Ю. В. Окружающая среда и человек. — М.: Высшая школа, 1980. — 424 с.
17. Одрова Т. В. Гидрофизика водоемов суши. — Л.: Гидрометеоздат, 1979. — 312 с.
18. Пэнгл Р. Методы системного анализа окружающей среды. — М.: Мир, 1979. — 214 с.
19. Рациональное использование водных ресурсов бассейна Азовского моря. Математические модели / Под ред. И. И. Воровича. — М.: Наука, 1981. — 360 с.
20. Свирижев Ю. М., Логофет Д. О. Устойчивость биологических сообществ. — М.: Наука, 1978. — 352 с.
21. Страшкраба М., Гнаук А. Пресноводные экосистемы. Математическое моделирование. — М.: Мир, 1989. — 376 с.
22. Форрестер Дж. Мировая динамика. — М.: Наука, 1978. — 167 с.
23. Хендерсон-Селлерс Б. Инженерная лимнология. — Л.: Гидрометеоздат, 1987. — 335 с.
24. Хубларян М. Г. Водные потоки: модели течений и качества вод суши. — М.: Наука, 1991. — 192 с.
25. Экологические системы. Адаптивная оценка и управление / Под ред. К. С. Холлинга. — М.: Мир, 1981. — 398 с.

# Оглавление

<b>Введение</b> . . . . .	3
§ 1. Окружающая среда и научно-технический прогресс . . . . .	3
§ 2. Природа и поведение экологических систем . . . . .	4
§ 3. Математическая технология . . . . .	7
1. Общие принципы построения математических моделей . . . . .	9
<b>Глава 1. Методология системного анализа</b> . . . . .	12
§ 1. Характерные черты системного анализа . . . . .	12
§ 2. Математический аппарат моделей, основанный на законах сохранения . . . . .	15
§ 3. Примеры математических моделей в экологии . . . . .	18
1. Простейшие модели однородных популяций . . . . .	18
2. Модель хищник–жертва (модель Вольтерра) . . . . .	20
3. Общая модель хищник–жертва (модель Колмогорова) . . . . .	23
4. Сообщества $n$ видов. Вольтерровские модели и балансовые уравнения экологии . . . . .	25
§ 4. Имитационные системы . . . . .	27
§ 5. Оценка возможных стратегий . . . . .	31
<b>Глава 2. Математическое моделирование оптимального размещения промышленных предприятий</b> . . . . .	41
§ 1. Общая характеристика проблемы . . . . .	41
§ 2. Основные уравнения переноса и диффузии примесей в атмосфере . . . . .	43

1. Уравнение переноса . . . . .	43
2. Диффузионное приближение . . . . .	47
3. Простейшее диффузионное уравнение . . . . .	50
4. Перенос и диффузия тяжелых аэрозолей . . . . .	53
§ 3. Сопряженные уравнения переноса и диффузии . . . . .	55
§ 4. Постановка задачи оптимального размещения предприятий . . . . .	62
§ 5. Многокритериальная оптимизация . . . . .	68

### **Глава 3. Математическое моделирование**

<b>волн цунами . . . . .</b>	<b>72</b>
§ 1. Основные задачи в проблеме цунами . . . . .	72
§ 2. Математическое моделирование волн цунами . . . . .	74
1. Постановка задачи о генерации волн цунами . . . . .	74
2. Гидродинамическое описание волны на поверхности жидкости . . . . .	76
3. Моделирование генерации волн цунами . . . . .	81
§ 3. Выход на берег и разрушение волны цунами . . . . .	81
§ 4. Применение лучевой теории к задачам о распространении волн цунами . . . . .	84
§ 5. Расчет карт времен добегаия волн цунами . . . . .	91

### **Глава 4. Охрана и рациональное использование**

<b>водных ресурсов . . . . .</b>	<b>96</b>
§ 1. О проблеме охраны водных ресурсов . . . . .	96
§ 2. Модели переноса и диффузии загрязнений в водоемах . . . . .	100
§ 3. Тепловой баланс водных объектов . . . . .	103
§ 4. Водный баланс . . . . .	107
§ 5. Имитационная система “Азовское море” . . . . .	111
1. Экологический очерк Азовского моря . . . . .	111
2. Общее описание имитационной системы “Азовское море” . . . . .	114
§ 6. Водохранилища и окружающая природная среда . . . . .	121

### **Глава 5. Моделирование водных экосистем . . . . .**

§ 1. Пресноводные экосистемы. Характеристика входных потоков . . . . .	133
---	-----

§ 2. Основные уравнения температурно-стратифицированных течений . . . . .	137
§ 3. Приближенные модели стратифицированных течений . . . . .	142
1. Аналитические решения для установившихся течений . . . . .	142
2. Приближенное решение для медленных течений стратифицированной вязкой жидкости . . . . .	147
§ 4. Моделирование гидротермического режима реки . . . . .	152
§ 5. Математическое моделирование динамики кромки ледяного покрова в нижнем бьефе ГЭС . . . . .	160
1. Математическая модель для определения толщины речного льда и положения кромки льда при отступлении . . . . .	161
2. Моделирование наступления кромки ледяного покрова . . . . .	163
§ 6. Моделирование кислородного режима водоемов и водотоков . . . . .	167
§ 7. Гидрохимические модели. Модели динамики фосфора . . . . .	171
<b>Глава 6. Математические модели</b>	
<b>глобального развития . . . . .</b>	<b>173</b>
§ 1. Краткий обзор работ по глобальному моделированию . . . . .	173
1. Глобальные модели Форрестера и Мидоуза . . . . .	174
2. Проект “Стратегия выживания” Месаровича — Пестеля . . . . .	175
3. Латиноамериканская модель глобального развития . . . . .	177
4. Японский проект “Новый взгляд на развитие” . . . . .	179
5. Программы дальнейших работ по глобальному моделированию . . . . .	181
§ 2. Глобальная динамическая модель Форрестера . . . . .	183
§ 3. Глобальная динамическая модель группы Мидоуза “Мир-3” . . . . .	193
1. О дополнительных факторах (к модели “Мир-2”), учитываемых моделью “Мир-3” . . . . .	193
2. Об основных переменных модели . . . . .	195

3. Об основных результатах, полученных группой Мидоуза . . . . .	196
§ 4. Задачи управления для дополненной глобальной модели Мидоуза . . . . .	200
§ 5. Глобальная модель биосферы . . . . .	203
1. Общее описание модели . . . . .	203
2. Атмосфера . . . . .	207
3. Океан . . . . .	211
4. Регион суши . . . . .	212
5. Человеческая активность . . . . .	215
<b>Приложение. Конференция ООН по окружающей среде и развитию . . . . .</b>	<b>221</b>
<b>Список литературы . . . . .</b>	<b>234</b>

Виктор Михайлович Белолипецкий,  
Юрий Ивапович Шокин

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ  
В ЗАДАЧАХ ОХРАНЫ ОКРУЖАЮЩЕЙ СРЕДЫ

Редактор *Карева Л. А.*  
Художественный редактор *Белолипецкий С. А.*  
Выпускающий редактор *Вишневецкая Т. Н.*

Изд. лиц. ЛР № 065057 от 24.03.97.  
Подписано в печать 27.10.97. Формат 60х90 1/16.  
Печать офсетная. Бумага офсетная. Усл. печ. л. 15.  
Учетно-изд. л. 10. Тираж 1000 экз. Заказ 3116.

Издательство «ИНФОЛИО-пресс»  
630090, Новосибирск, проспект Академика Коптюга, 4.  
Тел./факс: (3832) 35-44-60.

Издательско-полиграфическое предприятие  
«Советская Сибирь»  
630048, Новосибирск, ул. Немировича-Данченко, 104.