

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК  
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ  
Институт вычислительных технологий

**В.М. Ковеня**

**АЛГОРИТМЫ РАСЩЕПЛЕНИЯ  
ПРИ РЕШЕНИИ МНОГОМЕРНЫХ ЗАДАЧ  
АЭРОГИДРОДИНАМИКИ**

ответственный редактор  
*академик Ю.И. Шокин*



НОВОСИБИРСК  
ИЗДАТЕЛЬСТВО СИБИРСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ  
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК  
2014

УДК 519.63+533.6  
ББК 22.18+22.253.3  
К 56

Ковеня В.М. Алгоритмы расщепления при решении многомерных задач аэрогидродинамики / В.М. Ковеня; отв. редактор Ю.И. Шокин; Рос. акад. наук, Сиб. отд-ние, Институт вычислительных технологий. – Новосибирск. Изд-во СО РАН. 2014. – 280 с.

ISBN 978-5-7692-1304-5

Монография посвящена изложению одного из методов решения многомерных задач аэро- и гидродинамики – метода расщепления уравнений по физическим процессам и пространственным переменным. В рамках единого подхода описаны основные подходы по построению экономичных разностных схем расщепления для численного решения уравнений Эйлера и Навье–Стокса сжимаемого теплопроводного газа и несжимаемой жидкости. Приведены примеры расчетов по предложенным алгоритмам.

Монография рассчитана на научных и инженерно-технических работников, аспирантов и студентов, специализирующихся в области вычислительной аэрогидродинамики.

Утверждено к печати Ученым советом  
Института вычислительных технологий СО РАН

Рецензенты:

*Г. С. Хакимзянов*, доктор физико-математических наук, профессор  
*Г. Г. Черных.*, доктор физико-математических наук, профессор  
*В. П. Шанеев*, доктор физико-математических наук, профессор

ISBN 978-5-7692-1304-5

© Институт вычислительных технологий  
СО РАН, 2014  
© Ковеня В.М., 2014  
© Оформление. Издательство СО РАН, 2014

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Книга посвящена систематическому изложению одного из методов решения многомерных задач аэро- и гидродинамики – метода расщепления уравнений по физическим процессам и пространственным переменным. Она является продолжением и развитием метода расщепления, предложенного в монографиях: Н. Н. Яненко («Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики», Новосибирск, Наука, 1967), В. М. Ковеня, Н. Н. Яненко («Метод расщепления в задачах газовой динамики», Новосибирск, Наука, 1981) и В. М. Ковеня, Г. А. Тарнавский, С. Г. Черный («Применение метода расщепления в задачах аэродинамики», Новосибирск, Наука, 1990). При подготовке монографии автор использовал полученные ранее результаты, приведенные в совместной монографии с Н. Н. Яненко, и некоторые результаты из курса лекций (Ковеня В. М. «Разностные методы решения многомерных задач». Курс лекций / Новосибир. гос. ун-т, Новосибирск, 2004).

Идеология метода расщепления состоит в сведении решения многомерной задачи к последовательному (или параллельному) решению одномерных задач или задач более простой структуры. Это может быть достигнуто различными способами, что, как следствие, приводит к различным классам разностных схем, построенных на основе расщепления. Известно, что введение расщепления уравнений и построение на его основе различных классов неявных разностных схем приводят к появлению в них дополнительных членов второго и высших порядков малости, отсутствующих в исходной нефакторизованной разностной схеме. Несмотря на малый порядок этих членов их влияние на свойства разностных схем может оказаться значительным. Опыт использования схем расщепления при решении различных задач аэродинамики привел автора к необходимости разработки класса «оптимальных» разностных схем, экономичных по числу арифметических операций на узел сетки, безусловно устойчивых (или имеющих большой запас устойчивости) и обладающих достаточной точностью при решении стационарных и нестационарных задач. Вначале такие схемы были предложены для решения одномерных (по пространству) уравнений газовой динамики, а затем было

дано их обобщение на многомерные уравнения Эйлера и Навье–Стокса сжимаемого газа и несжимаемой жидкости. Введение формы расщепления исходных уравнений, единой при их аппроксимации в дивергентном и недивергентном виде, позволило упростить построение разностных схем и использовать различные газодинамические переменные на отдельных дробных шагах, наиболее удобные при решении конкретных задач аэродинамики. Аппроксимация уравнений в дивергентной или предельно-дивергентной форме позволила повысить точность расчетов, особенно при решении стационарных задач методом установления.

К настоящему времени разработаны различные классы разностных схем для решения многомерных задач аэродинамики. Автор не ставил цели обзора этих методов, да это практически и невозможно ввиду их многообразия. В книге приведены минимальные ссылки на разностные методы решения уравнений Эйлера и Навье–Стокса, при построении которых используется идеология расщепления. Даются критический анализ неявных базовых схем и сравнение их свойств при аппроксимации многомерных задач. С единых позиций представления разностных схем, приведенных к канонической форме после исключения дробных шагов, рассмотрены базовые разностные схемы расщепления при решении уравнений Эйлера и Навье–Стокса. Анализ большинства неявных разностных схем, использующих идеологию расщепления при их построении, показал, что их безусловная устойчивость теряется уже для двумерных нестационарных задач в отличие от схем для уравнений газовой динамики (и Навье–Стокса), которые условно устойчивы лишь в трехмерном случае. Это следствие того факта, что уравнения Эйлера и Навье–Стокса несжимаемой жидкости не принадлежат классу уравнений Коши–Ковалевской, так как для нестационарных задач уравнение неразрывности не зависит от времени.

Книга состоит из пяти глав. Первая глава является вводной и посвящена описанию базовых неявных разностных схем для решения систем многомерных уравнений в частных производных. Кратко излагаются основные понятия теории разностных схем, формулируются основные требования к численным алгоритмам. Описываются неявные разностные схемы для скалярного уравнения и системы уравнений, излагается метод расщепления и, в частности, метод расщепления по направлениям и специальные методы расщепления. Излагаются основы метода предиктор–корректор и метода приближенной факторизации. Отмечается важность классов схем с полной аппроксимацией, пригодных для решения как нестационарных, так и стационарных задач, решение которых находится методом установления. Для линейных уравнений спектральным методом исследуется

устойчивость схем для многомерных уравнений гиперболического и параболического типов и показывается потеря безусловной устойчивости схем, приводимых к канонической форме, для уравнений гиперболического типа в трехмерном случае. Кратко излагается один из способов задания краевых условий в схемах расщепления.

Вторая глава посвящена описанию неявных разностных схем для решения систем одномерных уравнений и, в частности, уравнений газовой динамики и уравнений Навье–Стокса теплопроводного газа. Описываются неявные нефакторизованные разностные схемы и схемы расщепления и факторизации, исследуются их свойства. Вводится класс экономичных разностных схем оптимального расщепления. Они реализуются на дробных шагах скалярными прогонками (или по неявным схемам бегущего счета), безусловно устойчивы, причем число прогонок не превышает числа исходных уравнений, а введенное расщепление приводит к минимальному числу дополнительных диссипативных членов. Дано обобщение схем на систему уравнений магнитной гидродинамики. Предложенные схемы апробированы на решении задач, имеющих точное решение: задачи о распаде произвольного разрыва и задачи о разрывном течении газа в канале переменного сечения в приближении квазиодномерных уравнений газовой динамики.

Разностным схемам решения многомерных задач в приближении уравнений Эйлера и Навье–Стокса теплопроводного газа посвящена третья глава. Вводится новая форма расщепления уравнений, записанных в консервативной форме и, как следствие, – соответствующая форма расщепления уравнений в недивергентном виде. На основе введенных расщеплений строятся различные классы разностных схем с оптимальным расщеплением уравнений – схемы расщепления с весами, схемы приближенной факторизации и схемы предиктор–корректор, аппроксимирующие исходные уравнения в дивергентной или предельно дивергентной форме. На дробных шагах все рассмотренные разностные схемы реализуются на дробных шагах экономичными скалярными прогонками, сохраняют свойства безусловной устойчивости (или имеют слабые ограничения на устойчивость в трехмерном случае), а расщепление одномерных операторов выбрано таким образом, чтобы минимизировать его влияние. Аппроксимация операторов на дробных шагах в схеме приближенной факторизации и схеме предиктор–корректор и в операторе правой части может быть выбрана с различным порядком, что позволяет получить класс разностных схем второго (и выше) порядка по пространству с реализацией схем на дробных шагах трехточечными скалярными прогонками. Для устранения осцилляций решения, присущих схемам второго порядка аппроксимации, введен специальный сглаживающий

оператор простой формы. Дано обобщение рассмотренных выше алгоритмов на уравнения Навье–Стокса в криволинейных преобразованных координатах.

Расчету сверхзвуковых двумерных вязких течений в приближении уравнений Навье–Стокса по схемам оптимального расщепления посвящена четвертая глава. Вначале приведены результаты расчетов вязких течений в плоском канале, с части которого осуществляется вдув газа со звуковой скоростью. Исследованы режимы течения при различных числах Маха и числах Рейнольдса, приведены оценки точности полученных результатов по предложенным алгоритмам. Далее исследовано течение около тела сложной формы, содержащего несущую поверхность и течение в воздухозаборнике. Исследованы режимы течений для различных чисел Маха, Рейнольдса и углов атаки. Выявлены основные их закономерности и получены режимы течений, близкие к режиму запираания течений в канале (режим с выбитой ударной волной). В конце главы исследовано течение газа за уступом при различных числах Маха и Рейнольдса. Приведенные примеры расчетов позволяют сделать вывод об эффективности предложенных алгоритмов.

Пятая глава посвящена разностным методам решения уравнений Навье–Стокса вязкой несжимаемой жидкости. Как известно, эти уравнения не разрешены относительно производной по времени, что не позволяет напрямую использовать алгоритмы, предложенные для решения уравнений, разрешенных по времени. Традиционно задачи движения вязкой несжимаемой жидкости решаются в формулировке «функция тока — вихрь». В этих переменных уравнение неразрывности удовлетворяется автоматически, и система исходных уравнений Навье–Стокса сводится к параболической системе уравнений для компонент вихря и эллиптической системе для векторного потенциала. При решении пространственных уравнений в этих переменных решение задач усложняется, так как вместо скалярных уравнений приходится решать векторное уравнение Пуассона и векторные уравнения для завихренности. Для численного решения уравнений в физических переменных наиболее часто применяются разностные схемы расщепления. Их большая часть использует предположение, что на промежуточном слое по времени при вычислении скорости градиент давления равен нулю, а давление восстанавливается на полном шаге, т. е. в алгоритме используется идеология расщепления. Альтернативой этому подходу является метод искусственной сжимаемости, состоящий во введении в уравнение неразрывности дополнительного члена — производной по времени от давления с малым коэффициентом. В главе описаны основные алгоритмы решения уравнений Навье–Стокса, основанные на идеологии расщепления.

Все базовые схемы расщепления и приближенной факторизации рассмотрены в единообразном виде в канонической форме, что позволило упростить их анализ и исследовать их свойства. Показано, что схемы приближенной факторизации в естественных переменных теряют свойство безусловной устойчивости уже в двумерном случае. Введено специальное расщепление для исходных уравнений, которое позволило дополнить класс разностных схем. Описаны основные схемы расщепления в методе искусственной сжимаемости. Предложенная схема приближенной факторизации апробирована на решении известной задачи – течения в каверне с движущейся крышкой. В последней части главы приведены результаты моделирования ламинарных и турбулентных течений газа около пластины, с части которой осуществляется микровдув газа, проведено сравнение с экспериментальными данными, показавшее достаточную точность расчетов.

Автор выражает глубокую благодарность коллегам, ученикам и друзьям, которые в той или иной мере способствовали созданию этой книги. Особенно полезны были обсуждения с Ю. И. Шокиным, Ю. Н. Григорьевым, Г. С. Хакимзяновым, С. Г. Черным, Г. Г. Черных, Д. В. Чирковым, С. П. Шарым. Некоторые результаты исследований получены совместно с ближайшими коллегами и учениками автора. Особую благодарность выражаю В. С. Лебедеву, А. Ю. Слюняеву и А. В. Базовкину за совместную работу и проведение расчетов.

Исследования, выполненные автором, поддерживались в течение ряда лет грантами РФФИ (проекты № 05-01-00146а, 08-01-00264а, 11-01-00294а и предыдущие, начиная с 1993 г.).

## ВВЕДЕНИЕ

Математическое моделирование как новый способ исследования и получения новых знаний сегодня является одним из основных методов изучения в различных естественно-научных областях. Многообразие и многопараметричность исследуемых задач и их математических постановок, разномасштабность процессов приводят к цепочке физико-математических моделей, каждая из которых получена при определенных предположениях о характере изучаемого явления и описывает основные его закономерности. Особенностью такого подхода является многообразие соответствующих уравнений. Полученные уравнения могут быть гиперболическими, параболическими, эллиптическими или смешанного типа, что приводит к различным постановкам начальных и краевых задач. Более того, при исследовании одного класса задач тип уравнений может меняться в зависимости от характера решения. Известно, что стационарные уравнения газовой динамики являются уравнениями эллиптического типа при дозвуковой скорости потока и уравнениями гиперболического типа для сверхзвуковых скоростей. Это накладывает дополнительные требования на применяемые численные методы для областей, в которых скорость потока может быть как сверхзвуковой, так и дозвуковой.

Большинство процессов в механике жидкости и газа являются нелинейными и эволюционными, и, как следствие, эти же свойства присущи описывающим их системам уравнений. Теория таких уравнений изучена недостаточно, для большинства задач не доказаны теоремы существования и единственности, более того, их решения могут быть неединственными и разрывными даже при гладких начальных данных. Переход к многомерным задачам и усложнение расчетных областей (рассмотрение реальных геометрий) вносят дополнительные трудности в их постановку. При отсутствии строгих доказательств существования и единственности решений всегда остается открытым вопрос о соответствии физико-математической модели исследуемому явлению. При недостаточной информации об исследуемом процессе возникает необходимость рассмотрения различных моделей, учитывающих основные закономерности изуча-



емого явления для различных диапазонов основных параметров. Таким образом, выбор и формулировка физико-математических моделей становится многопараметрической задачей, решение которой требует анализа всей цепочки моделей. До начала моделирования исследователь должен ответить на ряд вопросов. Какова конечная цель исследования и что предполагается получить после решения задачи? Насколько важна данная задача и какое место она занимает в общей проблеме? Какова точность математической модели и с какой точностью требуется получить ответ? Какие ресурсы необходимо привлечь для ее решения и какие математические и технологические возможности имеются у исследователя? Фактически исследователь проводит анализ всей технологической цепочки моделирования, включающей:

- выбор и обоснование математических моделей;
- разработку численных алгоритмов;
- создание программ (комплекса или пакета программ);
- проведение вычислений, их анализ;
- обработку и хранение результатов моделирования.

В результате анализа делается вывод о возможности решения поставленной задачи на основе существующих моделей, численных алгоритмов и технических средств (ЭВМ) или формулируются условия и требования, необходимые для ее разрешения (например, требования к созданию дополнительных моделей, численных методов решения, а также новых ЭВМ и т. д.).

Создание моделей, адекватно описывающих исследуемое явление или изучаемый процесс, включает их математическое обоснование и корректную постановку начальных и краевых задач. Все классы моделей (например, для задач механики) могут быть условно разделены на группы (уровни): аналитические приближения и линеаризованные уравнения; нелинейные уравнения без учета диссипативных процессов; нелинейные уравнения с учетом диссипативных процессов; полные нестационарные модели с учетом реальных эффектов. В качестве базовых для двух последних моделей могут служить модели, описываемые уравнениями Навье–Стокса сжимаемого теплопроводного газа и несжимаемой жидкости с учетом турбулентности.

В зависимости от целей исследования и классов решаемых задач, важности задачи в общей проблеме, требуемой точности решения, имеющихся математических и технических возможностей и других факторов используются все группы моделей, начиная от простейших моделей первого уровня до самых сложных. Рассмотрим некоторые примеры из области вычислительной аэродинамики. В приближении потенциального течения (первый уровень) панельным методом удается получить решение задач обтекания самолетов ре-

альных конфигураций (например, самолета F4F) и получать распределение параметров течения на его поверхности. Первые такие расчеты выполнены в 70-х годах XX в. на ЭВМ малой мощности. Однако модель потенциального приближения не учитывает реальные эффекты в газе, такие как вязкость и теплопроводность. Переход к большим скоростям требует использования нелинейных моделей второго уровня. Их решения могут содержать разрывы газодинамических величин, что требует использования специальных методов расчета и ЭВМ большой мощности ( $\approx 10^{12-15}$  операций/с над числами с плавающей запятой). С появлением ЭВМ большего быстродействия в 80-е гг. XX в. расчет обтекания самолета в приближении уравнений Эйлера мог быть проведен за время, сравнимое со временем его полета. Однако и в настоящее время решить задачу нестационарного обтекания с учетом реальных свойств газа, таких как турбулентная вязкость и теплопроводность (третий и четвертый уровни), даже с использованием современных суперЭВМ удастся лишь для модельных форм летательных аппаратов. Указанные трудности связаны не только с многопараметричностью задач (различные числа Маха, Рейнольдса, геометрии обтекаемых тел и т. д.), но в большей мере с недостаточным обоснованием математических моделей и их замыкающих соотношений, например, с недостаточным обоснованием моделей турбулентности и областей их применимости. Подобные трудности возникают и в гиперзвуковой аэродинамике, где наряду с решением отмеченных выше проблем необходимо правильно учесть и оценить влияние химических реакций, протекающих в газе вблизи обтекаемого тела и на его поверхности при больших температурах, оценить разрушение поверхности и учесть прочностные и другие характеристики. Естественно, решение различных классов задач и их различных приближений приводит к возникновению различных проблем моделирования на этапе моделей и численных алгоритмов.

Многопараметричность исследуемых задач и разномасштабность процессов, их нелинейность и многомерность не позволяют сформулировать общие подходы при постановке задач и получении решений. Можно говорить лишь о направлениях исследований и основных тенденциях развития, включающих:

- использование моделей различного уровня в зависимости от целей исследования;
- применение все более сложных моделей с учетом большего числа реальных физических эффектов для описания исследуемых явлений;
- анализ моделей, их систематизацию и выявление некоторых классов общих моделей, пригодных для описания широкого комплекса проблем;

- дальнейшее математическое обоснование физико-математических моделей и корректных постановок начально-краевых задач.

Следует отметить, что упрощенные модели получают, как правило, из моделей более высокого уровня при различных предположениях о характере исследуемого явления. Таким образом, взяв за основу более полную модель, можно получить цепочку упрощенных моделей. Такие полные модели, из которых могут быть получены их упрощенные приближения, будем называть *накрывающими*. Ярким примером таких моделей являются уравнения Навье–Стокса для сжимаемого теплопроводного газа (модель четвертого уровня). При пренебрежении эффектами вязкости и теплопроводности из нее получается модель газовой динамики, пригодная для описания многих физических задач. Для течений, в которых преобладает влияние вязкости, может быть использовано приближение пограничного слоя, полученное из уравнений Навье–Стокса при сохранении членов порядка  $O(1/\sqrt{Re})$  и отбрасывании членов более высокого порядка малости. В рамках того же подхода можно получить модели вязкого ударного слоя, модели «параболизированных» уравнений Навье–Стокса и т. д. Очевидно, что и для других классов исследуемых задач могут быть построены цепочки упрощенных моделей на основе базовой накрывающей модели. Использование такого подхода позволит сократить число рассматриваемых моделей и сосредоточиться на изучении базовых моделей, описывающих целые классы задач.

Отметим, что достигнутый в настоящее время уровень математического моделирования (по крайней мере, в области механики сплошной среды) основывается на большом теоретическом заделе математиков-теоретиков, механиков и физиков предыдущих поколений. Новые достижения в математическом моделировании будут основаны на новых теоретических результатах и их использовании специалистами в области математического моделирования. Качественный скачок в увеличении быстродействия электронной вычислительной техники до быстродействия в  $10^{15}$ – $10^{17}$  флоп, достигнутый в последнее десятилетие, позволил перейти к численному моделированию задач четвертого уровня, например, моделированию реальных процессов в металлургии и химии, в аэро- и гидродинамике, моделированию процессов в гиперзвуковых воздушно-реактивных и ракетных двигателях, моделированию процессов перехода от ламинарного течения к турбулентному и обратно и т. д.

## Глава 1

# БАЗОВЫЕ ЧИСЛЕННЫЕ АЛГОРИТМЫ РЕШЕНИЯ МНОГОМЕРНЫХ ЗАДАЧ

### § 1.1. Исходные уравнения

Для задач механики сплошных сред в наиболее полной постановке физико-математические модели могут быть описаны интегральными законами сохранения

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \mathbf{W}_0 dV + \oint_S \mathbf{W} ds = \int_V \mathbf{F} dV, \quad (1.1.1)$$

выражающими связь между изменением во времени функций  $\mathbf{W}_0$  в замкнутом объеме  $V$  с изменением потоков  $\mathbf{W}$  на границе  $S$ , а также взаимодействием этих потоков с внешними источниками или стоками  $\mathbf{F}$  (см. [1–3]). Интегральные законы сохранения, например законы сохранения массы, импульсов и энергии (для моделей сплошной среды), являются наиболее общей формой описания движения сред и справедливы как для непрерывных, так и для разрывных функций. Наряду с интегральной формой используется их дифференциальное представление

$$\frac{\partial \mathbf{W}_0}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{W} = \mathbf{F}, \quad (1.1.2)$$

полученное из систем уравнений (1.1.1), но справедливое лишь для непрерывных решений (см., например, [3–5]). Переход к дифференциальным уравнениям, конечно, сужает класс допустимых решений, но правильная аппроксимация исходных уравнений в дивергентной форме может приводить к тем же консервативным схемам, что и непосредственная аппроксимация интегральных уравнений (1.1.1).

При дальнейшем описании численных методов будут главным образом использоваться уравнения в дифференциальной форме. Начнем их рассмотрение с одномерных уравнений в частных производных

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial x} = \mathbf{F}, \quad \mathbf{U} = \mathbf{U}(t, x), \quad \mathbf{W} = \mathbf{W}(t, x). \quad (1.1.3)$$

Здесь  $\mathbf{U} = (U_1, \dots, U_m)$  – вектор размерности  $m$ , а вектор  $\mathbf{W}$  может зависеть от  $\mathbf{U}$  или  $\mathbf{U}_x = \partial \mathbf{U} / \partial x$ , т. е. представляется в виде

$$\mathbf{W} = \mathbf{W}(\mathbf{U}) \quad \text{или} \quad \mathbf{W} = \mathbf{W}(\mathbf{U}, \mathbf{U}_x).$$

Будем полагать, что  $\mathbf{W} = \mathbf{W}(\mathbf{U}, \mathbf{U}_x)$  – нелинейная функция. Наряду с дивергентной формой система уравнений (1.1.3), (1.1.4) может быть записана в недивергентной форме в виде системы уравнений первого

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{B} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} = \mathbf{F}$$

или второго

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{B} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} + \mathbf{C} \frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial x^2} = \mathbf{F} \quad (1.1.4)$$

порядка, где  $\mathbf{B} = \partial \mathbf{W} / \partial \mathbf{U}$ ,  $\mathbf{C} = \partial \mathbf{W} / \partial \mathbf{U}_x$  – матрицы размера  $m \times m$ . Если  $\mathbf{U}$  является функцией от  $\mathbf{f} = \mathbf{f}(f_1, \dots, f_m)$ , то системе уравнений (1.1.3) соответствуют системы уравнений первого или второго порядков

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} + \tilde{\mathbf{B}} \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x} = \mathbf{G}, \quad \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{B} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} + \mathbf{C} \frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial x^2} = \mathbf{F}, \quad (1.1.5)$$

где матрицы  $\tilde{\mathbf{B}}, \tilde{\mathbf{C}}$  и вектор  $\mathbf{G}$  связаны со старыми матрицами соотношениями

$$\tilde{\mathbf{B}} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} \mathbf{A}, \quad \mathbf{A} = \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{f}}, \quad \tilde{\mathbf{C}} = \mathbf{A}^{-1} \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial \mathbf{f}_x}, \quad \mathbf{G} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{F}, \quad \mathbf{f}_x = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x}.$$

Выбор вектора  $\mathbf{f}$  в качестве искомой функции может приводить к более простому виду матричных операторов и, как следствие, к упрощению построения и реализации численных алгоритмов. Такая ситуация имеет место для уравнений газовой динамики или Навье–Стокса в переменных плотность, скорость и давление (или температура). Отметим, что при решении краевых задач граничные условия задаются обычно для этих газодинамических переменных.

Анализ численных алгоритмов часто проводят для линейных систем уравнений, которые могут быть получены из исходных уравнений (1.1.5) путем их линеаризации. При этом вид исходных уравнений сохраняется, а матричные коэффициенты матриц  $\tilde{\mathbf{B}}, \tilde{\mathbf{C}}$  полагаются линейными функциями координат  $t, x$ . В случае скалярной функции  $\mathbf{f}$  исходные уравнения упрощаются и могут рассматриваться как модельные уравнения гиперболического

$$\frac{\partial f}{\partial t} + b \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad b = b(t, x)$$

и параболического

$$\frac{\partial f}{\partial t} + b \frac{\partial f}{\partial x} = c \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad b = b(t, x), \quad c = c(t, x) \geq 0$$

типов. Отметим, что при переходе от дивергентной формы уравнений (1.1.3) к недивергентным уравнениям (1.1.4) или (1.1.5) предполагалась гладкость решений. Вместе с тем недивергентная форма представления уравнений может оказаться удобнее для исследования, а в ряде случаев и для построения эффективных численных алгоритмов.

Отметим одно важное свойство уравнений первого порядка, для которых справедливо соотношение

$$\lambda \mathbf{W} = \mathbf{B}\mathbf{U}, \quad \mathbf{B} = \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial \mathbf{U}}.$$

Такие системы уравнений называют *однородными системами степени*  $\lambda$ . В частности, для однородных систем уравнений первой степени эквивалентны дивергентная и недивергентная формы записи уравнений

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} = -\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial x} = -\mathbf{B} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x} (\mathbf{B}\mathbf{U}). \quad (1.1.6)$$

Примером такой системы являются уравнения газовой динамики совершенного газа

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial x} = 0, \quad p = (\gamma - 1)\rho e,$$

где

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho v \\ E \end{pmatrix}, \quad \mathbf{W} = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho v^2 + p \\ v(E + p) \end{pmatrix}, \quad E = \rho \left( e + \frac{v^2}{2} \right) = \frac{p}{\gamma - 1} + \rho \frac{v^2}{2}$$

и для них, очевидно,  $\mathbf{W} = \mathbf{B}\mathbf{U}$ .

Перейдем к рассмотрению многомерных уравнений. Введем систему уравнений

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \sum_{j=1}^N \frac{\partial \mathbf{W}_j}{\partial x_j} = \mathbf{F}, \quad (1.1.7)$$

где, как и в (1.1.3),  $\mathbf{U} = (U_1, \dots, U_m)$ , а  $\mathbf{W}_j = \mathbf{W}_j(\mathbf{U})$ ,  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_N)$ ,  $N$  – размерность задачи по пространству. Если  $\mathbf{W}_j$  – гладкие функции,

то системе уравнений (1.1.7) в консервативной форме соответствует их недивергентная форма

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \sum_{j=1}^N \mathbf{B}_j \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_j} = \mathbf{F}, \quad \mathbf{B}_j = \frac{\partial \mathbf{W}_j}{\partial \mathbf{U}}.$$

Если

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}(\mathbf{f}), \quad \mathbf{W}_j = \mathbf{W}_j(\mathbf{f}, \mathbf{f}_j), \quad \text{где } \mathbf{f}_j = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_j},$$

то система уравнений (1.1.7) является системой уравнений второго порядка, и ей соответствует недивергентная форма уравнений, разреженных относительно вектора  $\mathbf{f}$ :

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} + \sum_{j=1}^N \left( \tilde{\mathbf{B}}_j \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_j} + \sum_{l=1}^N \tilde{\mathbf{C}}_{jl} \frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial x_j \partial x_l} \right) = \tilde{\mathbf{F}},$$

где

$$\tilde{\mathbf{B}}_j = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}_j \mathbf{A}, \quad \mathbf{A} = \partial \mathbf{U} / \partial \mathbf{f}, \quad \tilde{\mathbf{C}}_{jl} = \partial \mathbf{W}_j / \partial \mathbf{f}_l, \quad \tilde{\mathbf{F}} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{F}.$$

Отметим еще одну форму представления уравнений

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} = -\mathbf{A}^{-1} \left( -\sum_{j=1}^N \frac{\partial \mathbf{W}_j}{\partial x_j} + \mathbf{F} \right), \quad (1.1.8)$$

которую назовем *предельно-дивергентной* [6]. Эта форма удобна для нахождения стационарного решения системы уравнений (1.1.7) при построении итерационных или разностных схем. В общем случае для нахождения стационарного решения можно рассматривать предельное решение более общей нестационарной системы уравнений

$$\mathbf{C} \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} = -\sum_{j=1}^N \frac{\partial \mathbf{W}_j}{\partial x_j} + \mathbf{F}$$

со стационарными краевыми условиями, где, вообще говоря, оператор  $\mathbf{C}$  выбирается лишь из условий наиболее быстрой сходимости решения задачи к стационарному решению

$$\sum_{j=1}^N \frac{\partial \mathbf{W}_j}{\partial x_j} = \mathbf{F}.$$

Метод, основанный на нахождении решения стационарной задачи как предельного решения нестационарной задачи со стационарными краевыми условиями, носит название *метода (принципа) уста-*

новления, а оператор  $\mathbf{C}$  называется *стабилизирующим* или релаксационным (см., например, [5–10]). В качестве оператора  $\mathbf{C}$  можно выбирать оператор  $\mathbf{A}$  или оператор более сложной структуры, например, в виде

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \left( \alpha \mathbf{C}_0 + \beta \mathbf{C}_1 \frac{\partial}{\partial t} \right).$$

Тогда система уравнений

$$\mathbf{A} \left( \alpha \mathbf{C}_0 \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} + \beta \mathbf{C}_1 \frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial t^2} \right) = \left( -\sum_{j=1}^N \frac{\partial \mathbf{W}_j}{\partial x_j} + \mathbf{F} \right)$$

аппроксимирует при установлении стационарные уравнения (1.1.8), но может иметь другой тип, чем исходные нестационарные уравнения (1.1.7). Изменение типа уравнений в ряде случаев может привести к упрощению получения стационарного решения.

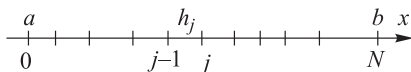
## § 1.2. Основные понятия теории разностных схем

Предполагая, что читатель знаком с основами метода конечных разностей и конечных объемов, ниже приводятся минимально необходимые сведения из теории разностных схем, используемые в дальнейшем (см., например, [5–12]). При определении основных понятий будем следовать работам [5–9].

Суть метода конечных разностей состоит в замене области непрерывного изменения аргумента дискретной областью, замене непрерывных функций их дискретными аналогами и замене (аппроксимации) исходных дифференциальных операторов сеточными (дискретными) операторами. Аналогичным образом конструируются разностные аналоги граничных условий и начальных данных. В результате отображения области непрерывного изменения аргумента  $\Omega$  в область дискретного аргумента  $\Omega_h$  ( $\Omega_h \rightarrow \Omega$ ) получаем множество точек, называемое сеткой. Точки сетки называются узлами. Естественно, это отображение может производиться различными способами, что означает различную структуру сетки. Структура разностной сетки зависит от выбора аппроксимации расчетной области и типа разностного оператора, аппроксимирующего исходные уравнения. Назовем *сетку регулярной*, если она взаимно-однозначно отображается на прямоугольную сетку в прямоугольной области с сохранением порядка узлов сетки. Будем называть *сетку однородной*, если ее структура в расчетной области одного типа. В дальнейшем мы и ограничимся регулярными и однородными сетками. Простейшим примером регулярной сетки в одномерной области служит разбиение отрезка  $[a, b]$  на  $N$  частей (рис. 1.2.1).



Рис. 1.2.1. Расчетная сетка в одномерном случае.



Расстояние между соседними узлами называется *шагом сетки*  $h_j = x_j - x_{j-1}$ . Если шаг сетки не зависит от номера узла  $j$ , то сетка называется *равномерной*, иначе – *неравномерной*. Функции дискретного аргумента, определенные на сетке  $\Omega_{\tau, h}$  (или  $\Omega_h$ ), называются сеточными функциями. Значения сеточных функций в узлах сетки  $(t_n, x_j)$  будем обозначать в различных формах как  $u_h = u_j^n = u^n$  (пространственный узел сетки  $j$  будем опускать, если это не требуется специально).

Пусть  $u$  – функция непрерывного аргумента, принадлежащая некоторому пространству непрерывных функций  $W$  ( $u \in W$ ),  $u_h$  – сеточная функция, принадлежащая пространству сеточных функций  $W_h$  ( $u_h \in W_h$ ). Для оценки их близости необходимо доопределить  $u$  и  $u_h$  таким образом, чтобы они принадлежали одному пространству. Обычный подход состоит в проектировании пространства непрерывных функций  $W$  на пространство сеточных функций  $W_h$  (см. [8–10]). Их близость в пространстве сеточных функций характеризуется некоторой величиной, нормой в пространстве сеточных функций. Наиболее часто используется сеточный аналог нормы  $C$  в пространстве непрерывных функций

$$\|u_h\| = \|u_j^n\| = \max |u_j^n|,$$

где  $j = 1, \dots, J$  (при фиксированном временном слое) или сеточный аналог нормы  $L_2$

$$\|u_h\| = \|u_j^n\| = \sqrt{\sum_{j=0}^J (u_j^n)^2}.$$

Близость решений дифференциальной и разностных задач определяется величиной

$$\|u_j^n - (u)_h\|,$$

которая должна стремиться к нулю при неограниченном дроблении шагов сетки  $(\tau, h) \rightarrow 0$ , где под нормой понимается одна из норм  $C$  или  $L_2$ , а  $(u)_h = P_h u(t, x)$  – оператор проектирования, который может выбираться различными способами (см. [8–10]).

При переходе от дифференциальной задачи к разностной задаче дифференциальные операторы заменяются их разностными аналогами. Разностная производная в узлах сетки может быть записана различными способами в зависимости от шаблона сетки, т. е. множества точек, на которых аппроксимируется соответствующая производная, и от типа интерполяции на данном шаблоне. Пусть  $L$  – дифференци-

альный оператор, действующий на функцию  $u$ . Разностный оператор  $L_h$ , действующий на  $u_j^n$ , связывает значения сеточных функций на шаблоне, т. е.

$$L_h u_j^n = \sum_{\xi \in M} A_h(\xi, x) u_j^n(\xi),$$

где  $A_h$  – весовые коэффициенты,  $M$  – шаблон сетки. Введем некоторые аппроксимации первых и вторых производных, которые будут использоваться в дальнейшем, предполагая, что искомые функции являются гладкими. При несимметричной аппроксимации первой производной на двухточечном шаблоне рассмотрим аппроксимацию первого порядка

$$\Lambda_{\pm} u_j^n = \mp \frac{(u_j^n - u_{j\pm 1}^n)}{h} = \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_j + O(h), \quad (1.2.1)$$

а на трехточечном шаблоне

$$\Lambda_{\pm} u_j^n = \mp \frac{3u_j^n - 4u_{j\pm 1}^n + u_{j\pm 2}^n}{2h} = \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_j + O(h^2) \quad (1.2.2)$$

второго порядка точности на равномерной сетке. В зависимости от выбора знака в операторе  $\Lambda_{\pm}$  получим правостороннюю (знак  $+$ ) или левостороннюю ( $-$ ) разностную производную несимметричными разностными операторами. Симметричная аппроксимация может быть получена суперпозицией несимметричных операторов (1.2.1) по формуле

$$\Lambda = \frac{1}{2}(\Lambda_+ + \Lambda_-).$$

Аналогично (1.2.1) аппроксимируется производная по времени

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau}, \quad \frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\tau}, \quad \frac{3u_j^{n+1} - 4u_j^n + u_j^{n-1}}{2\tau}$$

с первым или вторым порядком (здесь  $\tau$  – шаг сетки по времени). Вторую производную в направлении  $x$  будем аппроксимировать симметричным трехточечным оператором на равномерной сетке со вторым порядком по стандартным формулам

$$\frac{\partial}{\partial x} b \frac{\partial}{\partial x} u_j^n \approx \Lambda b_j \Lambda u_j^n = \frac{b_{j+1/2}(u_{j+1}^n - u_j^n) - b_{j+1/2}(u_j^n - u_{j-1}^n)}{h^2},$$

$$b_{j\pm 1/2} = \frac{b_{j\pm 1} + b_j}{2}.$$

По аналогии с аппроксимацией дифференциального оператора разностным оператором рассматривают аппроксимацию дифференциальной краевой задачи разностной краевой задачей.

Пусть в области  $Q = Q(t, x)$  с границей  $\Gamma$  требуется найти решение задачи

$$L\mathbf{u} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in Q(t, x), \quad l\mathbf{u} = \varphi(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Gamma, \quad (1.2.3)$$

удовлетворяющей краевым условиям (или начальным условиям), где  $L$  – дифференциальный оператор,  $l$  – оператор краевых условий,  $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_m)$ ,  $\mathbf{x} = (t, x)$ . Аппроксимируем краевую задачу (1.2.3) на сетке  $Q_h$  разностной схемой

$$L_h \mathbf{u}_h = \mathbf{f}_h, \quad l_h \mathbf{u}_h = \varphi_h, \quad (1.2.4)$$

где  $L_h, l_h$  – разностные операторы, аппроксимирующие соответствующие дифференциальные и граничные операторы с порядком  $O(h^k)$ . Под разностной схемой (1.2.4) понимается аппроксимация дифференциальных уравнений и граничных условий. Таким образом, аппроксимация дифференциальной краевой задачи (1.2.3) разностной схемой (1.2.4) приводит к системе алгебраических уравнений (в общем случае нелинейных), связывающих значения сеточных функций в узле сетки с их значениями на шаблоне. Если

$$\begin{aligned} \|L_h \mathbf{u}_h - (L\mathbf{u})_h\| &= O(h^{k_1}), \quad \|\mathbf{f}_h - (\mathbf{f})_h\| = O(h^{k_2}), \\ \|l_h \mathbf{u}_h - (l\mathbf{u})_h\| &= O(h^{k_3}), \quad \|\varphi_h - (\varphi)_h\| = O(h^{k_4}), \end{aligned} \quad (1.2.5)$$

то разностная схема (1.2.4) аппроксимирует краевую задачу (1.2.3) с порядком  $O(h^k)$ , где  $k = \min(k^i)$ ,  $i = 1, \dots, 4$ . Если условия (1.2.5) выполняются при любом соотношении  $\tau, h$  и при  $h = h(\tau, h) \rightarrow 0$ , то разностная схема называется абсолютно (безусловно) аппроксимирующей, а если при специальном соотношении временного и пространственного шагов сетки и при  $\tau \rightarrow 0, h \rightarrow 0$ , то схема (1.2.5) называется условно аппроксимирующей.

Для системы нестационарных уравнений

$$\frac{\partial u}{\partial t} + Lu = f(x), \quad (1.2.6)$$

где  $L$  – дифференциальный оператор, главным образом будут рассматриваться двухслойные разностные схемы

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} + L_h(\alpha u^{n+1} + \beta u^n) = f_h, \quad \beta = 1 - \alpha, \quad (1.2.7)$$

связывающие значения сеточных функций на временных слоях  $n, n + 1$ . Здесь  $\alpha, \beta$  – весовые множители. Перепишем схему (1.2.7) в каноническом виде (см. [7, 10])

$$C \frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = -L_h u^n + f_h, \quad C = I + \tau \alpha L_h, \quad (1.2.8)$$

где  $I$  – единичный оператор. Введем определение (одно из определений) явной и неявной схем [6, 9]. Назовем разностную схему явной, если оператор  $C = I$ , и неявной в противном случае, если  $C \neq I$ . Отметим, что порядок аппроксимации схемы (1.2.7) зависит от узла сетки, в котором проверяется аппроксимация уравнения (1.2.6). Пусть сеточные операторы  $L_h$ ,  $f_h$  аппроксимируют дифференциальный оператор  $L$  и функцию правой части  $f$  с порядком  $O(h^k)$ . Тогда, в узлах сетки  $(n, j)$  разностная схема (1.2.7) аппроксимирует уравнение (1.2.6) с порядком  $O(\tau + h^k)$  для всех значений  $\alpha$ , а в узлах  $(n + S, j)$  с порядком  $O(\tau^2 + h^k)$ , если  $\alpha = 0,5 + O(\tau)$ . Как отмечалось выше, близость решения дифференциальной и разностной задач может быть определена в некоторой сеточной норме. Если для любого  $n, j$  и при  $\tau \rightarrow 0$ ,  $h \rightarrow 0$  выполняется условие

$$\|u_h - (u)_h\| = O(\tau^m + h^k) \rightarrow 0, \quad (1.2.9)$$

то решение разностной задачи сходится к решению дифференциальной задачи, а разностная схема сходится со скоростью  $O(\tau^m + h^k)$ . Заметим, что оценка типа (1.2.9) зависит от оператора проектирования  $P_h(P_h u = u_h)$  и выбранной нормы. На практике для доказательства сходимости проверяют устойчивость схемы, т. е. непрерывную зависимость решения от начальных и граничных условий.

Назовем разностную схему (1.2.4), аппроксимирующую задачу (1.2.3), устойчивой (устойчивой по правой части и начальным данным), если справедлива оценка

$$\|u_h - \bar{u}_h\| \leq K_1 \|f_h - \bar{f}_h\| + K_2 \|\varphi_h - \bar{\varphi}_h\|. \quad (1.2.10)$$

Здесь  $u_h$ ,  $\bar{u}_h$  – решения исходной и возмущенной задач (1.2.3). Если  $K_1, K_2$  не зависит от шагов сетки, а условие (1.2.10) выполняется при любом соотношении  $\tau, h$ , то разностная схема называется *безусловно устойчивой*, в противном случае – *условно устойчивой*. При выполнении условий аппроксимации (1.2.4) и устойчивости (1.2.10) следует сходимость решения разностной задачи к решению линейной дифференциальной задачи [7–10]. При исследовании устойчивости разностных схем используются различные подходы: метод априорных оценок, метод первого дифференциального приближения, спектральные методы и т. д. (см. [5–7, 10–13]). Однако исследование устойчивости схем для численного решения нелинейных уравнений сопряжено со значительными трудностями. Поэтому часто анализ устойчивости проводят для системы линейных уравнений, полученных линеаризацией исходных уравнений, или для уравнений с «заморо-

женными» коэффициентами. Конечно, такой анализ является приближенным, но, как показывают многочисленные расчеты, оценки устойчивости разностных схем, полученные для системы линейных уравнений, справедливы и для систем нелинейных уравнений в широком диапазоне изменения параметров схем. Именно этот подход будет использоваться в дальнейшем.

### § 1.3. Требования к численным алгоритмам

Нелинейность исходных дифференциальных уравнений не позволяет, как правило, находить их точных решений. Более того, такие решения не всегда существуют, поэтому основными методами их решения являются численные методы. В настоящее время существуют различные численные и приближенные методы решения уравнений в частных производных. Конечно, эти методы различаются своими свойствами, способами получения численного решения и способами реализации, что приводит к необходимости оценки их свойств и формулировок требований к ним. Ниже эти требования формулируются на примере конечно-разностных методов (см. [9]).

Пусть в области  $\Omega = \Omega(\mathbf{x})$  с границей  $\Upsilon$  требуется найти решение краевой задачи

$$L\mathbf{u} = \mathbf{f}, \quad l\mathbf{u}_\Upsilon = \boldsymbol{\varphi}, \quad (1.3.1)$$

где  $L, l$  – дифференциальные, интегральные или алгебраические операторы,  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$  – вектор искомых функций;  $\mathbf{x} = (t, x_1, \dots, x_N)$  – векторы правых частей. Предположим, что задача (1.3.1) поставлена корректно. Переход от математической постановки задачи к ее численному решению включает следующие этапы:

- замену области  $\Omega$  непрерывного аргумента  $\mathbf{x}$  его дискретным аналогом  $\Omega_h$ ;
- замену (аппроксимацию) функций  $\mathbf{u}, \mathbf{f}, \boldsymbol{\varphi}$  непрерывного аргумента  $\mathbf{x}$  дискретными функциями  $\mathbf{u}_h, \mathbf{f}_h, \boldsymbol{\varphi}_h$ ;
- аппроксимацию исходных операторов  $L, l$  их дискретными аналогами  $L_h, l_h$ .

После выполнения указанных операций приходим к системе дискретных уравнений

$$L_h \mathbf{u}_h = \mathbf{f}_h, \quad l_h \mathbf{u}_h = \boldsymbol{\varphi}_h, \quad (1.3.2)$$

которые называют разностной схемой. Как следствие, возникает вопрос о соотношении (близости) решений исходной дифференциальной (1.3.1) и дискретной (1.3.2) задач. Так как каждый этап постановки дискретной задачи может проводиться различными способами, то в результате для решения задачи (1.3.1) может быть получено семейство дискретных постановок (1.3.2), обладающих, вообще говоря, раз-

личными свойствами. Таким образом, одной дифференциальной постановке задачи (1.3.1) может соответствовать целое семейство дискретных постановок (1.3.2). И естественно задать вопрос: каким требованиям должна удовлетворять численная схема (метод) для решения задач? В зависимости от целей, которые мы ставим при решении задачи, требования к численным алгоритмам также могут быть разными, но основными из них являются:

- сходимость решения дискретной задачи (1.3.2) к решению исходной задачи (1.3.1);
- достаточная точность расчета;
- экономичность алгоритма;
- универсальность алгоритма, т. е. возможность его адаптации к различным типам уравнений и к различным физико-математическим моделям;
- адаптация алгоритма к различным типам и архитектурам ЭВМ.

Очевидно, перечисленные требования могут быть дополнены, как отмечено выше, требованием адекватности или близости свойств разностной схемы к свойствам исходной задачи, условиям консервативности схемы, однородности алгоритма и т. д. (см. [5–15]). Эффективность моделирования на этом этапе может быть наиболее точно оценена лишь во всей технологической цепочке. Следует отметить, что требования, предъявляемые к численным алгоритмам, противоречивы и в зависимости от целей исследования часть из них может быть опущена. Например, при необходимости получения решения с высокой точностью универсальность алгоритма или его экономичность могут оказаться не столь важными. Таким образом, удовлетворение всем требованиям приводит к задаче оптимизации. Она может иметь одно или несколько решений (или не иметь их). Отсюда следует вывод о невозможности построения универсального алгоритма для решения различных классов задач и необходимости создания различных алгоритмов в зависимости от целей исследования.

Проведем анализ основных требований, предъявляемых к численным алгоритмам. Для обеспечения сходимости численного решения к решению исходной задачи необходимо удовлетворять, как следует из теории разностных схем [7], условиям аппроксимации и устойчивости (корректности) разностного решения. Доказательство этих утверждений в случае нелинейных уравнений и нелинейных разностных схем достаточно сложное и является одним из актуальных вопросов теории разностных схем. Требования к точности расчета для различных физико-математических задач могут быть различными в зависимости от цели моделирования. Разумеется, точность расчета должна быть согласована с точностью выбранной физико-математической модели.

Повышение точности расчета как одной из его важнейших характеристик может быть достигнуто измельчением шагов сетки или расчетных ячеек, применением неравномерных и подвижных сеток, построением схем повышенного порядка точности [7–10, 14–27]. Отметим также и другие способы повышения точности расчетов, которые используются в последнее время:

- экстраполяция численных решений, полученных на последовательности сеток [15–17];
- использование информации о гладкости решения (алгоритмы без насыщения [11]);
- использование точных решений (в ячейке с кусочно-постоянными или кусочно-линейными начальными данными), как в схеме Годунова, послужившей основой для построения новых классов разностных схем [5, 18];
- выделение главных особенностей решения, например, головной ударной волны в задачах сверхзвукового обтекания и т. д.

Равномерное измельчение шагов сетки (или расчетных ячеек) не является эффективным способом повышения точности при решении многомерных задач. Это вызвано степенным возрастанием числа узлов в расчетной области и соответствующим ростом числа арифметических операций. Хотя такой подход не требует изменения алгоритма и программ, используется он сравнительно редко.

При решении задач чаще всего используются неравномерные сетки, в том числе сетки, сгущающиеся в области больших градиентов. При наличии информации о поведении решения вводится преобразование координат, сгущающее ячейки в областях, содержащих особенности решения (пограничные слои, ударные волны и т. д.). Такой подход оказывается очень эффективным, поскольку позволяет без существенного увеличения числа расчетных ячеек значительно повысить точность расчета. Однако для большинства задач области больших градиентов и других особенностей решения, как правило, априори неизвестны и могут быть получены лишь в процессе решения. Еще более сложная ситуация возникает в нестационарных задачах, в которых решение меняется во времени и расчетные сетки тоже зависят от времени. Для решения таких задач исходные уравнения необходимо дополнить нестационарными уравнениями для определения закона движения сетки (см. [18–24]). Усложнение расчетных областей и переход к решению многомерных задач потребовали и разработки специальных методов построения или генерации сеток, удовлетворяющих определенным требованиям. На современном этапе моделирования задача построения эффективных сеток становится центральной, и по оценкам специалистов основные затраты ресурсов ЭВМ приходится на ее решение. Укажем еще один способ повыше-

ния точности расчета – построение решения на вложенных или адаптивно встраиваемых сетках. Хотя данный подход недостаточно обоснован, он может послужить основой для получения предварительного решения, а затем процесс вычислений может повторяться до получения решений с требуемой точностью.

В последние десятилетия наряду с неравномерными сетками широко используются схемы повышенного порядка, главным образом двух типов: схемы на расширенном шаблоне [7–10, 12] и компактные схемы высокого порядка на трехточечном шаблоне [13–17, 25]. При построении схем сквозного счета для уменьшения осцилляций численного решения применяются различные способы монотонизации решения: в разностную схему добавляют диссипативные члены, которые не только гасят осцилляции, но и сглаживают решение. В схемах типа TVD, основанных на принципе минимальных производных, монотонность решения достигается путем введения численной диссипации, обеспечивающей обратную связь схемы с решением. Как правило, эти схемы согласованы с энтропийным неравенством и имеют второй или более высокий порядок аппроксимации. Сглаживание решения происходит на небольшом числе ячеек. Имеется множество модификаций схем (ENO-схемы, схемы с коррекцией, схемы ограниченной антидиффузии и т. д., см. [25–28]), позволяющих сохранить их монотонность, повышенный порядок, консервативность и т. д. Следует отметить, что использование расширенного шаблона в этих схемах приводит к необходимости задания фиктивных слоев и дополнительных граничных условий, отсутствующих в исходной постановке задач, или изменения аппроксимации в приграничных узлах, что нарушает однородность схем. В случае использования компактных схем аппроксимация повышенного порядка достигается на трехточечном шаблоне за счет специального выбора аппроксимации уравнения, исключающей погрешности более низких порядков (см. [14]). Их недостатком является значительное усложнение аппроксимации, особенно в многомерном случае. Однако применение схем повышенного порядка является единственной возможностью решения многомерных задач с высокой точностью.

Требование экономичности алгоритма всегда являлось одним из главных и понималось как минимизация числа арифметических операций на решение задачи. Приведем оценки затрат ресурсов ЭВМ при решении многомерных нестационарных задач (см. [9]). Пусть  $N$  – размерность задачи по пространству,  $m$  – количество уравнений,  $I_j$  – число узлов в направлении  $x_j$ ,  $q$  – число арифметических операций на узел сетки,  $N_0$  – число шагов по времени. Тогда общее число арифметических операций, необходимых для решения задачи, равно



$$Q = mqN_0I, \quad I = I_1 \cdot I_2 \dots I_N. \quad (1.3.3)$$

Эта формула не учитывает ряд факторов, влияющих на затраты ресурсов ЭВМ, таких как число внутренних итераций, заданная точность расчета, начальное приближение и т. д. Будем полагать, что они априорно учтены параметром  $q$ . Выберем для примера средние значения параметров при решении задач существующими численными методами:

$$I_j \approx 10^2 - 10^3, \quad m \approx 10^1 - 10^2, \quad N_0 \approx 10^3 - 10^5, \quad q \approx 10^2 - 10^5.$$

Для трехмерного случая ( $N = 3$ ) получим оценку  $Q \approx 10^{12} - 10^{21}$  операций. Обозначим через  $R$  количество операций, выполняемых ЭВМ за 1 с. Тогда время решения задачи и затраты оперативной памяти определяются по формулам

$$T = Q/R, \quad L = ml, \quad (1.3.4)$$

где  $l$  – число временных слоев, необходимых для хранения в оперативной памяти ЭВМ (обычно  $l = 2$ ). По оценкам специалистов, использование результатов математического моделирования в проектировании является оптимальным, если расчет одного варианта не превышает 15 мин ( $\sim 10^3$  с). В этом случае быстродействие ЭВМ и оперативная память для решения трехмерных задач должны были составлять

$$R \sim 10^9 - 10^{19}, \quad L \sim 10^7 - 10^{11}.$$

При выводе формулы для определения быстродействия  $R$  не оговаривалось, используется ли однопроцессорная ЭВМ или многопроцессорный вычислительный комплекс. Полагалось, что быстродействие  $R$  не зависит от типа алгоритмов, размерности задачи, использованного объема памяти и от других факторов. В действительности быстродействие ЭВМ зависит от многих факторов. Для их приближенного учета формула быстродействия может быть представлена в виде

$$R = sR_p,$$

где  $R_p$  – пиковая производительность системы,  $s$  – средний коэффициент загрузки процессоров ( $s < 1$ ), значение которого может значительно изменяться для различных многопроцессорных вычислительных систем и используемого численного алгоритма. Согласно (1.3.4), затраты на решение задачи могут быть сокращены путем уменьшения  $Q$  или увеличения быстродействия  $R$ . Число арифметических операций  $Q$  определяет экономичность алгоритма. Под экономичным численным алгоритмом понимается минимальное число арифметических операций на решение задачи с заданной точностью. Назовем алго-

ритм (метод) экономичным, если для решения конкретной задачи (с заданной точностью) число арифметических операций на ее решение возрастает линейно с ростом числа узлов, т. е.  $Q = Q(S)$  – линейная функция от  $S$ , а  $S = N_0 \cdot I$  – общее число узлов.

Все разностные схемы делятся на явные и неявные схемы (см. § 1.2). Как правило, явные схемы условно устойчивы, т. е. разностная задача корректна при определенном соотношении между временным (итерационным)  $\tau$  и пространственными  $h_j$  шагами сетки. Для неявных схем эти ограничения отсутствуют или они более слабые, чем для явных схем. В соответствии с приведенным выше определением явные схемы не являются экономичными. Проиллюстрируем сказанное выше простейшим примером. Пусть в области  $\Omega = \{0 \leq t \leq 1, 0 \leq x \leq 1\}$  требуется решить краевую задачу

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u(0, x) = u^0(x), \quad u(t, 0) = u_0(t), \quad u(t, 1) = u_1(t). \quad (1.3.5)$$

Введем шаги разностной сетки  $\tau = 1/N_0$ ,  $h = 1/I$ , где  $N_0, I$  – число узлов сетки в направлениях  $t, x$  соответственно. Разностная схема с весами

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = \Lambda_{11}(\alpha u^{n+1} + \beta u^n),$$

$$u_0^{n+1} = u_0(t_{n+1}), \quad u_I^{n+1} = u_I(t_{n+1}), \quad \beta = 1 - \alpha \quad (1.3.6)$$

аппроксимирует уравнение (1.3.5) с порядком  $O(\tau^2 + h^2)$  при  $\alpha = 0,5 + O(\tau)$  и безусловно устойчива при  $\alpha \geq 0,5$ , где  $\Lambda_{11} = \partial^2/\partial x^2 + O(h^2)$  – симметричная аппроксимация второй производной на трехточечном шаблоне. Явная разностная схема ( $\alpha = 0$ ) аппроксимирует уравнение (1.3.5) с порядком  $O(\tau + h^2)$  и устойчива лишь при выполнении условия  $\tau \leq h^2/2$  (см., например, [5–8]). Тогда число арифметических операций  $Q$ , необходимых ее для решения, равно

$$Q = qN_0I = qI/\tau \approx 2qI^3,$$

где  $\tau \approx h^2/2 \approx I^2/2$ . При изменении шага сетки  $h$ , т. е. при увеличении числа узлов  $I$  в  $p$  раз, число операций увеличивается в  $p^3$  раз. Аналогичная ситуация возникает при использовании явных схем для решения гиперболических уравнений, для которых число операций увеличивается по квадратичному закону при линейном увеличении числа шагов сетки. В то же время неявная схема при  $\alpha = 0,5 + O(\tau)$  безусловно устойчива, аппроксимирует уравнение (1.3.5) со вторым порядком по всем переменным и экономична. Действительно, схема реализуется трехточечной скалярной прогонкой, требующей выпол-

нения  $8I$  ( $q = 8$ ) операций на каждом временном слое (см. [15]), и общее число операций равно  $Q = qN_0I \approx 8S$  ( $S = N_0I$ ), т. е. оно линейно возрастает с ростом числа узлов  $S$ .

Остановимся на вопросах универсальности алгоритма. Для явных схем обобщение алгоритмов на многомерный случай не представляет значительных трудностей, однако проблема экономичности выходит на первый план, так как увеличение размерности задачи приводит к более жестким ограничениям на устойчивость. Реализация неявных схем даже для линейных систем для многомерных задач значительно усложняется. Например, для численного решения двумерного уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{j=1}^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}$$

разностная схема с весами

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = \sum_{j=1}^2 \Lambda_{jj} (\alpha u^{n+1} + \beta u^n) \quad (1.3.7)$$

безусловно устойчива при  $\alpha \geq 0,5$  и аппроксимирует его с порядком  $O(\tau^2 + h^2)$  при  $\alpha = 0,5 + O(\tau)$ , где  $\Lambda_{jj} = \partial^2 / \partial x_j^2 + O(h^2)$ ,  $h = \max(h_j)$ . В отличие от одномерного случая схема (1.3.7) реализуется матричными прогонками, которые сводятся к обращению матриц размером  $I_1 \times I_2$  в каждом узле сетки на каждом временном слое, т. е. она неэкономична. Таким образом, обобщение неявных схем, эффективных для решения одномерных задач, на многомерный случай чаще всего приводит к усложнению их реализации или потере экономичности.

Переход от решения одномерных уравнений к решению многомерных потребовал разработки новых численных алгоритмов, пригодных для эффективного решения задач любой размерности. Такие алгоритмы созданы в 70–80-е гг. прошлого столетия на основе метода факторизации и метода расщепления (см., например, [6–10, 14–17, 25–52]). Их суть заключается в сведении исходной многомерной задачи к последовательности ее одномерных аналогов или более простых задач. В методе факторизации базовые схемы представляются в виде приближенного произведения одномерных или более простых разностных аналогов, а в методе расщепления исходная задача представляется в виде совокупности более простых одномерных задач, которые затем аппроксимируются явными и неявными разностными схемами. Следует отметить, что введение расщепления или факторизации в разностных схемах приводит к появлению дополнительных членов

порядка  $O(\tau^2)$ , отсутствующих в исходных уравнениях. Это может вызвать понижение точности решения или увеличение числа итераций при получении стационарного решения методом установления.

Последним важным требованием, предъявляемым к численным алгоритмам, является требование адаптации алгоритмов к различным архитектурам вычислительных систем. Основные численные алгоритмы, использующиеся для решения различных классов задач, созданы в эпоху однопроцессорных ЭВМ и предполагали последовательное выполнение арифметических операций. Появление многопроцессорных вычислительных систем различного типа потребовало переоценки разработанных численных алгоритмов, оценки их эффективности и возможности адаптации к новым архитектурам. В настоящее время возможности адаптации большинства существующих неявных методов к различным типам вычислительных систем изучены недостаточно. Более просто могут быть распараллелены явные схемы. Например, при явном способе вычислений на новом шаге исходная задача может быть разбита на отдельные сегменты или модули, каждый из которых может быть решен независимо от других (с точностью до вычислений на границах сегментов и передачи данных от одного сегмента к другим). Таким образом, появление новых архитектур вычислительных систем привело к возникновению нового направления в вычислительной математике – разработке параллельных алгоритмов решения многомерных задач.

#### **§ 1.4. Неявные схемы для скалярного уравнения**

Решения нелинейных уравнений характеризуются, как правило, наличием подобластей больших градиентов и других особенностей типа пограничных слоев, отрывных зон и т. д., что накладывает жесткие требования на применяемые численные алгоритмы. Эти алгоритмы должны обладать необходимой точностью, иметь достаточный запас устойчивости, удовлетворять свойствам экономичности, консервативности и другим требованиям. Поэтому задача выбора разностной схемы зависит от многих факторов. При решении нестационарных уравнений газовой динамики оптимальный размер временного шага определяется скоростью перемещения волн и разрывов, и поэтому для их решения целесообразно применение явных схем. Однако при нахождении стационарного решения многомерных задач газовой динамики методом установления неявные схемы могут оказаться предпочтительнее. Применение явных разностных схем для решения параболических уравнений, как правило, неэффективно в силу жестких ограничений на соотношения временного и пространственного шагов расчетной сетки  $\tau$  и  $h$ , особенно при нахождении стационарно-

го решения методом установления. Поэтому для их решения целесообразно использовать неявные разностные схемы.

В настоящей работе мы остановимся на алгоритмах построения неявных разностных схем. Начнем их рассмотрение для скалярного уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} c \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varphi = \varphi(u), \quad c = c(x). \quad (1.4.1)$$

Простейшей из них является схема с весами

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} + \Lambda(\alpha\varphi^{n+1} + \beta\varphi^n) + \Lambda b_h \Lambda(\alpha u^{n+1} + \beta u^n) = 0, \quad (1.4.2)$$

где  $\Lambda = \partial/\partial x + O(h^k)$ ,  $\Lambda c_h \Lambda = \frac{\partial}{\partial x} c \frac{\partial}{\partial x} + O(h^2)$ . Она аппроксимирует уравнение (1.4.1) с порядком  $O(\tau^m + h^k)$ , где  $m = 2$  при  $\alpha = 0,5 + O(\tau)$  и  $m = 1$  при других значениях. В силу нелинейности схемы (1.4.2) вычислить значение функции  $u^{n+1}$  на новом временном слое при  $\alpha \neq 0$  не представляется возможным. Существуют два основных способа реализации нелинейных схем – метод итераций и метод линеаризации (см., например, [5–10, 12–15]). Воспользуемся вторым подходом. Линеаризуем функцию  $\varphi(u)$  по формуле

$$\begin{aligned} \varphi^{n+1} &= \varphi(u^{n+1}) = \varphi^n + \tau(\partial\varphi/\partial u)^n (\partial u/\partial t)^n + O(\tau^2) = \\ &= \varphi^n + \tau b^n \frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} + O(\tau^2). \end{aligned} \quad (1.4.3)$$

С учетом линеаризации (1.4.3) разностная схема

$$[I + \tau\alpha(\Lambda b_h - \Lambda c_h \Lambda)] \frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = -\Lambda\varphi^n + \Lambda c_h \Lambda u^n \quad (1.4.4)$$

аппроксимирует уравнение (1.4.1) с тем же порядком, что и базовая схема (1.4.2), но является линейной схемой относительно  $u^{n+1}$ . Ее реализация сводится к скалярной прогонке (трехточечной, если  $\Lambda$  – трехточечный оператор), и тогда число операций на ее реализацию зависит линейно от числа узлов сетки. Схема (1.4.4) безусловно устойчива при  $\alpha \geq 1/2$ . Покажем это на примере схемы для линейного уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} + b \frac{\partial u}{\partial x} = c \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

полученного из (1.4.1), когда его коэффициенты  $b = \text{const}$  и  $c = \text{const}$ . Пусть для определенности оператор  $\Lambda$  – симметричный оператор.

Для анализа устойчивости схемы (1.4.4) воспользуемся спектральным методом (см. [5–9]). Пусть  $f = u - u_{\text{точ}}$  – малое возмущение от точного решения задачи (1.4.1). Ее сеточное значение обозначим как  $f_j^n$ . Для устойчивости схемы необходимо, чтобы при стремлении шагов сетки  $\tau \rightarrow 0$ ,  $h \rightarrow 0$  выполнялось условие

$$\|f_h\| = \|f_j^n\| \leq K \|f_j^0\|. \quad (1.4.5)$$

Будем задавать значение сеточной функции  $f_j^n$  в виде (см. например, [5, 6])

$$\begin{aligned} f_j^n &= f_0 \exp(i\omega t_n + ikx_j) = f_0 \exp(i\omega n\tau + ikjh) = \\ &= f_0 \lambda^n \exp(i\omega n\tau + ikjh), \end{aligned} \quad (1.4.6)$$

где приняты обозначения  $t_n = n\tau$ ,  $x_j = jh$ . Выберем в качестве нормы ее сеточный аналог  $\|f^n\| = \max |f_j^n|$  для  $0 \leq j \leq J_0$ .

Для решения вида (1.4.6) условие устойчивости (1.4.5) примет вид

$$\|f^n\| \leq |\lambda|^n \|f^0\|.$$

Подставляя (1.4.6) в разностную схему (1.4.4), получим характеристическое уравнение

$$\det \left\| \left[ 1 + \alpha(id + r^2) \right] (\lambda - 1) + (id + r^2) \right\| = 0,$$

где  $d = (\tau b/h) \sin(kh)$ ,  $r^2 = (4\tau c/h^2) \sin^2(kh/2)$ . Его корни равны

$$\lambda = \frac{1 - (1 - \alpha)(id + r^2)}{1 + \alpha(id + r^2)} \text{ и } |\lambda| \leq 1$$

при  $\alpha \geq 1/2$ , т. е. разностная схема (1.4.4) в линейном приближении безусловно устойчива.

Остановимся более подробно на реализации схемы (1.4.4). При симметричной аппроксимации первой производной разностная схема (1.4.4) запишется в виде трехточечного соотношения

$$A_j \Delta_{j-1} + B_j \Delta_j + C_j \Delta_{j+1} = D_j,$$

где  $\Delta_j = u_j^{n+1} - u_j^n$ ,  $A_j = -\frac{\tau\alpha}{h} \left( \frac{1}{2} b_{j-1} + \frac{c_{j-1/2}}{h} \right)$ ,

$$B_j = 1 + \frac{\tau\alpha}{h^2} (c_{j-1/2} + c_{j+1/2}), \quad C_j = \frac{\tau\alpha}{h} \left( \frac{1}{2} b_{j+1} - \frac{c_{j+1/2}}{h} \right),$$

$$D_j = -\frac{\tau}{2h}(\Phi_{j+1}^n - \Phi_{j-1}^n) + \frac{\tau}{h^2} [c_{j+1/2}(f_{j+1}^n - f_j^n) - c_{j-1/2}(f_j^n - f_{j-1}^n)],$$

$$c_{j\pm 1/2} = \frac{c_{j\pm 1} + c_j}{2}.$$

Его решение может быть получено трехточечной скалярной прогонкой. Однако, прогонка будет плохо обусловленной при выполнении условия  $K = (\tau/h) \max |b_j| \geq 1$ . Таким образом, практически расчеты можно проводить лишь при числе Куранта  $K \leq 1$ , как и для явных схем. Выходом из этой ситуации является применение схемы с несогласованной аппроксимацией

$$\left[ I + \tau\alpha(\Lambda^k b^n - \Lambda c_h \Lambda) \right] \frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = -\Lambda^l \varphi^n + \Lambda c_h \Lambda u^n, \quad (1.4.6)$$

в которой порядок аппроксимации стабилизирующего оператора ( $k$ ) и оператора правой части ( $l$ ) в схеме (1.4.4) различен. Она аппроксимирует уравнение (1.4.1) с порядком  $O(\tau^m + \tau h^k + h^l)$ , где  $l > k$ . Зададим  $l = 2$ ,  $k = 1$  и в качестве оператора  $\Lambda^1$  выберем несимметричный оператор  $\Lambda_{\pm}^1$ , аппроксимация которого зависит от знака коэффициента  $b_j^n$ , т. е. будем задавать

$$\Lambda^1 = \Lambda_-^1, \text{ если } b_j^n \geq 0, \text{ и } \Lambda^1 = \Lambda_+^1, \text{ если } b_j^n \leq 0.$$

Нетрудно показать, что при  $l = 2$ ,  $k = 1$  схема (1.4.6) безусловно устойчива при  $\alpha \geq 0,5$ , а прогонка хорошо обусловлена, и это позволяет проводить расчет при любом значении шага  $\tau$ . В общем случае устойчивость схемы (1.4.6) сохраняется и при  $l \leq k + 2$  и  $\alpha = 1$  (см. [9, 44]), но порядок аппроксимации схемы по времени понижается до первого.

### § 1.5. Неявные схемы для системы уравнения

Перейдем теперь к построению неявных разностных схем для системы уравнений

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial x} = \mathbf{F}, \quad (1.5.1)$$

где  $\mathbf{W} = \mathbf{W}(\mathbf{U}, \mathbf{U}_x)$ , а  $\mathbf{U} = (U_1, \dots, U_M)$ ,  $\mathbf{W} = (W_1, \dots, W_M)$ ,  $\mathbf{F} = \mathbf{F}(t, x)$  – известная функция. Схема с весами

$$\frac{\mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{U}^n}{\tau} + \Lambda(\alpha \mathbf{W}^{n+1} + \beta \mathbf{W}^n) = \mathbf{F}_h \quad (1.5.2)$$

аппроксимирует систему уравнений (1.5.1), как и для скалярного уравнения, с порядком  $O(\tau^m + h^k)$  и при  $\alpha \neq 0$  нелинейна. Здесь, как и выше,

$$\Lambda = \partial/\partial x + O(h^k), \quad \mathbf{F}_h = \alpha \mathbf{F}^{n+1} + \beta \mathbf{F}^n.$$

В качестве оператора  $\Lambda$  могут выбираться несимметричные или симметричные операторы. Для ее численной реализации линеаризуем вектор  $\mathbf{W}^{n+1}$  относительно вектора искомых функций  $\mathbf{U}$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{W}^{n+1} = \mathbf{W}(\mathbf{U}^{n+1}, \mathbf{U}_x^{n+1}) &= \mathbf{W}^n + \tau \left( \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial \mathbf{U}} \right)^n \left( \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} \right)^n + \tau \left( \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial \mathbf{U}_x} \right)^n \left( \frac{\partial \mathbf{U}_x}{\partial t} \right)^n + O(\tau^2) = \\ &= \mathbf{W}^n + \tau \mathbf{B}^n \frac{\mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{U}^n}{\tau} + \tau \mathbf{C}^n \Lambda \frac{\mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{U}^n}{\tau} + O(\tau^2), \quad \mathbf{B} = \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial \mathbf{U}}, \quad \mathbf{C} = \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial \mathbf{U}_x}. \end{aligned}$$

Тогда разностная схема (1.5.2) с учетом линеаризации примет вид

$$\left[ I + \tau \alpha (\Lambda \mathbf{B}^n + \Lambda \mathbf{C}^n \Lambda) \right] \frac{\mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{U}^n}{\tau} = -\Lambda \mathbf{W}^n + \mathbf{F}_h. \quad (1.5.3)$$

Она аппроксимирует уравнения (1.5.1) с тем же порядком, что и базовая схема (1.5.2), но является линейной относительно  $\mathbf{U}^{n+1}$ . Ее реализация сводится, например, к векторной прогонке, требующей обращения матриц  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$  в каждом узле сетки.

Рассмотрим более сложную зависимость векторов  $\mathbf{U}$ ,  $\mathbf{W}$ . Пусть  $\mathbf{U} = \mathbf{U}(\mathbf{f})$  и  $\mathbf{W} = \mathbf{W}(\mathbf{f}, \mathbf{f}_x)$ .

Линеаризуем функции  $\mathbf{U}$  и  $\mathbf{W}$  относительно вектора искомых функций  $\mathbf{f}$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{U}^{n+1} = \mathbf{U}(\mathbf{f}^{n+1}) &= \mathbf{U}^n + \tau \mathbf{A}^n \frac{\mathbf{f}^{n+1} - \mathbf{f}^n}{\tau} + O(\tau^2), \\ \mathbf{W}^{n+1} = \mathbf{W}(\mathbf{f}^{n+1}, \mathbf{f}_x^{n+1}) &= \mathbf{W}^n + \mathbf{B}^n \frac{\mathbf{f}^{n+1} - \mathbf{f}^n}{\tau} + \mathbf{C}^n \Lambda \frac{\mathbf{f}^{n+1} - \mathbf{f}^n}{\tau} + O(\tau^2). \end{aligned}$$

Тогда, подставляя их в (1.5.3), получим линейную разностную схему

$$\left[ \mathbf{A}^n + \tau \alpha (\Lambda \tilde{\mathbf{B}}^n + \Lambda \tilde{\mathbf{C}}^n \Lambda) \right] \frac{\mathbf{f}^{n+1} - \mathbf{f}^n}{\tau} = -\Lambda \mathbf{W}^n + \mathbf{F}_h, \quad (1.5.4)$$

где

$$\mathbf{A} = \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{f}}, \quad \tilde{\mathbf{B}} = \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial \mathbf{f}}, \quad \tilde{\mathbf{C}} = \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial \mathbf{f}_x}, \quad \mathbf{f}_x = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x}.$$

Она, в отличие от схемы (1.5.3), аппроксимирует исходные уравнения уже с порядком  $O(\tau + h^k)$  для всех значений  $\alpha$  и также реализуется векторной прогонкой. Спектральным методом для линеаризованных уравнений подобно схеме для скалярного уравнения можно



показать, что при  $\alpha \geq 0,5 + O(\tau)$  схема (1.5.4) безусловно устойчива. Можно рассмотреть класс несогласованных разностных схем

$$\left[ \mathbf{I} + \tau\alpha(\Lambda^k \mathbf{B}^n + \Lambda \mathbf{C}^n \Lambda) \right] \frac{\mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{U}^n}{\tau} = -\Lambda^l \mathbf{W}^n + \mathbf{F}_h, \quad (1.5.5)$$

выбирая различный порядок аппроксимации в стабилизирующем операторе и операторе правой части. Она аппроксимирует уравнения (1.5.1) с порядком  $O(\tau^m + \tau h^k + h^l)$ , а при установлении – стационарные уравнения в консервативной форме с порядком  $O(h^l)$ . Разностная схема

$$\left[ \mathbf{A}^n + \tau\alpha(\Lambda^k \tilde{\mathbf{B}}^n + \Lambda \tilde{\mathbf{C}}^n \Lambda) \right] \frac{\mathbf{f}^{n+1} - \mathbf{f}^n}{\tau} = -\Lambda^l \mathbf{W}^n + \mathbf{F}_h \quad (1.5.6)$$

аппроксимирует уравнения (1.5.1) с порядком  $O(\tau + \tau h^k + h^l)$  и также реализуется векторными прогонками. Для линейаризованных уравнений схемы (1.5.5), (1.5.6) при  $\alpha \geq 0,5 + O(\tau)$  безусловно устойчивы. В качестве другого подхода построения разностных схем рассмотрим метод предиктор–корректор, использующий дивергентную и недивергентную формы записи уравнений (изложение метода более подробно приведено ниже). Отметим, что реализация схем (1.5.3)–(1.5.6) векторными прогонками требует обращения матриц  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$  в каждом узле сетки, что приводит к степенному росту числа арифметических операций ( $\approx m^3$  операций, где  $m \times m$  – размерность матриц). Для большого числа уравнений такие алгоритмы становятся неэффективными.

### § 1.6. Разностные схемы расщепления

Для построения экономичных алгоритмов воспользуемся методом расщепления [6, 8]. Рассмотрение таких алгоритмов проведем на примере уравнений первого порядка

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} + \mathbf{B} \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x} = 0, \quad (1.6.1)$$

где  $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_m)T$ . Введем расщепление одномерных матричных операторов на их сумму

$$\mathbf{B} = \sum_{p=1}^P \mathbf{B}_p. \quad (1.6.2)$$

Введем оператор

$$\tilde{\mathbf{B}} = \sum_{p=1}^P \alpha_p \mathbf{B}_p,$$

где функции  $\alpha_p$  определяются следующим образом:

$$\alpha_p = P\delta_p^i, \text{ если } t \in \left[ \left( n + \frac{i-1}{P} \right) \tau, \left( n + \frac{i}{P} \right) \tau \right].$$

Тогда оператор  $\tilde{\mathbf{B}} \frac{\partial}{\partial x}$  слабо аппроксимирует  $\mathbf{B} \frac{\partial}{\partial x}$ , а система уравнений

$$\frac{1}{P} \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} + \tilde{\mathbf{B}} \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x} = 0 \quad (1.6.3)$$

слабо аппроксимирует систему уравнений (1.6.1). На каждом временном интервале  $t \in \left[ \left( n + \frac{i-1}{P} \right) \tau, \left( n + \frac{i}{P} \right) \tau \right]$  решается система уравнений

$$\frac{1}{P} \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} + \mathbf{B}_j \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x} = 0. \quad (1.6.4)$$

Будем рассматривать такие расщепления (1.6.2), чтобы для каждой расщепленной системы (1.6.4) разностные схемы

$$\frac{\mathbf{f}^{n+j/P} - \mathbf{f}^{n+(j-1)/P}}{\tau} + \mathbf{B}_{jh}^n \Lambda (\alpha \mathbf{f}^{n+j/P} + \beta \mathbf{f}^{n+(j-1)/P}) = 0 \quad (j=1, \dots, P),$$

где  $\Lambda = \partial/\partial x + O(h^k)$ , были экономичными по числу операций, т. е. реализовывались скалярными прогонками или схемами бегущего счета и сохраняли бы свойство безусловной устойчивости. Таким образом, разностная схема

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{f}^{n+1/P} - \mathbf{f}^n}{\tau} + \mathbf{B}_{1h}^n \Lambda (\alpha \mathbf{f}^{n+1/P} + \beta \mathbf{f}^n) &= 0, \\ \frac{\mathbf{f}^{n+2/P} - \mathbf{f}^{n+1/P}}{\tau} + \mathbf{B}_{2h}^n \Lambda (\alpha \mathbf{f}^{n+2/P} + \beta \mathbf{f}^{n+1/P}) &= 0, \end{aligned} \quad (1.6.5)$$

...

$$\frac{\mathbf{f}^{n+1} - \mathbf{f}^{n+(P-1)/P}}{\tau} + \mathbf{B}_{Ph}^n \Lambda (\alpha \mathbf{f}^{n+1} + \beta \mathbf{f}^{n+(P-1)/P}) = 0$$

аппроксимирует исходную систему уравнений и по построению также экономична (так как экономична на каждом дробном шаге). Предположим, что операторы  $\mathbf{B}_{lh}^n \Lambda$  и  $\mathbf{B}_{mh}^n \Lambda$  перестановочные. Тогда, исключая дробные шаги в схеме (1.6.5), приходим к схеме в целых шагах:

$$\prod_{j=1}^P (I + \tau \alpha \mathbf{B}_{jh}^n \Lambda) \mathbf{f}^{n+1} = \prod_{j=1}^P (I - \tau \beta \mathbf{B}_{jh}^n \Lambda) \mathbf{f}^n.$$

Перепишем ее в виде, разрешенном относительно производной по времени:

$$\frac{\mathbf{f}^{n+1} - \mathbf{f}^n}{\tau} + \mathbf{B}_h^n \Lambda (\alpha \mathbf{f}^{n+1} + \beta \mathbf{f}^n) = \Psi, \quad (1.6.6)$$

где

$$\begin{aligned} \Psi = & -\tau \sum_{j,i=1}^N \mathbf{B}_{jh}^n \mathbf{B}_{ih}^n \Lambda^2 (\alpha^2 \mathbf{f}^{n+1} - \beta^2 \mathbf{f}^n) + \\ & + \tau^2 \sum_{j,i,m=1}^N \mathbf{B}_{jh}^n \mathbf{B}_{ih}^n \mathbf{B}_{mh}^n \Lambda^3 (\alpha^3 \mathbf{f}^{n+1} + \beta^3 \mathbf{f}^n) + O(\tau^3 + h^k) \end{aligned}$$

для  $j \neq i, j \neq m, i \neq m$ . Разностная схема (1.6.6) аппроксимирует исходную систему уравнений с порядком  $O(\tau + h^k)$ , так как коэффициенты выбраны на предыдущем временном слое (при их аппроксимации неявно для реализации схемы (1.6.5) необходимо введение итераций). Очевидно, схема (1.6.6) может быть записана в виде

$$\prod_{j=1}^P (\mathbf{I} + \tau \alpha \mathbf{B}_{jh}^n \Lambda) \frac{\mathbf{f}^{n+1} - \mathbf{f}^n}{\tau} + \mathbf{B}_h^n \Lambda \mathbf{f}^n = \Psi_0,$$

где

$$\begin{aligned} \Psi_0 = & -\tau (\alpha^2 - \beta^2) \sum_{j,i=1}^N \mathbf{B}_{jh}^n \mathbf{B}_{ih}^n \cdot \Lambda^2 \mathbf{f}^n + \\ & + \tau^2 (\alpha^3 + \beta^3) \sum_{j,i,m=1}^N \mathbf{B}_{jh}^n \mathbf{B}_{ih}^n \mathbf{B}_{mh}^n \cdot \Lambda^3 \mathbf{f}^n + O(\tau^3 + h^k). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что при нахождении стационарного решения уравнений по схеме (1.6.5) методом установления его стационарное решение при  $N \geq 3$  зависит от параметра  $\tau$ , так как в этом случае схема не приводится к каноническому виду. Возникшие вследствие расщепления члены второго порядка малости могут рассматриваться как некоторые дополнительные члены, отсутствующие в исходных уравнениях. В расчетах это может приводить к появлению осцилляций решения и в схемах первого порядка аппроксимации по времени, а также отразиться на размывании фронтов и зон больших градиентов. При  $P = 2$  разностная схема (1.6.5) приводится к каноническому виду. В [6] схемы такого типа были введены на основе расщепления по физическим процессам для численного решения уравнений Эйлера и Навье–Стокса (см. также главу 2).

### § 1.7. Метод расщепления по направлениям

Как отмечено выше, суть метода расщепления состоит в сведении исходной задачи к последовательности более простых задач, например, многомерной задачи к последовательности их одномерных

аналогов. Этот подход может быть применен для решения как одного уравнения, так и для системы уравнений.

Следуя [6], рассмотрим параболическую систему уравнений

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \sum_{j=1}^N \left( \mathbf{A}_j \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_j} + \sum_{l=1}^N \frac{\partial}{\partial x_j} \mathbf{B}_{jl} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_l} \right) = 0. \quad (1.7.1)$$

При  $\mathbf{B}_{jl} \equiv 0$  будем предполагать, что система уравнений (1.7.1) гиперболического типа. Здесь  $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_m)$  – вектор размерности  $m$ ,  $\mathbf{A}_j$ ,  $\mathbf{B}_{jl}$  – квадратные матрицы  $m \times m$ ,  $N$  – размерность задачи по пространству. Наиболее простой и хорошо изученной системой является случай  $\mathbf{B}_{jl} = 0$  при  $j \neq l$ :

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \sum_{j=1}^N \left( \mathbf{A}_j \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \mathbf{B}_{jj} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_j} \right) = 0. \quad (1.7.2)$$

Введем оператор  $\mathbf{L}_j = \mathbf{A}_j \frac{\partial}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \mathbf{B}_{jj} \frac{\partial}{\partial x_j}$  и представим систему уравнений (1.7.2) в виде

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{L} \mathbf{u} = 0, \quad \mathbf{L} = \sum_{j=1}^N \mathbf{L}_j. \quad (1.7.3)$$

Следуя методу слабой аппроксимации [8, 45], рассмотрим систему из  $N$  уравнений

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{L}_1 \mathbf{u} &= 0, \\ &\dots \\ \frac{1}{N} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{L}_N \mathbf{u} &= 0, \end{aligned} \quad (1.7.4)$$

слабо аппроксимирующую систему уравнений (1.7.3). Представление (1.7.4) означает, что на каждом временном интервале  $[n + (j-1)/N] \leq t_j \leq [n + j/N]$  решается одномерная система уравнений, для которых начальные данные взяты с предыдущего временного слоя  $n + (j-1)/N$ . Такое расщепление называют расщеплением по направлениям [8]. Численное решение системы уравнений (1.7.4) будем находить на каждом дробном шаге по разностной схеме, например, по схеме с весами

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{u}^{n+1/N} - \mathbf{u}^n}{\tau} + \mathbf{L}_{1h} (\alpha \mathbf{u}^{n+1/N} + \beta \mathbf{u}^n) &= 0, \\ &\dots \\ \frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^{n+(N-1)/N}}{\tau} + \mathbf{L}_{Nh} (\alpha \mathbf{u}^{n+1} + \beta \mathbf{u}^{n+(N-1)/N}) &= 0, \end{aligned} \quad (1.7.5)$$

где  $\mathbf{L}_{jh} = \mathbf{L}_j + O(h_j^k)$ . Предположим, что операторы  $\mathbf{L}_{jh}$  перестановочны. Тогда, исключая дробные шаги в системе разностных уравнений (1.7.5), получаем схему в целых шагах в виде

$$\prod_{j=1}^N (\mathbf{I} + \alpha \tau \mathbf{L}_{jh}) \mathbf{u}^{n+1} = \prod_{j=1}^N (\mathbf{I} - \beta \tau \mathbf{L}_{jh}) \mathbf{u}^n \quad (1.7.6)$$

или в виде, разрешенном относительно разностной производной по времени:

$$\frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n}{\tau} + \mathbf{L}_h (\alpha \mathbf{u}^{n+1} + \beta \mathbf{u}^n) = \Psi,$$

$$\Psi = -\tau \sum_{j,i=1, j \neq i} \mathbf{L}_{jh} \cdot \mathbf{L}_{ih} (\alpha^2 \mathbf{u}^{n+1} - \beta^2 \mathbf{u}^n) + O(\tau^2 + h^k).$$

Таким образом, разностная схема (1.7.5) или (1.7.6) аппроксимирует исходное уравнение (1.7.3) с порядком  $O(\tau^m + h^k)$ , а при  $\alpha = \beta = 0,5$  с порядком  $O(\tau^2 + h^k)$ . Разностные уравнения (1.7.6) на каждом дробном шаге реализуются скалярными ( $u$  – скаляр) или векторными ( $\mathbf{u}$  – вектор) прогонками. Более сложная ситуация возникает, когда  $\mathbf{B}_{jl} \neq 0$  при  $j \neq l$ . В этом случае нельзя со всей строгостью говорить о расщеплении по направлениям. Однако расщеплению можно придать форму расщепления по направлениям. Покажем это на примере двумерного уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} + Lu = 0, \quad L = \sum_{j=1}^2 L_j = \sum_{j=1}^2 (L_{j1} + L_{j2}), \quad (1.7.7)$$

где  $L_{jl} = \frac{\partial}{\partial x_j} a_{jl} \frac{\partial}{\partial x_l}$  ( $j, l = 1, 2$ ). Каждое из расщепленных уравнений

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (\alpha_1 L_1 + \alpha_2 L_2) u = 0$$

некорректно, но полная расщепленная система корректна. Поэтому формально можно рассмотреть систему уравнений

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (\alpha_1 L_{11} + \alpha_2 L_{22}) u = f, \quad f = (L_{12} + L_{21}) u, \quad (1.7.8)$$

где  $\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 0$  при  $n\tau \leq t_n \leq (n+1/2)\tau$  и  $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 2$  при  $(n+1/2)\tau \leq t_n \leq (n+1)\tau$ . Подобно схеме (1.7.5), для решения расщепленных уравнений рассмотрим разностную схему

$$\frac{u^{n+1/2} - u^n}{\tau} = \Lambda_{11} u^{n+1/2} + \Lambda_{12} u^n, \quad \frac{u^{n+1} - u^{n+1/2}}{\tau} = \Lambda_{21} u^{n+1/2} + \Lambda_{22} u^{n+1}, \quad (1.7.9)$$

реализуемую скалярными прогонками на каждом дробном шаге, где  $\Lambda_{jl} = \frac{\partial}{\partial x_j} a_{jl} \frac{\partial}{\partial x_l} + O(h_j^2)$ . Исключая дробные шаги в (1.7.9), перепишем схему в целых шагах

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = (\Lambda_{11} + \Lambda_{22})u^{n+1} + (\Lambda_{12} + \Lambda_{21})u^n - \tau(\Lambda_{11}\Lambda_{22}u^{n+1} - \Lambda_{12}\Lambda_{21}u^n).$$

Она аппроксимирует уравнение (1.7.7) с порядком  $O(\tau + h^2)$ , где  $h = \max(h_j)$ .

В общем случае систему уравнений (1.7.1) можно представить в виде

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{L}\mathbf{u} = \mathbf{F}, \quad (1.7.10)$$

где оператор  $\mathbf{L} = \sum_{j=1}^N \mathbf{L}_j = \sum_{j=1}^N \left( \mathbf{A}_j \frac{\partial}{\partial x_j} + \mathbf{B}_{jl} \frac{\partial}{\partial x_l} \right)$  содержит повторные производные, а вектор  $\mathbf{F} = \sum_{j=1}^N \sum_{l=1}^N \frac{\partial}{\partial x_j} \mathbf{B}_{jl} \frac{\partial}{\partial x_l} (j \neq i)$  – смешанные производные. Тогда аналогично (1.7.4) расщепленная система уравнений имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{L}_1 \mathbf{u} &= \mathbf{F}, \\ \dots \\ \frac{1}{N} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{L}_N \mathbf{u} &= \mathbf{0}. \end{aligned}$$

При построении разностных схем функцию  $\mathbf{F}$  можно рассматривать как заданную функцию, определенную на предыдущем временном слое. Разностная схема с весами

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{u}^{n+1/N} - \mathbf{u}^n}{\tau} + L_{1h}(\alpha \mathbf{u}^{n+1/N} + \beta \mathbf{u}^n) &= \mathbf{F}^n, \\ \frac{\mathbf{u}^{n+2/N} - \mathbf{u}^{n+1/N}}{\tau} + L_{2h}(\alpha \mathbf{u}^{n+2/N} + \beta \mathbf{u}^{n+1/N}) &= 0, \\ \dots \\ \frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^{n+(N-1)/N}}{\tau} + L_{Nh}(\alpha \mathbf{u}^{n+1} + \beta \mathbf{u}^{n+(N-1)/N}) &= 0 \end{aligned} \quad (1.7.11)$$

аппроксимирует систему уравнений (1.7.10) с порядком  $O(\tau + h^k)$  для всех значений параметра  $\alpha$ . Здесь, как и выше,  $\mathbf{L}_{jh} = \mathbf{L}_j + O(h_j^k)$ .

Если операторы  $\mathbf{L}_j$  зависят и от времени, то в схеме (1.7.11) операторы  $\mathbf{L}_{jh}^n$  аппроксимируются на  $n$ -м слое по времени. После исключения дробных шагов схема (1.7.11) приводится к виду

$$\frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n}{\tau} + \mathbf{L}_h(\alpha \mathbf{u}^{n+1} + \beta \mathbf{u}^n) = \mathbf{F}^n + O(\tau + h^k).$$

Заметим, что в трехмерном случае ( $N = 3$ ) разностная схема расщепления (1.7.11) не приводится к каноническому виду (см. § 1.6). Реализация схемы (1.7.11) сводится к решению одномерных задач и может быть получена скалярными (для одного уравнения) или векторными (для системы уравнений) прогонками. Она абсолютно устойчива при  $\alpha \geq 0,5$ . Наряду с расщеплением по пространству также можно ввести и расщепление каждого одномерного оператора на более простые и строить экономичные схемы для расщепленных уравнений. Такой подход называется методом расщепления по физическим процессам и пространственным направлениям и будет изложен в главе 3.

## § 1.8. Метод предиктор–корректор

Метод предиктор–корректор может трактоваться как одна из разновидностей метода расщепления в целях повышения порядка аппроксимации, восстановления консервативности (дивергентности) схемы и т. д. Например, при аппроксимации уравнений на этапе предиктора по схеме расщепления с последующей корректировкой на этапе корректора. Особенно удобен этот метод для решения нелинейных уравнений, так как позволяет избавиться от итераций по нелинейности и сохранить порядок аппроксимации, консервативность и устойчивость схем (см. [6, 8]). Следуя [8], идеологию построения метода поясним на примере решения обыкновенного дифференциального уравнения

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad x(0) = X^0, \quad (1.8.1)$$

где  $f(t, x)$  – нелинейная функция. Неявная разностная схема

$$\frac{x^{n+1} - x^n}{\tau} = f^{n+1/2}, \quad x^0 = X^0$$

или схема

$$\frac{x^{n+1} - x^n}{\tau} = \frac{1}{2}(f^{n+1} + f^n), \quad x^0 = X^0 \quad (1.8.2)$$

аппроксимирует уравнение (1.8.1) с порядком  $O(\tau^2)$ , но требует итераций в силу нелинейности правой части. Здесь  $f^{n+l} = f(t_{n+l}, x^{n+l})$ ,  $l = 1/2, 2$ . Схема предиктор–корректор

$$\frac{x^{n+1/2} - x^n}{\tau/2} = f^{n+1/2}, \quad \frac{x^{n+1} - x^n}{\tau} = f^{n+1/2}, \quad x^0 = X^0$$

аппроксимирует уравнение (1.8.1) с тем же порядком, что и схема (1.8.2), но реализуется явно на шаге предиктора и на этапе корректора. Однако, как всякая явная схема, она условно устойчива в отличие от (1.8.2).

Для повышения устойчивости метода предиктор–корректор используем на этапе предиктора неявную схему. Линеаризуем функцию  $f^{n+1/2}$  относительно временного слоя  $n$

$$\begin{aligned} f^{n+1/2} &= f(t_{n+1/2}) = f^n + \frac{\tau}{2} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)^n \left( \frac{\partial x}{\partial t} \right)^n + O(\tau^2) = \\ &= f^n + A^n (x^{n+1/2} - x^n) = f^n + A^n x^{n+1/2}. \end{aligned}$$

Тогда разностная схема

$$\frac{x^{n+1/2} - x^n}{\tau/2} = A^n x^{n+1/2}, \quad \frac{x^{n+1} - x^n}{\tau} = f^{n+1/2}, \quad x^0 = X^0 \quad (1.8.3)$$

аппроксимирует уравнения (1.8.1) также с порядком  $O(\tau^2)$ , но является линейной (матрица  $A$  аппроксимирована на  $n$ -м слое) и безусловно устойчивой в линейном приближении. Действительно, для линейного уравнения ( $A = \text{const}$ ) схема (1.8.3) после исключения дробного шага  $n + 1/2$  может быть представлена в виде неявной схемы с весом  $\alpha = 1/2$

$$\frac{x^{n+1} - x^n}{\tau} = A \frac{x^{n+1} + x^n}{2},$$

которая, как легко убедиться, безусловно устойчива при  $A \leq 0$  и  $\alpha \geq 0,5 + O(\tau)$ .

Изложенный выше метод решения обыкновенных уравнений может быть перенесен и на уравнения в частных производных. Пусть

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial x} = 0, \quad \mathbf{W} = \mathbf{W}(\mathbf{U}) \quad (1.8.4)$$

– система одномерных нестационарных уравнений, записанных в консервативной (дивергентной) форме, где  $\mathbf{U} = (U_1, \dots, U_M)$ ,  $\mathbf{W} = (W_1, \dots, W_M)$ . Наряду с дивергентной формой (1.8.4) представим их в недивергентной форме



$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{B} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} = 0, \quad \mathbf{B} = \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial \mathbf{U}}.$$

Разностная схема предиктор–корректор

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{U}^{n+1/2} - \mathbf{U}^n}{\tau\alpha} + \mathbf{B}^n \Lambda \mathbf{U}^{n+1/2} &= 0, \\ \frac{\mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{U}^n}{\tau} + \Lambda \mathbf{W}^{n+1/2} &= 0 \end{aligned} \tag{1.8.5}$$

аппроксимирует уравнение (1.8.4) с порядком  $O(\tau^m + h^k)$ , где  $\Lambda = \partial/\partial x + O(h^k)$ , а  $m = 2$  при  $\alpha = 0,5 + O(\tau)$ . Так как коэффициенты матрицы  $\mathbf{B}$  аппроксимированы на  $n$ -м слое, то схема (1.8.5) линейна и ее решение на этапе предиктора может быть получено, например, методом прогонки – скалярной для одного уравнения и векторной – для систем уравнений. На этапе корректора схема (1.8.5) реализуется по явной схеме и консервативна, так как аппроксимирует уравнения в дивергентной форме. В случае линейных уравнений (при  $\mathbf{B} = \text{const}$ ) или для системы однородных уравнений первой степени (см. 1.1.6), для которых выполняется условие  $\mathbf{W} = \mathbf{B}\mathbf{U}$ , разностная схема (1.8.5) после исключения дробного шага приводится к схеме с весами

$$\frac{\mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{U}^n}{\tau} + \mathbf{B}\Lambda(\alpha\mathbf{U}^{n+1} + \beta\mathbf{U}^n) = 0, \quad \beta = 1 - \alpha.$$

При  $\alpha = 0,5 + O(\tau)$  она безусловно устойчива. Если  $\mathbf{U} = \mathbf{U}(\mathbf{f})$ ,  $\mathbf{f} \neq \mathbf{U}$ , то уравнения (1.8.4) в недивергентной форме могут быть представлены в виде

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} + \mathbf{C} \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x} = 0, \quad \mathbf{C} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} \mathbf{A}, \quad \mathbf{A} = \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{f}}. \tag{1.8.6}$$

Тогда разностная схема

$$\frac{\mathbf{f}^{n+1/2} - \mathbf{f}^n}{\tau\alpha} + \mathbf{C}^n \Lambda \mathbf{f}^{n+1/2} = 0, \quad \frac{\mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{U}^n}{\tau} + \Lambda \mathbf{W}^{n+1/2} = 0 \tag{1.8.7}$$

аппроксимирует исходные уравнения (1.8.4) с порядком  $O(\tau^m + h^k)$  при  $\alpha = 0,5 + O(\tau)$  реализуется скалярной (если  $f$  – скаляр) или векторной прогонкой и для линейных уравнений при  $\alpha = 0,5 + O(\tau)$  безусловно устойчива. Представим оператор  $\mathbf{C}$  в виде расщепления

$$\mathbf{C} = \sum_{i=1}^q \mathbf{C}_i, \tag{1.8.8}$$

и предположим, что для каждого уравнения

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} + C_i \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x} = 0$$

соответствующая разностная схема

$$\frac{\mathbf{f}^{n+l/q} - \mathbf{f}^{n+(l-1)/q}}{\alpha \tau} + C_l^n \Lambda \mathbf{f}^{n+l/q} = 0$$

может быть реализована эффективными алгоритмами. Тогда разностная схема предиктор–корректор

$$\frac{\mathbf{f}^{n+1/2q} - \mathbf{f}^n}{\tau \alpha} + C_l^n \Lambda \mathbf{f}^{n+1/2q} = 0,$$

....

$$\frac{\mathbf{f}^{n+1/2} - \mathbf{f}^{n+(q-1)/2q}}{\tau \alpha} + C_l^n \Lambda \mathbf{f}^{n+1/2} = 0, \quad (1.8.9)$$

$$\frac{U^{n+1} - U^n}{\tau} + \Lambda W^{n+1/2q} = 0$$

аппроксимирует уравнения (1.8.4), (1.8.6) с тем же порядком, что и базовая схема (1.8.5). На дробных шагах на этапе предиктора она реализуется по построению эффективными алгоритмами, а на этапе корректора явно. Конечно, устойчивость схемы зависит от формы расщепления (1.8.8). В частном случае, если

$$C_i \cdot C_j \equiv 0 \quad (i \neq j), \quad i, j = 1, \dots, q,$$

она является схемой точной факторизации и совпадает с нефакторизованной схемой, но в отличие от нее реализуется на дробных шагах экономичными алгоритмами. Некоторые подходы построения схем точной факторизации для гиперболических систем уравнений рассмотрены в [46]. Разностная схема (1.8.9) для линейных уравнений после исключения дробных шагов приводится к каноническому виду

$$\prod_{j=1}^q (I + \tau \alpha C_j^n \Lambda) \frac{\mathbf{f}^{n+1} - \mathbf{f}^n}{\tau} + C^n \Lambda \mathbf{f}^n = 0 \quad (1.8.10)$$

и аппроксимирует уравнения (1.8.6) с порядком  $O(\tau^m + h^k)$ , как и для нефакторизованной схемы (1.8.7). Устойчивость схемы предиктор–корректор (1.8.10) зависит от вида расщепления (1.8.9).

### § 1.9. Метод предиктор–корректор для многомерных уравнений

Рассмотрим обобщение метода предиктор–корректор для решения системы нелинейных многомерных уравнений

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \sum_{j=1}^N \frac{\partial \mathbf{W}_j}{\partial x_j} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} + \sum_{j=1}^N C_j \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_j} = 0, \quad (1.9.1)$$

представленных в дивергентной и недивергентной формах, где

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}(\mathbf{f}), \quad \mathbf{W}_j = \mathbf{W}_j(\mathbf{f}), \quad \mathbf{C}_j = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}_j \mathbf{A}, \quad \mathbf{B}_j = \frac{\partial \mathbf{W}_j}{\partial \mathbf{U}}, \quad \mathbf{A} = \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{f}}.$$

В частном случае, если  $\mathbf{f} = \mathbf{U}$ , матрица  $\mathbf{A} = \mathbf{I}$  – единичная матрица. Простейшая разностная схема предиктор–корректор

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{f}^{n+1/2} - \mathbf{f}^n}{\tau \alpha} + \sum_{j=1}^N C_j^n \Lambda_j \mathbf{f}^{n+1/2} &= 0, \\ \frac{\mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{U}^n}{\tau} + \sum_{j=1}^N \Lambda_j \mathbf{W}_j^{n+1/2} &= 0 \end{aligned} \quad (1.9.2)$$

аппроксимирует систему уравнений (1.9.1) с порядком  $O(\tau^m + h^k)$  и при  $\alpha = 0,5 + O(\tau)$  безусловно устойчива (для уравнений с постоянными коэффициентами). Ее реализация на этапе предиктора сводится к матричной прогонке, а на этапе корректора – к явной схеме. Этот подход для большого числа узлов и (или) уравнений, как отмечалось выше, неэкономичен. Для численного решения уравнений (1.9.1) удобнее использовать схему предиктор–корректор

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{f}^{n+1/2N} - \mathbf{f}^n}{\tau \alpha} + C_1^n \Lambda_1 \mathbf{f}^{n+1/2N} &= 0, \\ \dots, \\ \frac{\mathbf{f}^{n+1/2} - \mathbf{f}^{n+(N-1)/2N}}{\tau \alpha} + C_N^n \Lambda_N \mathbf{f}^{n+1/2} &= 0, \\ \frac{\mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{U}^n}{\tau} + \sum_{j=1}^N \Lambda_j \mathbf{W}_j^{n+1/2} &= 0. \end{aligned} \quad (1.9.3)$$

На этапе предиктора используется разностная схема расщепления по направлениям (реализуемая векторными прогонками по каждому пространственному направлению), а на этапе корректора, где разностные уравнения аппроксимируются в консервативной форме, – по явной схеме «крест». Как и схема (1.9.2), она аппроксимирует систему уравнений (1.9.1) с порядком  $O(\tau^m + h^k)$ .

Рассмотрим общий случай, при котором матричные операторы  $C_j$  могут быть представлены в виде суммы более простых операторов

$$\mathbf{C}_j = \sum_{i=1}^{q_j} \mathbf{C}_{ji} \quad (1.9.4)$$

таким образом, чтобы разностная схема для каждого дробного шага

$$\frac{\mathbf{f}^{n+s/2Q} - \mathbf{f}^{n+(s-1)/2Q}}{\alpha\tau} + \mathbf{C}_{ii}^n \Lambda_j \mathbf{f}^{n+s/2Q} = 0 \quad (1.9.5)$$

могла быть реализована экономичными алгоритмами (например, по схеме бегущего счета или скалярными прогонками). Здесь  $Q = \sum_{j=1}^N q_j$ ,  $s=1, \dots, Q$ , причем по каждому пространственному направлению число шагов  $q_j$  может быть различным. Тогда разностная схема пре-диктор–корректор представляется в виде

$$\begin{aligned} & [\mathbf{I} + \tau\alpha \mathbf{C}_{11}^n \Lambda_1] \mathbf{f}^{n+1/2Q} = \mathbf{f}^n, \\ & \dots \\ & [\mathbf{I} + \tau\alpha \mathbf{C}_{1q_1}^n \Lambda_1] \mathbf{f}^{n+q_1/2Q} = \mathbf{f}^{n+(q_1-1)/2Q}, \\ & \dots \\ & [\mathbf{I} + \tau\alpha \mathbf{C}_{Nq_{N-1}}^n \Lambda_{N-1}] \mathbf{f}^{n+(q_{N-1}+1)/2Q} = \mathbf{f}^{n+q_{N-1}/2Q}, \\ & \dots \\ & [\mathbf{I} + \tau\alpha \mathbf{C}_{NN}^n \Lambda_N] \mathbf{f}^{n+1/2} = \mathbf{f}^{n+(q_N-1)/2Q}, \\ & \frac{\mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{U}^n}{\tau} + \sum_{j=1}^N \Lambda_j \mathbf{W}_j^{n+1/2} = 0 \end{aligned} \quad (1.9.6)$$

и также аппроксимирует исходные уравнения с порядком  $O(\tau^m + h^k)$ . В силу выбора расщепления (1.9.4) разностная схема (1.9.6) на этапе корректора для каждого дробного шага как аналога схемы (1.9.5) реализуется экономичными алгоритмами, а на этапе корректора – явно. Для линейных уравнений схема (1.9.6) для вектора искомых функций  $\mathbf{f}$  она может быть записана в каноническом виде

$$\prod_{j=1}^N \prod_{i=1}^{q_j} (\mathbf{I} + \tau\alpha \mathbf{C}_{ji}^n \Lambda_j) \frac{\mathbf{f}^{n+1} - \mathbf{f}^n}{\tau} + \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^{q_j} \mathbf{C}_{ji}^n \Lambda_j \mathbf{f}^n = 0,$$

т. е. она является схемой с полной аппроксимацией. Предложенный подход построения разностных схем для решения как линейных, так и нелинейных многомерных уравнений позволяет свести решение

исходной задачи к последовательности решения простых (одномерных) задач. Конечно, дополнительное расщепление одномерных операторов на последовательность более простых одномерных операторов позволяет упростить решение уравнений на этапе предиктора, а следовательно, и полной задачи. Но это расщепление должно выбираться таким образом, чтобы сохранялась устойчивость разностной схемы. Кроме того, введение дополнительного расщепления может приводить к большому спектральному рассогласованию стабилизирующего оператора и оператора правой части. Следствием этого, как отмечено выше, может оказаться практическое понижение точности расчета и (или) замедление скорости сходимости при получении стационарного решения на основе принципа установления. Таким образом, при построении схемы предиктор–корректор с расщеплением оператора по пространству и расщеплением одномерных операторов на более простые для решения конкретных систем уравнений эти вопросы должны специально исследоваться. Для решения уравнений Эйлера и Навье–Стокса схемы вида (1.9.6) предложены и исследованы в [6, 9], где наряду с расщеплением многомерного оператора по пространству вводилось расщепление одномерных операторов по физическим процессам (см. также главу 3). Вопросы устойчивости разностных схем для решения многомерных задач будут изучены ниже.

**Замечание.** Выше были предложены схемы типа предиктор–корректор для решения систем первого порядка. Метод предиктор–корректор может быть применен и для решения систем уравнений второго порядка, где  $\mathbf{W}_j = \mathbf{W}_j(\mathbf{f}, \mathbf{f}_l)$ ,  $\mathbf{f}_l = d\mathbf{f}/dx$ . Для получения схем, реализуемых на дробных шагах экономичными алгоритмами, неявно аппроксимируются только повторные разностные производные, а смешанные производные учитываются явно на этапе корректора. Численные алгоритмы решения уравнений газовой динамики и Навье–Стокса, основанные на идеологии расщепления, будут рассмотрены ниже. Подобным образом могут строиться разностные схемы, основанные на методе частиц в ячейках [47–50], и аддитивные схемы и схемы суммарной аппроксимации [7, 15, 51], где используется идеология сведения решения многомерных задач к последовательности решения более простых задач.

## § 1.10. Метод факторизации

Метод факторизации, как и метод расщепления, является методом сведения решения многомерных задач к последовательности решения их одномерных аналогов или задач более простой структуры. Этот подход развивался одновременно с методом расщепления, начиная с конца 50-х гг. прошлого столетия. Не ставя цель дать обзор ме-

тодов факторизации, отметим работы [6–10, 25–29, 32–43], где подробно изложены основные разностные схемы решения многомерных задач, такие как методы продольно-поперечной прогонки и стабилизирующей поправки, схемы с расщепляющимся оператором и локально-одномерные схемы, схемы универсального алгоритма и другие варианты схем. Общая формулировка метода приближенной факторизации предоставлена во многих работах (см. например, [8–10, 25–30, 32–42]). Ниже дана трактовка метода приближенной факторизации для линейных систем уравнений

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{L}\mathbf{u} = \mathbf{f}, \quad (1.10.1)$$

где  $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_m)$ ,  $u_j = u_j(t, x_1, \dots, x_N)$ ,  $\mathbf{f} = \mathbf{f}(x_1, \dots, x_N)$ ,  $N$  – размерность задачи по пространству,  $\mathbf{L} = \mathbf{L}(\mathbf{x})$  – многомерный дифференциальный оператор размерности  $N$ . Представим оператор  $L$  в виде расщепления

$$\mathbf{L} = \sum_{j=1}^N \mathbf{L}_j. \quad (1.10.2)$$

Введем сеточные операторы

$$\mathbf{L}_h = \sum_{j=1}^N \mathbf{L}_{jh}, \text{ где } \mathbf{L}_{jh} = \mathbf{L}_j + O(h_j^k).$$

Разностная схема с весами

$$\frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n}{\tau} + \mathbf{L}_h(\alpha \mathbf{u}^{n+1} + \beta \mathbf{u}^n) = \mathbf{f}_h \quad (1.10.3)$$

аппроксимирует систему уравнений (1.10.1) с порядком  $O(\tau^m + h^k)$ , где, как и выше,  $m = 2$  при  $\alpha = 0,5 + O(\tau^2)$ . Перепишем ее в виде

$$\mathbf{C}\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{C}_0\mathbf{u}^n + \tau\mathbf{f}^n, \text{ где } \mathbf{C} = \mathbf{I} + \tau\alpha\mathbf{L}_h, \quad \mathbf{C}_0 = \mathbf{I} - \tau\beta\mathbf{L}_h.$$

Пусть справедливо разложение

$$\mathbf{C} = \mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{C}_2 \cdots \mathbf{C}_M,$$

где каждый  $\mathbf{C}_j$  – разностный сеточный оператор более простой структуры и, в частности, при  $M = N$ , одномерный оператор. Разностная схема

$$\mathbf{C}_1 \cdots \mathbf{C}_M \mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{C}_0 \mathbf{u}^n + \tau \mathbf{f}^n = \mathbf{R}_h \quad (1.10.4)$$

тождественно совпадает со схемой (1.10.3) и эквивалентна схеме в дробных шагах

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_1 \mathbf{u}^{n+1/M} &= \mathbf{R}_h, \\ \mathbf{C}_2 \mathbf{u}^{n+2/M} &= \mathbf{u}^{n+1/M}, \\ &\dots \\ \mathbf{C}_M \mathbf{u}^{n+1} &= \mathbf{u}^{n+(M-1)/M}. \end{aligned}$$

В силу построения ее реализация на каждом дробном шаге сводится к решению задач с одномерными операторами. Схемы вида (1.10.4) называются схемами полной или точной факторизации. Однако на практике редко удается получить разложение оператора на произведения более простых операторов. Обычно справедливо приближенное равенство

$$\begin{aligned} \mathbf{C} &= \mathbf{I} + \tau \alpha \mathbf{L}_h \approx \tilde{\mathbf{C}} = \sum_{j=1}^N (\mathbf{I} + \tau \alpha \mathbf{L}_{jh}) = \\ &= \mathbf{C} + \tau^2 \alpha^2 (\mathbf{L}_{1h} \mathbf{L}_{2h} + \dots + \mathbf{L}_{N-1h} \mathbf{L}_{Nh}) + \dots = \mathbf{C} + O(\tau^2), \end{aligned}$$

т. е. замена оператора  $\mathbf{C}$  на  $\tilde{\mathbf{C}}$  произведена с погрешностью  $O(\tau^2)$ . Разностная схема

$$\tilde{\mathbf{C}} \mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{R}_h$$

или эквивалентная ей схема в дробных шагах

$$\begin{aligned} (\mathbf{I} + \tau \alpha \mathbf{L}_{1h}) \mathbf{u}^{n+1/N} &= \mathbf{R}_h, \\ (\mathbf{I} + \tau \alpha \mathbf{L}_{2h}) \mathbf{u}^{n+2/N} &= \mathbf{u}^{n+1/N}, \\ &\dots, \\ (\mathbf{I} + \tau \alpha \mathbf{L}_{Nh}) \mathbf{u}^{n+1} &= \mathbf{u}^{n+(N-1)/N} \end{aligned}$$

аппроксимирует систему уравнений (1.10.1) с порядком  $O(\tau + h^k)$  для всех  $\alpha$ . В то же время разностная схема (1.10.3) при  $\alpha = 0,5 + O(\tau)$  аппроксимирует систему уравнений (1.10.1) с порядком  $O(\tau^2 + h^k)$ . Схема приближенной факторизации второго порядка аппроксимации по времени может быть построена, если использовать факторизацию оператора схемы, приведенной к канонической форме. Представим схему (1.10.3) в канонической форме

$$\mathbf{C} \frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n}{\tau} + \mathbf{L}_h \mathbf{u}^n = \mathbf{f}_h.$$

Заменив оператор  $\mathbf{C}$  на факторизованный оператор  $\tilde{\mathbf{C}}$ , рассмотрим разностную схему

$$\tilde{\mathbf{C}} \frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n}{\tau} + \mathbf{L}_h \mathbf{u}^n = \mathbf{f}_h \tag{1.10.5}$$

или эквивалентную ей схему в дробных шагах

$$\begin{aligned}
 \xi_h^n &= -\mathbf{L}_h \mathbf{u}^n + \mathbf{f}_h, \\
 (\mathbf{I} + \tau \alpha \mathbf{L}_{1h}) \xi^{n+1/N} &= \xi^n, \\
 &\dots, \\
 (\mathbf{I} + \tau \alpha \mathbf{L}_{Nh}) \xi^{n+1} &= \xi^{n+(N-1)/N}, \\
 \mathbf{u}^{n+1} &= \mathbf{u}^n + \tau \xi^{n+1}.
 \end{aligned} \tag{1.10.6}$$

Так как оператор  $\tilde{\mathbf{C}} = \mathbf{C} + O(\tau^2)$ , то и схема (1.10.5) или (1.10.6) аппроксимирует уравнения (1.10.1) с порядком  $O(\tau^m + h^k)$ , как и исходная нефакторизованная схема (1.10.3). Приведем в качестве примера разностную схему для многомерного уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}.$$

Подобно (1.10.5) разностная схема

$$\prod_{j=1}^3 (I - \tau \alpha \Lambda_j) \frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = \sum_{j=1}^3 \Lambda_j u^n \tag{1.10.7}$$

или эквивалентная ей схема в дробных шагах

$$\begin{aligned}
 \xi^n &= \sum_{j=1}^3 \Lambda_j u^n, \\
 (I + \tau \alpha \Lambda_1) \xi^{n+1/N} &= \xi^n, \\
 &\dots, \\
 (I + \tau \alpha \Lambda_3) \xi^{n+1} &= \xi^{n+2/3}, \\
 u^{n+1} &= u^n + \tau \xi^{n+1},
 \end{aligned}$$

где  $\Lambda_j = \partial^2 / \partial x_j^2 + O(h_j^2)$ , аппроксимирует уравнение теплопроводности со вторым порядком по всем переменным при  $\alpha = 0,5 + O(\tau)$  и реализуется на каждом дробном шаге скалярными трехточечными прогонками.

**Замечание.** Для системы линейных уравнений (1.10.1) при  $\mathbf{f} = 0$  схема приближенной факторизации (1.10.5) и схема предиктор–корректор

$$\frac{\mathbf{u}^{n+1/2N} - \mathbf{u}^n}{\tau \alpha} + \mathbf{L}_{1h} \mathbf{u}^{n+1/2N} = 0, \tag{1.10.8}$$

...



$$\frac{\mathbf{u}^{n+1/2} - \mathbf{u}^{n+(N-1)/2N}}{\tau\alpha} + \mathbf{L}_{Nh} \mathbf{u}^{n+1/2} = 0,$$

$$\frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n}{\tau} + \sum_{j=1}^N \mathbf{L}_{jh} \mathbf{u}^{n+1/2} = 0$$

эквивалентны, так как приводятся к каноническому виду

$$\prod_{j=1}^N (I - \tau\alpha \mathbf{L}_{jh}) \frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n}{\tau} = -\mathbf{L}_h \mathbf{u}^n.$$

Схема расщепления с весами (см. § 1.7)

$$\frac{\mathbf{u}^{n+1/N} - \mathbf{u}^n}{\tau} + \mathbf{L}_{1h} (\alpha \mathbf{u}^{n+1/N} + \beta \mathbf{u}^n) = 0,$$

...

$$\frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^{n+(N-1)/N}}{\tau} + \mathbf{L}_{Nh} (\alpha \mathbf{u}^{n+1} + \beta \mathbf{u}^{n+(N-1)/N}) = 0 \tag{1.10.9}$$

после исключения дробных шагов может быть представлена в виде

$$\prod_{j=1}^N (I - \tau\alpha \mathbf{L}_{jh}) \frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n}{\tau} - \mathbf{L}_h \mathbf{u}^n = \Psi,$$

где

$$\Psi = -\tau(\alpha^2 - \beta^2) \sum_{j,i=1}^N \mathbf{B}_{jh}^n \mathbf{B}_{ih}^n \cdot \Lambda^2 \mathbf{u}^n + \tau^2 (\alpha^3 + \beta^3) \sum_{j,i,m=1}^N \mathbf{B}_{jh}^n \mathbf{B}_{ih}^n \mathbf{B}_{mh}^n \cdot \Lambda^3 \mathbf{u}^n + \dots$$

при  $i \neq j, i \neq m, j \neq m$ .

Из вида  $\Psi$  следует, что для трехмерных задач (при  $N = 3$ ) схема расщепления (1.10.9) не приводится к каноническому виду при всех значениях весового параметра  $\alpha$ . Таким образом, она эквивалентна схемам приближенной факторизации и предиктора–корректора только в двумерном случае при  $\alpha = 0,5$ . При приведении схем к каноническому виду предполагалось, что операторы  $\mathbf{L}_{jh}$  перестановочны (для некоммутирующих операторов исключение дробных шагов возможно также для  $\alpha = 1$ ).

### § 1.11. Устойчивость разностных схем для многомерных уравнений

Введение расщепления или факторизации при построении разностных схем приводит к изменению суммарного аппроксимирующего оператора, что влияет на их устойчивость. Проведем анализ устойчивости схем расщепления, приближенной факторизации и метода

предиктор–корректор для решения линейных многомерных уравнений параболического или гиперболического типа (см. [6, 8]). В качестве уравнения параболического типа рассмотрим  $N$ -мерное уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{j=1}^N a_j^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}, \quad a_j^2 = \text{const}. \quad (1.11.1)$$

Пусть, как и выше,  $\Lambda = \sum_{j=1}^N \Lambda_{jj}$ ,  $\Lambda_{jj} = (a_j^2) \partial^2 / \partial x_j^2 + O(h_j^2)$ . Тогда разностная схема с весами

$$(I - \tau \alpha \Lambda) \frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = \Lambda u^n \quad (1.11.2)$$

аппроксимирует уравнение (1.11.1) с порядком  $O(\tau^m + h^2)$ , где  $m = 2$  при  $\alpha = 0,5 + O(\tau)$  и  $m = 1$  при других значениях параметра, и реализуется матричными прогонками. Устойчивость схемы будем исследовать спектральным методом. Для решений вида

$$u^n = u_{j_1, \dots, j_N}^n = u^0 \lambda^n \exp\left(\sum_{j=1}^N k_j h_j\right), \quad \lambda = \exp(\omega \tau) \quad (1.11.3)$$

схеме (1.11.2) соответствует характеристическое уравнение

$$\det \left\| \left[ (1 + \alpha r^2)(\lambda - 1) + r^2 \right] I \right\| = 0,$$

где  $r^2 = \sum_{j=1}^N r_j^2$ ,  $r_j^2 = \frac{4\tau a_j^2}{h_j^2} \sin\left(\frac{k_j^2 h_j^2}{2}\right)$ . Его корни равны

$$\lambda = \frac{1 - \beta r^2}{1 + \alpha r^2} \quad \text{и} \quad |\lambda| \leq 1,$$

т. е. схема (1.11.2) безусловно устойчива при  $\alpha \geq 0,5$ .

Схема приближенной факторизации (1.10.7)

$$\prod_{j=1}^N (I - \tau \alpha \Lambda_{jj}) \frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = \Lambda u^n, \quad (1.11.4)$$

аппроксимирует уравнения (1.11.1) с тем же порядком, что и схема (1.11.2), но реализуется на дробных шагах скалярными прогонками. Для решений вида (1.11.3) ей соответствует характеристическое уравнение

$$\det \left\| \left[ \prod_{j=1}^N (1 + \alpha r_j^2)(\lambda - 1) + r^2 \right] \mathbf{I} \right\| = 0. \quad (1.11.5)$$

Введем обозначения  $\prod_{j=1}^N (1 + \alpha r_j^2) = 1 + \alpha r^2 + \alpha^2 (r_1^2 r_2^2 + \dots + r_{N-1}^2 r_N^2) + \dots = q_0 + \alpha r^2$ , где  $q_0 = 1 + \alpha^2 (r_1^2 r_2^2 + \dots + r_{N-1}^2 r_N^2) + \dots$ . Корни характеристического уравнения (1.11.5) равны

$$\lambda = \frac{q_0 - \beta r^2}{q_0 + \alpha r^2} \text{ и } |\lambda| \leq 1$$

при  $\alpha \geq 0,5$ . Таким образом, разностная схема (1.11.4) безусловно устойчива при  $\alpha \geq 0,5$ .

Схема расщепления с весами

$$\begin{aligned} \frac{u^{n+1/N} - u^n}{\tau} &= \Lambda_{11} (\alpha u^{n+1/N} + \beta u^n), \\ \frac{u^{n+2/N} - u^{n+1/N}}{\tau} &= \Lambda_{22} (\alpha u^{n+2/N} + \beta u^{n+1/N}), \\ &\dots, \\ \frac{u^{n+1} - u^{n+(N-1)/N}}{\tau} &= \Lambda_{NN} (\alpha u^{n+1} + \beta u^{n+(N-1)/N}) \end{aligned} \quad (1.11.6)$$

аппроксимирует уравнения (1.11.1) с тем же порядком, что и схема приближенной факторизации, но для  $N \geq 3$  не обладает свойством полной аппроксимации. После исключения дробных шагов она может быть переписана в виде

$$\prod_{j=1}^2 (I - \tau \alpha \Lambda_{jj}) u^{n+1} = \prod_{j=1}^2 (I + \tau \beta \Lambda_{jj}) u^n. \quad (1.11.7)$$

Характеристическое уравнение схемы равно

$$\det \left\| \left[ \prod_{j=1}^N (1 + \alpha r_j^2) \lambda - \prod_{j=1}^N (1 - \beta r_j^2) \right] I \right\| = 0,$$

откуда следует, что

$$\lambda = \prod_{j=1}^N \left( \frac{1 - \beta r_j^2}{1 + \alpha r_j^2} \right),$$

и очевидно, что  $|\lambda| \leq 1$  при  $\alpha \geq 0,5$ .

Схема предиктор–корректор

$$\begin{aligned} \frac{u^{n+1/2N} - u^n}{\tau\alpha} &= \Lambda_{11} u^{n+1/2N}, \\ &\dots, \\ \frac{u^{n+1/2} - u^{n+(N-1)/2N}}{\tau\alpha} &= \Lambda_{NN} u^{n+1/2}, \\ \frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} &= \Lambda u^{n+1/2} \end{aligned}$$

после исключения дробных шагов приводится к схеме приближенной факторизации (1.11.4) и, следовательно, безусловно устойчива при  $\alpha \geq 0,5$ . Заметим, что полученные оценки устойчивости справедливы для уравнений любой размерности.

При анализе устойчивости схем для гиперболических уравнений рассмотрим линейное многомерное уравнение переноса

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{j=1}^N a_j \frac{\partial u}{\partial x_j} = 0, \quad a_j = \text{const}. \quad (1.11.8)$$

Введем, как и выше, разностный оператор  $\Lambda = \sum_{j=1}^N \Lambda_j$ , где  $\Lambda_j = a_j \frac{\partial}{\partial x_j} + O(h_j^k)$ . Пусть  $\Lambda_j$  – симметричные операторы, аппроксимирующие первые производные со вторым порядком. Тогда разностная схема с весами

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} + \Lambda(\alpha u^{n+1} + \beta u^n) = 0 \quad (1.11.9)$$

аппроксимирует уравнение переноса (1.11.8) с порядком  $O(\tau^m + h^2)$  и безусловно устойчива при  $\alpha \geq 0,5$  для уравнений любой размерности, так как корни соответствующего ей характеристического уравнения

$$\det \left\| \left[ (1 + i\alpha d)(\lambda - 1) + id \right] I \right\| = 0$$

равны

$$\lambda = \frac{1 - i\beta d}{1 + i\alpha d} \quad \text{и} \quad |\lambda| \leq 1$$

при  $\alpha \geq 0,5$ . Здесь  $d = \sum_{j=1}^N d_j$ ,  $d_j = \frac{\tau a_j}{h_j} \sin(k_j h_j)$ . Напомним, что разностная схема (1.11.9) реализуется матричной прогонкой при  $N \geq 2$ .

Схема приближенной факторизации и схема предиктор–корректор

$$\prod_{j=1}^N (I + \tau\alpha\Lambda_j) \frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} + \Lambda u^n = 0 \quad (1.11.10)$$

также аппроксимируют уравнение переноса (1.11.8) с порядком  $O(\tau^m + h^2)$ , но реализуются скалярными прогонками по каждому направлению. Им соответствует характеристическое уравнение

$$\det \left\| \left[ \prod_{j=1}^N (1 + i\alpha d_j)(\lambda - 1) + id \right] I \right\| = 0.$$

Для двумерного случая (при  $N = 2$ ) его корни равны

$$\lambda = \frac{1 + i\beta(d_1 + d_2) - \alpha^2 d_1 d_2}{1 + i\alpha(d_1 + d_2) - \alpha^2 d_1 d_2}$$

и очевидно, что

$$|\lambda| \leq 1 \text{ при } \alpha \geq 0,5.$$

Иная ситуация имеет место при  $N > 2$ . Пусть для некоторых узлов сетки имеет место равенство

$$d_j = \frac{\tau a_j}{h_j} \sin(k_j h_j) = d_0, \quad d = Nd_0,$$

что может быть достигнуто за счет варьирования шагов сетки, коэффициентов  $a_j$  и т. д. Тогда характеристическое уравнение схемы (1.11.10) при  $N = 3$  может быть переписано в виде

$$\det \left\| \left[ (1 + i\alpha d_0)^3 (\lambda - 1) + 3id_0 \right] I \right\| = 0.$$

Так как

$$(1 + i\alpha d_0)^3 = 1 + 3id_0 - 3d_0^2 - id_0^3 = 1 - 3d_0^2 + 3id_0 - id_0^3 = A + iB,$$

то

$$\lambda = \frac{A + i(B - 3d_0)}{A + iB}, \quad |\lambda|^2 = \frac{A^2 + (B - 3d_0)^2}{A^2 + B^2}.$$

Удовлетворение критерию устойчивости  $|\lambda| \leq 1$  эквивалентно выполнению условия

$$3d_0^2 \leq 2d_0 B = 2\alpha d_0^2 [3 - (\alpha d_0)^2],$$

что приводит к оценке

$$\tau \leq \frac{h}{|a_0|} \sqrt{\frac{3(2\alpha - 1)}{2\alpha^3}}.$$

Таким образом, разностная схема (1.11.10) условно устойчива (для всех  $\alpha$ ), а при  $\alpha = 0,5$  она абсолютно неустойчива. Максималь-

ное значение шаг  $\tau$  принимает при значении весового множителя  $\alpha = 3/4$ . В этом случае условие устойчивости имеет вид

$$\tau \leq \frac{4h}{3|a_0|},$$

т. е. оно близко к устойчивости явных схем. При замене симметричной аппроксимации в схеме (1.11.9) на несимметричную (левостороннюю при  $a_j \geq 0$  и правостороннюю при  $a_j \leq 0$ ) оценки устойчивости сохраняются.

Наконец рассмотрим устойчивость схемы расщепления

$$\begin{aligned} \frac{u^{n+1/N} - u^n}{\tau} + \Lambda_1(\alpha u^{n+1/N} + \beta u^n) &= 0, \\ \frac{u^{n+2/N} - u^{n+1/N}}{\tau} + \Lambda_2(\alpha u^{n+2/N} + \beta u^{n+1/N}) &= 0, \\ &\dots, \\ \frac{u^{n+1} - u^{n+(N-1)/N}}{\tau} + \Lambda_N(\alpha u^{n+1} + \beta u^{n+(N-1)/N}) &= 0. \end{aligned} \quad (1.11.11)$$

Она, как и предыдущие схемы, аппроксимирует уравнение переноса (1.11.8) с порядком  $O(\tau^m + h^2)$ , но при  $N \geq 3$  не обладает свойством полной аппроксимации. Исключая дробные шаги в схеме (1.11.11), получим

$$\prod_{j=1}^2 (I + \tau \alpha \Lambda_j) u^{n+1} = \prod_{j=1}^2 (I - \tau \beta \Lambda_j) u^n.$$

Характеристическое уравнение схемы примет вид

$$\det \left\| \left[ \prod_{j=1}^N (1 + i \alpha d_j) \lambda - \prod_{j=1}^N (1 - i \beta d_j) \right] I \right\| = 0.$$

Его корни равны

$$\lambda = \prod_{j=1}^N \left( \frac{1 - i \beta d_j}{1 + i \alpha d_j} \right).$$

Таким образом, разностная схема расщепления (1.11.11) при  $\alpha \geq 0,5$  безусловно устойчива для уравнений гиперболического типа любой размерности. Напомним, что схемы приближенной факторизации и предиктор–корректор в трехмерном случае условно устойчивы. Рассмотренные выше разностные схемы были исследованы для ска-

лярных линейных уравнений произвольной размерности  $N$  параболического и гиперболического типов. Эти выводы справедливы и для систем уравнений.

### § 1.12. О реализации краевых условий в неявных схемах

Многообразие решений линейных и нелинейных уравнений определяется граничными и начальными условиями и группой параметров в уравнениях, таких как, например, коэффициенты уравнений, внешние источники и т. д. Численная реализация граничных условий существенно влияет на устойчивость и экономичность алгоритмов, на точность решения. При аппроксимации дифференциальных уравнений явными схемами краевые условия аппроксимируются на нижнем временном слое и, как правило, проблем с их реализацией не возникает. Многообразие постановок задач и численных алгоритмов их решения не позволяет сформулировать общий подход к заданию краевых условий для неявных разностных схем. Как правило, при решении конкретных задач неявными разностными схемами описываются отдельные постановки краевых условий для конкретных краевых задач (см., например, [6–10, 32–43]). При применении неявных нефакторизованных схем краевые условия задаются на нижнем и верхнем слоях по времени и они используются в численном алгоритме. В схемах расщепления значения функций на дробных шагах могут быть получены интерполяцией их значений на  $n$ -м и на  $(n+1)$ -м слоях. При численном решении уравнений на дробных шагах недостающие краевые условия могут быть получены различными путями:

- заданием их явно с предыдущего слоя;
- экстраполяцией полученного решения внутри области на границу;
- из решения исходных уравнений на границе, предполагая справедливость уравнений на ней.

Обоснование таких приближенных постановок граничных условий, как правило, отсутствует, однако многочисленные расчеты различных классов задач, проведенные по различным алгоритмам, подтверждают возможность такой реализации. Более сложная ситуация возникает при задании и реализации краевых условий в неявных схемах приближенной факторизации. Это связано с тем обстоятельством, что при решении разностных уравнений на дробных шагах необходимо задавать граничные условия для вспомогательных величин и невязок, которые отсутствуют в физической постановке задачи. Изложим один из способов реализации краевых условий.

Пусть в прямоугольнике  $\Omega$  ( $0 \leq x_j \leq 1$ ) с границей  $\gamma = \gamma_1 + \dots + \gamma_4$  (рис. 1.12.1) решается уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{j=1}^2 \left( a_j \frac{\partial u}{\partial x_j} - b_j \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} \right) = 0 \quad (1.12.1)$$

с краевыми условиями первого рода

$$u_\gamma = U(t, x_1, x_2), \quad u(0, x_1, x_2) = u^0(x_1, x_2). \quad (1.12.2)$$

Аппроксимируем уравнение (1.12.1) разностной схемой приближенной факторизации

$$\prod_{j=1}^2 \left[ I + \tau \alpha (a_j \Lambda_j - b_j \Lambda_{jj}) \right] \frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = \sum_{j=1}^2 (a_j \Lambda_j - b_j \Lambda_{jj}) u^n$$

или эквивалентной схемой в дробных шагах

$$\begin{aligned} \xi^n &= \sum_{j=1}^2 \Lambda_{jj} u^n, \\ [I + \tau \alpha (a_1 \Lambda_1 - b_1 \Lambda_{11})] \xi^{n+1/2} &= \xi^n, \\ [I + \tau \alpha (a_2 \Lambda_2 - b_2 \Lambda_{2j})] \xi^{n+1} &= \xi^{n+1/2}, \\ u^{n+1} &= u^n + \tau \xi^{n+1} \end{aligned} \quad (1.12.3)$$

с порядком  $O(\tau^m + h^2)$ , где  $m = 2$  при  $\alpha = 0,5 + O(\tau)$ , а  $\Lambda_j, \Lambda_{jj}$  – симметричные трехточечные операторы, аппроксимирующие первые и вторые производные со вторым порядком. Ее реализация на дробных шагах сводится к трехточечным скалярным прогонкам (по каждому пространственному направлению) при известных значениях  $\xi_\gamma^{n+1/2}, \xi_\gamma^{n+1}$  в граничных узлах сетки.

Простейший способ вычисления вспомогательных величин  $\xi$  на границе  $\gamma$  состоит в задании их равными нулю и пересчете граничных условий на новый  $(n + 1)$ -й слой после вычисления значений внутри области. Этот подход эквивалентен явному заданию краевых условий, что, как следствие, может приводить к ограничениям на устойчивость схемы в целом. Кроме

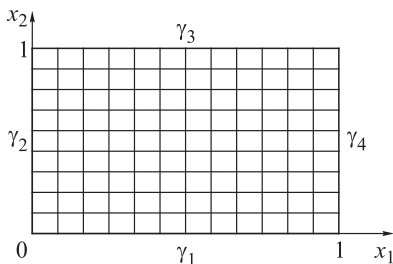


Рис. 1.12.1. Расчетная область.



того, для краевых условий второго рода их пересчет на новый  $(n + 1)$ -й слой может проводиться различными способами с различным порядком погрешности аппроксимации, что может оказать влияние на точность расчета в целом. Опишем способ задания краевых условий, предложенный в [6, 8]. Предположим, что дифференциальные уравнения (1.12.1) справедливы на границе вместе с граничными условиями. В силу того, что значения функций  $u_\gamma^n, u_\gamma^{n+1}$  известны, значение  $\xi_\gamma^{n+1}$  определяется из последнего уравнения схемы (1.12.3) по формуле

$$\xi_\gamma^{n+1} = \frac{1}{\tau}(u_\gamma^{n+1} - u_\gamma^n) \quad (1.12.4)$$

во всех граничных узлах сетки. Тогда значения  $\xi_\gamma^{n+1/2}$  могут быть вычислены явно из решения предпоследнего уравнения схемы (1.12.2) по формуле

$$\xi_\gamma^{n+1/2} = [I + \tau\alpha(a_2\Lambda_2 - b_2\Lambda_2)]\xi^{n+1}$$

во всех узлах на границе  $\gamma_2$  и  $\gamma_4$ , кроме первого и последнего узлов. После определения  $\xi_\gamma^{n+1/2}$  решение уравнений находится обычным образом по схеме (1.12.3). Из первого уравнения схемы определяется значение  $\xi^n$  во всех внутренних узлах расчетной области. Затем на первом дробном шаге схемы

$$[I + \tau\alpha(a_1\Lambda_1 - b_j\Lambda_{11})]\xi^{n+1/2} = \xi^n \quad (1.12.5)$$

при известных граничных условиях  $\xi_\gamma^{n+1/2}$  скалярной трехточечной прогонкой в направлении  $x_1$  вычисляются значения  $\xi^{n+1/2}$  во всех внутренних точках, после чего скалярной прогонкой в направлении  $x_2$  вычисляются новые значения  $\xi_\gamma^{n+1}$  во всех внутренних узлах сетки при известных краевых условиях и значениях  $\xi^{n+1/2}$  во внутренних узлах. Наконец, новые значения функции определяются явно из последнего уравнения схемы (1.12.2) во всех узлах. На этом расчет одного временного шага заканчивается.

Более сложная ситуация возникает при задании краевых условий второго или третьего рода (см. [6]). Пусть, например, на границе  $\gamma_2$  задано условие

$$\partial u / \partial x_1|_{\gamma_2} = 0.$$

Будем полагать, что на границе  $\gamma_2$  выполняются условия

$$\Lambda_1 \xi^{n+1/2} = \Lambda_1 \xi^{n+1} = 0. \quad (1.12.6)$$

Заметим, что условие  $\Lambda_1 \xi^{n+1} = 0$  выполняется и как следствие условия (1.12.4). При известных соотношениях (1.12.6) на границе  $\gamma_2$  и значениях  $\xi^{n+1/2}$  на границе  $\gamma_4$  решения разностных уравнений на

первом дробном шаге (1.12.5) находятся трехточечными скалярными прогонками, после чего скалярной прогонкой в направлении  $x_2$  вычисляются новые значения  $\xi_\gamma^{n+1}$ , а из последнего уравнения схемы (1.12.3) – значения  $u^{n+1}$  во всех узлах сетки.

### § 1.13. Метод линеаризации при решении нелинейных уравнений

Аппроксимация нелинейных дифференциальных уравнений неявными разностными схемами обычно приводит к системе нелинейных алгебраических уравнений. Для их решения разработаны различные подходы – итерационные методы и методы, основанные на линеаризации разностных схем [10, 12, 15]. Одним из методов решения нелинейных уравнений, как отмечалось выше, является метод предиктор–корректор (см. § 1.9), в котором на этапе предиктора исходные уравнения аппроксимируются линейными разностными схемами, так как коэффициенты уравнений аппроксимируются на нижнем временном слое, а на этапе корректора рассматривается явная разностная схема. Ниже рассматривается метод линеаризации при решении нелинейных уравнений второго порядка неявными разностными схемами.

Рассмотрим систему нестационарных нелинейных уравнений второго порядка

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial x} = \mathbf{g}, \quad (1.13.1)$$

где  $\mathbf{W} = \mathbf{W}(\mathbf{U}, U_x)$ ,  $U_x = \frac{\partial U}{\partial x}$ ,  $\mathbf{g} = \mathbf{g}(\mathbf{U})$ , а  $\mathbf{U}, \mathbf{W}, \mathbf{g}$  – нелинейные векторные (размерности  $m$ ) или скалярные функции. Пусть  $\Lambda = \partial/\partial x + O(h^k)$ . Для решения системы уравнений (1.13.1) рассмотрим разностную схему с весами

$$\frac{U^{n+1} - U^n}{\tau} + \Lambda(\alpha \mathbf{W}^{n+1} + \beta \mathbf{W}^n) = \alpha \mathbf{g}^{n+1} + \beta \mathbf{g}^n, \quad (1.13.2)$$

аппроксимирующую уравнения (1.13.1) с порядком  $O(\tau^m + h^k)$ , где  $m = 2$  при  $\alpha = 0,5 + O(\tau)$ . В силу нелинейности функций  $\mathbf{W}, \mathbf{g}$  явно вычислить новое значение функции  $U^{n+1}$  можно лишь при  $\alpha = 0$ , т. е. для явной схемы. Как известно, в этом случае разностная схема имеет первый порядок аппроксимации по времени и в лучшем случае условно устойчива. Для получения линейных схем линеаризуем векторы  $\mathbf{W}, \mathbf{g}$  относительно  $U^{n+1}$  по формулам

$$\begin{aligned} \mathbf{W}^{n+1} = \mathbf{W}(\mathbf{U}^{n+1}, \mathbf{U}_x^{n+1}) = \mathbf{W}^n + \tau \left( \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial \mathbf{U}} \right)^n \left( \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} \right)^n + \tau \left( \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial \mathbf{U}_x} \right)^n \left( \frac{\partial \mathbf{U}_x}{\partial t} \right)^n + O(\tau^2) = \\ \mathbf{W}^n + \tau \mathbf{B}^n \frac{\mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{U}^n}{\tau} + \tau \mathbf{C}^n \Lambda \frac{\mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{U}^n}{\tau}, \end{aligned} \quad (1.13.3)$$

$$\mathbf{g}^{n+1} = \mathbf{g}^n + \tau \left( \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{U}} \right)^n \left( \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} \right)^n + O(\tau^2) = \mathbf{g}^n + \tau \mathbf{D}^n \frac{\mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{U}^n}{\tau} + O(\tau^2),$$

где

$$\mathbf{B} = \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial \mathbf{U}}, \quad \mathbf{C} = \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial \mathbf{U}_x}, \quad \mathbf{D} = \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{U}}.$$

Подставляя разложение (1.13.3) в схему (1.13.2), получим линейную разностную схему

$$\left[ \mathbf{I} + \tau \alpha (\Lambda \mathbf{B}^n + \Lambda \mathbf{C}^n \Lambda - \mathbf{D}^n) \right] \frac{\mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{U}^n}{\tau} = -\Lambda \mathbf{W}^n + \mathbf{g}^n, \quad (1.13.4)$$

которая аппроксимирует уравнения (1.13.1) с тем же порядком, что и базовая схема (1.13.2). Решение разностных уравнений может быть получено стандартными методами, например, методом прогонки – векторной (если  $\mathbf{U}$  вектор) или скалярной (для скалярной функции  $U$ ). Заметим, что численное решение уравнений (1.13.1) может быть получено и по схеме предиктор–корректор (см. (1.13.8)). Наряду с дивергентной формой системы уравнений (1.13.1), рассмотрим их в не-дивергентном виде

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{B} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} + \mathbf{C} \frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial x^2} - \mathbf{D} \mathbf{U} = 0. \quad (1.13.5)$$

Разностная схема предиктор–корректор

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{U}^{n+1/2} - \mathbf{U}^n}{\tau \alpha} + \mathbf{B}^n \Lambda \mathbf{U}^{n+1/2} + \mathbf{C}^n \Lambda_{11} \mathbf{U}^{n+1/2} - \mathbf{D}^n \mathbf{U}^{n+1/2} = 0, \\ \frac{\mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{U}^n}{\tau} + \Lambda \mathbf{W}^{n+1/2} = \mathbf{g}^{n+1/2} \end{aligned} \quad (1.13.6)$$

аппроксимирует уравнения (1.13.1) с порядком  $O(\tau^m + h^k)$ . На этапе предиктора разностные уравнения реализуются прогонками подобно схеме (1.13.4), а на этапе корректора новые значения  $\mathbf{U}^{n+1}$  находятся по явной схеме. Для линеаризованных уравнений (1.13.5) схемы (1.13.4) и (1.13.6) эквивалентны.

Рассмотрим разностную схему для уравнений (1.13.1), где

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}(\mathbf{f}), \quad \mathbf{W} = \mathbf{W}(\mathbf{f}, \mathbf{f}_x), \quad \mathbf{g} = \mathbf{g}(\mathbf{f}). \quad (1.13.7)$$

Линеаризуем векторы  $\mathbf{U}$ ,  $\mathbf{W}$ ,  $\mathbf{g}$  относительно  $\mathbf{f}^{n+1}$  по формулам

$$\begin{aligned} \mathbf{U}^{n+1} &= \mathbf{U}(\mathbf{f}^{n+1}) = \mathbf{U}^n + \tau \left( \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial \mathbf{f}} \right)^n \left( \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} \right)^n + O(\tau^2) = \mathbf{U}^n + \tau \mathbf{A}^n \left( \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} \right)^n + \dots, \\ \mathbf{W}^{n+1} &= \mathbf{W}(\mathbf{f}^{n+1}, \mathbf{f}_x^{n+1}) = \mathbf{W}^n + \tau \left( \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial \mathbf{f}} \right)^n \left( \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} \right)^n + \tau \left( \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial \mathbf{f}_x} \right)^n \left( \frac{\partial \mathbf{f}_x}{\partial t} \right)^n + O(\tau^2) = \\ &= \mathbf{W}^n + \tau \mathbf{B}^n \frac{\mathbf{f}^{n+1} - \mathbf{f}^n}{\tau} + \tau \mathbf{C}^n \Lambda \frac{\mathbf{f}^{n+1} - \mathbf{f}^n}{\tau} + \dots, \\ \mathbf{g}^{n+1} &= \mathbf{g}(\mathbf{f}^{n+1}) = \mathbf{g}^n + \tau \left( \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{f}} \right)^n \left( \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} \right)^n + O(\tau^2) = \mathbf{g}^n + \tau \mathbf{D}^n \frac{\mathbf{f}^{n+1} - \mathbf{f}^n}{\tau} + \dots \end{aligned} \quad (1.13.8)$$

Разностная схема

$$\left[ \mathbf{A} + \tau \alpha (\Lambda \mathbf{B}^n + \Lambda \mathbf{C}^n \Lambda - \mathbf{D}^n) \right] \frac{\mathbf{f}^{n+1} - \mathbf{f}^n}{\tau} = -\Lambda \mathbf{W}^n + \mathbf{g}^n$$

линейная, реализуется, как и схема (1.13.4), прогонками, но аппроксимирует исходные уравнения (1.13.1) с порядком  $O(\tau + h^k)$  при всех значениях  $\alpha$ . Аналогично (1.13.6) строится схема предиктор–корректор

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{f}^{n+1/2} - \mathbf{f}^n}{\tau} + \tilde{\mathbf{B}}^n \Lambda \mathbf{f}^{n+1/2} + \tilde{\mathbf{C}}^n \Lambda_{11} \mathbf{f}^{n+1/2} - \tilde{\mathbf{D}}^n \mathbf{f}^{n+1/2} &= 0, \\ \frac{\mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{U}^n}{\tau} + \Lambda \mathbf{W}^{n+1/2} &= \mathbf{g}^{n+1/2}, \end{aligned}$$

где  $\tilde{\mathbf{B}}^n = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}^n$ ,  $\tilde{\mathbf{C}}^n = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{C}^n$ ,  $\tilde{\mathbf{D}}^n = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{D}^n$ . Она аппроксимирует уравнения (1.13.1) с порядком  $O(\tau^m + h^k)$  и для линейных уравнений безусловно устойчива при  $\alpha \geq 0,5$ .

Рассмотрим систему многомерных нелинейных уравнений

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \sum_{j=1}^N \frac{\partial \mathbf{W}_j}{\partial x_j} = \mathbf{G}, \quad (1.13.9)$$

полагая, что

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}(\mathbf{f}), \quad \mathbf{W}_j = \mathbf{W}_j(\mathbf{f}, \mathbf{f}_j), \quad \mathbf{f}_j = \partial \mathbf{f} / \partial x_j.$$

Для их численного решения рассмотрим схему с весами

$$\frac{\mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{U}^n}{\tau} + \sum_{j=1}^N \Lambda_j (\alpha \mathbf{W}_j^{n+1} + \beta \mathbf{W}_j^n) = \alpha \mathbf{G}^{n+1} + \beta \mathbf{G}^n. \quad (1.13.10)$$

Она аппроксимирует систему уравнений (1.13.1) с порядком  $O(\tau^m + h^k)$ , где  $m = 2$  при  $\alpha = 0,5 + O(\tau)$ , и при  $\alpha \neq 0$  нелинейна. Пусть  $\Lambda_j = \partial/\partial x_j + O(h_j^k)$ . Подобно одномерному случаю, линеаризуем векторы  $\mathbf{U}$ ,  $\mathbf{W}_j$ ,  $\mathbf{G}$  относительно вектора  $\mathbf{f}$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{U}^{n+1} = \mathbf{U}(\mathbf{f}^{n+1}) &= \mathbf{U}^n + \tau \left( \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{f}} \right)^n \left( \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} \right)^n + O(\tau^2) = \mathbf{U}^n + \tau \mathbf{A}^n \frac{\mathbf{f}^{n+1} - \mathbf{f}^n}{\tau} + O(\tau^2), \\ \mathbf{W}_j^{n+1} = \mathbf{W}_j(\mathbf{f}^{n+1}, \mathbf{f}_l^{n+1}) &= \mathbf{W}_j^n + \tau \left( \frac{\partial \mathbf{W}_j}{\partial \mathbf{f}} \right)^n \left( \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} \right)^n + \tau \sum_{l=1}^N \left( \frac{\partial \mathbf{W}_j}{\partial \mathbf{f}_l} \right)^n \left( \frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial x_l \partial t} \right)^n + O(\tau^2) = \\ &= \mathbf{W}_j^n + \tau \mathbf{B}_j^n \frac{\mathbf{f}^{n+1} - \mathbf{f}^n}{\tau} + \sum_{l=1}^N \mathbf{C}_{jl}^n \Lambda_l \frac{\mathbf{f}^{n+1} - \mathbf{f}^n}{\tau} + O(\tau^2), \\ \mathbf{G}^{n+1} = \mathbf{G}(\mathbf{f}^{n+1}) &= \mathbf{G}^n + \tau \left( \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{f}} \right)^n \left( \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} \right)^n + O(\tau^2) = \mathbf{G}^n + \tau \mathbf{D}^n \frac{\mathbf{f}^{n+1} - \mathbf{f}^n}{\tau} + O(\tau^2), \end{aligned}$$

где

$$\mathbf{A} = \partial \mathbf{U} / \partial \mathbf{f}, \quad \mathbf{B}_j = \partial \mathbf{W}_j / \partial \mathbf{f}, \quad \mathbf{C}_{jl} = \partial \mathbf{W}_j / \partial \mathbf{f}_l, \quad \mathbf{D} = \partial \mathbf{G} / \partial \mathbf{f}. \quad (1.13.11)$$

Тогда с учетом линеаризации разностная схема

$$\tilde{\mathbf{C}} \frac{\mathbf{f}^{n+1} - \mathbf{f}^n}{\tau} = - \sum_{j=1}^N \Lambda_j \mathbf{W}_j^n, \quad (1.13.12)$$

где 
$$\tilde{\mathbf{C}} = \mathbf{A}^n + \tau \alpha \sum_{j=1}^N \mathbf{R}_j, \quad \mathbf{R}_j = \Lambda_j (\mathbf{B}_j^n + \sum_{l=1}^N \mathbf{C}_{jl}^n \Lambda_l)$$

аппроксимирует уравнения (1.13.1) с порядком  $O(\tau + h^k)$  при всех значениях  $\alpha$  с порядком  $O(\tau^m + h^k)$ , если  $\mathbf{f} = \mathbf{U}$ . Приближенно аппроксимируем оператор  $\tilde{\mathbf{C}}$  оператором

$$\tilde{\mathbf{C}} = \mathbf{A}^n \left[ \mathbf{I} + \tau \alpha (\mathbf{A}^{-1})^n \sum_{j=1}^N \mathbf{R}_j \right] \approx \mathbf{C}_0,$$

где

$$\mathbf{C}_0 = (\mathbf{A}^n + \tau \alpha \mathbf{R}_1) (\mathbf{A}^{-1})^n (\mathbf{A}^n + \tau \alpha \mathbf{R}_2) \dots (\mathbf{A}^{-1})^n (\mathbf{A}^n + \tau \alpha \mathbf{R}_2) = \tilde{\mathbf{C}} + O(\tau).$$

Тогда с учетом линеаризации разностная схема

$$\mathbf{C}_0 \frac{\mathbf{f}^{n+1} - \mathbf{f}^n}{\tau} = - \sum_{j=1}^N \Lambda_j \mathbf{W}_j^n \quad (1.13.13)$$

или эквивалентная ей схема в дробных шагах

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^n \xi^n &= - \sum_{j=1}^N \Lambda_j \mathbf{W}_j^n, \\ \left[ \mathbf{A}^n + \tau \alpha \Lambda_1 \left( \mathbf{B}_1^n + \sum_{l=1}^N \mathbf{C}_{1l}^n \Lambda_l \right) \right] \xi^{n+1/N} &= \mathbf{A}^n \xi^n, \\ &\dots, \\ \left[ \mathbf{A}^n + \tau \alpha \Lambda_N \left( \mathbf{B}_N^n + \sum_{l=1}^N \mathbf{C}_{Nl}^n \Lambda_l \right) \right] \xi^{n+1} &= \mathbf{A}^n \xi^{n+(N-1)/N}, \\ \mathbf{f}^{n+1} &= \mathbf{f}^n + \tau \xi^{n+1} \end{aligned}$$

аппроксимирует систему уравнений также с порядком  $O(\tau + h^k)$  и на каждом дробном шаге реализуется матричными прогонками (из-за наличия на дробных шагах членов  $\Lambda_j \mathbf{C}_{jl}^n \Lambda_l$ , аппроксимирующих смешанные производные при  $j \neq l$ ). Таким образом, замена оператора  $\tilde{\mathbf{C}}$  на факторизованный оператор  $\mathbf{C}_0$  не упрощает реализацию схемы на дробных шагах. Чтобы избежать матричных прогонок, введем оператор  $\mathbf{C}_0$ , содержащий только повторные производные

$$\mathbf{C} = \left[ A^n + \tau \alpha (\Lambda_1 \mathbf{B}_1^n + \mathbf{C}_{11}^n \Lambda_1) \right] (A^{-1})^n \dots \left[ A^n + \tau \alpha (\Lambda_N \mathbf{B}_N^n + \mathbf{C}_{NN}^n \Lambda_N) \right].$$

Очевидно  $\mathbf{C} = \mathbf{C}_0 + O(\tau)$ . Тогда разностная схема

$$\mathbf{C} \frac{\mathbf{f}^{n+1} - \mathbf{f}^n}{\tau} = - \sum_{j=1}^N \Lambda_j \mathbf{W}_j^n \quad (1.13.14)$$

или эквивалентная ей схема в дробных шагах

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^n \xi^n &= - \sum_{j=1}^N \Lambda_j \mathbf{W}_j^n, \\ \left[ \mathbf{A}^n + \tau \alpha \Lambda_1 (\mathbf{B}_1^n + \mathbf{C}_{11}^n \Lambda_1) \right] \xi^{n+1/N} &= \mathbf{A}^n \xi^n, \\ &\dots, \\ \left[ \mathbf{A}^n + \tau \alpha \Lambda_N (\mathbf{B}_N^n + \mathbf{C}_{NN}^n \Lambda_N) \right] \xi^{n+1} &= \mathbf{A}^n \xi^{n+(N-1)/N}, \\ \mathbf{f}^{n+1} &= \mathbf{f}^n + \tau \xi^{n+1} \end{aligned}$$

аппроксимирует систему уравнений (1.13.9) с порядком  $O(\tau + h^k)$  и реализуется векторными прогонками (или скалярными, если искомая функция – скаляр). В линейном случае она безусловно устойчива при  $\alpha \geq 0,5$  для  $N \leq 2$  и условно устойчива для уравнений большей размерности (см. § 1.11). Для  $\mathbf{f} = \mathbf{U}$  схема приближенной факторизации получается заменой в (1.13.12), (1.13.13) оператора  $\mathbf{A}$  на единичный

оператор  $\mathbf{I}$ , при этом порядок аппроксимации схем остается равным  $O(\tau + h^k)$  при всех значениях весового параметра.

Остановимся на другом методе решения нелинейных уравнений, методе предиктор–корректор (см. § 1.9). Наряду с дивергентным видом уравнений (1.13.9) запишем их в недивергентной форме в виде

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} + \sum_{j=1}^N \tilde{\mathbf{B}}_j \mathbf{f} = \mathbf{F}, \quad (1.13.15)$$

где операторы  $\tilde{\mathbf{B}}_j = \mathbf{B}_j \frac{\partial}{\partial x_j} + \mathbf{C}_{jj} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$  содержат первые и вторые пространственные производные, а вектор  $\mathbf{F}$  – оставшиеся члены уравнений (смешанные производные и оператор правой части в системе уравнений (1.13.10)). Очевидно,

$$\bar{\mathbf{B}}_j = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}_j, \quad \bar{\mathbf{C}}_{jj} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{C}_{jj}, \quad \mathbf{F} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{G},$$

где операторы  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}_j$ ,  $\mathbf{C}_{jj}$  определены в (1.13.11). Пусть, как и выше,  $\bar{\mathbf{B}}_{jh} = \bar{\mathbf{B}}_j + O(h^k)$ ,  $\mathbf{F}_h = \mathbf{F} + O(h^k)$ . Разностная схема предиктор–корректор

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{f}^{n+1/2N} - \mathbf{f}^n}{\tau \alpha} + \bar{\mathbf{B}}_{1h}^n \mathbf{f}^{n+1/2N} &= 0, \\ \frac{\mathbf{f}^{n+1/N} - \mathbf{f}^{n+1/2N}}{\tau \alpha} + \bar{\mathbf{B}}_{2h}^n \mathbf{f}^{n+1/N} &= 0, \\ &\dots, \\ \frac{\mathbf{f}^{n+1/2} - \mathbf{f}^{n+(N-1)/N}}{\tau \alpha} + \bar{\mathbf{B}}_{Nh}^n \mathbf{f}^{n+1/2} &= 0, \\ \frac{\mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{U}^n}{\tau} + \sum_{j=1}^N \Lambda_j \mathbf{W}_j^{n+1/2} &= 0 \end{aligned} \quad (1.13.16)$$

аппроксимирует систему уравнений с порядком  $O(\tau + h^k)$  и реализуется векторными прогонами по каждому пространственному направлению. В схеме (1.13.16) смешанные производные аппроксимируются явно лишь на этапе корректора, что может приводить к понижению устойчивости схемы.

## Глава 2

### РАЗНОСТНЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ОДНОМЕРНЫХ ЗАДАЧ

В настоящей главе рассматриваются разностные схемы для численного решения уравнений газовой динамики и уравнений Навье–Стокса сжимаемого теплопроводного газа. Излагаются основные подходы к построению неявных схем (см., например, [6, 9, 29, 46, 52–63]). Основное внимание уделено методологии построения экономичных неявных разностных схем, основанных на расщеплении уравнений по физическим процессам или специальном расщеплении. Исследуются такие формы расщепления уравнений (или операторов), которые позволяют обеспечить безусловную устойчивость схем и их экономичную реализацию. Дополнительными требованиями при выборе расщеплений уравнений являлись минимизация числа арифметических операций (при переходе с одного временного шага на следующий) и минимизация влияния расщепления на свойства этих схем.

#### § 2.1. Разностные схемы для уравнений газовой динамики

##### 2.1.1. Нефакторизованные разностные схемы

Рассмотрим систему уравнений газовой динамики в декартовых координатах

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial x} = 0, \quad p = p(\rho, \varepsilon), \quad (2.1.1)$$

где

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho v \\ E \end{pmatrix}, \quad \mathbf{W} = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho v^2 + p \\ v(E + p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W_1 \\ W_2 \\ W_3 \end{pmatrix}, \quad E = \rho(e + v^2/2),$$



а  $\rho$ ,  $e$  – плотность и внутренняя энергия единицы массы газа,  $v$  – скорость,  $p$  – давление,  $E = \rho(e + v^2/2)$  – массовая плотность полной энергии. Решение уравнений (2.1.1) будем отыскивать в области

$$\Omega(t, x) = \{0 \leq t \leq T, 0 \leq x \leq 1\}.$$

Введем в  $\Omega$  разностную сетку с равномерными шагами  $\tau$  и  $h$  соответственно и аппроксимируем производные  $\partial/\partial x$  симметричными или несимметричными разностными операторами  $\Lambda$  с порядком  $O(h^k)$ .

Для численного решения уравнений газовой динамики рассмотрим разностную схему с весами (см. [9, 35])

$$\frac{\mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{U}^n}{\tau} + \Lambda(\alpha \mathbf{W}_h^{n+1} + \beta \mathbf{W}_h^n) = 0,$$

аппроксимирующую систему уравнений (2.1.1) с порядком  $O(\tau^m + h^k)$ , где, как и выше,  $m = 2$  при  $\alpha = 0,5 + O(\tau)$ . При  $\alpha \neq 0$  разностная схема нелинейная. Линеаризуем вектор  $\mathbf{W}_h^{n+1}$  относительно вектора  $\mathbf{U}^{n+1}$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_h^{n+1} &= \mathbf{W}_h(\mathbf{U}^{n+1}) = \mathbf{W}_h^n + \tau \left( \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial \mathbf{U}} \right)^n \left( \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} \right)^n + \\ &+ O(\tau^2) = \mathbf{W}_h^n + \tau \tilde{\mathbf{B}}^n \frac{\mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{U}^n}{\tau} + O(\tau^2), \end{aligned}$$

где, например, для уравнения состояния идеального газа  $p = (\gamma - 1)\rho e$

$$\tilde{\mathbf{B}} = \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial \mathbf{U}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -(3 - \gamma)v^2/2 & (3 - \gamma)v & \gamma - 1 \\ -\gamma E/\rho + (\gamma - 1)v^3 & \gamma E/\rho - 3(\gamma - 1)v^2/2 & \gamma v \end{pmatrix}.$$

С учетом линеаризации разностная схема

$$(I + \tau \alpha \Lambda \tilde{\mathbf{B}}^n) \frac{\mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{U}^n}{\tau} = -\Lambda \mathbf{W}_h^n \quad (2.1.2)$$

аппроксимирует систему уравнений (2.1.1) также с порядком  $O(\tau^m + h^k)$  и реализуется, как следует из вида матрицы  $\tilde{\mathbf{B}}$ , векторной прогонкой на каждом временном шаге. Выше отмечалось, что уравнения газовой динамики являются однородной системой первой степени, для которых дивергентная (2.1.1) и недивергентная

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \tilde{\mathbf{B}} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} = 0, \quad \tilde{\mathbf{B}} = \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial \mathbf{U}}$$

формы записи уравнений эквивалентны, т. е. справедливы соотношения

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} = -\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x} \tilde{\mathbf{B}} \mathbf{U} = -\tilde{\mathbf{B}} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x}, \quad \tilde{\mathbf{B}} = \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial \mathbf{U}}.$$

Тогда и разностная схема

$$(I + \tau \alpha \tilde{\mathbf{B}}^n \Lambda) \frac{\mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{U}^n}{\tau} = -\mathbf{W}_h^n$$

обладает теми же свойствами, что и базовая схема (2.1.2).

Выберем в качестве искоемых функций вектор  $\mathbf{f} \neq \mathbf{U}$  и линеаризуем векторы  $\mathbf{U}$ ,  $\mathbf{W}$  относительно вектора  $\mathbf{f}$  (см. также [9, 36]):

$$\mathbf{U}^{n+1} = \mathbf{U}(\mathbf{f}^{n+1}) = \mathbf{U}^{n+1} + \tau \left( \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{f}} \right)^n \left( \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} \right)^n + O(\tau^2) = \mathbf{W}_h^n + \tau \mathbf{A}^n \frac{\mathbf{f}^{n+1} - \mathbf{f}^n}{\tau} + O(\tau^2),$$

$$\mathbf{W}_h^{n+1} = \mathbf{W}_h(\mathbf{f}^{n+1}) = \mathbf{W}_h^n + \tau \left( \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial \mathbf{f}} \right)^n \left( \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} \right)^n + O(\tau^2) = \mathbf{W}_h^n + \tau \tilde{\mathbf{B}}^n \frac{\mathbf{f}^{n+1} - \mathbf{f}^n}{\tau} + O(\tau^2),$$

где  $\mathbf{A} = \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{f}}$ ,  $\mathbf{B} = \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial \mathbf{f}} = \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial \mathbf{U}} \cdot \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{f}} = \tilde{\mathbf{B}} \mathbf{A}$ . Тогда, например, для вектора

$\mathbf{f} = (\rho, v, e)^T$  матричные операторы принимают вид

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ v & \rho & 0 \\ \varepsilon + v^2/2 & \rho v & \rho \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} v & \rho & 0 \\ v^2 + (\gamma - 1)\varepsilon & 2\rho v & (\gamma - 1)\rho \\ \rho v(\gamma\varepsilon + v^2/2) & \rho(\gamma\varepsilon + 3v^2/2) & \gamma\rho v \end{pmatrix}.$$

Разностная схема

$$(\mathbf{A}^n + \tau \alpha \Lambda \mathbf{B}^n) \frac{\mathbf{f}^{n+1} - \mathbf{f}^n}{\tau} = -\Lambda \mathbf{W}_h^n \quad (2.1.3)$$

является линейной и аппроксимирует уравнения газовой динамики (2.1.1) с порядком  $O(\tau + h^k)$  при всех значениях параметра  $\alpha$  и реализуется векторной прогонкой. В частности, для  $k = 2$  при симметричной аппроксимации первых производных она может быть представлена в виде системы трехточечных алгебраических уравнений

$$\mathbf{a}_i \mathbf{f}_{i-1}^{n+1} + \mathbf{b}_i \mathbf{f}_i^{n+1} + \mathbf{c}_i \mathbf{f}_{i+1}^{n+1} = \mathbf{d}_i^n,$$

где

$$\mathbf{a}_i = -\frac{1}{2h} \tau \alpha \tilde{\mathbf{B}}_{i-1}^n, \quad \mathbf{b}_i = \mathbf{A}_i^n, \quad \mathbf{c}_i = \frac{1}{2h} \tau \alpha \tilde{\mathbf{B}}_{i+1}^n, \quad \mathbf{d}_i^n = \mathbf{A}_i^n \mathbf{f}_i^n - \frac{1}{2h} \tau \beta (\tilde{\mathbf{B}}_{i+1}^n \mathbf{f}_{i+1}^n - \tilde{\mathbf{B}}_{i-1}^n \mathbf{f}_{i-1}^n),$$

а формулы прямого и обратного хода прогонки имеют вид

$$\boldsymbol{\alpha}_i = -(\mathbf{b}_i + \mathbf{a}_i \boldsymbol{\beta}_{i-1})^{-1} \mathbf{c}_i, \quad \boldsymbol{\beta}_i = (\mathbf{b}_i + \mathbf{a}_i \boldsymbol{\alpha}_{i-1})^{-1} (\mathbf{d}_i - \mathbf{a}_i \boldsymbol{\beta}_{i-1}),$$

$$\mathbf{f}_i^{n+1} = \boldsymbol{\alpha}_i \mathbf{f}_{i+1}^{n+1} + \boldsymbol{\beta}_i.$$

Напомним, что коэффициенты  $a, b, c$  – матрицы размерности  $3 \times 3$ . При несимметричной аппроксимации второго порядка разностная схема (2.1.3) представляется в виде системы пятиточечных уравнений

$$a_i \mathbf{f}_{i-2}^{n+1} + b_i \mathbf{f}_{i-1}^{n+1} + c_i \mathbf{f}_i^{n+1} + d_i \mathbf{f}_{i+1}^{n+1} + e_i \mathbf{f}_{i+2}^{n+1} = \mathbf{d}_i^n$$

и также реализуется пятиточечной векторной прогонкой (о решении сеточных уравнений см., например, [15]). Для линейризованных уравнений газовой динамики разностные схемы (2.1.2), (2.1.3) безусловно устойчивы при  $\alpha \geq 0,5$ . Покажем это для разностной схемы (2.1.3) для вектора  $\mathbf{f} = (\rho, v, e)^T$ . Полагая коэффициенты матриц  $\mathbf{A}, \tilde{\mathbf{B}}$  постоянными, разностную схему (2.1.3) можно представить в виде

$$(\mathbf{I} + \tau \alpha \mathbf{C} \Lambda) \frac{\mathbf{f}^{n+1} - \mathbf{f}^n}{\tau} = -\mathbf{C} \mathbf{f}^n,$$

где

$$\mathbf{C} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} = \begin{pmatrix} v & \rho & 0 \\ a^2 & v & b^2 \\ 0 & c^2 & v \end{pmatrix}, \quad a^2 = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \rho}, \quad b^2 = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial e}, \quad c^2 = \frac{p}{\rho}.$$

Устойчивость схемы будем исследовать спектральным методом (см. главу 1), отыскивая решение в виде

$$\mathbf{f}_j^n = \mathbf{f}_0 \exp(\omega t_n + ikx_j) = \mathbf{f}_0 \exp(\omega n\tau + ikjh) = \mathbf{f}_0 \lambda^n \exp(\omega n\tau + ikjh),$$

где  $t_n = n\tau$ ,  $x_j = jh$ , а  $\mathbf{f}_0 = (\rho_0, v_0, e_0)^T$ . Пусть для определенности выбрана симметричная аппроксимация производных по формуле

$$\Lambda f_j = \frac{f_{j+1} - f_{j-1}}{2h} = \frac{\partial f}{\partial x} + O(h^2).$$

Тогда разностной схеме соответствует характеристическое уравнение

$$\det \left\| \begin{pmatrix} (1 + i\alpha v d)(\lambda - 1) + i v d & i \rho_0 d [\alpha(\lambda - 1) + 1] & 0 \\ i a^2 d [\alpha(\lambda - 1) + 1] & (1 + i\alpha v d)(\lambda - 1) + i v d & i b^2 d [\alpha(\lambda - 1) + 1] \\ 0 & i c^2 d [\alpha(\lambda - 1) + 1] & (1 + i\alpha v d)(\lambda - 1) + i v d \end{pmatrix} \right\| = 0.$$

Его корни равны

$$\lambda_1 = \frac{1 - i\beta d}{1 + i\alpha d}, \quad \lambda_{2,3} = \frac{1 - i\beta d(v \pm s)}{1 + i\alpha d(v \pm s)} \quad \text{и} \quad |\lambda| \leq 1$$

при  $\alpha \geq 1/2$  и при любом соотношении шагов сетки  $\tau, h$ , т. е. разностная схема безусловно устойчива и для системы линейных уравнений. Здесь приняты обозначения

$d = (\tau/h)\sin(kh)$ ,  $s^2 = a^2\rho_0 + b^2c^2 = \gamma(\gamma-1)e_0$  – квадрат скорости звука в газе.

Наряду с дивергентной формой (2.1.1) рассмотрим уравнения газовой динамики в недивергентной форме

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} + \mathbf{B} \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x} = 0, \quad \mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1} \tilde{\mathbf{B}} \mathbf{A}, \quad \mathbf{A} = \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{f}}. \quad (2.1.4)$$

Матрица  $\mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{f})$  при различном выборе искомым функций  $\mathbf{f}$  может содержать различное число ненулевых членов, что позволяет строить разностные схемы, требующие меньшего числа операций при их реализации. Например, для вектора  $\mathbf{f} = (\rho, v, e)^T$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} v & \rho & 0 \\ a^2 & v & b^2 \\ 0 & c^2 & v \end{pmatrix}, \quad \text{где } a^2 = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \rho}, \quad b^2 = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial e}, \quad c^2 = \frac{p}{\rho}.$$

Еще более простой вид уравнения газовой динамики (2.1.4) принимают в переменных плотность, скорость и давление:

$$\mathbf{f} = \begin{pmatrix} \rho \\ v \\ p \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} v & \rho & 0 \\ 0 & v & b^2 \\ 0 & c^2 & v \end{pmatrix}, \quad b^2 = \frac{1}{\rho}, \quad c^2 = \gamma p. \quad (2.1.5)$$

Введем аппроксимации первых производных несимметричными операторами  $\Lambda^k = \partial/\partial x + O(h^k)$  с учетом знака скорости  $v$  по формулам

$$\Lambda^k = \Lambda_{\mp}^k, \quad \bar{\Lambda}^k = \Lambda_{\pm}^k, \quad \text{если } v \geq 0,$$

$$\Lambda^k = \Lambda_{\pm}^k, \quad \bar{\Lambda}^k = \Lambda_{\mp}^k, \quad \text{если } v \leq 0,$$

или по формуле

$\Lambda^k = \Lambda^2 = (\Lambda_+^1 + \Lambda_-^1)/2$  – при симметричной аппроксимации, где для  $k=1$  разностные производные равны

$$\Lambda_{\mp}^1 f_l = \pm \frac{1}{h} (f_l - f_{l \mp 1}),$$

и, соответственно, равны

$$\Lambda_{\mp}^2 f_l = \pm \frac{1}{2h} (3f_l - 4f_{l \mp 1} + f_{l \mp 2})$$

для  $k=2$ . Аппроксимируем матричные операторы  $\mathbf{B} \frac{\partial}{\partial x}$  по формулам (см. [6])

$$\mathbf{B}^n \Lambda^k = \begin{pmatrix} v^n \Lambda^k & \rho \Lambda^k & 0 \\ 0 & v^n \Lambda^k & (b^2)^n \bar{\Lambda}^k \\ 0 & (c^2)^n \Lambda^k & v^n \Lambda^k \end{pmatrix}$$

с порядком  $O(h^k)$ , причем первые производные при конвективных членах в уравнениях аппроксимируем операторами  $\Lambda^k$ , а член с давлением в уравнении движения – сопряженным оператором  $\overline{\Lambda}^k$ . Разностная схема с весами

$$\frac{\mathbf{f}^{n+1} - \mathbf{f}^n}{\tau} + \mathbf{B}^n \Lambda^k (\alpha \mathbf{f}^{n+1} + \beta \mathbf{f}^n) = 0 \quad (2.1.6)$$

является линейной, аппроксимирует систему уравнений (2.1.1) с порядком  $O(\tau + h^k)$  при всех значениях  $\alpha$  и также реализуется векторной прогонкой. При симметричной аппроксимации производных в операторе  $\mathbf{B}^n \Lambda^k$  разностная схема (2.1.6), как показано выше, безусловно устойчива при  $\alpha \geq 1/2$ . Однако при  $K = \tau(v \pm s)/h \geq 1$  нарушаются условия хорошей обусловленности прогонки, т. е. фактически расчеты можно проводить лишь при числах Куранта  $K \leq 1$ . Как отмечалось в [6], несимметричная (с учетом знака скорости) аппроксимация конвективных членов и сопряженная аппроксимация для давления в операторе  $\mathbf{B}^n \Lambda^k$  позволяют обеспечить безусловную устойчивость разностной схемы при  $\alpha \geq 1/2$ , но прогонка в этом случае будет хорошо обусловлена при любых значениях чисел Куранта. Действительно, характеристическое уравнение схемы для вектора  $\mathbf{f} = (\rho, v, p)^T$  для линейных уравнений примет вид

$$\det \begin{vmatrix} (1 + \alpha v d_-)(\lambda - 1) + v d_- & \rho_0 d_- [\alpha(\lambda - 1) + 1] & 0 \\ 0 & (1 + \alpha v d_-)(\lambda - 1) + v d_- & b^2 d_+ [\alpha(\lambda - 1) + 1] \\ 0 & c^2 d_- [\alpha(\lambda - 1) + 1] & (1 + \alpha v d_-)(\lambda - 1) + v d_- \end{vmatrix} = 0,$$

где  $d_- = K(1 - e^{-ikh}) = K(a + ib)$ ,  $d_+ = K(e^{ikh} - 1) = K(-a + ib)$ ,  $K = \frac{\tau}{h}$ ,

$a = 1 - \cos(kh)$ ,  $b = \sin(kh)$  для  $k = 1$  при  $v \geq 0$ . Его корни равны

$$\lambda_1 = \frac{1 - \beta d_-}{1 + \alpha d_-} = \frac{1 - \beta K(a + ib)}{1 + \alpha K(a + ib)}, \lambda_{2,3} = \frac{1 - \beta K[(av + i(bv \pm s d_0))]}{1 + \alpha K[(av + i(bv \pm s d_0))]}, d_0 = 2 \sin\left(\frac{kh}{2}\right).$$

Как следствие,  $|\lambda| \leq 1$  при  $\alpha \geq 1/2$ , т. е. разностная схема с весами безусловно устойчива.

**Замечание 1.** Отметим, что различная несимметричная аппроксимация конвективных членов и члена с давлением в операторе  $\mathbf{B}^n \Lambda^k$  вызвана не только необходимостью получения устойчивой схемы, но и физической постановкой задачи (см. [8, 54]). Проиллюстрируем это на примере уравнений акустики

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} + \mathbf{B} \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x} = 0, \quad \mathbf{f} = \begin{pmatrix} v \\ p \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ c^2 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.1.7)$$

Они могут быть получены из уравнений газовой динамики (2.1.4) при отсутствии конвективного переноса ( $v = 0$ ) и при  $\rho = 1$ ,  $c^2 = \text{const}$ . Очевидно, система уравнений акустики может быть приведена к уравнению колебаний, например, для скорости

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}. \quad (2.1.8)$$

Для численного решения системы уравнений (2.1.7) рассмотрим двухслойную схему с весами

$$\begin{aligned} \frac{v_j^{n+1} - v_j^n}{\tau} + \bar{\Lambda}^{-1} (\alpha p_j^{n+1} + \beta p_j^n) &= 0, \\ \frac{p_j^{n+1} - p_j^n}{\tau} + c^2 \Lambda^1 (\alpha_1 v_j^{n+1} + \beta_1 p_j^n) &= 0. \end{aligned} \quad (2.1.9)$$

Здесь пространственные производные аппроксимированы несимметричными операторами первого порядка аппроксимации по пространству ( $k = 1$ ), а весовые множители  $\alpha$  и  $\alpha_1$  для каждого уравнения могут быть выбраны различными. Очевидно, схема справедлива для предыдущего слоя по времени

$$\begin{aligned} \frac{v_j^n - v_j^{n-1}}{\tau} + \bar{\Lambda}^{-1} (\alpha p_j^n + \beta p_j^{n-1}) &= 0, \\ \frac{p_j^n - p_j^{n-1}}{\tau} + c^2 \Lambda^1 (\alpha_1 v_j^n + \beta_1 p_j^{n-1}) &= 0. \end{aligned} \quad (2.1.10)$$

Разность схем (2.1.9) и (2.1.10) приводит к разностному уравнению

$$\frac{v_j^{n+1} - 2v_j^n + v_j^{n-1}}{\tau^2} = c^2 \bar{\Lambda}^{-1} \Lambda^1 \bar{v}_j = c^2 \Lambda_{11} \bar{v}_j,$$

аппроксимирующему уравнение (2.1.8) с порядком  $O(\tau^2 + h^2)$ , где  $v_j = (v_j^{n+1} + 2v_j^n + v_j^{n-1})/4$  при  $\alpha = \beta = 0,5$ . Односторонняя аппроксимация первых производных в системе уравнений (2.1.9) и (2.1.10) также приводит к схеме

$$\frac{v_j^{n+1} - 2v_j^n + v_j^{n-1}}{\tau^2} = c^2 \Lambda^1 \Lambda^1 \bar{v}_j,$$

аппроксимирующей уравнение колебаний, но уже с первым порядком, где

$$\Lambda^1 \Lambda^1 v_j^n = \frac{v_j^n - 2v_{j-1}^n + v_{j-2}^n}{h^2} = \left. \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right|_j + O(h).$$

**Замечание 2.** Для получения разностной схемы, консервативной при установлении, перепишем схему (2.1.6) в каноническом виде

$$(I + \tau\alpha\mathbf{B}^n\Lambda^k) \frac{\mathbf{f}^{n+1} - \mathbf{f}^n}{\tau} = -\mathbf{B}^n\Lambda^l \mathbf{f}^n.$$

Аппроксимируем оператор правой части  $\mathbf{B}^n\Lambda^l$  с порядком  $O(h^l)$  и с учетом соотношений

$$\mathbf{B} \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x} = \mathbf{B}\Lambda^l + O(h^l) = -\mathbf{A}^{-1} \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial x} = -(\mathbf{A}^{-1})\Lambda \mathbf{W}_h^l + O(h^l)$$

заменяем его на оператор  $\mathbf{A}^{-1}\Lambda \mathbf{W}_h^l$ . Тогда разностная схема

$$(I + \tau\alpha\mathbf{B}^n\Lambda^k) \frac{\mathbf{f}^{n+1} - \mathbf{f}^n}{\tau} = -\left[ (\mathbf{A}^{-1})\Lambda \mathbf{W}_h^l \right]^n \quad (2.1.11)$$

аппроксимирует исходные уравнения (2.1.4) с порядком  $O(\tau + \tau h^k + h^l)$ , а при установлении – стационарные уравнения  $\Lambda \mathbf{W}_h^l$  в консервативной форме с порядком  $O(h^l)$  и реализуется векторной прогонкой. Подобно (2.1.6), разностная схема (2.1.11) безусловно устойчива при  $\alpha \geq 1/2$  для  $k = 1, l = 2$  для линеаризованных уравнений.

### 2.1.2. Схемы приближенной факторизации

Для построения экономичных разностных схем решения уравнений газовой динамики (2.1.4), реализуемых скалярными прогонками, воспользуемся методом приближенной факторизации (см. 1.1.10). Представим матричный оператор  $\mathbf{B}$  в виде суммы операторов

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2$$

таким образом, чтобы разностные схемы, построенные на основе алгоритмов расщепления, удовлетворяли следующим свойствам:

- были экономичными (по числу операций на узел сетки);
- обладали свойством безусловной устойчивости при соответствующем выборе весового множителя  $\alpha$ .

Для уравнений газовой динамики (2.1.4) для вектора  $\mathbf{f} = (\rho, v, e)^T$  в [6] было введено расщепление оператора  $\mathbf{B}$  по физическим процессам в виде

$$\mathbf{B}_{1h}\Lambda^k = v\Lambda^k \cdot \mathbf{I}, \quad \mathbf{B}_{2h}\Lambda^k = \begin{pmatrix} 0 & \rho\Lambda^k & 0 \\ a^2\bar{\Lambda}^k & 0 & b^2\bar{\Lambda}^k \\ 0 & c^2\Lambda^k & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.1.12)$$

где  $\mathbf{B}_{1h}\Lambda^k$  содержит конвективные члены уравнений, а  $\mathbf{B}_{2h}\Lambda^k$  – члены с давлением и оставшиеся члены в уравнении неразрывности и энергии. Разностная схема приближенной факторизации

$$\prod_{j=1}^2 (I + \tau\alpha\mathbf{B}_{jh}^n\Lambda^k) \frac{\mathbf{f}^{n+1} - \mathbf{f}^n}{\tau} = -(\mathbf{A}_h^{-1})^n \Lambda^l \mathbf{W}_h^n \quad (2.1.13)$$

или эквивалентная ей схема в дробных шагах

$$\begin{aligned}\xi^n &= -(\mathbf{A}_h^{-1})^n \Lambda^l \mathbf{W}_h^n, \\ (\mathbf{I} + \tau\alpha \mathbf{B}_{lh}^n \Lambda^k) \xi^{n+1/2} &= \xi^n, \\ (\mathbf{I} + \tau\alpha \mathbf{B}_{2h}^n \Lambda^k) \xi^{n+1} &= \xi^{n+1/2}, \\ \mathbf{f}^{n+1} &= \mathbf{f}^n + \tau \xi^{n+1}\end{aligned}\tag{2.1.14}$$

аппроксимирует уравнения газовой динамики (2.1.1) с порядком  $O(\tau + \tau h^k + h^l)$ , а при установлении стационарные уравнения  $\Lambda^l \mathbf{W}_h^n = 0$  в консервативной форме с порядком  $O(h^l)$ , так как матрица  $\mathbf{A}^{-1} \neq 0$ . Пусть  $k = 1, l = 2$ . Тогда разностная схема (2.1.13) или (2.1.14) аппроксимирует исходные уравнения с порядком  $O(\tau + \tau h + h^2)$  и реализуется на дробных шагах скалярными трехточечными прогонками. Действительно, система разностных уравнений (2.1.14) на нулевом шаге

$$\begin{aligned}\xi_p^n &= -\Lambda^2 W_1^n, \\ \xi_v^n &= -\frac{1}{\rho^n} (\Lambda^2 W_2^n - v^n \Lambda^2 W_1^n), \\ \xi_e^n &= -\frac{1}{\rho^n} \left[ \frac{1}{\rho^n} \Lambda^2 W_3^n - v^n \Lambda^2 W_2^n + (e - v^2/2)^n \Lambda^2 W_1^n \right]\end{aligned}$$

разрешается явно для каждой компоненты вектора  $\xi = (\xi_p, \xi_v, \xi_e)^T$ . Так как матрица  $\mathbf{B}_{lh}$  диагональная, то на первом дробном шаге  $n + 1/2$  разностные уравнения

$$\begin{aligned}\xi_p^{n+1/2} + \tau\alpha v^n \Lambda^1 \xi_p^{n+1/2} &= \xi_p^n, \\ \xi_v^{n+1/2} + \tau\alpha v^n \Lambda^1 \xi_v^{n+1/2} &= \xi_v^n, \\ \xi_e^{n+1/2} + \tau\alpha v^n \Lambda^1 \xi_e^{n+1/2} &= \xi_e^n\end{aligned}$$

реализуются трехточечными скалярными прогонками независимо для каждой компоненты вектора (или по неявной схеме бегущего счета, если скорость не меняет знак). На втором дробном шаге решается система разностных уравнений

$$\begin{aligned}\xi_p^{n+1} &= \xi_p^{n+1/2} - \tau\alpha \rho^n \Lambda^1 \xi_p^{n+1}, \\ \xi_v^{n+1} + \tau\alpha (a^2 \bar{\Lambda}^{-1} \xi_p^{n+1} + b^2 \bar{\Lambda}^{-1} \xi_e^{n+1}) &= \xi_v^{n+1/2}, \\ \xi_e^{n+1} &= \xi_e^{n+1/2} - \tau\alpha c^2 \Lambda^1 \xi_v^{n+1}.\end{aligned}$$

Исключая невязки плотности и внутренней энергии из уравнения движения, получим разностное уравнение для невязки скорости

$$\left[ I - \tau^2 \alpha^2 \left( a^2 \bar{\Lambda}^{-1} \rho^n \Lambda^1 + b^2 \bar{\Lambda}^{-1} c^2 \Lambda^1 \right) \right] \xi_v^{n+1} = \xi_v^{n+1/2} - \tau\alpha \left( a^2 \bar{\Lambda}^{-1} \xi_p^{n+1/2} + b^2 \bar{\Lambda}^{-1} \xi_e^{n+1/2} \right).$$



Его решение находится трехточечной скалярной прогонкой, после чего значения  $\xi_p^{n+1}$  и  $\xi_e^{n+1}$  вычисляются явно. Новые значения функций на  $(n+1)$ -м слое определяются из последнего векторного уравнения схемы (2.1.14) также по явным формулам. Таким образом, решение уравнений газовой динамики по разностной схеме (2.1.9) сводится к  $m+1$  скалярной прогонке, где  $m$  – число уравнений. Для других векторов искомых функций разностные схемы вида (2.1.13), (2.1.14) строятся аналогично. Введенное расщепление позволило обеспечить безусловную устойчивость схем при  $\alpha \geq 0,5$ . Покажем это для линеаризованных уравнений газовой динамики, полагая коэффициенты матричных операторов постоянными. Устойчивость схемы (2.1.13) подобно п. 2.1.1 будем исследовать спектральным методом. Пусть  $\Lambda = \Lambda = (\Lambda_+ + \Lambda_-)/2 = \partial/\partial x + O(h^2)$ . Разностной схеме (2.1.13) соответствует характеристическое уравнение

$$\det \begin{vmatrix} t(\lambda-1) + ivd & ip_0 d [\alpha t(\lambda-1) + 1] & 0 \\ ia^2 d [\alpha t(\lambda-1) + 1] & t(\lambda-1) + ivd & ib^2 d [\alpha t(\lambda-1) + 1] \\ 0 & ic^2 d [\alpha t(\lambda-1) + 1] & t(\lambda-1) + ivd \end{vmatrix} = 0,$$

где  $t = 1 + i\alpha v d$ ,  $d = (\tau/h) \sin(kh)$ ,  $a^2 = (\gamma-1)e_0/\rho_0$ ,  $b^2 = \gamma-1$ ,  $c^2 = (\gamma-1)e_0$ . Его корни равны

$$\lambda_1 = \frac{1 - i\beta d}{1 + i\alpha d}, \quad \lambda_{2,3} = \frac{1 - i\beta d(v \pm s) \mp vcd^2}{1 + i\alpha d(v \pm s) \mp vcd^2}$$

и

$$|\lambda| \leq 1$$

при  $\alpha \geq 0,5$  при любом соотношении шагов сетки  $\tau, h$ , т. е. разностная схема для линейных уравнений безусловно устойчива. Здесь  $s^2 = a^2 \rho_0 + b^2 c^2 = \gamma(\gamma-1)e_0$  – квадрат скорости звука. Анализ устойчивости схемы при несогласованной аппроксимации операторов  $B_j$  при  $k=1, l=2$  проведем для линейного уравнения переноса

$$\frac{\partial v}{\partial t} + a \frac{\partial v}{\partial x} = 0.$$

Разностная схема с несогласованной аппроксимацией

$$(I + \tau\alpha\Lambda^l) \frac{v^{n+1} - v^n}{\tau} = -a\Lambda^2 v^n$$

аппроксимирует уравнение переноса с порядком  $O(\tau + \tau h + h^2)$  и реализуется трехточечной скалярной прогонкой или по неявной схеме бегущего счета. Ей соответствует характеристическое уравнение

$$\det \|(1 + \alpha d_1)(\lambda - 1) + id\| = 0,$$

откуда следует

$$\lambda = \frac{1-id}{1+\alpha d_1}, \text{ а } |\lambda| \leq 1$$

при  $\alpha \geq 0,5$ . Здесь  $d = K \sin(kh)$ ,  $d_1 = K(1 - \cos(kh)) + id$ ,  $K = (\tau a)/h$ . Подобные оценки устойчивости схемы (2.1.9) справедливы и для уравнений газовой динамики при  $k = 1$ ,  $l = 2$ .

Аналогичным образом строятся разностные схемы и для других газодинамических переменных. Рассмотрим уравнения газовой динамики в переменных плотность, скорость и давление. Тогда

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} = -\mathbf{B} \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x} = -\mathbf{A}^{-1} \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial x},$$

где

$$\mathbf{f} = \begin{pmatrix} \rho \\ v \\ p \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} v & \rho & 0 \\ 0 & v & b^2 \\ 0 & c^2 & v \end{pmatrix}, \mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -v/\rho & 1/\rho & 0 \\ (\gamma-1)v^2/2 & -(\gamma-1)v & \gamma-1 \end{pmatrix}, \mathbf{W} = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho v^2 + p \\ v(E+p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W_1 \\ W_2 \\ W_3 \end{pmatrix}.$$

$b^2 = 1/\rho$ ,  $c^2 = \gamma p$ . Введем расщепление оператора  $\mathbf{B}$  по физическим процессам в виде

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2 = \begin{pmatrix} v & 0 & 0 \\ 0 & v & 0 \\ 0 & 0 & v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \rho & 0 \\ 0 & 0 & b^2 \\ 0 & c^2 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.1.15)$$

Введем аппроксимацию операторов по формулам подобно (2.1.12)

$$\mathbf{B}_1^n \Lambda^k = v^n \Lambda^k, \mathbf{B}_2^n \Lambda^k = \begin{pmatrix} 0 & \rho \Lambda^k & 0 \\ 0 & 0 & (b^2)^n \bar{\Lambda}^{-k} \\ 0 & (c^2)^n \Lambda^k & 0 \end{pmatrix}, \Lambda^l \mathbf{W} = \Lambda^l \begin{pmatrix} W_1 \\ W_2 \\ W_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Lambda^l \rho v \\ \Lambda^l \rho v^2 + \Lambda^l p \\ \Lambda^l v \left( \frac{\gamma}{\gamma-1} p + \rho \frac{v^2}{2} \right) \end{pmatrix}.$$

Разностная схема (2.1.13) с расщеплением (2.1.15) аппроксимирует исходные уравнения с порядком  $O(\tau + \tau h^k + h^l)$ . Пусть  $k = 1$ ,  $l = 1$ . Тогда она реализуется на дробных шагах скалярными трехточечными прогонками подобно (2.1.13). На нулевом шаге система разностных уравнений

$$\xi^n = -(\mathbf{A}_h^{-1})^n \Lambda^l \mathbf{W}_h^n, \text{ где } \xi^n = \begin{pmatrix} \xi_\rho \\ \xi_v \\ \xi_p \end{pmatrix},$$

реализуется по явным формулам при известных значениях функций. На первом дробном шаге разностные уравнения решаются скалярными прогонками независимо для каждой компоненты  $\xi^{n+1/2}$ , так как оператор  $\mathbf{B}_i^n \Lambda^k$  содержит ненулевые элементы лишь на главной диагонали. На втором дробном шаге решается система разностных уравнений

$$\xi_p^{n+1} = \xi_p^{n+1/2} - \tau \alpha \rho^n \Lambda^k \xi_v^{n+1},$$

$$\xi_v^{n+1} + \tau \alpha b^2 \bar{\Lambda}^k \xi_p^{n+1} = \xi_v^{n+1/2},$$

$$\xi_p^{n+1} = \xi_p^{n+1/2} - \tau \alpha c^2 \Lambda^k \xi_v^{n+1}.$$

Исключая невязки давления из уравнения движения, получим разностное уравнение для невязки скорости

$$\left[ I - \tau^2 \alpha^2 b^2 \bar{\Lambda}^k c^2 \Lambda^k \right] \xi_v^{n+1} = \xi_v^{n+1/2} - \tau \alpha b^2 \bar{\Lambda}^k \xi_p^{n+1/2}.$$

Его решение при  $k = 1$  находится трехточечной скалярной прогонкой, после чего значения  $\xi_p^{n+1}$  и  $\xi_v^{n+1}$  вычисляются явно. Новые значения функций на  $(n + 1)$ -м слое определяются из последнего векторного уравнения также по явным формулам.

Схема второго порядка аппроксимации по всем переменным может быть построена на основе метода предиктор–корректор. С учетом введенных выше расщеплений она может быть представлена в виде

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{f}^{n+1/4} - \mathbf{f}^n}{\tau \alpha} + \mathbf{B}_{1h}^n \Lambda^k \mathbf{f}^{n+1/4} &= 0, \\ \frac{\mathbf{f}^{n+1/2} - \mathbf{f}^{n+1/4}}{\tau \alpha} + \mathbf{B}_{2h}^n \Lambda^k \mathbf{f}^{n+1/2} &= 0, \\ \frac{\mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{U}^n}{\tau} + \Lambda^l \mathbf{W}_h^{n+1/2} &= 0. \end{aligned} \quad (2.1.16)$$

Она аппроксимирует уравнения (2.1.1) с порядком  $O(\tau^2 + \tau h^k + h^l)$  при  $\alpha = 0,5 + O(\tau)$ . На этапе предиктора разностные уравнения в недивергентном виде решаются по неявной схеме, что создает запас устойчивости, а консервативность схемы восстанавливается на этапе корректора при аппроксимации уравнений в дивергентной форме. Ее реализация для вектора  $\mathbf{f} = (\rho, v, p)^T$  и расщепления (2.1.15) подобна схеме приближенной факторизации (2.1.13). На первом дробном шаге  $n + 1/4$  схемы (2.1.16) на этапе предиктора система разностных уравнений

$$\begin{aligned} \rho^{n+1/4} + \tau \alpha v^n \Lambda^k \rho^{n+1/4} &= \rho^n, \\ v^{n+1/4} + \tau \alpha v^n \Lambda^k v^{n+1/4} &= v^n, \\ p^{n+1/4} + \tau \alpha v^n \Lambda^k p^{n+1/4} &= p^n \end{aligned}$$

решается скалярными прогонками для каждого уравнения. На втором шаге  $n + 1/2$  решение системы разностных уравнений

$$\begin{aligned}\rho^{n+1/2} + \tau\alpha\rho^n \Lambda^k v^{n+1/2} &= \rho^{n+1/4}, \\ v^{n+1/2} + \tau\alpha(b^2)^n \bar{\Lambda}^k p^{n+1/2} &= v^{n+1/4}, \\ p^{n+1/2} + \tau\alpha(c^2)^n \Lambda^k v^{n+1/2} &= p^{n+1/4}\end{aligned}$$

сводится к скалярной прогонке для давления или скорости. Исключая, например, давление из уравнения движения, получим разностное уравнение

$$\left[ I - \tau^2 \alpha^2 (b^2)^n \bar{\Lambda}^k (c^2)^n \Lambda^k \right] v^{n+1/2} = v^{n+1/4} - \tau\alpha(b^2)^n \bar{\Lambda}^k p^{n+1/4}.$$

Его решение может быть получено  $(2k + 1)$ -точечной скалярной прогонкой, после чего явно находятся новые значения  $\rho^{n+1/2}$ ,  $p^{n+1/2}$ . Наконец, значения функций на новом временном шаге получают по явным формулам

$$\mathbf{U}^{n+1} = \mathbf{U}^n - \tau \Lambda^l \mathbf{W}_h^{n+1/2}.$$

При  $k = 1$ ,  $l = 2$  разностная схема (2.1.16) аппроксимирует исходные уравнения газовой динамики с порядком  $O(\tau^2 + \tau h + h^2)$ , реализуется трехточечными скалярными прогонками и безусловно устойчива при  $\alpha \geq 0,5$ . Для линеаризованных уравнений газовой динамики разностные схемы (2.1.3) и (2.1.16) для вектора  $\mathbf{f} = (\rho, v, p)^T$  с расщеплением (2.1.11) эквивалентны. Остановимся на анализе устойчивости этих схем. Для линейных уравнений обе разностные схемы приводятся к виду

$$\prod_{j=1}^2 (I + \tau\alpha \mathbf{B}_j \Lambda^k) \frac{\mathbf{f}^{n+1} - \mathbf{f}^n}{\tau} = -\sum_{j=1}^2 \mathbf{B}_j \Lambda^l,$$

где  $\mathbf{B}_j$  – матрицы с постоянными коэффициентами. При симметричной аппроксимации операторов схемы при  $\Lambda^k = \Lambda^l = \Lambda^2$  им соответствует характеристическое уравнение

$$\det \left\| \begin{array}{ccc} (1+i\alpha vd)(\lambda-1)+ivd & ip_0 d[\alpha(\lambda-1)+1] & 0 \\ 0 & (1+i\alpha vd)(\lambda-1)+ivd & ib^2 d[\alpha(\lambda-1)+1] \\ 0 & ic^2 d[\alpha(\lambda-1)+1] & (1+i\alpha vd)(\lambda-1)+ivd \end{array} \right\| = 0.$$

Его корни равны

$$\lambda_1 = \frac{1-i(1-\alpha)d}{1+i\alpha d}, \quad \lambda_{2,3} = \frac{1-i(1-\alpha)d(v \pm s)}{1+i\alpha d(v \pm s)},$$

и, очевидно,  $|\lambda| \leq 1$  при  $\alpha \geq 1/2$ . Здесь  $d = (\tau/h) \sin(kh)$ ,  $b^2 = 1/\rho$ ,  $c^2 = \gamma p$ ,  $s = \sqrt{\gamma p/\rho}$  – скорость звука. Подобные оценки устойчивости схемы справедливы и при несимметричной аппроксимации.

### 2.1.3. Разностные схемы при специальном расщеплении

При построении экономичных схем вида вводилось расщепление уравнений газовой динамики в недивергентном виде. Проведем расщепление уравнений газовой динамики (2.1.1), записанных в дивергентном виде (см. [52]). Пусть

$$\mathbf{W} = \mathbf{W}_1 + \mathbf{W}_2$$

и, для определенности, выбрано уравнение состояния  $p = (\gamma - 1)\rho\varepsilon$ . Тогда

$$\mathbf{W} = \mathbf{W}_1 + \mathbf{W}_2 = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho v^2 + p \\ v(E + p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho v^2 + p \\ \frac{\gamma}{\gamma - 1} \rho v p + \rho \frac{v^3}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho v^2 \\ \rho \frac{v^3}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ p \\ \frac{\gamma}{\gamma - 1} \rho v p \end{pmatrix}, \quad (2.1.17)$$

где вектор  $\mathbf{W}_1$  содержит конвективные члены,  $\mathbf{W}_2$  – члены с давлением. Выберем в качестве искомого вектора функций  $\mathbf{f} = (\rho, v, p)^T$ . Тогда расщеплению вектора  $\mathbf{W}$  соответствует расщепление уравнений в недивергентном виде

$$\mathbf{B}_1 = \mathbf{A}^{-1} \widetilde{\mathbf{B}}_1 \mathbf{A} = \begin{pmatrix} v & \rho & 0 \\ 0 & v & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}_2 = \mathbf{A}^{-1} \widetilde{\mathbf{B}}_2 \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b^2 \\ 0 & c^2 & v \end{pmatrix},$$

где, как и выше,  $b^2 = 1/\rho$ ,  $c^2 = \gamma p$  (для сравнения см. расщепление (2.1.15)). Введенное расщепление эквивалентно решению на каждом дробном шаге системы уравнений

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial \rho}{\partial t} + v \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial v}{\partial x} &= 0, & \frac{1}{2} \frac{\partial \rho}{\partial t} &= 0, \\ \frac{1}{2} \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} &= 0, & \frac{1}{2} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} &= 0, \\ \frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial t} &= 0, & \frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial t} + v \frac{\partial p}{\partial x} + \gamma p \frac{\partial v}{\partial x} &= 0, \end{aligned}$$

слабо аппроксимирующих систему уравнений газовой динамики [6], или системы уравнений

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho v) &= 0, & \frac{1}{2} \frac{\partial \rho}{\partial t} &= 0, \\ \frac{1}{2} \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} &= 0, & \frac{1}{2} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} &= 0, \\ \frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial t} &= 0, & \frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial t} + v \frac{\partial p}{\partial x} + \gamma p \frac{\partial v}{\partial x} &= 0, \end{aligned}$$

где уравнение неразрывности записано в дивергентной форме. Отметим, что введение расщепления в виде (2.1.17) приводит к тому, что уравнение неразрывности решается лишь на первом дробном шаге, а энергии – на втором. Перепишем уравнения газовой динамики в векторной форме

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} + \sum_{j=1}^2 \mathbf{B}_j \mathbf{f} = 0,$$

где

$$\mathbf{B}_1 = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} v & 0 & 0 \\ 0 & v \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b^2 \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & c^2 \frac{\partial}{\partial x} & v \frac{\partial}{\partial x} \end{pmatrix}, \quad b^2 = \frac{1}{\rho}, \quad c^2 = \gamma p, \quad (2.1.18)$$

и аппроксимируем операторы  $\mathbf{B}_j$  разностными операторами  $\mathbf{B}_j^k$  с порядком  $O(h^k)$  по формулам

$$\mathbf{B}_{1h}^k = \begin{pmatrix} \Lambda^k v^n & 0 & 0 \\ 0 & v^n \Lambda^k & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}_{2h}^k = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (b^2)^n \Lambda^k \\ 0 & (c^2)^n \Lambda^k & v^n \Lambda^k \end{pmatrix}.$$

При выбранном расщеплении разностные схемы приближенной факторизации (2.1.13) и схема предиктор–корректор (2.1.16) аппроксимируют систему уравнений (2.1.1) с порядком  $O(\tau^2 + \tau h^k + h^l)$  при  $\alpha = 0,5 + O(\tau)$  и на дробных шагах реализуются лишь тремя скалярными прогонами. Покажем это на примере схемы предиктор–корректор

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{f}^{n+1/4} - \mathbf{f}^n}{\tau \alpha} + \mathbf{B}_{1h}^1 \mathbf{f}^{n+1/4} &= 0, \\ \frac{\mathbf{f}^{n+1/2} - \mathbf{f}^{n+1/4}}{\tau \alpha} + \mathbf{B}_{2h}^1 \mathbf{f}^{n+1/2} &= 0, \\ \frac{\mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{U}^n}{\tau} &= -\Lambda^2 \mathbf{W}_h^{n+1/2} \end{aligned}$$

при  $k = 1, l = 2$ . На первом дробном шаге на этапе предиктора система разностных уравнений

$$\begin{aligned} \rho^{n+1/4} + \tau \alpha \Lambda^1 v^n \rho^{n+1/4} &= \rho^n, \\ v^{n+1/4} + \tau \alpha v^n \Lambda^1 v^{n+1/4} &= v^n, \\ p^{n+1/4} &= p^n \end{aligned}$$

решается трехточечными скалярными прогонами для плотности и скорости (или по неявной схеме бегущего счета при постоянном зна-

ке скорости), а давление переносится с предыдущего временного слоя. На втором дробном шаге система разностных уравнений

$$\begin{aligned}\rho^{n+1/2} &= \rho^{n+1/4}, \\ v^{n+1/2} + \tau\alpha(b^2)^n \Lambda^{-1} p^{n+1/2} &= v^{n+1/4}, \\ p^{n+1/2} + \tau\alpha(v)^n \Lambda^1 p^{n+1/2} + \tau\alpha(c^2)^n \Lambda^1 p^{n+1/2} &= p^{n+1/4}\end{aligned}$$

после исключения скорости  $v^{n+1/2}$  из уравнения энергии решается трехточечной скалярной прогонкой для давления

$$\left[ I + \tau\alpha(v)^n \Lambda^1 - \tau^2 \alpha^2 (c^2)^n \Lambda^{-1} (b^2)^n \Lambda^1 \right] p^{n+1/2} = p^{n+1/4} - \tau\alpha(c^2)^n \Lambda^{-1} v^{n+1/4}.$$

В качестве одного из вариантов аппроксимации разностных уравнений на первом дробном шаге могла быть выбрана разностная схема в форме

$$\begin{aligned}\rho^{n+1/4} + \tau\alpha\Lambda^1 v^{n+1/4} \rho^{n+1/4} &= \rho^n, \\ v^{n+1/4} + \tau\alpha v^n \Lambda^1 v^{n+1/4} &= v^n, \\ p^{n+1/4} &= p^n.\end{aligned}$$

Реализация уравнений в этом случае также сводится к двум скалярным прогонкам, но вначале решается уравнение для скорости, а затем для плотности. Наконец, новые значения функций на  $(n+1)$ -м шаге на этапе корректора вычисляются явно из последнего уравнения схемы (2.1.15), после чего цикл вычислений повторяется. Таким образом, общее число прогонок совпадает с числом уравнений. Покажем, что разностная схема (2.1.16) и при расщеплении (2.1.15) или (2.1.18) безусловно устойчива при  $\alpha \geq 0,5$ , например, при  $k=l=1$ . Пусть, для определенности,  $v \geq 0$ . Тогда характеристическое уравнение схемы принимает вид

$$\det \left\| (I + \alpha \mathbf{B}_1^1)(I + \alpha \mathbf{B}_2^1)(\lambda - 1) + \mathbf{B}_1^1 + \mathbf{B}_2^1 \right\| = 0,$$

где

$$\mathbf{B}_1^1 = \begin{pmatrix} v_0 d_- & \rho d_- & 0 \\ 0 & v_0 d_- & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}_2^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_0^2 d_+ \\ 0 & c_0^2 d_- & v_0 d_- \end{pmatrix},$$

$d_- = K(1 - e^{-ikh}) = K(a + ib)$ ,  $d_+ = K(e^{ikh} - 1) = K(-a + ib)$ ,  $K = \tau/h$ ,  $a = 1 - \cos(kh)$ ,  $b = \sin(kh)$ , корни характеристического уравнения равны

$$\lambda_1 = \frac{1 - (1 - \alpha)v d_-}{1 + \alpha v_0 d_-}, \quad \lambda_{2,3} = \frac{B \mp \sqrt{B^2 - AC}}{C}$$

и, очевидно,

$$|\lambda_j| \leq 1 \quad (j=1, 2, 3) \text{ при } \alpha \geq 1/2.$$

Здесь

$$A = (1 + \alpha v_0 d_-) [1 + \alpha (v_0 d_- + c_0^2 d_0^2)], \quad C = [1 - (1 - \alpha) v_0 d_-]^2 - \alpha (1 - \alpha) v_0 c_0^2 d_0^2 d_-,$$

$$B = (1 + \alpha v_0 d_-) \left[ 1 - (1 - \alpha) \left( v_0 d_- + \frac{c_0^2 d_0^2}{2} \right) \right] + \alpha^2 v_0 c_0^2 d_0^2 d_- / 2,$$

$$d_0^2 = 4K^2 \sin^2 \left( \frac{kh}{2} \right) = -d_- d_+.$$

Подобные оценки устойчивости справедливы и при  $k=1, l=2$ .

### 2.1.4. Разностная схема в переменных $\rho, \rho v, p$

Выбирая в качестве искомым функций плотность, импульс и давление, запишем уравнения газовой динамики в виде

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho v) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho v) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho v^2 + p) = 0,$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + v \frac{\partial p}{\partial x} + \gamma p \frac{\partial v}{\partial x} = 0,$$

где уравнения неразрывности и движения записаны в дивергентной форме, а энергии – в недивергентном. Для выбранных переменных подобно (2.1.18) также существует единственное расщепление уравнений в виде

$$\frac{1}{2} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho v) = 0,$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0,$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\rho v) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho v^2) = 0,$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\rho v) + \frac{\partial p}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial t} = 0,$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial t} + v \frac{\partial p}{\partial x} + \gamma p \frac{\partial v}{\partial x} = 0,$$

которое позволяет получать безусловно устойчивые схемы, реализуемые тремя скалярными прогонами. Рассмотрим схему предиктор–корректор

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{f}^{n+1/4} - \mathbf{f}^n}{\tau \alpha} + \mathbf{B}_{1h}^n \mathbf{f}^{n+1/4} &= 0, \\ \frac{\mathbf{f}^{n+1/2} - \mathbf{f}^{n+1/4}}{\tau \alpha} + \mathbf{B}_{2h}^n \mathbf{f}^{n+1/2} &= 0, \\ \frac{\mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{U}^n}{\tau} + \Lambda^l \mathbf{W}_h^{n+1/2} &= 0, \end{aligned} \quad (2.1.19)$$



где

$$\mathbf{f} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho v \\ p \end{pmatrix}, \quad B_{1h}^k = \begin{pmatrix} \Lambda^k v^n & 0 & 0 \\ 0 & \Lambda^k v^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}_{2h}^k = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \mathbf{0} \\ 0 & 0 & \bar{\Lambda}^k \\ 0 & \gamma p^n \Lambda^k \frac{1}{\rho^n} & v^n \Lambda^k \end{pmatrix}. \quad (2.1.20)$$

На этапе предиктора расщепленные уравнения аппроксимируются в недивергентном виде по формулам:

на первом дробном шаге

$$\begin{aligned} \frac{\rho^{n+1/4} - \rho^n}{\tau \alpha} + \Lambda^k (v^n \rho^{n+1/4}) &= 0, \\ \frac{(\rho v)^{n+1/4} - (\rho v)^n}{\tau \alpha} + \Lambda^k v^n (v \rho)^{n+1/4} &= 0, \\ \frac{p^{n+1/4} - p^n}{\tau \alpha} &= 0; \end{aligned} \quad (2.1.21)$$

на втором дробном шаге

$$\begin{aligned} \frac{\rho^{n+1/2} - \rho^{n+1/4}}{\tau \alpha} &= 0, \\ \frac{(\rho v)^{n+1/2} - (\rho v)^{n+1/4}}{\tau \alpha} + \bar{\Lambda}^k p^{n+1/2} &= 0, \\ \frac{p^{n+1/2} - p^{n+1/4}}{\tau \alpha} + v^n \Lambda^k p^{n+1/2} + \gamma p^n \Lambda^k v^{n+1/2} &= 0; \end{aligned}$$

а на этапе корректора – по формулам

$$\begin{aligned} \frac{\rho^{n+1} - \rho^n}{\tau \alpha} + \Lambda^l (v \rho)^{n+1/2} &= 0, \\ \frac{(\rho v)^{n+1} - (\rho v)^n}{\tau \alpha} + \Lambda^l (\rho v^2)^{n+1/2} + \bar{\Lambda}^l p^{n+1/2} &= 0, \\ \frac{E^{n+1/2} - E^n}{\tau \alpha} + \Lambda^l v^{n+1/2} (E + p)^{n+1/2} &= 0 \end{aligned}$$

в дивергентной форме с порядком  $O(h^l)$ . Разностная схема (2.1.19) реализуется на этапе предиктора подобно схеме (2.1.16) тремя скалярными прогонками (две прогонки на первом дробном шаге и одна на втором), а на этапе корректора – по явным формулам. Она аппроксимирует уравнения газовой динамики с порядком  $O(\tau^2 + \tau h^k + h^l)$  при  $\alpha = 0,5 + O(\tau)$ . Выбор различных газодинамических переменных на этапе предиктора позволяет упростить реализацию схем. Вообще говоря, при построении разностных схем для каждого дробного шага

могут рассматриваться различные газодинамические переменные. В частности, на втором дробном шаге удобнее выбрать в качестве иско- мых функций плотность, скорость и давление. Тогда матричный оператор  $\mathbf{B}_{2h}^k$  примет вид

$$\mathbf{f} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho \\ p \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}_{2h}^k = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\rho^n} \bar{\Lambda}^k \\ 0 & \gamma p^n \Lambda^k & v^n \Lambda^k \end{pmatrix},$$

и реализация схемы на этапе предиктора

$$\frac{\rho^{n+1/2} - \rho^{n+1/4}}{\tau\alpha} = 0, \quad \frac{v^{n+1/2} - v^{n+1/4}}{\tau\alpha} + \frac{1}{\rho^n} \bar{\Lambda}^k p^{n+1/2} = 0,$$

$$\frac{p^{n+1/2} - p^{n+1/4}}{\tau\alpha} + v^n \Lambda^k p^{n+1/2} + \gamma p^n \Lambda^k v^{n+1/2} = 0,$$

как и в схеме (2.1.21), сводится к неявному решению уравнения для давления

$$\left[ I + \tau\alpha v^n \Lambda^k - \tau^2 \alpha^2 \gamma p^n \Lambda^k \frac{1}{\rho^n} \bar{\Lambda}^k \right] p^{n+1/2} = p^{n+1/4} - \tau\alpha \gamma p^n \bar{\Lambda}^k v^{n+1/4}.$$

Остановимся на вопросах устойчивости разностной схемы (2.1.19) более подробно. На первом дробном шаге, как в (2.1.21) раз- ностные уравнения неразрывности и движения решаются независимо друг от друга, и поэтому уравнение неразрывности можно было бы аппроксимировать чисто неявной схемой

$$\frac{\rho^{n+1/4} - \rho^n}{\tau\alpha} + \Lambda^k (v\rho)^{n+1/4} = 0.$$

Однако аппроксимация разностных уравнений на первом дробном шаге в виде

$$\frac{\rho^{n+1/4} - \rho^n}{\tau\alpha} + \Lambda^k (v\rho)^{n+1/4} = 0,$$

$$\frac{(\rho v)^{n+1/4} - (\rho v)^n}{\tau\alpha} + \Lambda^k v^n (v\rho)^{n+1/4} = 0$$

приводит к условно устойчивой схеме. Покажем это. Дифференцируя разностные уравнения (2.1.21) по частям, запишем их в виде

$$\frac{\rho^{n+1/4} - \rho^n}{\tau\alpha} + v^{n+1/4} \Lambda^k \rho^{n+1/4} + \rho^{n+1/4} \Lambda^k v^{n+1/4} = 0,$$

$$\rho^{n+1/4} \frac{v^{n+1/4} - v^n}{\tau\alpha} + v^n \left[ \frac{\rho^{n+1/2} - \rho^{n+1/4}}{\tau\alpha} + v^{n+1/4} \Lambda^k \rho^{n+1/4} + \rho^{n+1/4} \Lambda^k v^{n+1/4} \right] +$$

$$+ v^{n+1/4} \rho^{n+1/4} \Lambda^k v^n = 0$$

или в виде

$$\frac{\rho^{n+1/4} - \rho^n}{\tau\alpha} + \nu^{n+1/4} \Lambda^k \rho^{n+1/4} + \rho^{n+1/4} \Lambda^k \nu^{n+1/4} = 0,$$

$$\frac{\nu^{n+1/4} - \nu^n}{\tau\alpha} + \nu^{n+1/4} \Lambda^k \nu^n = 0.$$

Линеаризуя их относительно вектора  $\rho^{n+1/4}, \nu^{n+1/4}$ , получим разностную схему для уравнений с постоянными коэффициентами

$$\frac{\rho^{n+1/4} - \rho^n}{\tau\alpha} + \nu_0 \Lambda^k \rho^{n+1/4} + \rho_0 \Lambda^k \nu^{n+1/4} = 0,$$

$$\frac{\nu^{n+1/4} - \nu^n}{\tau\alpha} + \nu_0 \Lambda^k \nu^n = 0.$$

Пусть, для определенности,  $\nu \geq 0, k=1, \alpha=1$ . Тогда корни характеристического уравнения

$$\det \begin{vmatrix} [1 + \nu_0(a + ib)]\lambda - 1 & \rho_0(a + ib)\lambda \\ 0 & \lambda - [1 - \nu_0(a + ib)] \end{vmatrix} = 0,$$

$$a = \frac{\tau}{h} \cdot (1 - \cos(kh)), \quad b = \frac{\tau}{h} \cdot \sin(kh)$$

равны

$$\lambda_1 = \frac{1}{1 + \nu_0(a + ib)}, \quad \lambda_2 = 1 - \nu_0(a + ib) \quad \text{и}$$

$$|\lambda_1|^2 = \frac{1}{1 + \nu_0^2(a^2 + b^2)} \leq 1, \quad |\lambda_2|^2 = (1 - \nu_0 a)^2 + (\nu_0 b)^2 = 1 - 2\nu_0 a(1 - \tau\nu_0/h) \leq 1$$

при  $\tau\nu_0/h \leq 1$ , т. е. разностная схема условно устойчива. Вместе с тем, разностная схема (2.1.21) безусловно устойчива. Представим ее в недивергентном виде

$$\frac{\rho^{n+1/4} - \rho^n}{\tau\alpha} + \nu^{n+1/4} \Lambda^k \rho^{n+1/4} + \rho^{n+1/4} \Lambda^k \nu^{n+1/4} = 0,$$

$$\frac{\nu^{n+1/4} - \nu^n}{\tau\alpha} + \nu^n \Lambda^k \nu^{n+1/4} = 0$$

и линеаризуем разностные уравнения, как и выше, относительно вектора  $\rho^{n+1/4}, \nu^{n+1/4}$ . Тогда схеме соответствует характеристическое уравнение

$$\det \begin{vmatrix} [1 + \nu_0(a + ib)]\lambda - 1 & \rho_0(a + ib)\lambda \\ 0 & [1 + \nu_0(a + ib)]\lambda - 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Его корни равны

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{1 + \nu_0(a + ib)} \quad \text{и} \quad \left| \lambda_{1,2} \right|^2 = \frac{1}{1 + \nu_0^2(a^2 + b^2)} \leq 1.$$

После линеаризации разностная схема (2.1.19) совпадает со схемой (2.1.13), т. е. она безусловно устойчива при  $\alpha \geq 0,5$ .

**Замечание.** При симметричной аппроксимации оператора правой части разностные схемы приближенной факторизации (2.1.13) и предиктор–корректор (2.1.16), (2.1.19) имеют второй порядок аппроксимации по пространству. Хорошо известно (см., например, [5]), что симметричная аппроксимация первых производных в разностных схемах приводит к осцилляциям решения. Для их подавления подобно [54] можно ввести сглаживающий оператор второго порядка малости следующего вида:

$$\Lambda W_j = \frac{W_{j+1} - W_{j-1}}{2h} - \frac{h}{2} \cdot \text{sign}(\nu) \varepsilon \frac{W_{j+1} - 2W_j + W_{j-1}}{h^2}, \quad (2.1.22)$$

где

$$\varepsilon = \frac{|W_{j+1} - 2W_j + W_{j-1}|}{|W_{j+1} - W_j| + |W_j - W_{j-1}|} \quad \text{и} \quad \varepsilon = 0, \quad \text{если} \quad |W_{j+1} - W_j| + |W_{j+1} - W_{j-1}| = 0.$$

Как показывают расчеты различных задач [53, 55–58], введение сглаживания практически устраняет осцилляции решения.

### 2.1.5. Диссипативные свойства схем расщепления

Как отмечалось выше, введение расщепления в исходных уравнениях приводит к появлению в разностных схемах дополнительных членов, отсутствующих в нефакторизованной схеме. Действительно, стабилизирующий оператор схемы приближенной факторизации

$$\prod_{j=1}^2 (I + \tau \alpha B_{jh}^n \Lambda^k) \frac{\mathbf{f}^{n+1} - \mathbf{f}^n}{\tau} = -(\mathbf{A}_h^{-1})^n \Lambda^k \mathbf{W}_h^n \quad (2.1.23)$$

равен

$$(I + \tau \alpha \mathbf{B}_{1h} \Lambda^k)(I + \tau \alpha \mathbf{B}_{2h} \Lambda^k) = I + \tau \alpha \mathbf{B}_h \Lambda^k + \mathbf{D},$$

т. е. содержит дополнительные члены

$$\mathbf{D} = \tau^2 \alpha^2 \mathbf{B}_{1h} \Lambda^k \mathbf{B}_{2h} \Lambda^k$$

второго порядка малости по времени во всех уравнениях. В качестве примера приведем вид диссипативной матрицы:

$$\mathbf{D} = (\tau \alpha)^2 B_h^1 B_h^2 = (\tau \alpha)^2 \begin{pmatrix} 0 & \nu \Lambda r \Lambda & 0 \\ \nu \Lambda a^2 \bar{\Lambda} & 0 & \nu \Lambda b^2 \bar{\Lambda} \\ 0 & \nu \Lambda c^2 \Lambda & 0 \end{pmatrix},$$

для той же разностной схемы для вектора  $\mathbf{f} = (\rho, v, e)^T$  при расщеплении

$$\mathbf{B}_h^1 = v\Lambda\mathbf{I}, \quad \mathbf{B}_h^2 = \begin{pmatrix} 0 & \rho\Lambda & 0 \\ v\Lambda a^2\bar{\Lambda} & 0 & b^2\bar{\Lambda} \\ 0 & c^2\Lambda & 0 \end{pmatrix}.$$

Для разностной схемы приближенной факторизации в переменных  $\mathbf{f} = (\rho, v, p)^T$  с расщеплением (2.1.15) диссипативная матрица равна

$$\mathbf{D} = (\tau\alpha)^2 \mathbf{B}_h^1 \mathbf{B}_h^2 = (\tau\alpha)^2 \begin{pmatrix} 0 & v\Lambda\rho\Lambda & 0 \\ 0 & 0 & v\Lambda b^2\bar{\Lambda} \\ 0 & v\Lambda c^2\Lambda & 0 \end{pmatrix},$$

т. е. дополнительные члены возникают во всех уравнениях газовой динамики. Выше отмечалось (см. главу 1), что хотя это члены второго порядка малости, но они могут оказывать влияние на точность решения, особенно при решении нестационарных задач. При решении стационарных задач при установлении эти члены исчезают, однако скорость сходимости к стационарному решению зависит от вида матрицы  $\mathbf{D}$  и временного шага  $\tau$  и для различных расщеплений может быть различной. Идеальным представляется задание таких расщеплений оператора  $\mathbf{B}$ , при которых разностные схемы реализовывались бы экономичными алгоритмами, например, скалярными прогонками, были безусловно устойчивыми (при значении весового множителя  $\alpha \geq 0,5$ ), а диссипативная матрица  $\mathbf{D}$  была бы нулевой, т. е. схема приближенной факторизации совпадала с нефакторизованной схемой. Однако для газодинамических переменных – плотность, скорость и температура или давление, таких расщеплений не существует (см. [46]), и задача отыскания схем точной факторизации в других газодинамических переменных остается открытой. Некоторые подходы построения схем расщепления с точной факторизацией оператора рассмотрены в [46].

Анализ различных форм расщеплений показывает, что для вектора искомых функций  $\mathbf{f} = (\rho, v, e)^T$  существует единственное расщепление матричного оператора  $\mathbf{B}_h$  на их сумму в виде

$$\mathbf{B}_{1h}\Lambda = \begin{pmatrix} 0 & \rho\Lambda & 0 \\ a^2\bar{\Lambda} & v\Lambda & b^2\bar{\Lambda} \\ 0 & c^2\Lambda & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}_{2h}\Lambda = \begin{pmatrix} v\Lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & v\Lambda \end{pmatrix}, \quad (2.1.24)$$

когда дополнительные члены

$$\mathbf{D} = \tau^2 \alpha^2 \mathbf{B}_{1h}\Lambda \mathbf{B}_{1h}\Lambda = (\tau\alpha)^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a^2\bar{\Lambda}v\Lambda & 0 & b^2\bar{\Lambda}v\Lambda \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

возникают лишь в уравнении движения. Как следует из введенного расщепления, разностная схема приближенной факторизации (2.1.23) или эквивалентная ей схема в дробных шагах

$$\begin{aligned}\xi^n &= -(\mathbf{A}_h^{-1})^n \Lambda^l \mathbf{W}_h^n, \\ (\mathbf{I} + \tau\alpha \mathbf{B}_{1h}^n \Lambda^k) \xi^{n+1/2} &= \xi^n, \\ (\mathbf{I} + \tau\alpha \mathbf{B}_{2h}^n \Lambda^k) \xi^{n+1} &= \xi^{n+1/2}, \\ \mathbf{f}^{n+1} &= \mathbf{f}^n + \tau \xi^{n+1}\end{aligned}$$

реализуется на дробных шагах скалярными прогонками. Значения функций на нулевом шаге вычисляются явно. На первом дробном шаге система разностных уравнений

$$\begin{aligned}\xi_p^{n+1/2} &= \xi_p^n - \tau\alpha \rho^n \Lambda^k \xi_v^{n+1/2}, \\ \xi_v^{n+1/2} + \tau\alpha \left[ v^n \Lambda^k \xi_v^{n+1/2} + a^2 \bar{\Lambda}^k \xi_p^{n+1/2} + b^2 \bar{\Lambda}^k \xi_p^{n+1/2} \right] &= \xi_v^n, \\ \xi_p^{n+1/2} &= \xi_p^n - \tau\alpha c^2 \Lambda^k \xi_v^{n+1/2}\end{aligned}$$

реализуется скалярной прогонкой для невязки скорости их уравнения

$$\begin{aligned}\left[ I + \tau\alpha v^n \Lambda^k - \tau^2 \alpha^2 (a^2 \bar{\Lambda}^k \rho^n \Lambda^k + b^2 \bar{\Lambda}^k c^2 \Lambda^k) \right] \xi_v^{n+1/2} &= \\ = \xi_v^n - \tau\alpha (a^2 \bar{\Lambda}^k \xi_p^n + b^2 \bar{\Lambda}^k \xi_p^n),\end{aligned}$$

полученного исключением невязок давления и плотности, после чего явно находятся значения  $\xi_p^{n+1/2}, \xi_p^{n+1/2}$ . На втором дробном шаге разностные уравнения

$$\begin{aligned}\xi_p^{n+1} + \tau\alpha v^n \Lambda^k \xi_p^{n+1} &= \xi_p^{n+1/2}, \\ \xi_v^{n+1} &= \xi_v^{n+1/2}, \\ \xi_p^{n+1} + \tau\alpha V^n \Lambda^k \xi_p^{n+1/2} &= \xi_p^{n+1/2}\end{aligned}$$

решаются скалярными прогонками для расщепленных уравнений неразрывности и энергии. Таким образом, реализация разностных уравнений газовой динамики по схеме (2.1.23) с расщеплением в форме (2.1.24) сводится к трем скалярным прогонкам.

Уравнения газовой динамики (2.1.1) наиболее простую форму принимают в переменных  $\mathbf{f} = (\rho, v, p)^T$ , для которых матричный оператор  $\mathbf{B}_h$  представлен в виде расщепления

$$\mathbf{B}_{1h} \Lambda = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b^2 \bar{\Lambda} \\ 0 & c^2 \Lambda & v \Lambda \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}_{2h} \Lambda = \begin{pmatrix} \Lambda v & 0 & 0 \\ 0 & v \Lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.1.25)$$

При этом расщеплении дополнительный член

$$\mathbf{D} = \tau^2 \alpha^2 \mathbf{B}_{1h} \Lambda \mathbf{B}_{1h} \Lambda = (\tau \alpha)^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & c^2 \Lambda v \Lambda & 0 \end{pmatrix}$$

в схеме (2.1.23) возникает лишь в уравнении энергии. Отметим, что при расщеплении (2.1.25) разностная схема (2.1.23) или аналогичная схема предиктор–корректор

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{f}^{n+1/4} - \mathbf{f}^n}{\tau} + \mathbf{B}_{1h}^n \Lambda^k \mathbf{f}^{n+1/4} &= 0, \\ \frac{\mathbf{f}^{n+1/2} - \mathbf{f}^{n+1/4}}{\tau} + \mathbf{B}_{2h}^n \Lambda^k \mathbf{f}^{n+1/2} &= 0, \\ \frac{\mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{U}^n}{\tau} + \Lambda' \mathbf{W}_h^{n+1/2} &= 0 \end{aligned}$$

реализуются лишь тремя скалярными прогонками. Для линеаризованных уравнений рассмотренные выше схемы приближенной факторизации (2.1.23) или предиктор–корректор (2.1.19) с расщеплением в форме (2.1.24) или (2.1.25) обладают свойством безусловной устойчивости при  $\alpha = 0,5 + O(\tau)$ . Все другие формы расщепления приводят или к большому числу дополнительных членов в разностных схемах, или к потере безусловной устойчивости.

Так как выбор газодинамических переменных плотность, скорость, давление или температура удобен при проведении расчетов, то расщепление матричных операторов  $\mathbf{B}_h$  будем задавать таким образом, чтобы построенные разностные схемы сохраняли свойство безусловной устойчивости, реализовывались скалярными прогонками и имели бы минимальное число дополнительных членов. Такие схемы назовем схемами *оптимального расщепления* [52]. Этому свойству удовлетворяют разностные схемы приближенной факторизации или схемы предиктор–корректор с расщеплением в форме (2.1.20), (2.1.24), (2.1.25). Можно ожидать, что влияние расщепления будет минимальным для разностных схем, в которых число ненулевых членов в диссипативных матрицах  $\mathbf{D} = \tau^2 \alpha^2 \mathbf{B}_{1h} \Lambda \mathbf{B}_{1h} \Lambda$  минимально. Для подтверждения этого утверждения см. [52], где проведены расчеты квазиодномерного течения в канале переменного сечения при нахождении стационарного решения по разностной схеме (2.1.23) с расщеплением вида (2.1.25). Для получения стационарного решения с одними и теми же начальными данными и шагами сетки с расщеплением (2.1.25) требовалось в 2–3 раза меньше числа шагов, чем при расщеплении (2.1.12). Как следствие, пропорционально сокращалось и время расчета, хотя различия в реализации схем при различных расщеплениях минимальны. Поэтому при построении экономичных разностных схем для решения многомерных задач важным является

как выбор газодинамических переменных, в которых ищется решение, так и форма расщепления исходных многомерных операторов на простые одномерные. Некоторые примеры расчетов по схемам расщепления приведены также в §2.3.

## § 2.2. Схемы для уравнений Навье–Стокса

Остановимся на построении экономичных неявных разностных схем для решений уравнений Навье–Стокса сжимаемого теплопроводного газа. Приведем их вид в декартовых координатах при отсутствии внешних сил [1]

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial x} = 0, \quad (2.2.1)$$

где

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho v \\ E \end{pmatrix}, \quad \mathbf{W} = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho v^2 + p - \mu \frac{\partial v}{\partial x} \\ v(E + p) - \kappa \frac{\partial T}{\partial x} - \mu v \frac{\partial v}{\partial x} \end{pmatrix}, \quad E = \rho(e + v^2/2).$$

Здесь, как и для уравнений газовой динамики,  $\rho$ ,  $v$ ,  $e$ ,  $T$ ,  $p$  – плотность, скорость, внутренняя энергия, температура и давление,  $\mu$  и  $\kappa$  – коэффициенты вязкости и теплопроводности. Очевидно, при  $\kappa = \mu = 0$  уравнения (2.2.1) переходят в уравнения газовой динамики. Для замыкания системы уравнений необходимо задать уравнения состояния

$$p = p(\rho, \varepsilon), \quad e = e(\rho, T)$$

и зависимости коэффициентов вязкости и теплопроводности, которые будем полагать известными. Наряду с консервативной формой уравнений (2.2.1) представим их в недивергентной и предельно-дивергентной формах

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} = -\mathbf{B}\mathbf{f} + \mathbf{F} = -\mathbf{A}^{-1} \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial x}, \quad (2.2.2)$$

где вид операторов  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  определяется конкретным заданием компонент вектора  $\mathbf{f}$  и вектора  $\mathbf{f} = (\rho, v, T)^T$ . Например, для уравнения состояния  $p = (\gamma - 1)\rho e$ ,  $e = c_v T$  они равны

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} v \frac{\partial}{\partial x} & \rho \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ a^2 \frac{\partial}{\partial x} & v \frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} \mu \frac{\partial}{\partial x} & b^2 \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & c^2 \frac{\partial}{\partial x} & v \frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{\rho c_v} \frac{\partial}{\partial x} \kappa \frac{\partial}{\partial x} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\mu}{\rho} \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \end{pmatrix}, \quad (2.2.3)$$



где  $a^2 = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \rho}$ ,  $b^2 = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial T}$ ,  $c^2 = \frac{p}{\rho c_v}$ ,  $\kappa = \frac{\kappa_0}{c_v}$ ,  $c_v$  – теплоемкость газа при постоянном объеме. Отметим эквивалентность форм записи уравнений в дивергентном (2.2.1) и недивергентном (2.2.2) виде. Разностные схемы для решения уравнений Навье–Стокса строятся подобно схемам для уравнений газовой динамики. Следуя идеологии расщепления [6], представим матричный оператор  $\mathbf{B}$  из (2.2.3) в виде расщепления по физическим процессам

$$\mathbf{B} = \sum_{j=1}^3 \mathbf{B}_j,$$

где

$$\mathbf{B}_1 = \begin{pmatrix} v \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & v \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & v \frac{\partial}{\partial x} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}_2 = \begin{pmatrix} 0 & \rho \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ a^2 \frac{\partial}{\partial x} & 0 & b^2 \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & c^2 \frac{\partial}{\partial x} & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{B}_3 = -\frac{1}{\rho} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x} \mu \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \kappa \frac{\partial}{\partial x} \end{pmatrix}.$$

Операторы  $\mathbf{B}_1$  и  $\mathbf{B}_2$  содержат газодинамические члены уравнений, а  $\mathbf{B}_3$  – диссипативные члены. Выделение членов с вязкостью и теплопроводностью в отдельный оператор приводит к разностным схемам расщепления на три дробных шага, что, как следствие, приводит к увеличению числа арифметических операций при их реализации. Из вида матричных операторов  $\mathbf{B}_1$  и  $\mathbf{B}_3$  следует, что их объединение в единый шаг приведет к уменьшению числа дробных шагов без усложнения алгоритмов. Тогда можно рассматривать расщепление операторов в виде

$$\mathbf{B}_1 = \begin{pmatrix} v \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & v \frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} \mu \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & v \frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{\rho c_v} \frac{\partial}{\partial x} \kappa \frac{\partial}{\partial x} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}_2 = \begin{pmatrix} 0 & \rho \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ a^2 \frac{\partial}{\partial x} & 0 & b^2 \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & c^2 \frac{\partial}{\partial x} & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.2.4)$$

Аппроксимируем дифференциальные операторы сеточными операторами с порядком  $O(h^k)$  по формулам

$$\mathbf{B}_{1h}\Lambda^k = \begin{pmatrix} v\Lambda^k & 0 & 0 \\ 0 & v\Lambda^k - \frac{1}{\rho}\Lambda\mu\Lambda & 0 \\ 0 & 0 & v\Lambda^k - \frac{1}{\rho c_v}\Lambda\kappa\Lambda \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{B}_{2h}\Lambda^k = \begin{pmatrix} 0 & \rho\Lambda^k & 0 \\ a^2\overline{\Lambda^k} & 0 & b^2\overline{\Lambda^k} \\ 0 & c^2\Lambda^k & 0 \end{pmatrix},$$

а оператор  $\partial\mathbf{W}/\partial x$  – сеточным оператором  $\Lambda^l\mathbf{W}_h$  с порядком  $O(h^l)$

$$\Lambda^l\mathbf{W} = \Lambda^l \begin{pmatrix} \mathbf{W}_{1h} \\ \mathbf{W}_{2h} \\ \mathbf{W}_{3h} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Lambda^l\rho v \\ \Lambda^l\rho v^2 + \overline{\Lambda^l}p - \Lambda\mu\Lambda v \\ \Lambda^lv(E+p) - \Lambda\kappa\Lambda T - \Lambda\mu v\Lambda v \end{pmatrix}.$$

Вторые производные в операторе  $\mathbf{B}_1$  и векторе  $\partial\mathbf{W}/\partial x$  будем аппроксимировать симметричными операторами со вторым порядком.

Для численного решения уравнений Навье–Стокса рассмотрим разностную схему приближенной факторизации

$$\prod_{j=1}^2 (I + \tau\alpha\mathbf{B}_{jh}^n) \frac{\mathbf{f}^{n+1} - \mathbf{f}^n}{\tau} = -(\mathbf{A}_h^{-1})^n \Lambda^l\mathbf{W}_h^n. \quad (2.2.5)$$

Она аппроксимирует исходные уравнения (2.2.1) с порядком  $O(\tau + \tau h^k + h^l)$ , а при установлении стационарные уравнения  $\Lambda^l\mathbf{W}_h^n = 0$  в консервативной форме с порядком  $O(h^l)$ , так как матрица  $\mathbf{A}^{-1} \neq 0$ . Ей эквивалентна схема в дробных шагах

$$\begin{aligned} \xi^n &= -(\mathbf{A}_h^{-1})^n \Lambda^l\mathbf{W}_h^n, \\ (\mathbf{I} + \tau\alpha\mathbf{B}_{1h}^n)\xi^{n+1/2} &= \xi^n, \\ (\mathbf{I} + \tau\alpha\mathbf{B}_{2h}^n)\xi^{n+1} &= \xi^{n+1/2}, \\ \mathbf{f}^{n+1} &= \mathbf{f}^n + \tau\xi^{n+1}. \end{aligned} \quad (2.2.6)$$

На дробных шагах, как следует из вида матричных операторов в (2.2.4), схема реализуется подобно схеме для уравнений газовой динамики четырьмя скалярными прогонками. Для повышения эффек-

тивности алгоритма введем оптимальное расщепление операторов подобно (2.1.24) в виде

$$\mathbf{B}_{1h}\Lambda^k = \begin{pmatrix} 0 & \rho\Lambda^k & 0 \\ a^2\bar{\Lambda}^k & v\Lambda^k - \frac{1}{\rho}\Lambda\mu\Lambda & b^2\bar{\Lambda}^k \\ 0 & c^2\Lambda^k & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}_{2h}\Lambda^k = \begin{pmatrix} v\Lambda^k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & v\Lambda^k - \frac{1}{\rho c_v}\Lambda\kappa\Lambda \end{pmatrix}. \quad (2.2.7)$$

Остановимся на реализации схемы (2.2.6) с расщеплением (2.2.7). На нулевом шаге разностные уравнения

$$\begin{aligned} \xi_p^n &= -\Lambda^l W_1^n, \\ \xi_v^n &= -\frac{1}{\rho^n}(\Lambda^l W_2^n - v^n \Lambda^l W_1^n), \\ \xi_T^n &= -\frac{1}{\rho^n} \left[ \frac{1}{\rho^n} \Lambda^l W_3^n - v^n \Lambda^l W_2^n + (c_v T - v^2/2)^n \Lambda^l W_1^n \right] \end{aligned}$$

решаются явно (вид операторов приведен для уравнения состояния  $p = (\gamma - 1)c_v \rho T$ ). На первом дробном шаге система разностных уравнений

$$\begin{aligned} \xi_p^{n+1/2} &= \xi_p^n - \tau\alpha\rho^n \Lambda^l \xi_v^{n+1/2}, \\ \xi_v^{n+1/2} + \tau\alpha \left( v\Lambda^k - \frac{1}{\rho} \Lambda\mu\Lambda \right) \xi_v^{n+1/2} + \tau\alpha(a^2\bar{\Lambda}^{-1}\xi_p^{n+1/2} + b^2\bar{\Lambda}^{-1}\xi_T^{n+1/2}) &= \xi_v^n, \\ \xi_T^n = \xi_T^{n+1/2} = \xi_T^n - \tau\alpha c^2 \Lambda^l \xi_v^{n+1/2} \end{aligned}$$

решается скалярной прогонкой для невязки скорости  $\xi_v^{n+1}$  из уравнения (для  $k = 1$ )

$$\begin{aligned} \left[ I + \tau\alpha(v\Lambda^k - \frac{1}{\rho} \Lambda\mu\Lambda) - \tau^2\alpha^2(a^2\bar{\Lambda}^{-1}\rho^n\Lambda^l + b^2\bar{\Lambda}^{-1}c^2\Lambda^l) \right] \xi_v^{n+1/2} &= \\ = \xi_v^n - \tau\alpha(a^2\bar{\Lambda}^{-1}\xi_p^n + b^2\bar{\Lambda}^{-1}\xi_T^n), \end{aligned}$$

полученного исключением невязок плотности и давления из уравнения движения. После чего по явным формулам находятся значения  $\xi_p^{n+1/2}$ ,  $\xi_T^{n+1/2}$ . На втором дробном шаге разностные уравнения

$$\begin{aligned} \xi_p^{n+1} + \tau\alpha v\Lambda^k \xi_p^{n+1} &= \xi_p^{n+1/2}, \\ \xi_v^{n+1/2} &= \xi_v^{n+1/2}, \\ \xi_T^{n+1} + \tau\alpha \left( v\Lambda^k - \frac{1}{\rho c_v} \Lambda\kappa\Lambda \right) \xi_T^{n+1} &= \xi_T^{n+1/2} \end{aligned}$$

решаются скалярными прогонками для невязки плотности и температуры. Значения всех функций на новом временном шаге  $n + 1$  определяются явно из последнего уравнения схемы (2.2.6).

Разностная схема предиктор–корректор

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{f}^{n+1/4} - \mathbf{f}^n}{\tau\alpha} + \mathbf{B}_{1h}^k \mathbf{f}^{n+1/4} &= 0, \\ \frac{\mathbf{f}^{n+1/2} - \mathbf{f}^{n+1/4}}{\tau\alpha} + \mathbf{B}_{2h}^k \mathbf{f}^{n+1/2} &= 0, \\ \frac{\mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{U}^n}{\tau} &= -\Lambda^l \mathbf{W}_h^{n+1/2} \end{aligned} \quad (2.2.8)$$

аппроксимирует уравнения Навье–Стокса с порядком  $O(\tau^2 + \tau h^k + h^l)$  при  $\alpha = 0,5 + O(\tau)$ , а при установлении – с порядком  $O(h^l)$ . Как и схема (2.2.5), она реализуется на дробных шагах на этапе предиктора тремя скалярными прогонками. Для линейаризованных уравнений Навье–Стокса разностные схемы безусловно устойчивы при  $\alpha \geq 0,5$ .

Разностные схемы в переменных плотность, скорость и давление строятся аналогично. Приведем вид матричного оператора  $\mathbf{B}$  в этих переменных:

$$\mathbf{f} = \begin{pmatrix} \rho \\ v \\ p \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} v & 0 & 0 \\ 0 & v \frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} \mu \frac{\partial}{\partial x} & b^2 \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & c^2 \frac{\partial}{\partial x} & v \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} k \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{\rho} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \mu_1 \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \end{pmatrix},$$

где  $b^2 = \frac{1}{\rho}$ ,  $c^2 = \frac{\gamma p}{c_v}$ ,  $k = \frac{\kappa}{c_v}$ ,  $\mu_1 = \frac{\mu}{\rho c_v}$ . Заметим, что в операторе  $\mathbf{B}$  уравнение неразрывности, как и для уравнений газовой динамики, записано в дивергентном виде. Аппроксимируем оператор  $\mathbf{B}$  оператором  $\mathbf{B}_h$  с порядком  $O(h_k)$  и представим его в виде расщепления

$$\mathbf{B}_{1h} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b^2 \overline{\Lambda^k} \\ 0 & c^2 \Lambda^k & v \Lambda^k - \Lambda k \Lambda \frac{1}{\rho} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}_{2h} = \begin{pmatrix} \Lambda^k v & 0 & 0 \\ 0 & v \Lambda^k - \frac{1}{\rho} \Lambda \mu \Lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Разностные схемы приближенной факторизации (2.2.5) или предиктор–корректор (2.2.8) реализуются на дробных шагах тремя скалярными прогонками. Покажем это на примере схемы предиктор–кор-

ректор (2.2.8). На первом дробном шаге система разностных уравнений

$$\begin{aligned}\rho^{n+1/4} &= \rho^n, \\ v^{n+1/4} + \tau\alpha(b^2)^n \bar{\Lambda}^k p^{n+1/4} &= v^n, \\ p^{n+1/4} + \tau\alpha(c^2)^n \Lambda^k v^{n+1/4} + \tau\alpha\left(v^n \Lambda^k - \Lambda k^n \Lambda \frac{1}{\rho^n}\right) p^{n+1/4} &= p^n\end{aligned}$$

решается подобно схеме (2.2.6). Исключая значение  $v^{n+1/4}$  из уравнения энергии, получим разностное уравнение для давления

$$\begin{aligned}\left[ I + \tau\alpha\left(v^n \Lambda^k - \Lambda k^n \Lambda \frac{1}{\rho^n}\right) - \tau^2 \alpha^2 (c^2)^n \Lambda^k (b^2)^n \bar{\Lambda}^k \right] p^{n+1/4} &= \\ = p^n - \tau\alpha(c^2)^n \Lambda^k v^n.\end{aligned}$$

Его решение находится скалярной  $(2k + 1)$ -точечной прогонкой (при  $k = 1$  – трехточечной прогонкой), после чего по явным формулам вычисляется значение  $v^{n+1/4}$  на новом слое, а значение плотности переносится с предыдущего слоя. На втором дробном шаге  $n + 1/2$  система разностных уравнений

$$\begin{aligned}\rho^{n+1/2} + \tau\alpha\Lambda^k (v^n \rho^{n+1/2}) &= \rho^{n+1/4}, \\ \left[ I + \tau\alpha\left(v^n \Lambda^k - \frac{1}{\rho^n} \Lambda \mu^n \Lambda\right) \right] v^{n+1/4} &= v^{n+1/4}, \\ p^{n+2/4} &= p^{n+1/4}\end{aligned}$$

решается независимо для компонент плотности и скорости, а значение давления на новом слое переносится с предыдущего слоя. Наконец, новые значения всех функций на слое  $n + 1$  находятся на этапе корректора схемы (2.2.8) по явным формулам. Подобно схеме для уравнений газовой динамики разностная схема (2.2.8) безусловно устойчива при соответствующем выборе весового множителя.

Экономичные разностные схемы могут быть построены и при использовании других газодинамических переменных. Например, для вектора  $\mathbf{f} = (\rho, \rho v, T)^T$  по аналогии с расщеплением для уравнений газовой динамики введем расщепление уравнений в виде

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v) &= 0, & \frac{\partial \rho}{\partial t} &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial t}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial x}(v \rho v^2 - \mu \frac{\partial v}{\partial x}) &= 0, & \frac{\partial}{\partial t}(\rho v) + \frac{\partial p}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial p}{\partial t} &= 0, & \frac{\partial p}{\partial t} + v \frac{\partial p}{\partial x} + c^2 \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} k \frac{\partial T}{\partial x} &= 0.\end{aligned}$$

Тогда разностная схема вида (2.2.5) аппроксимирует исходные уравнения Навье–Стокса соответственно с порядком  $O(\tau + \tau h^k + h^l)$ , а схема (2.2.8) с порядком  $O(\tau^2 + \tau h^k + h^l)$  при  $\alpha = 0,5 + O(\tau)$ , и эти схемы реализуются тремя скалярными прогонками. Опишем их реализацию на примере схемы предиктор–корректор (2.2.8). На этапе предиктора, на первом дробном шаге система разностных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\rho^{n+1/4} - \rho^n}{\tau\alpha} + \Lambda^k (v^n \rho^{n+1/4}) &= 0, \\ \frac{(\rho v)^{n+1/4} - (\rho v)^n}{\tau\alpha} + \Lambda^k v^n (v\rho)^{n+1/4} - \Lambda \mu^n \Lambda v^{n+1/4} &= 0, \\ \frac{p^{n+1/4} - p^n}{\tau\alpha} &= 0 \end{aligned}$$

решается двумя скалярными прогонками. На втором дробном шаге система разностных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\rho^{n+1/2} - \rho^{n+1/4}}{\tau\alpha} &= 0, \\ \frac{(\rho v)^{n+1/2} - (\rho v)^{n+1/4}}{\tau\alpha} + \bar{\Lambda}^{-k} (\gamma - 1) \rho^{n+1/2} T^{n+1/2} &= 0, \\ \frac{T^{n+1/2} - T^{n+1/4}}{\tau\alpha} + v^n \Lambda^k T^{n+1/2} + c^2 \Lambda^k v^{n+1/2} - \frac{1}{\rho^n c_v} \Lambda \mu^n \Lambda T^{n+1/2} &= 0 \end{aligned} \quad (2.2.9)$$

решается одной скалярной прогонкой из уравнения

$$\begin{aligned} \left[ I + \tau\alpha (v^n \Lambda^k - \frac{1}{c_v \rho^n} \Lambda \mu^n \Lambda) - \tau^2 \alpha^2 (\gamma - 1) c^2 \Lambda^k \frac{1}{\rho^{n+1/2}} \bar{\Lambda}^{-k} \rho^{n+1/2} \right] T^{n+1/2} &= \\ = T^{n+1/4} - c^2 \Lambda^k v^{n+1/4}. \end{aligned}$$

Плотность  $\rho^{n+1/2}$  в уравнении движения аппроксимирована на верхнем слое, так как ее значение известно из первого уравнения схемы. После нахождения температуры  $T^{n+1/2}$  явно вычисляется значение скорости  $v^{n+1/2}$ . На этапе корректора новые значения функций на слое  $n + 1$  вычисляются явно по схеме (2.2.8). Таким образом, реализация разностной схемы также сводится к трем скалярным прогонкам.

### § 2.3. Примеры численных расчетов

Для апробации рассмотренных выше разностных схем и оценки их эффективности были проведены расчеты одномерных течений в приближении уравнений Эйлера и уравнений Навье–Стокса. Проведенные расчеты подтвердили теоретические оценки по устойчивости

схем и их достаточную точность при аппроксимации исходных уравнений со вторым порядком по времени и пространству. В качестве тестовых одномерных задач рассматривались две задачи: численно находилось нестационарное решение задачи о распаде произвольного разрыва и численно методом установления отыскивалось стационарное решение задачи о квазиодномерном течении в канале переменного сечения.

### § 2.3.1. Задача о распаде произвольного разрыва

Труба постоянного сечения заполнена покоящимся газом и перегороджена заслонкой, по обе стороны которой заданы различные параметры газа – давление и плотность. В момент времени  $t = 0$  заслонка мгновенно убирается. Требуется найти решение задачи при  $t > 0$ . Полная постановка задачи о распаде произвольного разрыва дана, например, в [1, 59]. Исходные уравнения газовой динамики решались в переменных плотность, импульс и давление по схемам приближенной факторизации (2.1.13) и по схеме предиктор–корректор (2.1.16) с оптимальным расщеплением операторов  $\mathbf{B}_h$  в виде (2.1.15). При аппроксимации операторов  $\mathbf{B}_{jh}$  были выбраны несимметричные разности первого порядка, а для оператора  $\Lambda \mathbf{W}_h$  – либо первого порядка с несимметричной аппроксимацией, либо второго порядка с введением сглаживающего оператора (2.1.22). Расчеты, выполненные по различным разностным схемам приближенной факторизации и предиктор–корректор, дали практически одинаковые результаты.

При проведении численных расчетов задавались: длина расчетной области  $L = 10$ , шаги сетки выбирались равномерными ( $h = 0,625$ ). Левая граница расчетной области выбрана при  $x = -4$ , правая при  $x = 6$ . Разрыв параметров в начальный момент времени задан при  $x = 0$ . Параметры газа слева и справа от разрыва задавались равными

$$\begin{pmatrix} \rho_1 \\ v_1 \\ p_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \rho_2 \\ v_2 \\ p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,125 \\ 0 \\ 0,1 \end{pmatrix}.$$

Решение задачи о течении газа в трубе приведено ниже на момент времени  $t = 2,5$ . На рис. 2.3.1, 2.3.2 приведены распределения скорости и плотности газа в канале, полученные со вторым порядком точности по разностной схеме приближенной факторизации вида (2.1.13). Треугольниками дано численное решение, сплошной линией – точное решение. Как видно из рисунков, численное решение достаточно хорошо совпадает с точным, правильно передавая скорость ударной волны и контактного разрыва. Максимальное различие между точным и численным решениями не превышало 0,35 % для плот-

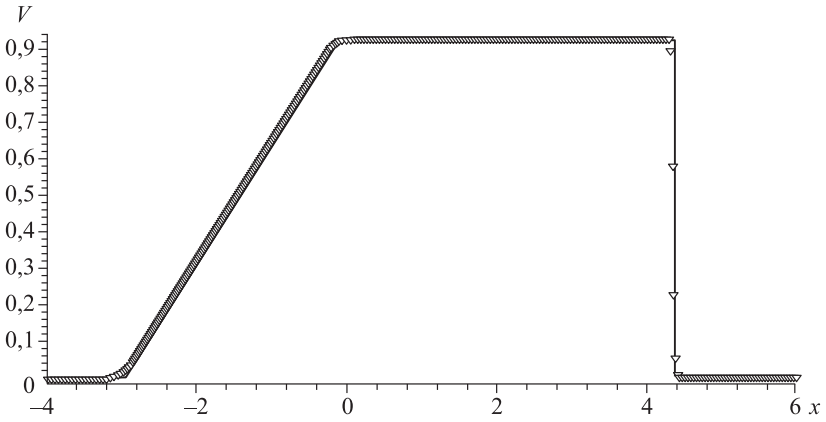


Рис. 2.3.1. Распределение скорости газа.

ности, наибольшие расхождения наблюдались в области контактного разрыва. Расчеты по схеме второго порядка аппроксимации показали, как и следовало ожидать, ее преимущество перед схемами первого порядка по точности вычислений. Размазывание фронта ударной волны по схеме первого порядка составляло 7–10 узлов (см. [59]), для схемы второго порядка – три, контактный разрыв размывался на 7–8 узлов. Однако и первый порядок схем обеспечивал правильную скорость движения фронтов за счет консервативной аппроксимации уравнений в правой части схемы. Наилучшая точность расчетов была получена при числах Куранта  $0,5 \leq K \leq 2$ . Таким образом, примене-

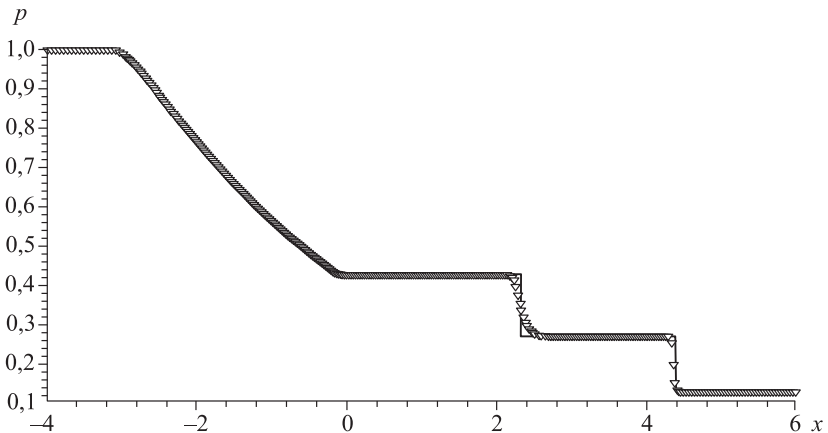


Рис. 2.3.2. Распределение плотности газа.



ние неявных разностных схем при решении одномерной нестационарной задачи не дает выигрыша в затратах ресурсов ЭВМ, что и следовало ожидать. Заметим, что при решении нестационарных задач временной шаг выбирается из условий, обеспечивающих заданную точность по временной переменной. Неявные разностные схемы предпочтительнее при решении уравнений газовой динамики, особенно при получении стационарного решения методом установления (см. главу 3), так как временной (итерационный шаг) выбирается лишь из условия наиболее быстрой сходимости к стационарному решению. При решении уравнений Навье–Стокса (и параболических задач) влияние вязких членов может оказаться преобладающим, и здесь применение неявных схем становится необходимостью.

### 2.3.2. Течение в канале переменного сечения

Наряду с одномерными уравнениями газовой динамики интерес может представлять модель квазиодномерных уравнений газовой динамики (см. [1, 59])

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(A\rho) + \frac{\partial}{\partial x}(A\rho v) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial t}(A\rho v) + \frac{\partial}{\partial x}[A(\rho v^2 + p)] &= p \frac{dA}{dx}, \\ \frac{\partial}{\partial t}(AE) + \frac{\partial}{\partial x}[Av(E + p)] &= 0, \end{aligned} \quad (2.3.1)$$

полученных из двумерных уравнений путем осреднения параметров потока в поперечном направлении. Здесь  $A = A(x)$  – площадь поперечного сечения канала. Типичная форма канала приведена на рис. 2.3.3.

Практически сохраняя форму одномерных уравнений газовой динамики, стационарные уравнения (2.3.1) имеют точное решение [59], которое может быть как непрерывным, так и разрывным, что позволяет оценивать эффективность предлагаемых численных алгоритмов. Представим систему уравнений (2.3.1) в векторном виде

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{W} = \mathbf{F}, \quad (2.3.2)$$

$$\text{где } \mathbf{U} = A \begin{pmatrix} \rho \\ \rho v \\ \rho E \end{pmatrix}, \quad \mathbf{W} = \begin{pmatrix} W_1 \\ W_2 \\ W_3 \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho v^2 + p \\ v(E + p) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ p(dA/dx) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

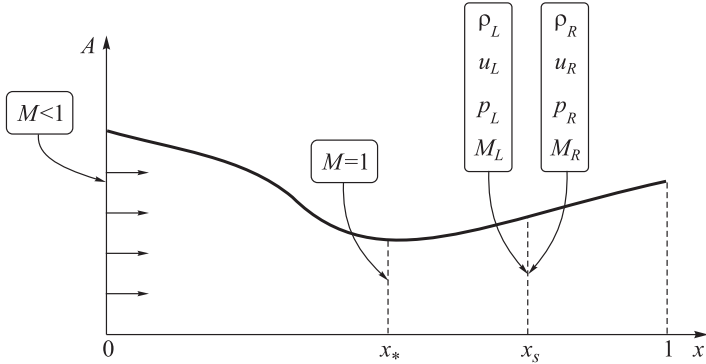


Рис. 2.3.3. Расчетная форма канала.

Выбирая в качестве искомым функций плотность, скорость и давление, перепишем уравнения (2.3.2) в недивергентном виде

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} + \mathbf{B} \mathbf{f} = 0,$$

$$\mathbf{f} = \begin{pmatrix} \rho \\ v \\ p \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} v \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\rho}{A} \frac{\partial}{\partial x} A & 0 \\ 0 & v \frac{\partial}{\partial x} & \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & \frac{c^2}{A} \frac{\partial}{\partial x} A & v \frac{\partial}{\partial x} \end{pmatrix}, c^2 = \gamma p.$$

Подобно разностным схемам для уравнений газовой динамики введем расщепление оператора  $\mathbf{B}$  на их сумму

$$\mathbf{B}_1 = \begin{pmatrix} v \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\rho}{A} \frac{\partial}{\partial x} A & 0 \\ 0 & v \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{B}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & \frac{c^2}{A} \frac{\partial}{\partial x} A & v \frac{\partial}{\partial x} \end{pmatrix} \quad (2.3.3)$$

и аппроксимируем матричные операторы  $\mathbf{B}_j$  и векторы  $\partial \mathbf{W} / \partial x$  и  $\mathbf{F}$  с порядком  $O(h^s)$ ,  $s = k, l$  по формулам

$$\mathbf{B}_{1h} = \begin{pmatrix} v\Lambda^k & \frac{\rho}{A}\Lambda^k A & 0 \\ 0 & v\Lambda^k & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}_{2h} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\rho}\Lambda^{-k} \\ 0 & \frac{c^2}{A}\Lambda^k A & v\Lambda^k \end{pmatrix},$$

$$\Lambda^l \mathbf{W} = \begin{pmatrix} \Lambda^l \rho v \\ \Lambda^l (A\rho v^2) + \bar{\Lambda}^{-l}(Ap) \\ \Lambda^l [Av(E+p)] \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ p\Lambda^l A \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Для численного решения уравнений (2.3.2) могут быть применены разностные схемы приближенной факторизации и схемы предиктор–корректор с различной формой расщепления (например, в виде (2.3.3)) и с различным порядком аппроксимации разностных операторов  $\mathbf{B}_j$  и векторов  $\Lambda^l \mathbf{W}$ ,  $\mathbf{F}$ .

Рассмотрим разностную схему предиктор–корректор при  $k = 1$ ,  $l = 2$ :

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{f}^{n+1/4} - \mathbf{f}^n}{\tau\alpha} + B_{1h}^1 \mathbf{f}^{n+1/4} &= 0, \\ \frac{\mathbf{f}^{n+1/2} - \mathbf{f}^{n+1/4}}{\tau\alpha} + B_{2h}^1 \mathbf{f}^{n+1/2} &= 0, \\ \frac{\mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{U}^n}{\tau} + \Lambda^2 \mathbf{W}^{n+1/2} &= \mathbf{F}^{n+1/2} \end{aligned} \quad (2.3.4)$$

с введением сглаживающего оператора (2.1.22) второго порядка малости на этапе корректора. Несмотря на некоторые отличия в форме представления операторов в (2.3.3) от записи одномерных уравнений газовой динамики, реализация разностной схемы (2.3.4) подобна рассмотренной выше схеме (2.1.6). На первом дробном шаге на этапе предиктора система разностных уравнений

$$\begin{aligned} \rho^{n+1/4} + \tau\alpha \left( v^n \Lambda^1 \rho^{n+1/4} + \frac{\rho^n}{A} \Lambda^k (Av^{n+1/4}) \right) &= \rho^n, \\ v^{n+1/4} + \tau\alpha v^n \Lambda^1 v^{n+1/4} &= v^n, \\ p^{n+1/4} &= p^n \end{aligned}$$

решается трехточечными скалярными прогонками для плотности и скорости (или по неявной схеме бегущего счета при постоянном знаке скорости), а давление переносится с предыдущего временного слоя. На втором дробном шаге система разностных уравнений

$$\begin{aligned}\rho^{n+1/2} &= \rho^{n+1/4}, \\ v^{n+1/2} + \tau\alpha \frac{1}{\rho^n} \Lambda^{-1} p^{n+1/2} &= v^{n+1/4}, \\ p^{n+1/2} + \tau\alpha v^n \Lambda^1 p^{n+1/2} + \tau\alpha \frac{1}{A} (c^2)^n \Lambda^1 p^{n+1/2} &= p^{n+1/4}\end{aligned}$$

сводится к разностному уравнению для давления

$$\left[ I + \tau\alpha v^n \Lambda^1 - \tau^2 \alpha^2 \frac{1}{A} (c^2)^n \Lambda^1 \frac{1}{\rho^n} \Lambda^{-1} \right] p^{n+1/2} = p^{n+1/4} - \tau\alpha \frac{1}{A} (c^2)^n \Lambda^1 v^{n+1/4},$$

которое решается трехточечной скалярной прогонкой, после чего явно определяется новое значение скорости  $v^{n+1/2}$ . По данной схеме проведены многочисленные расчеты гладких и разрывных течений газа в канале переменного сечения (см. [59]). Подобные расчеты были выполнены и по схеме приближенной факторизации. Численные решения, полученные по предложенным схемам, практически совпадали между собой и с достаточной точностью – с точными решениями. Приведем некоторые результаты расчетов разрывных течений. Образующая канала задавалась по формуле

$$A(x) = A_* + (1 - A_*)(1 - x/x_*)^2, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

При  $x = x_* = 0,5$  площадь канала  $A = A_* = 0,5$  минимальна. На входе в канал при  $x = 0$  и выходе из него при  $x = 1$  задавался дозвуковой поток с параметрами

$$\begin{pmatrix} \rho \\ v \\ p \end{pmatrix}_{x=0} = \begin{pmatrix} 1,0000 \\ 1,0237 \\ 8,0000 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \rho \\ v \\ p \end{pmatrix}_{x=1} = \begin{pmatrix} 0,8835 \\ 1,1586 \\ 7,0315 \end{pmatrix}.$$

Этим параметрам течения на границах соответствовало разрывное решение задачи

$$\begin{pmatrix} \rho \\ v \\ p \end{pmatrix}_{x=L} = \begin{pmatrix} 0,3727 \\ 4,3946 \\ 2,0092 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \rho \\ v \\ p \end{pmatrix}_{x=R} = \begin{pmatrix} 0,7570 \\ 2,1635 \\ 5,6638 \end{pmatrix}$$

со скачком решения в сечении  $x = 0,75$  (см. [59]). Расчеты проводились на равномерной сетке с различным числом узлов (ниже приведе-

ны результаты для  $N = 401$ ). Течение подбиралось таким образом, чтобы внутри канала в сечении  $x_S = 0,75$  формировался скачок, т. е. точное решение было разрывным [1]. При получении численного решения на входе и выходе из канала задавались значения, полученные из точного решения, а в начальный момент времени внутри расчетной области задавалось линейное распределение параметров. Стационарное решение задачи (2.3.1) отыскивалось методом установления до выполнения условия

$$\max_{0 \leq j \leq N} \left| \frac{\rho^{n+1} - \rho^n}{\tau \rho^n} \right| \leq \varepsilon, \quad \varepsilon \approx h^2 = 10^{-4}. \quad (2.3.5)$$

Расчеты по схеме (2.3.4) первого порядка аппроксимации (при  $k = l = 1$ ) могли проводиться практически с любыми значениями чисел Куранта  $K = \tau (v \pm c)/h$ , вплоть до  $K = 10^3$ . Несогласованная аппроксимация схем (на дробных шагах с первым порядком и в правой части со вторым) приводила к некоторым ограничениям на временной шаг. Итерационный параметр  $\tau$  выбирался различным, чтобы найти минимальное значение итераций до сходимости. Наилучшая скорость сходимости схем к стационарному решению достигалась при временных шагах, соответствующих числам Куранта  $K \approx 8$ , а число итераций до сходимости (2.3.5) составляло несколько сотен.

На рис 2.3.3, 2.3.4 приведены распределения плотности и скорости в канале переменного сечения после установления (сплошная линия – точное решение, кружочки – расчет).

Схемы первого и второго порядка аппроксимации правильно передают скорости движения фронтов, а введенное сглаживание (для схемы второго порядка) практически устраняет осцилляции решения,

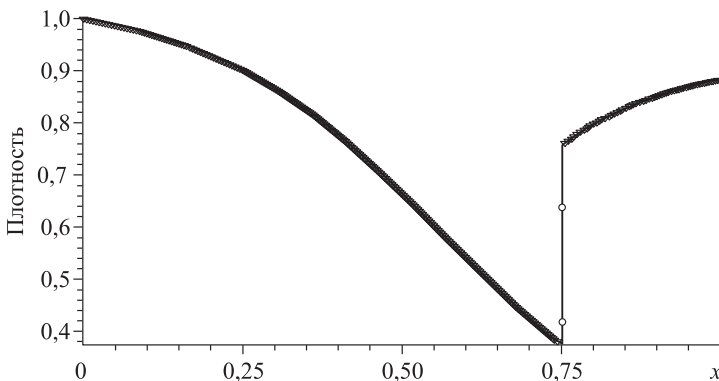


Рис. 2.3.3. Распределение плотности газа.

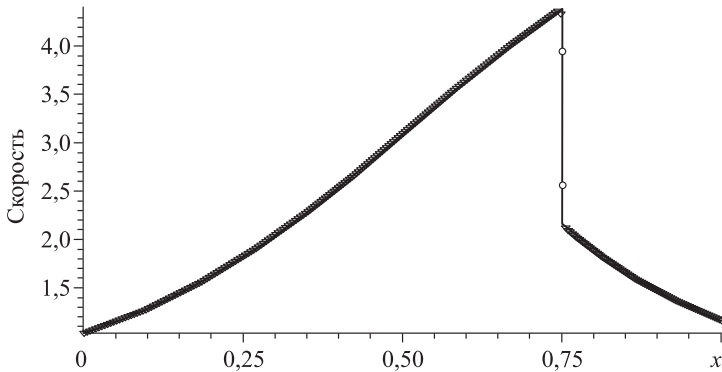


Рис. 2.3.4. Распределение скорости газа.

присущие схемам второго порядка аппроксимации. Однако схема первого порядка имеет меньшую точность, размывая скачки на 10–14 шагов (см. также [53]). Как можно видеть, разностная схема (2.3.4) второго порядка аппроксимации обладает достаточной точностью, ударная волна размывается на две–три ячейки. Максимальная относительная погрешность вычислений для плотности составляла  $\sim 0,2\%$ . Изменение порядка аппроксимации схемы (2.3.4) с первого ( $k = l = 1$ ) до второго ( $k = 1, l = 2$ ) оказало незначительное влияние на скорость сходимости схемы к стационарному решению. В приведенном примере число итераций составляло 330 для схемы первого порядка и 400 – для схемы второго порядка. Для оценки эффективности предложенного алгоритма (2.3.4) было получено решение данной задачи по нефакторизованной схеме предиктор–корректор

$$\frac{\mathbf{f}^{n+1/2} - \mathbf{f}^n}{\tau\alpha} + (B_{2h}^1 + B_{1h}^1)\mathbf{f}^{n+1/2} = 0, \quad (2.3.5)$$

$$\frac{\mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{U}^n}{\tau} + \Lambda^2 \mathbf{W}_h^{n+1/2} = \mathbf{F}^{n+1/2}.$$

Стационарное решение задачи по схеме (2.3.5) при тех же начальных данных было получено за 101 итерацию, оптимальное число Куранта составляло 28, а относительная погрешность вычислений  $\sim 0,1\%$ . Время на реализацию схемы (2.3.4) тремя скалярными прогонками и одной векторной прогонкой было примерно одинаковым (см. [59]). Однако с ростом числа уравнений (как, например, при решении уравнений магнитной гидродинамики [56, 60–62] или при решении двумерных задач (см. главу 3)) разностные схемы, реализуемые скалярными прогонками, становятся более экономичными.

Анализ явных и неявных разностных схем решения одномерных уравнений газовой динамики приведен, например, в [59, 63].

## 2.4. Схемы для уравнений магнитной гидродинамики

### 2.4.1. Разностная схема для упрощенных уравнений

Рассмотренные выше разностные схемы расщепления легко обобщаются и на уравнения магнитной гидродинамики и физики плазмы. Для описания нагрева и удержания плазмы в многопробочной магнитной системе часто используются модели, в которых плазма предполагается замагниченной. В этом приближении система уравнений динамики плазмы описывается уравнениями неразрывности, движения и уравнением энергии [62–65]

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\rho}{B} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\rho v}{B} \right) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\rho v}{B} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\rho v^2 + p}{B} \right) &= -\frac{p}{B^2} \frac{dB}{dx}, \\ \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{p}{B} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{vp}{B} \right) + p \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{v}{B} \right) &= \frac{1}{(\gamma-1)B} \left( \frac{\partial}{\partial x} \kappa \frac{\partial T}{\partial x} + Q \right). \end{aligned} \quad (2.4.1)$$

При записи уравнений приняты следующие обозначения:  $x$  – продольная координата вдоль силовой линии магнитного поля,  $\rho$ ,  $v$  – плотность и скорость плазмы,  $B = B(x)$  – магнитная индукция,  $T$  – температура,  $Q$  – тепловой источник,  $\kappa$  – коэффициент продольной теплопроводности (уравнения приведены в предположении равенства температуры ионов и электронов, при различии температур [62]). При записи (2.4.1) принято уравнение состояния совершенного газа  $p = (\gamma - 1)\rho T$ . Заметим, что если в системе уравнений (2.4.1) положить  $\kappa = Q = 0$  и обозначить  $B = 1/A$ , то эти уравнения тождественно совпадают с квазиодномерными уравнениями газовой динамики (2.3.1). При построении разностных схем для уравнений (2.4.1) могут использоваться предложенные выше разностные схемы решения уравнений газовой динамики или уравнений Навье–Стокса. Представим исходные уравнения (2.4.1) в векторной форме в дивергентном и недивергентном виде

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{W} = \tilde{\mathbf{F}}, \quad \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} + \mathbf{Bf} = \mathbf{F}, \quad (2.4.2)$$

где

$$U = \frac{1}{B} \begin{pmatrix} \rho \\ \rho v \\ \rho E \end{pmatrix}, \quad W = \begin{pmatrix} W_1 \\ W_2 \\ W_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{B} \cdot \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho v^2 + p \\ v(E+p) - \kappa \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{\rho} \end{pmatrix}, \quad \tilde{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ Q \end{pmatrix},$$

$$f = \begin{pmatrix} \rho \\ v \\ p \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} v \frac{\partial}{\partial x} & B\rho \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{B} & 0 \\ 0 & v \frac{\partial}{\partial x} & \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & \gamma p B \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{B} & v \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \kappa \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{\rho} \end{pmatrix}, \quad F = \frac{1}{\gamma-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ Q \end{pmatrix}.$$

Представим оператор  $\mathbf{B}$  в форме расщепления  $\mathbf{B} = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2$ , где

$$\mathbf{B}_1 = \begin{pmatrix} v \frac{\partial}{\partial x} & B\rho \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{B} & 0 \\ 0 & v \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}_{2h} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & Bc^2 \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{B} & v \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \kappa \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{\rho} \end{pmatrix},$$

и аппроксимируем их несимметричными разностными операторами  $B_{jh}$  с порядком  $O(h^k)$  по формулам

$$\mathbf{B}_{1h} = \begin{pmatrix} v^n & B\rho^n \Lambda^k \frac{1}{B} & 0 \\ 0 & v^n \Lambda^k & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}_{2h} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\rho^n} \Lambda^{-k} \\ 0 & B(c^2)^n \Lambda^k \frac{1}{B} & v^n \Lambda^1 - \Lambda \kappa^n \Lambda \frac{1}{\rho^n} \end{pmatrix}.$$

(2.4.3)

Для решения системы уравнений (2.4.2) рассмотрим разностную схему предиктор–корректор



$$\begin{aligned}
 (\mathbf{I} + \tau\alpha\mathbf{B}_{1h}^k)\mathbf{f}^{n+1/4} &= \mathbf{f}^n, \\
 (\mathbf{I} + \tau\alpha\mathbf{B}_{2h}^k)\mathbf{f}^{n+1/2} &= \mathbf{f}^{n+1/4}, \\
 \frac{\mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{U}^n}{\tau} + \Lambda^l \mathbf{W}_h^{n+1/2} &= \tilde{\mathbf{F}}_h,
 \end{aligned} \tag{2.4.4}$$

аппроксимирующую уравнения (2.4.2) с порядком  $O(\tau^m + \tau h^k + h^l)$ , где  $m = 2$  при  $\alpha = 0,5 + O(\tau)$ , а  $\Lambda^l \mathbf{W}_h^{n+1/2}$ ,  $\tilde{\mathbf{F}}_h$  – аппроксимация векторов  $\mathbf{W}$ ,  $\tilde{\mathbf{F}}$  с порядком  $O(h^l)$ . Как и в рассмотренных выше схемах для уравнений газовой динамики, разностные операторы  $\mathbf{B}_{jh}^k$  на этапе предиктора аппроксимируются несимметричным оператором с первым порядком  $k = 1$ , а на этапе корректора – со вторым. Для устранения осцилляций в операторе правой части  $\Lambda^l \mathbf{W}_h^{n+1/2}$  на этапе корректора вводится сглаживающий оператор второго порядка малости подобно (2.1.22). Как следует из вида матричных операторов  $\mathbf{B}_{jh}^1$ , на дробных шагах она реализуется тремя скалярными трехточечными прогонками, а на этапе корректора – явно. По аналогии со схемами для уравнений Навье–Стокса может быть предложена разностная схема приближенной факторизации

$$\begin{aligned}
 \xi^n &= -(\mathbf{A}_h^{-1})^n [\Lambda^l \mathbf{W}_h^n - \tilde{\mathbf{F}}_h], \\
 (\mathbf{I} + \tau\alpha\mathbf{B}_{1h}^k)\xi^{n+1/2} &= \xi^n, \\
 (\mathbf{I} + \tau\alpha\mathbf{B}_{2h}^k)\xi^{n+1} &= \xi^{n+1/2}, \\
 \mathbf{f}^{n+1} &= \mathbf{f}^n + \tau\xi^{n+1},
 \end{aligned}$$

где, как и выше,  $\mathbf{A} = \partial\mathbf{U}/\partial\mathbf{f}$ , а вид операторов  $\mathbf{B}_{jh}^k$  определен в (2.4.3). Ее реализация на дробных шагах также сводится к скалярным прогонкам подобно схеме (2.4.4).

#### 2.4.2. Разностная схема для уравнений магнитной гидродинамики

В качестве примера построения экономичных разностных схем для численного решения одномерных уравнений рассмотрим систему уравнений магнитной гидродинамики. В одножидкостном приближении в предположении, что эффекты вязкости и теплопроводности малы и ими можно пренебречь [64, 65], исходные уравнения включают уравнения неразрывности, движения, полной энергии и уравнение для магнитного поля. Приведем эти уравнения в цилиндрической ( $j = 1$ ) и декартовой ( $j = 0$ ) системе координат в дивергентном виде

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial r} = \mathbf{F}, \tag{2.4.5}$$

$$U = H \begin{pmatrix} \rho \\ \rho v \\ \tilde{E} \\ B \end{pmatrix}, \quad W = H \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho v^2 + p + B^2/2 \\ v(\tilde{E} + p) \\ vB \end{pmatrix},$$

$$F = j \begin{pmatrix} 0 \\ F_v \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{E} = \rho(\varepsilon + v^2/2) + B^2/2.$$

Здесь  $\rho$ ,  $v$ ,  $\varepsilon$ ,  $p$  – плотность, скорость, внутренняя энергия и давление плазмы;  $B$  – магнитная индукция, а  $F_v = p + B^2/2$ ,  $H = r^j$  – коэффициент Ламе. В отличие от уравнений газовой динамики полная энергия включает магнитное давление. Заметим, что компонента магнитного поля  $B$  направлена в продольном  $z$ -направлении, т. е. ортогональна радиальной компоненте скорости. Для замыкания системы уравнений (2.4.5) необходимо задать уравнение состояния, которое выберем в виде  $p = (\gamma - 1)\rho\varepsilon$ . Наряду с дивергентной формой запишем исходные уравнения в недивергентном виде

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} + \mathbf{B}\mathbf{f} = 0, \quad (2.4.6)$$

где

$$\mathbf{f} = \begin{pmatrix} \rho \\ v \\ p \\ B \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{H} \frac{\partial}{\partial r} H v & 0 & 0 & 0 \\ 0 & v \frac{\partial}{\partial r} & \frac{1}{H} \frac{\partial}{\partial r} & \frac{B}{H} \frac{\partial}{\partial r} \\ 0 & \frac{\gamma p}{H} \frac{\partial}{\partial r} H & v \frac{\partial}{\partial r} & 0 \\ 0 & \frac{B}{H} \frac{\partial}{\partial r} H & 0 & v \frac{\partial}{\partial r} \end{pmatrix}.$$

Уравнение неразрывности, как и для уравнений газовой динамики, будем рассматривать в дивергентном виде. Для построения экономических разностных схем введем расщепление матричного оператора

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2$$

на их сумму. Оно может быть проведено различными способами, учитывая появление новой неизвестной. По аналогии со схемами для уравнений газовой динамики и учитывая, что полное давление в урав-

нении движения определяется членом  $p + B^2/2$ , рассмотрим расщепление матричного оператора по физическим процессам в виде

$$\mathbf{B}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & v \frac{\partial}{\partial r} & \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial r} & \frac{B}{\rho} \frac{\partial}{\partial r} \\ 0 & \frac{\gamma p}{H} \frac{\partial}{\partial r} H & 0 & 0 \\ 0 & \frac{B}{H} \frac{\partial}{\partial r} H & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{H} \frac{\partial}{\partial r} H v & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & v \frac{\partial}{\partial r} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & v \frac{\partial}{\partial r} \end{pmatrix}.$$

Аппроксимируем матричные операторы  $\mathbf{B}_j$  несимметричными разностными операторами  $\mathbf{B}_{jh}$

$$\mathbf{B}_{1h} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & v^n \Lambda^1 & \frac{1}{\rho^n} \Lambda^{-1} & \frac{B^n}{\rho^n} \Lambda^{-1} \\ 0 & \frac{\gamma p^n}{H} \Lambda^1 H & 0 & 0 \\ 0 & \frac{B^n}{H} \Lambda^1 H & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}_{2h} = \begin{pmatrix} \frac{1}{H} \Lambda^1 H v^n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & v^n \Lambda^1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & v^n \Lambda^1 \end{pmatrix}.$$

Для численного решения уравнений магнитной гидродинамики (2.4.5) рассмотрим разностные схемы приближенной факторизации и предиктор–корректор.

Разностная схема приближенной факторизации

$$\prod_{j=1}^2 (I + \tau \alpha \mathbf{B}_{jh}^k) \frac{\mathbf{f}^{n+1} - \mathbf{f}^n}{\tau} = -(\mathbf{A}_h^{-1})^n (\Lambda^l \mathbf{W}_h^n - \mathbf{F}_h^n) \quad (2.4.7)$$

или эквивалентная ей схема в дробных шагах

$$\xi^n = -(\mathbf{A}_h^{-1})^n [\Lambda^l \mathbf{W}_h^n - \mathbf{F}_h^n],$$

$$(\mathbf{I} + \tau \alpha \mathbf{B}_{1h}^k) \xi^{n+1/2} = \xi^n,$$

$$(\mathbf{I} + \tau \alpha \mathbf{B}_{2h}^k) \xi^{n+1} = \xi^{n+1/2},$$

$$\mathbf{f}^{n+1} = \mathbf{f}^n + \tau \xi^{n+1},$$

аппроксимируют систему уравнений (2.4.5) с порядком  $O(\tau + \tau h^k + h^l)$ , а при установлении – стационарные уравнения в консервативной

форме с порядком  $O(h^l)$ . Подобно ей, разностная схема предиктор–корректор

$$\begin{aligned}(\mathbf{I} + \tau\alpha\mathbf{B}_{1h}^k)\mathbf{f}^{n+1/4} &= \mathbf{f}^n, \\(\mathbf{I} + \tau\alpha\mathbf{B}_{2h}^k)\mathbf{f}^{n+1/2} &= \mathbf{f}^{n+1/4}, \\ \frac{\mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{U}^n}{\tau} &= -\Lambda^l \mathbf{W}_h^{n+1/2} + \mathbf{F}_h^{n+1/2}\end{aligned}\tag{2.4.8}$$

аппроксимирует уравнения магнитной гидродинамики с порядком  $O(\tau^2 + \tau h^k + h^l)$  при  $\alpha = 0,5 + O(\tau)$ . Схемы (2.4.7), (2.4.8) на дробных шагах реализуются трехточечными скалярными прогонками (одной прогонкой на первом дробном шаге и тремя – на втором). Покажем это на примере схемы (2.4.8).

На первом дробном шаге решается система разностных уравнений

$$\begin{aligned}\rho^{n+1/4} &= \rho^n, \\ v^{n+1/4} + \tau\alpha \left[ v^n \Lambda^1 v^{n+1/4} + \frac{1}{\rho^n} (\bar{\Lambda}^{-1} p^{n+1/4} + B^n \bar{\Lambda}^{-1} B^{n+1/4}) \right] &= v^n, \\ p^{n+1/4} + \tau\alpha \frac{\gamma p^n}{H} \Lambda^1 H v^{n+1/4} &= p^n, \\ B^{n+1/4} + \tau\alpha \frac{B^n}{H} \Lambda^1 H v^{n+1/4} &= B^n.\end{aligned}$$

Исключая из уравнения движения давление и магнитное поле, получим неявное разностное уравнение для скорости

$$\begin{aligned}\left[ I + \tau\alpha v^n \Lambda^1 - \tau^2 \alpha^2 \frac{1}{\rho^n} \left( \gamma \bar{\Lambda}^{-1} \frac{p^n}{H} \Lambda^1 H + B^n \bar{\Lambda}^{-1} \frac{B^n}{H} \Lambda^1 H \right) \right] v^{n+1/4} &= \\ &= v^n - \tau\alpha \frac{1}{\rho^n} \left[ \bar{\Lambda}^{-1} p^n + B^n \bar{\Lambda}^{-1} B^n \right].\end{aligned}$$

Его решение может быть получено трехточечной скалярной прогонкой, после чего явно вычисляются значения

$$p^{n+1/4} = p^n - \tau\alpha \frac{\gamma p^n}{H} \Lambda^1 H v^{n+1/4}, \quad B^{n+1/4} = B^n - \tau\alpha \frac{B^n}{H} \Lambda^1 H v^{n+1/4},$$

а значение плотности переносится с предыдущего слоя. На втором дробном шаге разностные уравнения

$$\begin{aligned}\rho^{n+1/2} + \tau\alpha \frac{1}{H} \Lambda^1 H v^n &= \rho^{n+1/4}, \\ v^{n+1/2} &= v^{n+1/4},\end{aligned}$$

$$p^{n+1/4} + \tau\alpha v^n \Lambda^1 p^{n+1/4} = p^{n+1/4},$$

$$B^{n+1/4} + \tau\alpha v^n \Lambda^1 B^{n+1/4} = B^{n+1/4}$$

решаются независимо для уравнения для плотности, скорости и магнитного поля скалярными прогонками, а значение скорости переносится с предыдущего слоя. Новые значения искомым функций находятся на этапе корректора схемы (2.4.8) явно. Для устранения осцилляций в операторе правой части  $\Lambda^1 \mathbf{W}_h^{n+1/2}$  на этапе корректора вводился сглаживающий оператор второго порядка малости подобно (2.1.22). Заметим, что реализация схем одинакова как для плоского ( $j = 0$ ), так и осесимметричного ( $j = 1$ ) случая.

Остановимся на некоторых свойствах рассмотренных схем. Как следует из вида расщепления, разностные схемы (2.4.7), (2.4.8) являются схемами оптимального расщепления. Действительно, диссипативная матрица схем имеет вид

$$D = (\tau\alpha)^2 \mathbf{B}_{1h} \cdot \mathbf{B}_{2h} = (\tau\alpha)^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_1 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad d_1 = \frac{1}{\rho} \Lambda v \Lambda, \quad d_2 = B d_1,$$

т. е. введение расщепления приводит к появлению дополнительных диссипативных членов лишь в уравнении движения. Рассмотрим устойчивость разностных схем для линейных уравнений магнитной гидродинамики

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} + (\mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2) \mathbf{f} = 0, \quad (2.4.9)$$

где

$$\mathbf{f} = \begin{pmatrix} \rho \\ v \\ p \\ B \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & v & \frac{1}{\rho} & \frac{B}{\rho} \\ 0 & \gamma p & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r}, \quad \mathbf{B}_2 = \begin{pmatrix} v & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & v & 0 \\ 0 & 0 & 0 & v \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r},$$

и покажем, что разностная схема

$$\prod_{j=1}^2 (I + \tau\alpha \mathbf{B}_j^k) \frac{\mathbf{f}^{n+1} - \mathbf{f}^n}{\tau} = - \sum_{j=1}^2 \mathbf{B}_j^k \mathbf{f}^n \quad (2.4.10)$$

безусловно устойчива при  $\alpha \geq 0,5$ , например, при симметричной аппроксимации операторов ( $k = l = 2$ ). Ей соответствует характеристическое уравнение

$$\det \begin{vmatrix} t(\lambda-1)+ivd & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t(\lambda-1)+ivd & i\frac{d}{\rho}[\alpha t(\lambda-1)+1] & i\frac{dB}{\rho}[\alpha t(\lambda-1)+1] \\ 0 & i\gamma pd[\alpha(\lambda-1)+1] & t(\lambda-1)+ivd & 0 \\ 0 & iBd[\alpha(\lambda-1)+1] & 0 & t(\lambda-1)+ivd \end{vmatrix} = 0,$$

$t = 1 + i\alpha v d$ ,  $d = (\tau/h)\sin(kh)$ . Первые его два корня равны

$$\lambda_{1,2} = \frac{1 - i\beta d}{1 + i\alpha d} \text{ и, очевидно, } |\lambda_{1,2}|^2 = \frac{1 + \beta^2 d^2}{1 + \alpha^2 d^2} \leq 1 \text{ при } \alpha \geq 1/2.$$

Два оставшихся корня находятся из уравнения

$$[t(\lambda - 1) + ivd]^2 + [\alpha(\lambda - 1) + 1][\alpha t(\lambda - 1) + 1]s^2 d^2 = 0,$$

где

$$s^2 = \frac{\gamma p + B^2}{\rho} = c^2 + \frac{B^2}{\rho},$$

и соответственно равны

$$\lambda_{3,4} = \frac{B \mp \sqrt{B^2 - AC}}{C} \text{ и } |\lambda_{3,4}| \leq 1$$

при  $\alpha \geq 1/2$ . Здесь

$$A = t(t + \alpha^2 s^2 d^2), \quad B = t(t - ivd) - (s^2 d^2)/2[1 + t(\beta - \alpha)],$$

$$C = (t - ivd)^2 + s^2 d^2 \beta(1 - \alpha t).$$

Заметим, что и разностная схема предиктор–корректор (2.4.8) для уравнений (2.4.9) в целых шагах совпадает со схемой (2.4.10), т. е. она безусловно устойчива при  $\alpha \geq 1/2$ .

Некоторые примеры расчетов по предложенным алгоритмам приведены в работах [56, 61, 62, 66] в условиях, соответствующих специальному эксперименту на установке ИЯФ СО РАН ГОЛ-3.

## Глава 3

### РАЗНОСТНЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ МНОГОМЕРНЫХ ЗАДАЧ

Физико-математические модели, описываемые уравнениями газовой динамики и уравнениями Навье–Стокса вязкого сжимаемого теплопроводного газа, широко используются при численном моделировании различных задач в аэро- и гидродинамике, энергетике, охране окружающей среды, при проектировании технических устройств и моделировании технологических процессов. Увеличение размерности исследуемых классов задач и усложнение геометрий расчетных областей накладывают дополнительные требования на применяемые численные методы. Поэтому задача построения эффективных и экономичных численных алгоритмов их решения актуальна и сегодня. Эти алгоритмы должны обладать необходимой точностью, иметь достаточный запас устойчивости, удовлетворять свойствам консервативности и экономичности с возможностью получения решения задачи за разумное время на существующих ЭВМ. Применение явных разностных схем для решения уравнений Навье–Стокса может оказаться неэффективным в силу жестких ограничений на их устойчивость, особенно при нахождении стационарного решения методом установления, поэтому при их решении обычно используются неявные разностные схемы, свободные от ограничений на устойчивость или имеющие более слабые ограничения. Некоторые наиболее употребительные разностные схемы рассмотрены, например, в [14, 31, 67–71].

При построении неявных разностных схем обычно используются методы факторизации и расщепления (см. [9, 67]), позволяющие свести решение исходных многомерных задач к последовательному (или параллельному) решению их одномерных аналогов. Но решение одномерных задач неявными схемами приводит к необходимости обращения матриц, размерность которых возрастает с ростом числа уравнений, и, как следствие, к значительному росту числа арифметических операций на узел расчетной сетки. Введение расщепления в одномерных задачах позволяет освободиться от этого недостатка и

свести реализацию схем на дробных шагах к скалярным прогонкам или к схемам «бегущего счета» как, например, в главе 2. Однако применение расщепления или факторизации при построении эффективных алгоритмов приводит к появлению дополнительных членов в разностной схеме – диссипативных членов и членов более высокого порядка, что может приводить к ухудшению свойств численного алгоритма. Поэтому проблема построения экономичных алгоритмов остается одной из важнейших в задачах моделирования.

Настоящая глава посвящена изложению основных неявных разностных схем для численного решения уравнений Эйлера и Навье–Стокса, основанных на методе расщепления и приближенной факторизации. Эти алгоритмы, как правило, экономичны по числу операций на узел сетки, безусловно устойчивы или имеют слабые ограничения на устойчивость, что позволяет варьировать шаги разностной сетки при решении многомерных задач.

### § 3.1. Уравнения Эйлера и Навье–Стокса в многомерном случае

Рассмотрим систему уравнений Навье–Стокса сжимаемого теплопроводного газа в векторной форме в декартовых координатах  $x_j$  (см., например, [1, 6]):

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \mathbf{W}_j}{\partial x_j} = \mathbf{F}, \quad (3.1.1)$$

$$\text{где } \mathbf{U} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho v_1 \\ \rho v_2 \\ \rho v_3 \\ E \end{pmatrix}, \quad \mathbf{W}_j = \begin{pmatrix} \rho v_j \\ \rho v_1 v_j + \delta_j^1 p - \sigma_{1j} \\ \rho v_2 v_j + \delta_j^2 p - \sigma_{2j} \\ \rho v_3 v_j + \delta_j^3 p - \sigma_{3j} \\ v_j (E + p) - \kappa \frac{\partial T}{\partial x} - \sigma_j \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{pmatrix}, \quad E = \rho(e + v^2/2),$$

$$v^2 = \sum_{j=1}^3 v_j^2, \quad \sigma_j = \sum_{i=1}^3 v_i \sigma_{ij}, \quad \sigma_{ij} = \delta_j^i \lambda \operatorname{div} v + \mu \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right), \quad \operatorname{div} v = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial v_j}{\partial x_j},$$

$\sigma_{ij}$  – девиатор тензора вязких напряжений,  $\lambda = \mu' - (2/3)\mu$ ;  $\mu, \mu'$  – коэффициенты первой (сдвиговой) и второй (объемной) вязкости,  $\kappa$  – коэффициент теплопроводности,  $\mathbf{F}$  – вектор внешних сил. Для замыкания системы уравнений (3.1.1) задаются уравнения состояния



$$p = p(\rho, e), \quad e = (\rho, T) \quad (3.1.2)$$

и зависимости коэффициентов вязкости и теплопроводности, например, от температуры:

$$\mu = \mu(T), \quad \mu' = \mu'(T), \quad \kappa = \kappa(T).$$

Система уравнений (3.1.1), (3.1.2) является замкнутой (см. [6]), и для ее решения необходимо задать начальные и краевые условия.

Если пренебречь влиянием вязкости и теплопроводности, полагая их равными нулю, то система уравнений (3.1.1), (3.1.2) переходит в уравнения газовой динамики (уравнения Эйлера). Заметим, что уравнения газовой динамики являются гиперболической системой, а уравнения Навье–Стокса – не вполне параболической системой уравнений [6]. Наряду с дивергентной формой записи уравнений Навье–Стокса часто используют недивергентную форму, удобную при построении разностных схем. Следует отметить, что дивергентные и недивергентная формы записи эквивалентны для уравнений Навье–Стокса, а для уравнений газовой динамики эквивалентны лишь для гладких непрерывных решений [4, 18].

Вид уравнений Навье–Стокса в недивергентном виде зависит от выбора вектора искомого функций. Пусть  $\mathbf{f} \neq \mathbf{U}$ . Тогда из (3.1.1), (3.1.2) следует

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 \left( \mathbf{B}_j \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^3 \mathbf{C}_{ji} \frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial x_j \partial x_i} \right) = \tilde{\mathbf{F}}, \quad (3.1.3)$$

где  $\mathbf{A} = \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{f}}$ ,  $\mathbf{B}_j = \mathbf{A}^{-1} \frac{\partial \mathbf{W}_j}{\partial \mathbf{f}}$ ,  $\mathbf{C}_{ji} = \mathbf{A}^{-1} \frac{\partial \mathbf{W}_{ji}}{\partial \mathbf{f}}$ ,  $\mathbf{f}_i = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_i}$ ,  $\tilde{\mathbf{F}} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{F}$ . Понятно,

что от выбора искомого функций зависит вид матричных операторов  $\mathbf{B}_j$ ,  $\mathbf{C}_{ji}$  и, как следствие, реализация разностных схем при аппроксимации уравнений (3.1.3).

Остановимся вначале на различных формах записи уравнений газовой динамики в недивергентном виде

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 \mathbf{B}_j \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_j} = 0, \quad p = p(\rho, e),$$

где матрицы  $\mathbf{B}_j$  зависят от вида вектора  $\mathbf{f}$  и соответственно равны

$$\mathbf{B}_j = \begin{pmatrix} v_j & \delta_j^1 \rho & \delta_j^1 p & \delta_j^3 p & 0 \\ 0 & v_j & 0 & 0 & b_j^1 \\ 0 & 0 & v_j & 0 & b_j^2 \\ 0 & 0 & 0 & v_j & b_j^3 \\ 0 & c_j^1 & c_j^2 & c_j^3 & v_j \end{pmatrix}, \quad b_j^1 = \delta_j^1 \frac{1}{\rho}, \quad c_j^1 = \delta_j^1 \gamma p, \quad \text{для } \mathbf{f} = \begin{pmatrix} \rho \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ p \end{pmatrix}, \quad (3.1.4)$$

и

$$\mathbf{B}_j = \begin{pmatrix} v_j & \delta_j^1 \rho & \delta_j^1 \rho & \delta_j^3 \rho & 0 \\ a_j^1 & v_j & 0 & 0 & b_j^1 \\ a_j^2 & 0 & v_j & 0 & b_j^2 \\ a_j^3 & 0 & 0 & v_j & b_j^3 \\ 0 & c_j^1 & c_j^2 & c_j^3 & v_j \end{pmatrix}, \quad a_j^l = \frac{\delta_j^l \partial p}{\rho \partial \rho}, \quad b_j^l = \frac{\delta_j^l \partial p}{\rho \partial e}, \quad c_j^l = \delta_j^l \frac{p}{\rho}, \quad \text{для } \mathbf{f} = \begin{pmatrix} \rho \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ e \end{pmatrix}.$$

Как отмечалось выше, наиболее простую форму уравнения газовой динамики принимают в переменных плотность, компоненты скорости и давление. В этих переменных матрицы  $\mathbf{B}_j$  в (3.1.4) в первом столбце содержат все нулевые элементы, кроме первого элемента, что позволяет отдельно решать уравнение неразрывности от уравнений движения и энергии при известных значениях коэффициентов матриц, которые обычно задаются с предыдущего временного слоя. Сохраняя уравнение неразрывности в дивергентной форме, перепишем уравнения газовой динамики в виде

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 \mathbf{B}_j \mathbf{f} = 0, \quad p = p(\rho, e), \quad (3.1.5)$$

$$\text{где для } \mathbf{f} = \begin{pmatrix} \rho \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ p \end{pmatrix} \quad \mathbf{B}_j = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_j} v_j & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & v_j \frac{\partial}{\partial x_j} & 0 & 0 & b_j^1 \frac{\partial}{\partial x_j} \\ 0 & 0 & v_j \frac{\partial}{\partial x_j} & 0 & b_j^2 \frac{\partial}{\partial x_j} \\ 0 & 0 & 0 & v_j \frac{\partial}{\partial x_j} & b_j^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \\ 0 & c_j^1 \frac{\partial}{\partial x_j} & c_j^2 \frac{\partial}{\partial x_j} & c_j^3 \frac{\partial}{\partial x_j} & v_j \frac{\partial}{\partial x_j} \end{pmatrix},$$

или в виде

$$\mathbf{B}_j = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_j} v_j & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_j} v_j & 0 & 0 & \delta_j^1 \frac{\partial}{\partial x_j} \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x_j} v_j & 0 & \delta_j^2 \frac{\partial}{\partial x_j} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x_j} v_j & \delta_j^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \\ 0 & c_j^1 \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{1}{\rho} & c_j^2 \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{1}{\rho} & c_j^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{1}{\rho} & v_j \frac{\partial}{\partial x_j} \end{pmatrix} \quad \text{для } \mathbf{f} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho v_1 \\ \rho v_2 \\ \rho v_3 \\ p \end{pmatrix}, \quad (3.1.6)$$

где  $b_j^l = \delta_j^l / \rho$ ,  $c_j^l = \delta_j^l \gamma \rho$ . Можно ожидать, что разностные схемы в переменных  $\mathbf{f} = (\rho, \rho v_1, \rho v_2, \rho v_3, p)^T$  будут обладать лучшими свойствами, так как потоки  $\rho v_j$  непрерывны для разрывных решений (в направлении  $x_j$ ). Однако выбор этих переменных для уравнений Навье–Стокса не является удобным, так как вязкие члены уравнений разрешены относительно компонент скоростей, а граничные и начальные условия обычно задаются для скорости и температуры. Для них предпочтительнее может оказаться выбор в качестве искомым функций плотности, скорости и давления или температуры, для которых может быть выбрана специальная форма записи.

Перейдем к представлению уравнений Навье–Стокса в различных газодинамических переменных. Для построения экономичных разностных схем представим их в виде

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 \mathbf{B}_j \mathbf{f} = \mathbf{F}, \quad (3.1.7)$$

где операторы  $\mathbf{B}_j$  содержат все газодинамические члены уравнений и часть членов, содержащих повторные производные, а вектор  $\mathbf{F}$  содержит оставшиеся члены уравнений – смешанные производные в уравнениях движения и диссипативные члены в уравнениях энергии. В дальнейшем при построении алгоритмов будем выбирать в качестве искомым функций плотность, компоненты скорости и давление (температуру) или плотность, импульс и температуру. Именно в этих переменных матричные операторы имеют наиболее простую форму, что облегчает построение экономичных алгоритмов. Так, для уравнения состояния идеального газа  $p = (\gamma - 1)c_v \rho T$  матричные операторы  $\mathbf{B}_j$  для вектора  $\mathbf{f} = (\rho, v_1, v_2, v_3, p)^T$  равны

$$\mathbf{B}_j = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_j} v_j & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & v_j \frac{\partial}{\partial x_j} - d_j^1 & 0 & 0 & b_j^1 \frac{\partial}{\partial x_j} \\ 0 & 0 & v_j \frac{\partial}{\partial x_j} - d_j^2 & 0 & b_j^2 \frac{\partial}{\partial x_j} \\ 0 & 0 & 0 & v_j \frac{\partial}{\partial x_j} - d_j^3 & b_j^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \\ 0 & c_j^1 \frac{\partial}{\partial x_j} & c_j^2 \frac{\partial}{\partial x_j} & c_j^3 \frac{\partial}{\partial x_j} & v_j \frac{\partial}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} \tilde{\kappa} \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{1}{\rho} \end{pmatrix}, \quad (3.1.8)$$

где  $d_j^l = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} [\mu + \delta_j^l (\lambda + \mu)] \frac{\partial}{\partial x_j}$ ,  $b_j^l = \frac{\delta_j^l}{\rho}$ ,  $c_j^l = \delta_j^l \gamma \rho$ ,  $\tilde{\kappa} = \frac{\kappa}{(\gamma - 1)c_v}$ ,

и для вектора  $\mathbf{f} = (\rho, \rho v_1, \rho v_2, \rho v_3, T)^T$

$$\mathbf{B}_j = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_j} v_j & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & v_j \frac{\partial}{\partial x_j} - d_j^1 & 0 & 0 & b_j^1 \frac{\partial}{\partial x_j} \\ 0 & 0 & v_j \frac{\partial}{\partial x_j} - d_j^2 & 0 & b_j^2 \frac{\partial}{\partial x_j} \\ 0 & 0 & 0 & v_j \frac{\partial}{\partial x_j} - d_j^3 & b_j^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \\ 0 & c_j^1 \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{1}{\rho} & c_j^2 \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{1}{\rho} & c_j^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{1}{\rho} & v_j \frac{\partial}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} \tilde{\kappa} \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{1}{\rho} \end{pmatrix}, \quad (3.1.9)$$

где  $d_j^1 = \frac{\partial}{\partial x_j} [\mu + \delta_j'(\lambda + \mu)] \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{1}{\rho}$ ,  $b_j^1 = \delta_j'(\gamma - 1)\rho$ ,  $c_j^1 = \delta_j' \frac{p}{c_v \rho}$ ,  $\tilde{\kappa} = \frac{\kappa}{c_v}$ .

Отметим, что структура матриц  $\mathbf{B}_j$  в (3.1.8), (3.1.9) подобна, и матрицы содержат ненулевые элементы на главной диагонали, в последнем столбце и последней строке. Более сложный вид уравнения Навье–Стокса принимают для вектора  $\mathbf{f} = (\rho, v_1, v_2, v_3, T)^T$ , для которого соответствующие матрицы  $\mathbf{B}_j$  равны

$$\mathbf{B}_j = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_j} v_j & \delta_j^1 \rho \frac{\partial}{\partial x_j} & \delta_j^2 \rho \frac{\partial}{\partial x_j} & \delta_j^3 \rho \frac{\partial}{\partial x_j} & 0 \\ a_j^1 \frac{\partial}{\partial x_j} & \frac{\partial}{\partial x_j} v_j - d_j^1 & 0 & 0 & b_j^1 \frac{\partial}{\partial x_j} \\ a_j^2 \frac{\partial}{\partial x_j} & 0 & \frac{\partial}{\partial x_j} v_j - d_j^2 & 0 & b_j^2 \frac{\partial}{\partial x_j} \\ a_j^3 \frac{\partial}{\partial x_j} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x_j} v_j - d_j^3 & b_j^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \\ 0 & c_j^1 \frac{\partial}{\partial x_j} & c_j^2 \frac{\partial}{\partial x_j} & c_j^3 \frac{\partial}{\partial x_j} & v_j \frac{\partial}{\partial x_j} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} \tilde{\kappa} \frac{\partial}{\partial x_j} \end{pmatrix}, \quad (3.1.10)$$

где

$$a_j^1 = \frac{\partial_j}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \rho}, \quad b_j^1 = \frac{\delta_j^1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial e}, \quad c_j^1 = \delta_j^1 \frac{p}{\rho}, \quad d_j^1 = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \mu + \delta_j'(\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x_j} \right].$$

Именно эта форма представления уравнений Навье–Стокса использовалась в [6] при построении схем расщепления и приближенной факторизации для их численного решения.

### § 3.2. Метод расщепления

Основные подходы, основанные на методе расщепления по физическим процессам и пространственным направлениям для численного решения уравнений Навье–Стокса, были представлены в [6]. Дадим их краткий анализ, а затем опишем некоторые более экономичные алгоритмы построения разностных схем расщепления для численного решения уравнений газовой динамики и уравнений Навье–Стокса сжимаемого теплопроводного газа.

Проведем анализ уравнений Навье–Стокса (3.1.1)

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \mathbf{W}_j}{\partial x_j} = \mathbf{F}, \quad (3.2.1)$$

исходя из характера гидродинамических сил, определяемых градиентами векторов гидродинамических потоков  $\mathbf{W}_j$ . Следуя [6], гидродинамические потоки могут быть подразделены на три вида:

- инерционные или конвективные;
- обусловленные градиентом давления;
- обусловленные диссипативными эффектами вязкости и теплопроводности.

В соответствии с этим разделением представим векторы потоков в виде суммы векторов

$$\mathbf{W}_j = \mathbf{W}_j^1 + \mathbf{W}_j^2 + \mathbf{W}_j^3, \quad (3.2.2)$$

где

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho v_1 \\ \rho v_2 \\ \rho v_3 \\ E \end{pmatrix}, \quad \mathbf{W}_j^1 = \begin{pmatrix} \rho v_j \\ \rho v_1 v_j \\ \rho v_2 v_j \\ \rho v_3 v_j \\ v_j E \end{pmatrix} = v_j \mathbf{U}, \quad \mathbf{W}_j^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \delta_j^1 p \\ \delta_j^2 p \\ \delta_j^3 p \\ v_j p \end{pmatrix}, \quad \mathbf{W}_j^3 = - \begin{pmatrix} 0 \\ \sigma_{1j} \\ \sigma_{2j} \\ \sigma_{3j} \\ \kappa \frac{\partial T}{\partial x_j} + \sigma_j \end{pmatrix}.$$

В зависимости от преобладания тех или иных гидродинамических сил система уравнений Навье–Стокса может описывать различные физические явления. В случае преобладания инерционных сил уравнения Навье–Стокса принимают вид

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \mathbf{W}_j^1}{\partial x_j} = \mathbf{F}$$

и с учетом соотношений  $\mathbf{W}_j^1 = v_j \mathbf{U}$  могут быть представлены в форме

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} (v_j \mathbf{U}) = \mathbf{F}. \quad (3.2.3)$$

Система уравнений (3.2.3) описывает свободномолекулярное течение, где векторы  $\mathbf{W}_j^1$  учитывают перенос величин  $\mathbf{U}$  со скоростью  $v_j$  вдоль направлений  $x_j$ , а вектор  $\mathbf{F}$ , например, учитывает эффекты взаимодействия частиц. Пренебрегая инерционными и диссипативными силами, получим систему уравнений

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \mathbf{W}_j^2}{\partial x_j} = 0, \quad (3.2.4)$$

являющуюся аналогом уравнения акустики. Действительно, эти уравнения в скалярном виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} \rho v_l + \delta'_j \frac{\partial \rho}{\partial x_j} &= 0 \quad (l=1, 2, 3), \\ \frac{\partial E}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} v_j p &= 0 \end{aligned}$$

после исключения компонент скорости из уравнения энергии, приводятся к уравнению акустики

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ \left( \frac{\rho}{p} \frac{\partial e}{\partial p} \right) \frac{\partial p}{\partial t} \right] = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_j} \right),$$

так как  $\rho > 0$ ,  $p > 0$ ,  $\partial e / \partial p > 0$ . Оно описывает движение частиц вдоль траектории, совпадающей с характеристиками. Наконец, пренебрегая инерционными силами и давлением, приходим к системе уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} \rho v_l + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \sigma_{jl}}{\partial x_j} & \quad (l=1, 2, 3), \\ \frac{\partial E}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \kappa \frac{\partial T}{\partial x_j} + \sum_{l=1}^3 v_l \sigma_{jl} \right) & \end{aligned}$$

не вполне параболического типа (первое из системы уравнений не содержит диссипативных членов). Рассмотренные расщепленные сис-

темы представляют простейшие по физике модели, каждая из которых описывает элементарный физический процесс. Их сочетание и позволяет получать модели, описывающие более сложные физические явления. Например, учет инерционных сил и сил давления приводит к модели газовой динамики. Представление уравнений Навье–Стокса (3.2.1) в форме

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 \sum_{l=1}^3 \frac{\partial \mathbf{W}_j^l}{\partial x_j} = \mathbf{F} \quad (3.2.5)$$

будем трактовать как форму расщепления по физическим процессам и пространственным направлениям. Тогда расщепленная на дифференциальном уровне слабо аппроксимирующая система имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{1}{10} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{W}_1^1}{\partial x_1} &= 0, \\ &\dots \\ \frac{1}{10} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{W}_3^3}{\partial x_3} &= 0, \\ \frac{1}{10} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} &= \mathbf{F}. \end{aligned} \quad (3.2.6)$$

Учет внешних сил может проводиться на каждом (или одном) дробном шаге или выделен в отдельный шаг, как это сделано выше. Для более общих физико-математических моделей вектор правых частей  $\mathbf{F}$  может включать влияние и других эффектов, таких как химические реакции, излучение и т. д. Заметим, что введение расщепления для уравнений Навье–Стокса по пространственным направлениям и по физическим процессам не является строгим, поскольку операторы  $\partial \mathbf{W}_j^3 / \partial x_j$  содержат смешанные производные и система расщепленных уравнений

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{W}_j^3}{\partial x_j} = 0$$

не является одномерной в отличие от уравнений газовой динамики.

Расщепление уравнений Навье–Стокса по физическим процессам и пространственным направлениям можно ввести и для уравнений, записанных в недивергентном виде:

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 \mathbf{B}_j \mathbf{f} = \mathbf{F}. \quad (3.2.7)$$

Представим матричные операторы  $\mathbf{B}_j$  в виде суммы операторов

$$\mathbf{B}_j = \mathbf{B}_j^1 + \mathbf{B}_j^2 + \mathbf{B}_j^3, \quad (3.2.8)$$

каждый из которых описывает элементарные физические процессы, введенные выше для уравнений в консервативной форме (3.2.1), и запишем уравнения Навье–Стокса следующим образом:

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 \sum_{l=1}^3 \mathbf{B}_j^l \mathbf{f} = \mathbf{F}. \quad (3.2.9)$$

Здесь вид операторов  $\mathbf{B}_j^l$  зависит от выбора искомым функций. В случае преобладания инерционных сил уравнения Навье–Стокса принимают вид

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 \mathbf{B}_j^1 \mathbf{f} = \mathbf{F} \quad (3.2.10)$$

и описывают свободномолекулярное течение (конвективный перенос) подобно расщеплению в дивергентной форме. В частности, для вектора  $\mathbf{f} = (\rho, v_1, v_2, v_3, p)^T$  операторы  $\mathbf{B}_j^1$  равны

$$\mathbf{B}_j^1 = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_j} v_j & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & v_j \frac{\partial}{\partial x_j} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & v_j \frac{\partial}{\partial x_j} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & v_j \frac{\partial}{\partial x_j} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & v_j \frac{\partial}{\partial x_j} \end{pmatrix}.$$

При отсутствии инерционных и диссипативных сил система уравнений

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 \mathbf{B}_j^2 \mathbf{f} = 0,$$

где

$$\mathbf{B}_j^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_j^1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_j^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_j^3 \\ 0 & c_j^1 & c_j^2 & c_j^3 & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad b_j^l = \frac{\delta_j^l}{\rho}, \quad c_j^l = \delta_j^l \gamma p,$$



описывает действие сил давления. Наконец, матричные операторы

$$\mathbf{B}_j^3 = - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_j^1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_j^1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_j^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x_j} \tilde{\kappa} \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{1}{\rho} \end{pmatrix},$$

$$d_j^1 = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} [\mu + \delta_j^l (\lambda + \mu)] \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad \tilde{\kappa} = \frac{\kappa}{(\gamma - 1)c_v}$$

описывают влияние диссипативных членов в направлении  $x_j$ . Подобную структуру матричных операторов  $\mathbf{B}_j^l$  уравнения Навье–Стокса сохраняют и для других газодинамических переменных. Заметим, что введенное расщепление уравнений Навье–Стокса (3.2.8) не соответствует введенному выше расщеплению уравнений по физическим процессам и пространственным направлениям (3.2.5). Покажем это. Перепишем расщепленные уравнения в дивергентной форме (3.2.3), (3.2.4) при отсутствии внешних сил (при  $\mathbf{F} = 0$ ) в недивергентной форме в виде расщепления

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 \mathbf{B}_j^l \mathbf{f} = 0, \quad \mathbf{B}_j^l = A^{-1} \frac{\partial W_j^l}{\partial \mathbf{f}} \frac{\partial}{\partial x_j} \quad (l=1, 2).$$

Для вектора  $\mathbf{f} = (\rho, v_1, v_2, v_3, p)^T$  соответствующие матричные операторы равны

$$\mathbf{B}_j^1 = \begin{pmatrix} v_j & \delta_j^1 \rho & \delta_j^1 \rho & \delta_j^1 \rho & 0 \\ 0 & v_j & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & v_j & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & v_j & 0 \\ 0 & \delta_j^1 p & \delta_j^2 p & \delta_j^3 p & v_j \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad \mathbf{B}_j^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_j^1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_j^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_j^3 \\ 0 & c_j^1 & c_j^2 & c_j^3 & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad (3.2.11)$$

где  $b_j^l = \delta_j^l / \rho$ ,  $c_j^l = (\gamma - 1) \delta_j^l p$ . При данном расщеплении оператор  $\mathbf{B}_j^1$ , в отличие от (3.1.9), содержит как конвективные члены уравнений, так и часть членов с давлением, а  $\mathbf{B}_j^2$  – оставшуюся часть членов с давлением. Подобная ситуация возникает и при выборе других иско- мых функций.

### § 3.3. Специальная форма расщепления уравнений газовой динамики

Рассмотрим уравнения газовой динамики

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \mathbf{W}_j}{\partial x_j} = 0, \quad (3.3.1)$$

где, как и выше,

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho v_1 \\ \rho v_2 \\ \rho v_3 \\ E \end{pmatrix}, \quad \mathbf{W}_j = \begin{pmatrix} \rho v_1 \\ \rho v_1 v_j + \delta_j^1 p \\ \rho v_2 v_j + \delta_j^2 p \\ \rho v_3 v_j + \delta_j^3 p \\ v_j (E + p) \end{pmatrix}, \quad E = \rho \left( e + \frac{v^2}{2} \right), \quad v^2 = \sum_{j=1}^3 v_j^2.$$

Введенное в 3.2.2 расщепление уравнений в дивергентном виде по физическим процессам и пространственным направлениям

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 \sum_{l=1}^2 \frac{\partial \mathbf{W}_j^l}{\partial x_j} = 0 \quad (3.3.2)$$

основано на представлении исходной системы уравнений газовой динамики в виде совокупности одномерных систем уравнений

$$\frac{1}{6} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{W}_1^1}{\partial x_1} = 0, \quad \dots, \quad \frac{1}{6} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{W}_3^2}{\partial x_3} = 0,$$

описывающих элементарные физические процессы. Пусть  $\Lambda_j = \partial / \partial x_j + O(h^k)$ . Разностная схема расщепления для отдельных шагов

$$\frac{\mathbf{U}^{n+i/6} - \mathbf{U}^{n+(i-1)/6}}{\tau} + \Lambda_j [\alpha (\mathbf{W}_j^l)^{n+i/6} + \beta (\mathbf{W}_j^l)^{n+(i-1)/6}] = 0 \quad (i=1, \dots, 6)$$

аппроксимирует исходные уравнения (3.3.1) с порядком  $O(\tau^m + h^k)$ , где  $m=2$  при  $\alpha=0,5 + O(\tau)$ , и при  $\alpha \neq 0$  нелинейна. Линеаризуем разностные уравнения относительно вектора  $\mathbf{f} \neq \mathbf{U}$ . Тогда разностные схемы для каждого дробного шага

$$[A + (\tau \alpha \Lambda_j \mathbf{B}_j^l)^n] \frac{\mathbf{f}^{n+i/6} - \mathbf{f}^{n+(i-1)/6}}{\tau} + \Lambda_j (\widetilde{\mathbf{W}}_j^l)^{n+(i-1)/6} = 0,$$

где  $\mathbf{B}_j^l = \partial \widetilde{\mathbf{W}}_j^l / \partial \mathbf{f}$  аппроксимируют расщепленные уравнения с порядком  $O(\tau + h^k)$ . На дробных шагах они реализуются векторными про-

гонками. Как показано выше, введенное выше расщепление уравнений в недивергентной форме не эквивалентно расщеплению уравнений в дивергентном виде. Остановимся более подробно на этом обстоятельстве и рассмотрим, каким расщеплениям уравнений газовой динамики в дивергентной форме соответствует их представление в недивергентном виде?

Подобно введенному расщеплению для одномерных уравнений (см. главу 2), введем расщепление векторов  $\mathbf{W}_j$  в виде

$$\overline{\mathbf{W}}_j = \mathbf{W}_j^1 + \mathbf{W}_j^2,$$

где

$$\mathbf{W}_j^1 = \begin{pmatrix} \rho v_j \\ \rho v_1 v_j \\ \rho v_2 v_j \\ \rho v_3 v_j \\ \rho v_j \frac{v^2}{2} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{W}_j^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \delta_j^1 p \\ \delta_j^2 p \\ \delta_j^3 p \\ v_j (\rho e + p) \end{pmatrix}. \quad (3.3.3)$$

Остановимся на анализе расщепленных систем уравнений

$$\frac{1}{M} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{W}_j^l}{\partial x_j} = 0 \quad (j=1, 2, 3; l=1, 2), \quad M = NL = 6 \quad (N=3, L=2),$$

где операторы  $\mathbf{W}_j^l$  определены в (3.3.3). Для системы расщепленных уравнений

$$\frac{1}{6} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{W}_j^l}{\partial x_j} = 0 \quad (j=1, 2, 3) \quad (3.3.4)$$

последнее уравнение энергии  $\frac{1}{6} \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \rho v_j \frac{v^2}{2} \right) = 0$  с учетом уравнения неразрывности и уравнений движения может быть переписано в виде  $\frac{\partial \rho e}{\partial t} = 0$ . Откуда следует

$$\frac{\partial e}{\partial t} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial p}{\partial t} = 0.$$

Тогда система расщепленных уравнений (3.3.4) для каждого пространственного направления может быть записана в виде

$$\frac{1}{6} \frac{\partial \overline{\mathbf{U}}}{\partial t} + \frac{\partial \overline{\mathbf{W}}_j^l}{\partial x_j} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial t} = 0 \quad \left( \frac{\partial e}{\partial t} = 0 \right),$$

где

$$\bar{\mathbf{U}} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho v_1 \\ \rho v_2 \\ \rho v_3 \end{pmatrix}, \quad \overline{\mathbf{W}}_j = v_j \begin{pmatrix} \rho \\ \rho v_1 \\ \rho v_2 \\ \rho v_3 \end{pmatrix} = v_j \bar{\mathbf{U}}.$$

Данная форма записи уравнений определяет выбор новых переменных для расщепленных уравнений, которые могут задаваться в виде

$$\mathbf{f} = \begin{pmatrix} \rho \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ p \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho v_1 \\ \rho v_2 \\ \rho v_3 \\ p \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{pmatrix} \rho \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ e \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \mathbf{f} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho v_1 \\ \rho v_2 \\ \rho v_3 \\ T \end{pmatrix}.$$

Системе уравнений (3.3.2) в форме расщепления (3.3.3) соответствует система уравнений в новых переменных в недивергентном виде

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 \sum_{l=1}^2 \mathbf{B}_j^l \mathbf{f} = 0, \quad \mathbf{B}_j^l = A^{-1} \frac{\partial \mathbf{W}_j^l}{\partial \mathbf{f}} \frac{\partial}{\partial x_j}. \quad (3.3.5)$$

Как отмечалось выше, для каждой из подсистем расщепленных уравнений

$$\frac{1}{2} \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 \mathbf{B}_j^1 \mathbf{f} = 0,$$

или

$$\frac{1}{2} \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 \mathbf{B}_j^2 \mathbf{f} = 0$$

могут быть выбраны различные векторы, что может приводить к упрощению реализации соответствующих разностных схем. Так, например, операторы  $\mathbf{B}_j^1$  могут быть представлены в различных формах. В дивергентном виде

$$\mathbf{B}_j^1 = \frac{\partial}{\partial x_j} \begin{pmatrix} v_j & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & v_j & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & v_j & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & v_j & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{для вектора } \mathbf{f} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho v_1 \\ \rho v_2 \\ \rho v_3 \\ p \end{pmatrix}, \quad (3.3.6)$$

$$\mathbf{B}_j^1 = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_j} v_j & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & v_j \frac{\partial}{\partial x_j} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & v_j \frac{\partial}{\partial x_j} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & v_j \frac{\partial}{\partial x_j} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ для } \mathbf{f} = \begin{pmatrix} \rho \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ p \end{pmatrix}, \mathbf{f} = \begin{pmatrix} \rho \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ e \end{pmatrix}. \quad (3.3.7)$$

Таким образом, введение расщепления уравнений газовой динамики позволяет свести расщепленную систему уравнений в дивергентной форме (3.3.4) к эквивалентной ей форме расщепленных уравнений в недивергентном виде

$$\frac{1}{6} \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} + \mathbf{B}_j^1 \mathbf{f} = 0.$$

где  $\mathbf{B}_j^1$  из (3.3.6) или (3.3.7) – матрицы с ненулевыми элементами лишь на главной диагонали.

Остановимся на анализе системы второй группы расщепленных уравнений, в которых сохранены члены, обусловленные градиентом давления, в дивергентной форме

$$\frac{1}{2} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \mathbf{W}_j^2}{\partial x_j} = 0.$$

Им соответствуют уравнения в недивергентной форме

$$\frac{1}{2} \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 \mathbf{B}_j^2 \mathbf{f} = 0,$$

где операторы  $\mathbf{B}_j^2$  для различных газодинамических переменных равны

$$\mathbf{B}_j^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_j^1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_j^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_j^3 \\ 0 & c_j^1 & c_j^2 & c_j^3 & v_j \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad b_j^l = \delta_j^l / \rho, \quad c_j^l = \delta_j^l \gamma p \quad (3.3.8)$$

для  $\mathbf{f} = (\rho, v_1, v_2, v_3, p)^T$ .

или

$$\mathbf{B}_j^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \delta_j^1 \frac{\partial}{\partial x_j} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \delta_j^2 \frac{\partial}{\partial x_j} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \delta_j^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \\ 0 & c_j^1 \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{1}{\rho} & c_j^2 \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{1}{\rho} & c_j^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{1}{\rho} & v_j \frac{\partial}{\partial x_j} \end{pmatrix} \quad (3.3.9)$$

для  $\mathbf{f} = (\rho, \rho v_1, \rho v_2, \rho v_3, p)^T$ , или

$$\mathbf{B}_j^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_j^1 \frac{\partial}{\partial x_j} & 0 & 0 & 0 & b_j^1 \frac{\partial}{\partial x_j} \\ a_j^2 \frac{\partial}{\partial x_j} & 0 & 0 & 0 & b_j^2 \frac{\partial}{\partial x_j} \\ a_j^3 \frac{\partial}{\partial x_j} & 0 & 0 & 0 & b_j^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \\ 0 & c_j^1 \frac{\partial}{\partial x_j} & c_j^2 \frac{\partial}{\partial x_j} & c_j^3 \frac{\partial}{\partial x_j} & v_j \frac{\partial}{\partial x_j} \end{pmatrix} \quad (3.3.10)$$

для  $\mathbf{f} = (\rho, v_1, v_2, v_3, e)^T$ , а соответствующие коэффициенты равны:

$$a_j^l = \frac{\delta_j^l}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \rho}, \quad b_j^l = \frac{\delta_j^l}{\rho} \frac{\partial p}{\partial e}, \quad c_j^l = \delta_j^l \frac{p}{\rho}.$$

(3.3.8)–(3.3.10) следует, что при решении уравнений газовой динамики (3.3.5) целесообразно выбирать в качестве искомым функций газодинамические переменные плотность, компоненты скорости (или импульса) и давление. Как показано ниже, неявные разностные схемы при введенном расщеплении являются оптимальными, т. е. требуют при своей реализации минимального числа арифметических операций при переходе с одного временного слоя на другой.

### § 3.4. Специальная форма расщепления уравнений Навье–Стокса

Введенное в § 3.2 расщепление уравнений Навье–Стокса сжимаемого теплопроводного газа (3.2.1) по физическим процессам и пространственным переменным (3.2.2) не является строгим, в отличие от уравнений газовой динамики. Однако уравнениям Навье–Стокса можно придать форму, удобную для расщепления, переписав их в виде

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 \sum_{l=1}^3 \frac{\partial \widetilde{\mathbf{W}}_j^l}{\partial x_j} = \widetilde{\mathbf{F}}, \quad p = p(\rho, e), \quad e = e(T), \quad (3.4.1)$$

где по аналогии с уравнениями газовой динамики введено расщепление уравнений по физическим процессам в специальной форме:

$$\widetilde{\mathbf{W}}_j^1 = \mathbf{W}_j^1 = \begin{pmatrix} \rho v_j \\ \rho v_1 v_j \\ \rho v_2 v_j \\ \rho v_3 v_j \\ \rho v_j \frac{v^2}{2} \end{pmatrix}, \quad \widetilde{\mathbf{W}}_j^2 = \mathbf{W}_j^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \delta_j^1 p \\ \delta_j^2 p \\ \delta_j^3 p \\ v_j (\rho e + p) \end{pmatrix}, \quad \widetilde{\mathbf{W}}_j^3 = - \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{\sigma}_{j1} \\ \tilde{\sigma}_{j2} \\ \tilde{\sigma}_{j3} \\ \kappa \frac{\partial T}{\partial x_j} \end{pmatrix}.$$

Здесь  $\tilde{\sigma}_{jl} = [\mu + \delta_j^l (\mu + \lambda)] \frac{\partial v_l}{\partial x_j}$ . Операторы  $\widetilde{\mathbf{W}}_j^1, \widetilde{\mathbf{W}}_j^2$  совпадают с расщепленными операторами уравнений газовой динамики (3.3.3), а оператор  $\widetilde{\mathbf{W}}_j^3$  содержит лишь повторные производные по направлению  $x_j$  в уравнениях движения и член с теплопроводностью в уравнении энергии. Вектор  $\widetilde{\mathbf{F}}$  включает смешанные производные в уравнениях движения, диссипативные члены в уравнении энергии и вектор внешних сил  $\mathbf{F}$ . Таким образом, введение расщепления по физическим процессам и пространственным направлениям позволило свести решение исходной многомерной задачи к набору более простых одномерных задач (кроме последнего уравнения)

$$\begin{aligned} \frac{1}{10} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \widetilde{\mathbf{W}}_1^1}{\partial x_1} &= 0, \\ &\dots, \\ \frac{1}{10} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \widetilde{\mathbf{W}}_3^3}{\partial x_3} &= 0, \\ \frac{1}{10} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} &= \widetilde{\mathbf{F}}, \end{aligned} \quad (3.4.2)$$

слабо аппроксимирующих исходные уравнения Навье–Стокса [6]. Тогда, по аналогии с уравнениями газовой динамики, систему уравнений Навье–Стокса (3.4.1), (3.4.2) можно записать в форме расщепления по пространственным направлениям и физическим процессам и в новых переменных, разрешенных относительно вектора  $\mathbf{f}$ :

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 \sum_{l=1}^3 \mathbf{B}'_j \mathbf{f} = \mathbf{F}, \quad \mathbf{B}'_j = A^{-1} \frac{\partial \mathbf{W}'_j}{\partial \mathbf{f}} \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad \mathbf{F} = A^{-1} \tilde{\mathbf{F}}. \quad (3.4.3)$$

Уравнения (3.4.3) содержат газодинамические члены уравнений и часть вязких членов в уравнениях движения, и поэтому в качестве искомых функций удобно выбрать плотность, скорость и давление или плотность, скорость и внутреннюю энергию (или температуру). В этом случае операторы  $\mathbf{B}'_j, \mathbf{B}''_j$  совпадают с расщепленными операторами (3.3.8), (3.3.10) для уравнений газовой динамики, т. е. равны

$$\mathbf{B}^1_j = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_j} v_j & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & v_j \frac{\partial}{\partial x_j} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & v_j \frac{\partial}{\partial x_j} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & v_j \frac{\partial}{\partial x_j} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.4.4)$$

$$\mathbf{B}^2_j = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_j^1 \frac{\partial}{\partial x_j} & 0 & 0 & 0 & b_j^1 \frac{\partial}{\partial x_j} \\ a_j^2 \frac{\partial}{\partial x_j} & 0 & 0 & 0 & b_j^2 \frac{\partial}{\partial x_j} \\ a_j^3 \frac{\partial}{\partial x_j} & 0 & 0 & 0 & b_j^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \\ 0 & c_j^1 \frac{\partial}{\partial x_j} & c_j^2 \frac{\partial}{\partial x_j} & c_j^3 \frac{\partial}{\partial x_j} & v_j \frac{\partial}{\partial x_j} \end{pmatrix},$$

а операторы  $\mathbf{B}^3_j$  соответственно равны



$$\mathbf{B}_j^3 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \eta_j^1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \eta_j^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \eta_j^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{\kappa} \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_j} \text{ для } \mathbf{f} = \begin{pmatrix} \rho \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ e \end{pmatrix}, \mathbf{f} = \begin{pmatrix} \rho \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ T \end{pmatrix}. \quad (3.4.5)$$

Здесь  $\eta_j^l = [\mu + \delta_j^l(\lambda + \mu)]$ ,  $\tilde{\kappa} = \kappa/c_v$ . Отметим, что матрицы  $\mathbf{B}_j^1$  и  $\mathbf{B}_j^3$  содержат ненулевые члены лишь на главной диагонали, и поэтому подобно одномерному случаю их можно объединить в единый шаг (кроме уравнения энергии). Так как оператор  $\mathbf{B}_j^2$  содержит все члены уравнения энергии (уравнений газовой динамики), то член с теплопроводностью  $\frac{\partial}{\partial x_j} \kappa \frac{\partial T}{\partial x_j}$  в уравнении энергии также целесообразно рассматривать в этом операторе. Тогда систему уравнений Навье–Стокса можно записать в форме расщепления по пространственным направлениям и физическим процессам в виде

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 \sum_{l=1}^2 \mathbf{B}_j^l \mathbf{f} = \mathbf{F}, \quad (3.4.6)$$

где

$$\mathbf{B}_j^2 = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_j} v_j & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & v_j \frac{\partial}{\partial x_j} - d_j^1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & v_j \frac{\partial}{\partial x_j} - d_j^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & v_j \frac{\partial}{\partial x_j} - d_j^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad d_j^l = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} \eta_j^l \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad (3.4.7)$$

$$\mathbf{B}_j^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_j^1 \frac{\partial}{\partial x_j} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_j^2 \frac{\partial}{\partial x_j} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_j^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \\ 0 & c_j^1 \frac{\partial}{\partial x_j} & c_j^2 \frac{\partial}{\partial x_j} & c_j^3 \frac{\partial}{\partial x_j} & v_j \frac{\partial}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} \tilde{\kappa} \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{1}{\rho} \end{pmatrix}, \quad c_j^l = \delta_j^l \gamma p$$

$\mathbf{f} = (\rho, v_1, v_2, v_3, p)^T$  или

$$\mathbf{V}_j^1 = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_j} v_j & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & v_j \frac{\partial}{\partial x_j} - d_j^1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & v_j \frac{\partial}{\partial x_j} - d_j^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & v_j \frac{\partial}{\partial x_j} - d_j^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.4.8)$$

$$\mathbf{V}_j^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_j^1 \frac{\partial}{\partial x_j} & 0 & 0 & 0 & b_j^1 \frac{\partial}{\partial x_j} \\ a_j^2 \frac{\partial}{\partial x_j} & 0 & 0 & 0 & b_j^2 \frac{\partial}{\partial x_j} \\ a_j^3 \frac{\partial}{\partial x_j} & 0 & 0 & 0 & b_j^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \\ 0 & c_j^1 \frac{\partial}{\partial x_j} & c_j^2 \frac{\partial}{\partial x_j} & c_j^3 \frac{\partial}{\partial x_j} & v_j \frac{\partial}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} \tilde{\kappa} \frac{\partial}{\partial x_j} \end{pmatrix},$$

для  $f = (\rho, v_1, v_2, v_3, T)^T$ , где  $a_j^l = \frac{\delta_j^l}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \rho}$ ,  $b_j^l = \frac{\delta_j^l}{\rho} \frac{\partial p}{\partial T}$ ,  $c_j^l = \delta_j^l \frac{p}{\rho}$ ,  $\tilde{\kappa} = \frac{\kappa}{c_v}$ .

Отметим, что при данных расщеплениях уравнений Навье–Стокса по физическим процессам нет полной эквивалентности представления расщепленных систем уравнений в недивергентной и дивергентной формах. Введенная форма расщепления операторов  $\mathbf{V}_j$  позволяет строить разностные схемы, реализуемые скалярными прогонками на дробных шагах при сохранении их устойчивости.

### § 3.5. Неявные разностные схемы для уравнений газовой динамики

На основе введенных выше расщеплений уравнений рассмотрим класс экономичных неявных разностных схем для численного решения уравнений газовой динамики. Их реализация на дробных шагах может быть сведена к скалярным прогонкам или к бегущему счету, они безусловно устойчивы при выборе весового множителя  $\alpha$  и консервативны при установлении.

### 3.5.1. Схемы приближенной факторизации

Аппроксимация уравнений газовой динамики в дивергентной форме (3.3.1)

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \mathbf{W}_j}{\partial x_j} = 0 \quad (3.5.1)$$

неявными схемами приводит к нелинейной системе разностных уравнений

$$\frac{\mathbf{U}^{n+1} \mathbf{U}^n}{\tau} + \sum_{j=1}^3 \Lambda_j (\alpha \mathbf{W}_j^{n+1} + \beta \mathbf{W}_j^n) = 0. \quad (3.5.2)$$

Схема (3.5.2) аппроксимирует систему уравнений (3.5.1) с порядком  $O(\tau^m + h^k)$ , где  $\Lambda_j = \partial / \partial x_j + O(h_j^k)$ , а  $m = 2$  при  $\alpha = 0,5 + O(\tau)$ . В качестве операторов  $\Lambda_j$  могут выбираться симметричные или несимметричные операторы подобно главе 2. Реализация разностных уравнений (3.5.2) требует итераций по нелинейности или специальных алгоритмов. Линеаризуем вектор  $\mathbf{W}^{n+1}$  относительно вектора  $\mathbf{U}$  по формуле

$$\mathbf{W}_j^{n+1} = \mathbf{W}_j^n + \tau \left( \frac{\partial \mathbf{W}_j}{\partial \mathbf{U}} \right)^n \left( \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} \right)^n + O(\tau^2) = \mathbf{W}_j^n + \tau \mathbf{B}_j^n \frac{\mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{U}^n}{\tau} + O(\tau^2),$$

где

$$\mathbf{B}_j = \frac{\partial \mathbf{W}_j}{\partial \mathbf{U}} = \begin{pmatrix} 0 & \delta_j^1 & \delta_j^2 & \delta_j^3 & 0 \\ a_j^1 & d_{j1}^1 & d_{j1}^2 & d_{j1}^3 & b_j^1 \\ a_j^2 & d_{j2}^1 & d_{j2}^2 & d_{j2}^3 & b_j^2 \\ a_j^3 & d_{j3}^1 & d_{j3}^2 & d_{j3}^3 & b_j^3 \\ a_j^4 & c_j^1 & c_j^2 & c_j^3 & \gamma v_j \end{pmatrix},$$

$$a_j^l = -v_j v_l + \delta_j^l \frac{\gamma-1}{2} v^2, \quad b_j^l = (\gamma-1) \delta_j^l, \quad t = \gamma E - \frac{\gamma-1}{2} v^2,$$

$$c_j^l = \frac{1}{\rho} [t - (\gamma-1) \delta_j^l v_j v_l],$$

$$a_j^4 = -\frac{v_j}{\rho} [t - (\gamma-1) v^2], \quad d_{jl}^s = \delta_j^s v_l - (\gamma-1) \delta_j^l v_l, \quad v^2 = \sum_{j=1}^3 v_j^2.$$

Тогда разностная схема

$$\left( \mathbf{I} + \tau \alpha \sum_{j=1}^3 \Lambda_j \mathbf{B}_j^n \right) \frac{\mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{U}^n}{\tau} = - \sum_{j=1}^3 \Lambda_j \mathbf{W}_j^n$$

линейна для всех значений весового множителя  $\alpha$  и реализуется матричной прогонкой. В [35] была предложена схема приближенной факторизации с расщеплением операторов по пространственным направлениям

$$\prod_{j=1}^3 [I + \tau\alpha\Lambda_j \mathbf{B}_j^n] \frac{\mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{U}^n}{\tau} = - \sum_{j=1}^3 \Lambda_j \mathbf{W}_j^n. \quad (3.5.3)$$

Ей эквивалентна схема в дробных шагах.

$$\begin{aligned} \xi^n &= - \sum_{j=1}^3 \Lambda_j \mathbf{W}_j^n, \\ (\mathbf{I} + \tau\alpha\Lambda_1 \mathbf{B}_1^n) \xi^{n+1/3} &= \xi^n, \\ (\mathbf{I} + \tau\alpha\Lambda_2 \mathbf{B}_2^n) \xi^{n+2/3} &= \xi^{n+1/3}, \\ (\mathbf{I} + \tau\alpha\Lambda_3 \mathbf{B}_3^n) \xi^{n+1} &= \xi^{n+2/3}, \\ \mathbf{U}^{n+1} &= \mathbf{U}^n + \tau \xi^{n+1}, \end{aligned}$$

реализация которой на каждом дробном шаге сводилась к векторным прогонкам. Схема (3.5.3) безусловно устойчива при  $\alpha \geq 0,5$  для двумерных уравнений и условно устойчива в трехмерном случае, как всякая схема приближенной факторизации для гиперболических уравнений (см. § 1.10 главы 1). Она аппроксимирует уравнения газовой динамики с порядком  $O(\tau^m + h^k)$ , где  $m=2$  при  $\alpha = 0,5 + O(\tau)$ . Аналогичные разностные схемы могут быть построены и для решения уравнений газовой динамики в недивергентной форме

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 \mathbf{B}_j \mathbf{f} = 0, \quad \mathbf{B}_j = A^{-1} \left( \frac{\partial W_j}{\partial \mathbf{f}} \right) \mathbf{A} \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad \mathbf{A} = \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{f}}, \quad (3.5.4)$$

разрешенных относительно вектора  $\mathbf{f}$ . Для уравнения состояния идеального газа операторы  $\mathbf{B}_j$  равны

$$\mathbf{B}_j = \begin{pmatrix} v_j & \rho \delta_j^1 & \rho \delta_j^3 & \rho \delta_j^3 & 0 \\ 0 & v_j & 0 & 0 & b_j^1 \\ 0 & 0 & v_j & 0 & b_j^2 \\ 0 & 0 & 0 & v_j & b_j^3 \\ 0 & c_j^1 & c_j^2 & c_j^3 & v_j \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad b_j^l = \frac{\delta_j^l}{\rho}, \quad c_j^l = \delta_j^l \gamma p, \quad \text{где } \mathbf{f} = \begin{pmatrix} \rho \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ p \end{pmatrix},$$

или

$$\mathbf{B}_j = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_j} v_j & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & v_j \frac{\partial}{\partial x_j} & 0 & 0 & b_j^1 \frac{\partial}{\partial x_j} \\ 0 & 0 & v_j \frac{\partial}{\partial x_j} & 0 & b_j^2 \frac{\partial}{\partial x_j} \\ 0 & 0 & 0 & v_j \frac{\partial}{\partial x_j} & b_j^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \\ 0 & c_j^1 \frac{\partial}{\partial x_j} & c_j^2 \frac{\partial}{\partial x_j} & c_j^3 \frac{\partial}{\partial x_j} & v_j \frac{\partial}{\partial x_j} \end{pmatrix},$$

если уравнение неразрывности сохранить в дивергентной форме.

Аппроксимируем первые производные  $\partial/\partial x_j$  в операторах  $\mathbf{B}_j$  сеточными операторами  $\Lambda_j$  с порядком  $O(h_j^k)$  по формулам

$$\mathbf{B}_{jh} = \begin{pmatrix} \Lambda_j v_j & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & v_j \Lambda_j & 0 & 0 & b_j^1 \bar{\Lambda}_j \\ 0 & 0 & v_j \Lambda_j & 0 & b_j^2 \bar{\Lambda}_j \\ 0 & 0 & 0 & v_j \Lambda_j & b_j^3 \bar{\Lambda}_j \\ 0 & c_j^1 \Lambda_j & c_j^2 \Lambda_j & c_j^3 \Lambda_j & v_j \Lambda_j \end{pmatrix}.$$

Здесь, как и в главе 1, первые производные аппроксимированы несимметричными операторами  $\Lambda_j^k = \partial/\partial x_j + O(h_j^k)$  с учетом знака скорости  $v_j$  по формулам

$$\Lambda_j^k = \Lambda_{\mp j}^k, \bar{\Lambda}_j^k = \Lambda_{\pm j}^k, \text{ если } v_j \geq 0,$$

и

$$\Lambda_j^k = \Lambda_{\pm j}^k, \bar{\Lambda}_j^k = \Lambda_{\mp j}^k, \text{ если } v_j \leq 0,$$

или по формулам

$$\Lambda_j^k = \Lambda_j^2 = (\Lambda_{-j}^1 + \Lambda_{+j}^1)/2$$

при симметричной аппроксимации, где  $\Lambda_{\pm j}^1 = \pm(I - T_{\pm})/h_j$ ,  $T_{\pm} f_{i_j} = f_{i_j \pm 1}$  – оператор сдвига на один шаг сетки в направлении  $x_j$ . Разностная схема приближенной факторизации

$$\prod_{j=1}^3 [I + \tau \alpha \mathbf{B}_{jh}^n] \frac{\mathbf{f}^{n+1} - \mathbf{f}^n}{\tau} = - \sum_{j=1}^3 \mathbf{B}_{jh}^n \mathbf{f}^n \quad (3.5.5)$$

или эквивалентная ей схема в дробных шагах

$$\begin{aligned} \xi^n &= - \sum_{j=1}^3 \mathbf{B}_{jh}^n \mathbf{f}^n, \\ (\mathbf{I} + \tau \alpha \mathbf{B}_{1h}^n) \xi^{n+1/3} &= \xi^n, \\ (\mathbf{I} + \tau \alpha \mathbf{B}_{2h}^n) \xi^{n+2/3} &= \xi^{n+1/3}, \\ (\mathbf{I} + \tau \alpha \mathbf{B}_3^n) \xi^{n+1} &= \xi^{n+2/3}, \\ \mathbf{f}^{n+1} &= \mathbf{f}^n + \tau \xi^{n+1} \end{aligned}$$

аппроксимируют уравнения (3.5.4) с порядком  $O(\tau + h^k)$ , так как коэффициенты матриц  $\mathbf{B}_j^n$  аппроксимированы на нижнем  $n$ -м слое, и также реализуется векторными прогонками. В трехмерном случае она условно устойчива.

При решении стационарных задач методом установления для решения уравнений газовой динамики предпочтительнее может оказаться разностная схема

$$\prod_{j=1}^3 [I + \tau \alpha \mathbf{B}_{jh}^n] \frac{\mathbf{f}^{n+1} - \mathbf{f}^n}{\tau} = -A^{-1} \sum_{j=1}^3 \Lambda_j \mathbf{W}_j^n, \quad (3.5.6)$$

полученная из (3.5.5) при замене оператора правой части схемы (3.5.5) на оператор в предельно дивергентной форме, что возможно в силу эквивалентности представления уравнений (для гладких решений) в дивергентном и недивергентном виде

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} = - \sum_{j=1}^3 \mathbf{B}_j \mathbf{f} = -A^{-1} \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \mathbf{W}_j}{\partial x_j}.$$

Для повышения порядка аппроксимации схемы разностные операторы на дробных шагах и в операторе правой части могут задаваться с различным порядком, например, с первым порядком на дробных шагах (при  $k = 1$ ) и со вторым ( $l = 2$ ) в операторе правой части схемы. Тогда разностная схема

$$\prod_{j=1}^3 [I + \tau \alpha \mathbf{B}_{jh}^k] \frac{\mathbf{f}^{n+1} - \mathbf{f}^n}{\tau} = -(\mathbf{A}^{-1})^n \sum_{j=1}^3 \Lambda_j \mathbf{W}_j^n, \quad (3.5.7)$$

где  $\mathbf{B}_{jh}^k = \mathbf{B}_j + O(h^k)$ ,  $\Lambda_j^l = \partial / \partial x_j + O(h^l)$ , аппроксимирует исходные уравнения (3.5.1) с порядком  $O(\tau + \tau h^k + h^l)$ , реализуется подобно схеме

(3.5.5) на дробных шагах трехточечными векторными прогонками и при установлении аппроксимирует стационарные уравнения газовой динамики

$$\sum_{j=1}^3 \Lambda_j' \mathbf{W}_j^n = 0$$

в консервативной форме с порядком  $O(h^l)$ . Реализация векторных прогонок при решении разностных уравнений на дробных шагах требует обращения матриц размером  $5 \times 5$  в каждом узле сетки на каждом дробном шаге.

Для получения схем, реализуемых скалярными прогонками, в [37] предложена разностная схема, использующая свойство гиперболичности уравнений газовой динамики. В силу гиперболичности уравнений газовой динамики матрицы Якоби  $\mathbf{B}_j = \partial \mathbf{W}_j / \partial \mathbf{U}$  невырожденным преобразованием могут быть приведены к диагональному виду

$$\mathbf{B}_j = \mathbf{S}_j^{-1} \mathbf{D}_j \mathbf{S}_j,$$

где

$$\mathbf{D}_j = \begin{pmatrix} v_j & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & v_j & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & v_j & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & v_j + c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & v_j - c \end{pmatrix}. \quad (3.5.8)$$

Здесь  $c = \sqrt{\gamma p / \rho}$  – скорость звука. Тогда стабилизирующий оператор схемы (3.5.3)

$$\mathbf{C} = \prod_{j=1}^3 [I + \tau \alpha \Lambda_j \mathbf{B}_j^n]$$

представим в виде приближенного равенства

$$\begin{aligned} \mathbf{C} &= \prod_{j=1}^3 (\mathbf{S}_j^{-1} \mathbf{S}_j + \tau \alpha \Lambda_j \mathbf{S}_j^{-1} \mathbf{D}_j^n \mathbf{S}_j) \approx \prod_{j=1}^3 \mathbf{S}_j^{-1} (I + \tau \alpha \Lambda_j \mathbf{D}_j^n) \mathbf{S}_j = \\ &= \mathbf{S}^{-1} \left[ \prod_{j=1}^3 (I + \tau \alpha \Lambda_j \mathbf{D}_j^n) \right] \mathbf{S} = \tilde{\mathbf{C}}, \quad \mathbf{S} = \mathbf{S}_1 \mathbf{S}_2 \mathbf{S}_3, \quad \mathbf{S}^{-1} = \mathbf{S}_1^{-1} \mathbf{S}_2^{-1} \mathbf{S}_3^{-1}. \end{aligned} \quad (3.5.9)$$

С учетом представления (3.5.9) разностная схема

$$\tilde{\mathbf{C}} \mathbf{S} \frac{\mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{U}^n}{\tau} = -\mathbf{S} \cdot \sum_{j=1}^3 \Lambda_j \mathbf{W}_j^n, \quad \tilde{\mathbf{C}} = \prod_{j=1}^3 [I + \tau \alpha \Lambda_j \mathbf{D}_j^n] \quad (3.5.10)$$

аппроксимирует исходные уравнения с порядком  $O(\tau + h^k)$ , так как при замене оператора  $\mathbf{C}$  приближенным оператором  $\tilde{\mathbf{C}}$  допущена погрешность  $O(\tau)$ . Разностной схеме соответствует схема в дробных шагах

$$\begin{aligned}\xi^n &= -\mathbf{S} \sum_{j=1}^3 \Lambda_j \mathbf{W}_j^n, \\ (\mathbf{I} + \tau \alpha \Lambda_1 \mathbf{D}_1^n) \xi^{n+1/3} &= \xi^n, \\ (\mathbf{I} + \tau \alpha \Lambda_2 \mathbf{D}_2^n) \xi^{n+2/3} &= \xi^{n+1/3}, \\ (\mathbf{I} + \tau \alpha \Lambda_3 \mathbf{D}_3^n) \xi^{n+1} &= \xi^{n+2/3}, \\ \mathbf{U}^{n+1} &= \mathbf{U}^n + \tau \mathbf{S}^{-1} \xi^{n+1}.\end{aligned}\tag{3.5.11}$$

Так как матрицы  $\mathbf{D}_j$  имеют ненулевые элементы лишь на главной диагонали, то разностные уравнения (3.5.11) на каждом дробном шаге реализуются независимо для каждой компоненты вектора  $\xi^{n+1/3}$  ( $l = 1, 2, 3$ ), например, скалярными прогонками или по неявной схеме бегущего счета. Новое значение функции на  $(n+1)$ -м шаге вычисляется явно из последнего уравнения схемы (3.5.11). Таким образом, реализация разностной схемы вида (3.5.10) сводится к  $N \times m$  скалярным прогонкам, где  $N$  – размерность задачи, а  $m$  – число уравнений, т. е. решение трехмерных уравнений Эйлера сводится к  $N \times m$  скалярным прогонкам, однократному вычислению матриц  $\mathbf{S}$  и  $\mathbf{S}^{-1}$ , что делает этот алгоритм более экономичным, чем по схеме (3.5.3).

Подобно схеме (3.5.7), выберем аппроксимацию разностных операторов  $\Lambda_j$  на дробных шагах и в операторе правой части схемы (3.5.9) различного порядка, например, несимметричными операторами с первым порядком (в зависимости от знака собственных чисел матриц  $\mathbf{D}_j$ ) и со вторым порядком в операторе правой части. Тогда разностная схема

$$\prod_{j=1}^3 [\mathbf{I} + \tau \alpha \Lambda_j^k \mathbf{D}_j^n] \mathbf{S} \frac{\mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{U}^n}{\tau} = -\mathbf{S} \cdot \sum_{j=1}^3 \Lambda_j^l \mathbf{W}_j^n \tag{3.5.12}$$

аппроксимирует исходные уравнения (3.5.1) с порядком  $O(\tau + \tau h^k + h^l)$  и также реализуется скалярными прогонками или по схеме бегущего счета на каждом дробном шаге. В качестве недостатка схем вида (3.5.9) отметим, что, в отличие от схемы (3.5.3), они имеют лишь первый порядок аппроксимации по времени, что может оказаться недостаточным при решении нестационарных задач.

**Замечание.** Разностные схемы вида (3.5.10) или (3.5.12) могут быть построены и для уравнений газовой динамики в недивергентном виде



$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 \mathbf{B}_j \frac{\partial}{\partial x_j} \mathbf{f} = 0,$$

где

$$\mathbf{B}_j = \mathbf{A}^{-1} \left( \frac{\partial \mathbf{W}_j}{\partial \mathbf{f}} \right) \mathbf{A}, \quad \mathbf{f} = \begin{pmatrix} \rho \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ p \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{B}_j = \begin{pmatrix} v_j & \rho \delta_j^1 & \rho \delta_j^2 & \rho \delta_j^3 & 0 \\ 0 & v_j & 0 & 0 & b_j^1 \\ 0 & 0 & v_j & 0 & b_j^2 \\ 0 & 0 & 0 & v_j & b_j^3 \\ 0 & c_j^1 & c_j^2 & c_j^3 & v_j \end{pmatrix}, \quad b_j^l = \frac{\delta_j^l}{\rho}, \quad c_j^l = \delta_j^l \gamma p.$$

Невырожденным преобразованием матрицы  $\mathbf{B}_j$  приводятся к диагональному виду  $\mathbf{B}_j = \bar{\mathbf{S}}_j^{-1} \mathbf{D}_j \bar{\mathbf{S}}_j$ . Разностная схема

$$\prod_{j=1}^3 [I + \tau \alpha \Lambda_j^k \mathbf{D}_j^n \Lambda_j^k] \bar{\mathbf{S}} \frac{\mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{U}^n}{\tau} = -\bar{\mathbf{S}} \cdot \sum_{j=1}^3 \Lambda_j^l \mathbf{W}_j^n$$

или эквивалентная ей схема в дробных шагах

$$\xi^n = -\bar{\mathbf{S}} \sum_{j=1}^3 \Lambda_j^l \mathbf{W}_j^n,$$

$$(\mathbf{I} + \tau \alpha \mathbf{D}_1^n \Lambda_1) \xi^{n+1/3} = \xi^n,$$

$$(\mathbf{I} + \tau \alpha \mathbf{D}_2^n \Lambda_2) \xi^{n+2/3} = \xi^{n+1/3},$$

$$(\mathbf{I} + \tau \alpha \mathbf{D}_3^n \Lambda_3) \xi^{n+1} = \xi^{n+2/3},$$

$$\mathbf{U}^{n+1} = \mathbf{U}^n + \tau \bar{\mathbf{S}}^{-1} \xi^{n+1}$$

аппроксимируют уравнения газовой динамики с порядком  $O(\tau + \tau h^k + h^l)$  и на дробных шагах реализуются подобно схеме (3.5.10). Напомним, что все разностные схемы приближенной факторизации в трехмерном случае условно устойчивы.

### 3.5.2. Схемы расщепления по направлениям

Схемы расщепления для численного решения уравнений газовой динамики строятся подобно схемам приближенной факторизации

ции. Пусть, как и выше,  $\Lambda_j$  – разностные операторы, аппроксимирующие первые производные  $\partial/\partial x_j$  в системе уравнений (3.5.1) с порядком  $O(h_j^k)$ . Для численного решения уравнений газовой динамики в дивергентной форме (3.5.1) рассмотрим разностную схему расщепления по направлениям с весами

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{U}^{n+1/3} - \mathbf{U}^n}{\tau} + \Lambda_1(\alpha \mathbf{W}_1^{n+1/3} + \beta \mathbf{W}_1^n) &= 0, \\ \frac{\mathbf{U}^{n+2/3} - \mathbf{U}^{n+1/3}}{\tau} + \Lambda_2(\alpha \mathbf{W}_2^{n+2/3} + \beta \mathbf{W}_2^{n+1/3}) &= 0, \\ \frac{\mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{U}^{n+2/3}}{\tau} + \Lambda_3(\alpha \mathbf{W}_3^{n+1} + \beta \mathbf{W}_3^{n+2/3}) &= 0. \end{aligned}$$

Она аппроксимирует уравнения (3.5.1) с порядком  $O(\tau^m + h^k)$ , где  $m = 2$  при  $\alpha = 0,5 + O(\tau)$ , и при  $\alpha \neq 0$  нелинейная. Линеаризуем векторы  $\mathbf{W}_j^{n+1/3}$  по формулам

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_j^{n+1/3} &= \mathbf{W}_j^{n+(l-1)/3} + \tau \left( \frac{\partial \mathbf{W}_j}{\partial \mathbf{U}} \right)^{n+(l-1)/3} \left( \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} \right)^{n+(l-1)/3} + O(\tau^2) = \\ &= \mathbf{W}_j^{n+(l-1)/3} + \tau \mathbf{B}_j^n \frac{\mathbf{U}^{n+1/3} - \mathbf{U}^{n+(l-1)/3}}{\tau} + \dots \end{aligned}$$

Тогда разностная схема

$$\begin{aligned} (I + \tau \alpha \Lambda_1 \mathbf{B}_1^n) \frac{\mathbf{U}^{n+1/3} - \mathbf{U}^n}{\tau} + \Lambda_1 \mathbf{W}_1^n &= 0, \\ (I + \tau \alpha \Lambda_2 \mathbf{B}_2^n) \frac{\mathbf{U}^{n+2/3} - \mathbf{U}^{n+1/3}}{\tau} + \Lambda_2 \mathbf{W}_2^{n+1/3} &= 0, \\ (I + \tau \alpha \Lambda_3 \mathbf{B}_3^n) \frac{\mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{U}^{n+2/3}}{\tau} + \Lambda_3 \mathbf{W}_3^{n+2/3} &= 0 \end{aligned}$$

линейна, аппроксимирует уравнения (3.5.1) также с порядком  $O(\tau^m + h^k)$  и на каждом дробном шаге реализуется векторными прогонками. В отличие от схем приближенной факторизации она безусловна устойчива (для линеаризованных уравнений) для задач любой размерности.

Подобным образом строятся разностные схемы для уравнений газовой динамики в недивергентном виде

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 \mathbf{B}_j \mathbf{f} = 0. \quad (3.5.13)$$

В качестве искоемых функций выберем плотность, компоненты скорости и давление. Тогда

$$\mathbf{f} = \begin{pmatrix} \rho \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ p \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}_j = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_j} v_j & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & v_j \frac{\partial}{\partial x_j} & 0 & 0 & b_j^1 \frac{\partial}{\partial x_j} \\ 0 & 0 & v_j \frac{\partial}{\partial x_j} & 0 & b_j^2 \frac{\partial}{\partial x_j} \\ 0 & 0 & 0 & v_j \frac{\partial}{\partial x_j} & b_j^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \\ 0 & c_j^1 \frac{\partial}{\partial x_j} & c_j^2 \frac{\partial}{\partial x_j} & c_j^3 \frac{\partial}{\partial x_j} & v_j \frac{\partial}{\partial x_j} \end{pmatrix},$$

где  $b_j^l = \delta_j^l / \rho$ ,  $c_j^l = \delta_j^l / \gamma p$ . Подобно одномерному случаю аппроксимируем матричные операторы  $\mathbf{B}_j$  разностными операторами  $\mathbf{B}_{jh}$  по формулам

$$\mathbf{B}_{jh} = \begin{pmatrix} \Lambda_j v_j & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & v_j \Lambda_j & 0 & 0 & b_j^1 \bar{\Lambda}_j \\ 0 & 0 & v_j \Lambda_j & 0 & b_j^2 \bar{\Lambda}_j \\ 0 & 0 & 0 & v_j \Lambda_j & b_j^3 \bar{\Lambda}_j \\ 0 & c_j^1 \Lambda_j & c_j^2 \Lambda_j & c_j^3 \Lambda_j & v_j \Lambda_j \end{pmatrix}.$$

Разностная схема расщепления по пространственным направлениям

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{f}^{n+1/3} - \mathbf{f}^n}{\tau} + \mathbf{B}_{1h}^n [\alpha \mathbf{f}^{n+1/3} + \beta \mathbf{f}^n] &= 0, \\ \frac{\mathbf{f}^{n+2/3} - \mathbf{f}^{n+1/3}}{\tau} + \mathbf{B}_{2h}^n [\alpha \mathbf{f}^{n+2/3} + \beta \mathbf{f}^{n+1/3}] &= 0, \\ \frac{\mathbf{f}^{n+1} - \mathbf{f}^{n+2/3}}{\tau} + \mathbf{B}_{3h}^n [\alpha \mathbf{f}^{n+1} + \beta \mathbf{f}^{n+2/3}] &= 0 \end{aligned} \quad (3.5.14)$$

аппроксимирует систему уравнений (3.5.1) с порядком  $O(\tau + h^k)$ , на дробных шагах реализуется векторными прогонками и в линейном приближении безусловно устойчива при  $\alpha \geq 0,5$ .

### 3.5.3. Схемы расщепления по физическим процессам и пространственным направлениям

Для построения экономичных схем, реализуемых скалярными прогонками, представим уравнения (3.5.13) в форме расщепления

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 \sum_{l=1}^2 \mathbf{B}'_j \mathbf{f} = 0.$$

Тогда разностная схема расщепления по физическим процессам и пространственным направлениям

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{f}^{n+1/6} - \mathbf{f}^n}{\tau} + \mathbf{B}_{1h}^n [\alpha \mathbf{f}^{n+1/6} + \beta \mathbf{f}^n] &= 0, \\ \frac{\mathbf{f}^{n+2/6} - \mathbf{f}^{n+1/6}}{\tau} + \mathbf{B}_{1h}^2 [\alpha \mathbf{f}^{n+2/6} + \beta \mathbf{f}^{n+1/6}] &= 0, \\ &\dots, \\ \frac{\mathbf{f}^{n+5/6} - \mathbf{f}^{n+4/6}}{\tau} + \mathbf{B}_{3h}^1 [\alpha \mathbf{f}^{n+5/6} + \beta \mathbf{f}^{n+4/6}] &= 0, \\ \frac{\mathbf{f}^{n+1} - \mathbf{f}^{n+5/6}}{\tau} + \mathbf{B}_{3h}^2 [\alpha \mathbf{f}^{n+1} + \beta \mathbf{f}^{n+5/6}] &= 0 \end{aligned} \quad (3.5.15)$$

также аппроксимирует исходные уравнения с порядком  $O(\tau + h^k)$  и на каждом дробном шаге реализуется скалярными прогонками. Здесь

$$\mathbf{B}_{jh}^1 = \begin{pmatrix} \Lambda_j v_j^n & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & v_j^n \Lambda_j & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & v_j^n \Lambda_j & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & v_j^n \Lambda_j & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{B}_{jh}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_j^1 \bar{\Lambda}_j \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_j^2 \bar{\Lambda}_j \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_j^3 \bar{\Lambda}_j \\ 0 & c_j^1 \Lambda_j & c_j^2 \Lambda_j & c_j^3 \Lambda_j & v_j \Lambda_j \end{pmatrix}.$$

Кратко опишем реализацию схемы (3.5.15) на дробных шагах. На первом (при  $j = 1$ ), третьем ( $j = 2$ ) и пятом ( $j = 3$ ) дробных шагах система разностных уравнений

$$\frac{\rho^{n+(2j-1)/6} - \rho^{n+(j-1)/3}}{\tau} + \Lambda_j v_j^n [\alpha \rho^{n+(2j-1)/6} + \beta \rho^{n+(j-1)/3}] = 0,$$

$$\frac{v_l^{n+(2j-1)/6} - v_l^{n+(j-1)/3}}{\tau} + v_j^n \Lambda_j [\alpha v_l^{n+(2j-1)/6} + \beta v_l^{n+(j-1)/3}] = 0 \quad (l=1, 2, 3),$$

$$\frac{p^{n+(2j-1)/6} - p^{n+(j-1)/3}}{\tau} = 0$$

решается независимо для плотности и каждой компоненты скорости скалярными прогонками, или по неявной схеме бегущего счета, а значение давления переносится с предыдущего слоя. На четных дробных шагах схемы (3.5.15) решается система разностных уравнений

$$\rho^{n+j/3} = \rho^{n+(2j-1)/6},$$

$$v_l^{n+j/3} + \tau \alpha a_j^l \bar{\Lambda}_j p^{n+j/3} = v_l^{n+(2j-1)/6} - \tau \beta a_j^l \bar{\Lambda}_j p^{n+(2j-1)/6} \quad (l=1, 2, 3),$$

$$p^{n+j/3} + \tau \alpha \sum_{l=1}^3 c_j^l \Lambda_j v_l^{n+j/3} = p^{n+(2j-1)/6} - \tau \beta \sum_{l=1}^3 c_j^l \Lambda_j v_l^{n+(2j-1)/6}.$$

Исключая значения  $v_l^{n+j/3}$  из уравнения для давления, получим относительно  $p^{n+j/3}$  разностное уравнение

$$\begin{aligned} [I - \tau^2 \alpha^2 c_j^j \Lambda_j a_j^j \bar{\Lambda}_j] p^{n+j/3} &= p^{n+(2j-1)/6} - \\ - \tau \beta \sum_{l=1}^3 c_j^l \Lambda_j v_l^{n+(2j-1)/6} + \tau^2 \alpha \beta c_j^j \Lambda_j a_j^j \bar{\Lambda}_j p^{n+(2j-1)/6}. \end{aligned}$$

Его решение находится скалярными прогонками. После определения давления на дробных шагах (для  $j = 1, 2, 3$ ) новые компоненты скорости вычисляются по явным формулам, а значения плотности переносятся с предыдущих шагов. Таким образом, решение уравнений газовой динамики по схеме расцепления (3.5.15) сводится к скалярным прогонкам, что делает данный алгоритм экономичным по числу операций на узел сетки. Отметим, что число прогонок равно  $N \cdot m$ , как и в схеме (3.5.12), но в отличие от нее схема (3.5.15) не требует обращения матриц  $S_j$  размером  $5 \times 5$  на каждом временном шаге.

Остановимся на модификации схем типа (3.5.15). Перепишем ее в каноническом виде для каждого дробного шага:

$$[I + \tau \alpha \mathbf{B}_{1h}^2] \frac{\mathbf{f}^{n+2/6} - \mathbf{f}^{n+1/6}}{\tau} = -\mathbf{B}_{1h}^2 \mathbf{f}^{n+1/6},$$

$$\begin{aligned}
 [I + \tau\alpha\mathbf{B}_{1h}^2] \frac{\mathbf{f}^{n+2/6} - \mathbf{f}^{n+1/6}}{\tau} &= -\mathbf{B}_{1h}^2 \mathbf{f}^{n+1/6}, \\
 &\dots, \\
 [I + \tau\alpha\mathbf{B}_{3h}^1] \frac{\mathbf{f}^{n+5/6} - \mathbf{f}^{n+4/6}}{\tau} &= -\mathbf{B}_{3h}^1 \mathbf{f}^{n+4/6}, \\
 [I + \tau\alpha\mathbf{B}_{3h}^2] \frac{\mathbf{f}^{n+1} - \mathbf{f}^{n+5/6}}{\tau} &= -\mathbf{B}_{3h}^2 \mathbf{f}^{n+5/6}.
 \end{aligned}$$

При аппроксимации расщепленных уравнений газовой динамики (при сохранении лишь конвективных членов)

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 \mathbf{B}_j^1 \mathbf{f} = 0$$

целесообразно рассмотреть эти уравнения в переменных плотность, импульс и давление. Тогда

$$\mathbf{f} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho v_1 \\ \rho v_2 \\ \rho v_3 \\ p \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}_{jh}^1 = \begin{pmatrix} \Lambda_j v_j^n & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Lambda_j v_j^n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Lambda_j v_j^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Lambda_j v_j^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

и разностные уравнения аппроксимируются в дивергентной форме. При аппроксимации расщепленных уравнений газовой динамики в случае преобладания сил давления

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 \mathbf{B}_j^2 \mathbf{f} = 0,$$

где

$$\mathbf{f} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho v_1 \\ \rho v_2 \\ \rho v_3 \\ p \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}_j^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \delta_j^1 \frac{\partial}{\partial x_j} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \delta_j^2 \frac{\partial}{\partial x_j} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \delta_j^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \\ 0 & c_j^1 \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{1}{\rho} & c_j^2 \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{1}{\rho} & c_j^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{1}{\rho} & v_j \frac{\partial}{\partial x_j} \end{pmatrix},$$

уравнения движения аппроксимируются в дивергентной форме, а уравнение энергии – в недивергентной. Так как для гладких течений

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} = -\sum_{j=1}^3 \mathbf{B}_j^2 \mathbf{f} = -\mathbf{A}^{-1} \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \mathbf{W}_j^2,$$

где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{v^2}{2} & v_1 & v_2 & v_3 & \frac{1}{\gamma-1} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{W}_j^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \delta_j^1 p \\ \delta_j^2 p \\ \delta_j^3 p \\ v_j(\rho e + p) \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A}^{-1} \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \mathbf{W}_j^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \delta_j^1 \frac{\partial}{\partial x_j} p \\ \delta_j^2 \frac{\partial}{\partial x_j} p \\ \delta_j^3 \frac{\partial}{\partial x_j} p \\ (\gamma-1) \left[ \frac{\partial}{\partial x_j} v_j(\rho e + p) - \sum_{l=1}^3 \delta_j^l v_l \frac{\partial p}{\partial x_j} \right] \end{pmatrix} = \bar{\mathbf{W}}_j,$$

то и на разностном уровне с точностью до величин  $O(h^k)$  справедливо соотношение

$$\sum_{j=1}^3 \mathbf{B}_{jh}^2 \mathbf{f} = \mathbf{A}^{-1} \sum_{j=1}^3 \Lambda_j \mathbf{W}_{jh}^2,$$

где

$$A^{-1} \sum_{j=1}^3 \Lambda_j \mathbf{W}_j^2 = \bar{\mathbf{W}}_{jh} = \begin{pmatrix} 0 \\ \delta_j^1 \bar{\Lambda}_j \\ \delta_j^2 \bar{\Lambda}_j \\ \delta_j^3 \bar{\Lambda}_j \\ (\gamma-1) [\Lambda_j v_j(\rho e + p) - v_j \bar{\Lambda}_j p] \end{pmatrix}.$$

Разностная схема

$$[I + \tau \alpha \mathbf{B}_{1h}^1] \frac{\mathbf{f}^{n+1/6} - \mathbf{f}^n}{\tau} = -\Lambda_1 v_1^n \mathbf{f}^n,$$

$$[I + \tau \alpha \mathbf{B}_{1h}^2] \frac{\mathbf{f}^{n+2/6} - \mathbf{f}^{n+1/6}}{\tau} = -\bar{\mathbf{W}}_{1h}^{n+1/6},$$

...

(3.5.16)

$$[I + \tau\alpha \mathbf{B}_{3h}^1] \frac{\mathbf{f}^{n+5/6} - \mathbf{f}^{n+4/6}}{\tau} = -\Lambda_3 \mathbf{V}_3^n \mathbf{f}^{n+4/6},$$

$$[I + \tau\alpha \mathbf{B}_{3h}^2] \frac{\mathbf{f}^{n+1} - \mathbf{f}^{n+5/6}}{\tau} = -\overline{\mathbf{W}}_{3h}^{n+5/6}$$

аппроксимирует уравнения газовой динамики с порядком  $O(\tau + h^k)$  и на каждом дробном шаге, как и (3.5.15), реализуется скалярными прогонками. Можно ожидать, что аппроксимация уравнений неразрывности и движения в дивергентной, а уравнения энергии в предельно дивергентной форме позволит повысить точность расчетов, особенно при наличии разрывных решений. Для линейаризованных уравнений Эйлера рассмотренные разностные схемы (3.5.15) и (3.5.16) безусловно устойчивы при  $\alpha \geq 0,5$  для задач любой размерности.

### 3.5.4. Схемы расщепления по физическим процессам

Рассмотренные выше схемы использовали расщепление операторов по пространственным направлениям или по физическим процессам и пространственным направлениям. Для ряда задач может оказаться достаточным использование только расщепления по физическим процессам. К ним относятся задачи, в которых имеется преимущественное направление, по которому изменение газодинамических величин (градиентов решения) преобладает по сравнению с другими направлениями. Опишем реализацию задачи на примере двумерных уравнений газовой динамики

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} + \mathbf{B} \mathbf{f} = 0, \quad (3.5.17)$$

где

$$\mathbf{f} = \begin{pmatrix} \rho \\ v_1 \\ v_2 \\ p \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_j} v_j^n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sum_{j=1}^2 v_j^n \frac{\partial}{\partial x_j} & 0 & b_j^1 \frac{\partial}{\partial x_j} \\ 0 & 0 & \sum_{j=1}^2 v_j^n \frac{\partial}{\partial x_j} & b_j^2 \frac{\partial}{\partial x_j} \\ 0 & c_j^1 \frac{\partial}{\partial x_j} & c_j^2 \frac{\partial}{\partial x_j} & \sum_{j=1}^2 v_j^n \frac{\partial}{\partial x_j} \end{pmatrix}, \quad b_j^1 = \frac{\delta_j^1}{\rho}, \quad c_j^1 = \delta_j^1 \gamma p.$$



Представим оператор  $\mathbf{B} = \sum_{j=1}^2 \mathbf{B}_j$  в виде расщепления по физическим процессам, где

$$\mathbf{B}_1 = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_j} v_j^n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sum_{j=1}^2 v_j^n \frac{\partial}{\partial x_j} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sum_{j=1}^2 v_j^n \frac{\partial}{\partial x_j} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_j^1 \\ 0 & 0 & 0 & b_j^2 \\ 0 & c_j^1 & c_j^2 & \sum_{j=1}^2 v_j^n \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

Аппроксимируем матричные операторы  $\mathbf{B}_j$  разностными операторами  $\mathbf{B}_j$  с порядком  $O(h^k)$  подобно рассмотренным выше схемам:

$$\mathbf{B}_{1h} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^2 \Lambda_j v_j^n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sum_{j=1}^2 v_j^n \Lambda_j & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sum_{j=1}^2 v_j^n \Lambda_j & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}_{2h} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_j^1 \bar{\Lambda}_j \\ 0 & 0 & 0 & b_j^2 \bar{\Lambda}_j \\ 0 & c_j^1 \Lambda_j & c_j^2 \Lambda_j & \sum_{j=1}^2 v_j^n \Lambda_j \end{pmatrix}.$$

Разностная схема

$$\frac{\mathbf{f}^{n+1/2} - \mathbf{f}^n}{\tau} + \mathbf{B}_h^1 (\alpha \mathbf{f}^{n+1/2} + \beta \mathbf{f}^n) = 0, \quad (3.5.18)$$

$$\frac{\mathbf{f}^{n+1} - \mathbf{f}^{n+1/2}}{\tau} + \mathbf{B}_h^2 (\alpha \mathbf{f}^{n+1} + \beta \mathbf{f}^{n+1/2}) = 0$$

аппроксимирует систему уравнений газовой динамики (3.5.17) с порядком  $O(\tau + h^k)$ . На первом дробном шаге схемы решается система разностных уравнений

$$\begin{aligned} \left( I + \tau \alpha \sum_{j=1}^2 \Lambda_j v_j^n \right) \rho^{n+1/2} &= \left( I - \tau \beta \sum_{j=1}^2 \Lambda_j v_j^n \right) \rho^n, \\ \left( I + \tau \alpha v_j^n \sum_{j=1}^2 \Lambda_j \right) v_1^{n+1/2} &= \left( I - \tau \beta \sum_{j=1}^2 \Lambda_j \right) v_j^n, \end{aligned} \quad (3.5.19)$$

$$\left( I + \tau \alpha v_j^n \sum_{j=1}^2 \Lambda_j \right) v_2^{n+1/2} = \left( I - \tau \beta \sum_{j=1}^2 \Lambda_j \right) v_2^n,$$

$$\rho^{n+1/2} = \rho^n.$$

Каждое из уравнений зависит от двух пространственных переменных. Очевидно, их прямое решение сводится к матричным прогонкам, реализация которых неэкономична. Более предпочтительным способом их решения является применение итерационных методов. Проиллюстрируем их на примере одного уравнения, например, для уравнения неразрывности. Пусть  $\Lambda_j$  – симметричный оператор. Тогда разностное уравнение

$$\left( I + \tau \alpha \sum_{j=1}^2 \Lambda_j v_j^n \right) \rho^{n+1/2} = \left( I - \tau \beta \sum_{j=1}^2 \Lambda_j v_j^n \right) \rho^n$$

в узлах сетки  $(m, i)$  может быть записано в виде

$$\rho_{m,i}^{n+1/2} + \alpha \frac{\tau}{h_1} \left[ (\rho^{n+1/2} v_1^n)_{m+1,i} - (\rho^{n+1/2} v_1^n)_{m-1,i} \right] +$$

$$+ \alpha \frac{\tau}{h_2} \left[ (\rho^{n+1/2} v_2^n)_{m,i+1} - (\rho^{n+1/2} v_2^n)_{m,i-1} \right] = \rho_{m,i}^n - f,$$

$$f = \beta \frac{\tau}{h_1} \left[ (\rho v_1)_{m+1,i}^n - (\rho v_1)_{m-1,i}^n \right] + \beta \frac{\tau}{h_2} \left[ (\rho v_2)_{m,i+1}^n - (\rho v_2)_{m,i-1}^n \right].$$

Тогда, например, итерационная схема

$$\rho_{m,i}^{v+1} + \alpha \frac{\tau}{h_1} \left[ (\rho^{v+1} v_1^n)_{m+1,i} - (\rho^{v+1} v_1^n)_{m-1,i} \right] +$$

$$+ \alpha \frac{\tau}{h_2} \left[ (\rho^v v_2^n)_{m,i+1} - (\rho^{v+1} v_2^n)_{m,i-1} \right] = \rho_{m,i}^n - f$$

реализуется трехточечными скалярными прогонками, где  $\rho^v = \rho^{n+1/2,v}$ . При сходимости итераций, т. е. при выполнении условия

$$\max \left| \frac{\rho_{m,i}^{v+1} - \rho_{m,i}^v}{\tau} \right| \leq \varepsilon,$$

получаем новое значение функции на слое  $n + 1/2$ . Наряду с изложенным методом решения, может быть использована итерационная схема приближенной факторизации

$$(I + \tau \alpha \Lambda_1 v_1^n)(I + \tau \alpha \Lambda_2 v_2^n) \frac{\rho^{v+1} - \rho^v}{\tau} = - \left[ \frac{\rho^v - \rho^n}{\tau} + \sum_{j=1}^2 \Lambda_j v_j^n (\alpha \rho^v + \beta \rho^n) \right]$$

или эквивалентная ей схема в дробных шагах

$$\begin{aligned}\xi^n &= F, \\ (I + \tau\alpha\Lambda_1 v_1^n)\xi^{n+1/2} &= \xi^n, \\ (I + \tau\alpha\Lambda_2 v_2^n)\xi^{n+1} &= \xi^{n+1/2}, \\ \rho^{v+1} &= \rho^v + \tau\xi^{n+1}.\end{aligned}$$

При сходимости итераций получаем новое значение функций. Подобным образом находятся значения других искомым функций на слое  $n + 1/2$  в схеме (3.5.19).

На втором дробном шаге схемы (3.5.18) решается система разностных уравнений

$$\begin{aligned}\rho^{n+1} &= \rho^{n+1/2}, \\ v_1^{n+1} + \tau\alpha a_1^1 \bar{\Lambda}_1 p^{n+1} &= v_1^{n+1/2} - \tau\beta a_1^1 \bar{\Lambda}_1 p^{n+1/2}, \\ v_2^{n+1} + \tau\alpha a_2^2 \bar{\Lambda}_2 p^{n+1} &= v_2^{n+1/2} - \tau\beta a_2^2 \bar{\Lambda}_2 p^{n+1/2},\end{aligned}\quad (3.5.20)$$

$$p^{n+1} + \tau\alpha \sum_{j=1}^2 (v_j^n \Lambda_j p^{n+1} + c_j^j \Lambda_j v_j^{n+1}) = p^{n+1/2} - \tau\beta \sum_{j=1}^2 (v_j^n \Lambda_j p^{n+1/2} + c_j^j \Lambda_j v_j^{n+1/2}) = f_p.$$

Исключая значения компонент скорости  $v_j^{n+1}$  из уравнения для давления, получим для него разностное уравнение

$$\left[ I + \tau\alpha \sum_{j=1}^2 (v_j^n \Lambda_j - \tau\alpha c_j^j \Lambda_j a_j^j \bar{\Lambda}_j) \right] p^{n+1} = f,$$

где функция  $f$  содержит оставшиеся члены. Его решение может быть получено по итерационной схеме приближенной факторизации

$$[I + \tau\alpha(v_1^n \Lambda_1 - \tau\alpha c_1^1 \Lambda_1 a_1^1 \bar{\Lambda}_1)] [I + \tau\alpha(v_2^n \Lambda_2 - \tau\alpha c_2^2 \Lambda_2 a_2^2 \bar{\Lambda}_2)] \frac{p^{v+1} - p^v}{\tau} = F^v,$$

где

$$p^v = p^{n+1,v}, \quad F^v = - \left[ \frac{p^v - p^{n+1/2}}{\tau} + \tau\alpha \sum_{j=1}^2 (v_j^n \Lambda_j - \tau\alpha c_j^j \Lambda_j a_j^j \bar{\Lambda}_j) p^v \right] + f^v,$$

или эквивалентной ей схеме в дробных шагах

$$\begin{aligned}\zeta^n &= F^v, \\ (I - \tau\alpha c_1^1 \Lambda_1 a_1^1 \bar{\Lambda}_1)\zeta^{n+1/2} &= \zeta^n, \\ (I - \tau\alpha c_2^2 \Lambda_2 a_2^2 \bar{\Lambda}_2)\zeta^{n+1} &= \zeta^{n+1/2}, \\ p^{v+1} &= p^v + \tau\zeta^{n+1}.\end{aligned}$$

После сходимости итераций получаем новое значение давления на слое  $n + 1$ , после чего оставшиеся искомые функции в схеме (3.5.20) вычисляются явно. Таким образом, схема расщепления по физическим процессам (3.5.18) реализуются скалярными прогонами с введением внутренних итераций на каждом дробном шаге.

### § 3.6. Схемы оптимального расщепления для уравнений газовой динамики

Рассмотренные выше схемы расщепления для уравнений газовой динамики по физическим процессам и пространственным направлениям в трехмерном случае не являются схемами полной факторизации, т. е. не записываются в канонической форме. Этого недостатка можно избежать путем построения схем приближенной факторизации или схем предиктор–корректор. При построении разностных схем воспользуемся представлением уравнений газовой динамики в дивергентном и недивергентном виде

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \mathbf{W}_j}{\partial x_j} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 \sum_{l=1}^2 \mathbf{B}_j^l \mathbf{f} = 0, \quad (3.6.1)$$

где

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho v_1 \\ \rho v_2 \\ \rho v_3 \\ E \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{pmatrix} \rho \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ p \end{pmatrix}, \quad \mathbf{W}_j = \mathbf{W}_j^1 + \mathbf{W}_j^2, \quad \mathbf{W}_j^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ \delta_j^1 p \\ \delta_j^2 p \\ \delta_j^3 p \\ v_j(\rho e + p) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{W}_j^2 = \begin{pmatrix} \rho v_j \\ \rho v_1 v_j \\ \rho v_2 v_j \\ \rho v_3 v_j \\ \rho v_j \frac{v^2}{2} \end{pmatrix},$$

а операторы  $\mathbf{B}_j^l$  выбраны в форме оптимального расщепления

$$\mathbf{B}_j^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_j^1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_j^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_j^3 \\ 0 & c_j^1 & c_j^2 & c_j^3 & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad \mathbf{B}_j^2 = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_j} v_j & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t_j & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t_j & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t_j & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.6.2)$$

Здесь  $t_j = v_j \frac{\partial}{\partial x_j}$ ,  $b_j^1 = \delta_j^1 / \rho$ ,  $c_j^l = \delta_j^l \gamma p$ . Для удобства дальнейшего анализа векторы  $\mathbf{W}_j^2$  и матричные операторы  $\mathbf{B}_j^1$  учитывают члены с давлением, а  $\mathbf{W}_j^1$ ,  $\mathbf{B}_j^2$  – конвективные члены по каждому направлению  $x_j$ . Пусть,  $\mathbf{B}_{jh}^k = \mathbf{B}_j + O(h^k)$ ,  $\Lambda_j^l = \partial / \partial x_j + O(h^l)$ , где

$$\Lambda_j \mathbf{W}_{jh} = \Lambda_j (\mathbf{W}_{jh}^1 + \mathbf{W}_{jh}^2), \quad \Lambda_j \mathbf{W}_{jh}^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ \delta_j^1 \bar{\Lambda}_j p \\ \delta_j^2 \bar{\Lambda}_j p \\ \delta_j^3 \bar{\Lambda}_j p \\ \Lambda_j v_j (\rho e + p) \end{pmatrix}, \quad \Lambda_j \mathbf{W}_{jh}^2 = \begin{pmatrix} \Lambda_j (\rho v_j) \\ \Lambda_j (\rho v_1 v_j) \\ \Lambda_j (\rho v_2 v_j) \\ \Lambda_j (\rho v_3 v_j) \\ \Lambda_j (\rho v_1 \frac{v^2}{2}) \end{pmatrix}, \quad (3.6.3)$$

$$\mathbf{B}_{jh}^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_j^1 \bar{\Lambda}_j \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_j^2 \bar{\Lambda}_j \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_j^3 \bar{\Lambda}_j \\ 0 & c_j^1 \Lambda_j & c_j^2 \Lambda_j & c_j^3 \Lambda_j & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{B}_{jh}^2 = \begin{pmatrix} \Lambda_j v_j^n & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & v_j^n \Lambda_j & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & v_j^n \Lambda_j & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & v_j^n \Lambda_j & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Схема приближенной факторизации

$$\prod_{j=1}^3 (\mathbf{I} + \tau \alpha \mathbf{B}_{jh}^1) (\mathbf{I} + \tau \alpha \mathbf{B}_{jh}^2) \frac{\mathbf{f}^{n+1} - \mathbf{f}^n}{\tau} = - \sum_{j=1}^3 \mathbf{B}_{jh}^1 \Lambda_j \mathbf{f}^n$$

или, с учетом соотношений  $\sum_{j=1}^3 \mathbf{B}_{jh}^1 \Lambda_j \mathbf{f}^n = \mathbf{A}^{-1} \sum_{j=1}^3 \Lambda_j^l \mathbf{W}_{jh}^n$ , разностная схема

$$\prod_{j=1}^3 (\mathbf{I} + \tau \alpha \mathbf{B}_{jh}^1) (\mathbf{I} + \tau \alpha \mathbf{B}_{jh}^2) \frac{\mathbf{f}^{n+1} - \mathbf{f}^n}{\tau} = - \mathbf{A}^{-1} \sum_{j=1}^3 \Lambda_j^l \mathbf{W}_{jh}^n \quad (3.6.4)$$

аппроксимирует уравнения газовой динамики (3.6.1) с порядком  $O(\tau + \tau h^k + h^l)$ , а при установлении – стационарные уравнения

$$\sum_{j=1}^3 \Lambda_j^l \mathbf{W}_{jh}^n = 0$$

с порядком  $O(h^l)$ . Для численной реализации схемы (3.6.4) рассмотрим эквивалентную ей схему в дробных шагах

$$\begin{aligned}
 \xi^n &= -\mathbf{A}^{-1} \sum_{j=1}^3 \Lambda_j^l \mathbf{W}_{jh}^n, \\
 (\mathbf{I} + \tau\alpha \mathbf{B}_{1h}^1) \xi^{n+1/6} &= \xi^n, \\
 (\mathbf{I} + \tau\alpha \mathbf{B}_{1h}^2) \xi^{n+2/6} &= \xi^{n+1/6}, \\
 &\dots, \\
 (\mathbf{I} + \tau\alpha \mathbf{B}_{1h}^1) \xi^{n+5/6} &= \xi^{n+4/6}, \\
 (\mathbf{I} + \tau\alpha \mathbf{B}_{3h}^2) \xi^{n+1} &= \xi^{n+5/6}, \\
 \mathbf{U}^{n+1} &= \mathbf{U}^n + \tau \xi^{n+1}.
 \end{aligned} \tag{3.6.5}$$

Как следует из вида операторов  $\mathbf{B}_{jh}^l$ , на каждом дробном шаге схема (3.6.4) решается скалярными прогонками подобно схеме расщепления (3.5.16). Как и все схемы приближенной факторизации, она безусловно устойчива при  $N \leq 2$  для  $\alpha \geq 0,5 + O(\tau)$  и при  $N = 3$  условно устойчива для всех значений весового коэффициента  $\alpha$ . Для упрощения реализации разностной схемы операторы  $\mathbf{B}_{jh}^l$  на дробных шагах и оператор в правой части  $\sum_{j=1}^3 \Lambda_j^l \mathbf{W}_{jh}^n$  могут аппроксимироваться с различным порядком, например, с первым порядком на дробных шагах и со вторым в операторе на нулевом дробном шаге при явном вычислении невязки  $\xi^n$ . Тогда разностная схема (3.6.5) аппроксимирует исходные уравнения с порядком  $O(\tau^m + \tau h + h^2)$  и реализуется на дробных шагах трехточечными скалярными прогонками. Подобным образом строятся разностные схемы и в других переменных – плотность, импульс и давление или плотность, скорость и температура. Заметим, что число скалярных прогонок по каждому направлению совпадает с числом уравнений, т. е. разностная схема (3.6.2) или (3.6.3) является оптимальной по числу операций, необходимых для ее реализации при переходе с одного временного шага на другой.

Остановимся на сравнении схем приближенной факторизации вида (3.5.6) с расщеплением уравнений по пространственным направлениям и разностной схемы вида (3.6.3)

$$\prod_{j=1}^3 (\mathbf{I} + \tau\alpha \mathbf{B}_{jh}^1) (\mathbf{I} + \tau\alpha \mathbf{B}_{jh}^2) \frac{\mathbf{f}^{n+1} - \mathbf{f}^n}{\tau} = -\mathbf{A}^{-1} \sum_{j=1}^3 \Lambda_j^l \mathbf{W}_{jh}^n$$

с расщеплением уравнений по физическим процессам и пространственным направлениям. Введение расщепления в схеме (3.6.5) приво-

дит к появлению дополнительных членов вида  $(\tau\alpha)^2 \mathbf{B}_{jh}^1 \mathbf{B}_{jh}^2$ , отсутствующих в схеме (3.6.4). Действительно,

$$\begin{aligned} \prod_{j=1}^3 (\mathbf{I} + \tau\alpha \mathbf{B}_{jh}^1) (\mathbf{I} + \tau\alpha \mathbf{B}_{jh}^2) &= \prod_{j=1}^3 [I + \tau\alpha \mathbf{B}_{jh} + (\tau\alpha)^2 \mathbf{B}_{jh}^1 \mathbf{B}_{jh}^2] = \\ &= \prod_{j=1}^3 [I + \tau\alpha \mathbf{B}_{jh}] + \boldsymbol{\Psi}, \end{aligned} \quad (3.6.6)$$

где  $\boldsymbol{\Psi} = \tau^2 \alpha^2 \sum_{j=1}^3 \mathbf{B}_{jh}^1 \mathbf{B}_{jh}^2 + O(\tau^3)$ . Для введенных расщеплений операторов (3.6.2) эти члены равны

$$\boldsymbol{\Psi} = \tau^2 \alpha^2 \sum_{j=1}^3 \mathbf{B}_{jh}^1 \mathbf{B}_{jh}^2 + \dots = \tau^2 \alpha^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t_1 & t_2 & t_3 & 0 \end{pmatrix} + \dots, \quad t_j = c_j^j \Lambda_j \nu_j^n \Lambda_j.$$

Таким образом, введение расщепления по физическим процессам приводит к появлению дополнительных членов второго порядка малости лишь в уравнении энергии. Однако, разностная схема вида (3.6.5) реализуется скалярными прогонками в отличие от схем вида (3.5.6), реализация которых сводится к векторным прогонкам. Для трехмерных уравнений газовой динамики для реализации схемы (3.5.6) число векторных прогонок составляет 3 (для каждой векторной прогонки  $5 \times 5$  требуется  $5^3$  операций в каждом узле сетки), а для схемы (3.6.5) соответственно 15 скалярных прогонок.

В качестве другого подхода опишем алгоритм построения схем типа предиктор–корректор. На этапе предиктора решаются разностные уравнения, представленные в виде расщепления уравнений по физическим процессам и пространственным направлениям, а на этапе корректора исходные уравнения аппроксимируются в консервативной форме. Как отмечалось выше, при реализации схемы на дробных шагах могут выбираться различные векторы. Остановимся на этом обстоятельстве подробнее. Представим уравнения газовой динамики (3.6.1) в расщепленной форме в виде

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 \mathbf{B}_j^1 \mathbf{f} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{f}_1}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 \mathbf{B}_j^2 \mathbf{f}_1 = 0, \quad (3.6.7)$$

где

$$\mathbf{f} = \begin{pmatrix} \rho \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ p \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}_1 = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho v_1 \\ \rho v_2 \\ \rho v_3 \\ p \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}_j^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_j^1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_j^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_j^3 \\ 0 & c_j^1 & c_j^2 & c_j^3 & v_j \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_j},$$

$$\mathbf{B}_j^2 = \frac{\partial}{\partial x_j} \begin{pmatrix} v_j & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & v_j & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & v_j & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & v_j & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Пусть, как и в (3.6.3),  $\mathbf{B}_{jh}^i, \Lambda_j^i \mathbf{W}_{jh}$  – аппроксимация операторов  $\mathbf{B}_j^i, \partial \mathbf{W}_j / \partial x_j$  с порядком  $O(h^k)$  и  $O(h^l)$  соответственно:

$$\mathbf{B}_{jh}^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_j^1 \bar{\Lambda}_j \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_j^2 \bar{\Lambda}_j \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_j^3 \bar{\Lambda}_j \\ 0 & c_j^1 \Lambda_j & c_j^2 \Lambda_j & c_j^3 \Lambda_j & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{B}_{jh}^2 = \begin{pmatrix} \Lambda_j v_j^n & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Lambda_j v_j^n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Lambda_j v_j^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Lambda_j v_j^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Разностная схема предиктор–корректор

$$\begin{aligned} (\mathbf{I} + \tau \alpha \mathbf{B}_{1h}^1) \mathbf{f}^{n+1/12} &= \mathbf{f}^n, \\ (\mathbf{I} + \tau \alpha \mathbf{B}_{1h}^1) \mathbf{f}_1^{n+2/12} &= \mathbf{f}_1^{n+1/12}, \\ &\dots, \\ (\mathbf{I} + \tau \alpha \mathbf{B}_{3h}^1) \mathbf{f}^{n+5/12} &= \mathbf{f}^{n+4/12}, \end{aligned} \tag{3.6.8}$$



$$(\mathbf{I} + \tau\alpha\mathbf{B}_{3h}^2)\mathbf{f}^{n+1/2} = \mathbf{f}^{n+5/12},$$

$$\mathbf{U}^{n+1} = \mathbf{U}^n - \tau \sum_{j=1}^3 \Lambda_j^l \mathbf{W}_{jh}^{n+1/2}$$

аппроксимирует уравнения газовой динамики с порядком  $O(\tau^m + h^k)$ , где  $m = 2$  при  $\alpha = 0,5 + O(\tau)$ . Выбор различных газодинамических переменных в схеме расщепления на этапе предиктора приводит к разностной схеме, реализация которой на дробных шагах наиболее проста. Действительно, на нечетных шагах решение разностных уравнений

$$\begin{aligned} \rho^{n+(2j-1)/6} &= \rho^{n+(j-1)/3}, \\ v_1^{n+(2j-1)/6} + \tau\alpha a_j^l \bar{\Lambda}_j p^{n+(2j-1)/6} &= v_1^{n+(j-1)/3}, \\ &\dots, \\ v_3^{n+(2j-1)/6} + \tau\alpha a_j^l \bar{\Lambda}_j p^{n+(2j-1)/6} &= v_3^{n+(j-1)/3}, \\ \rho^{n+(2j-1)/6} + \tau\alpha \sum_{l=1}^3 c_j^l \Lambda_j v_l^{n+(2j-1)/6} &= p^{n+(2j-1)/3} \end{aligned}$$

(для  $j = 1, 2, 3$ ) после исключения значений скорости  $v_l^{n+(2j-1)/6}$  из уравнения для давления сводится к решению уравнения

$$[I - \tau^2 \alpha^2 c_j^l \Lambda_j a_j^l \bar{\Lambda}_j] p^{n+(2j-1)/6} = p^{n+(j-1)/3} - \tau\alpha c_j^l \Lambda_j v_j^{n+(j-1)/3}$$

одной скалярной прогонкой в направлении  $x_j$ .

На четных шагах

$$\begin{aligned} [1 + \tau\alpha \Lambda_j v_j^n] \rho^{n+j/6} &= \rho^{n+(2j-1)/12}, \\ [1 + \tau\alpha \Lambda_j v_j^n] (\rho v_1)^{n+j/6} &= (\rho v_1)^{n+(2j-1)/12}, \\ [1 + \tau\alpha \Lambda_j v_j^n] (\rho v_2)^{n+j/6} &= (\rho v_2)^{n+(2j-1)/12}, \\ [1 + \tau\alpha \Lambda_j v_j^n] (\rho v_3)^{n+j/6} &= (\rho v_3)^{n+(2j-1)/12}, \\ p^{n+j/6} &= p^{n+(2j-1)/12} \end{aligned} \quad (3.6.9)$$

разностные уравнения решаются скалярными прогонками независимо для каждого уравнения, кроме уравнения для давления. На этапе корректора разностные уравнения

$$\mathbf{U}^{n+1} = \mathbf{U}^n - \tau \sum_{j=1}^3 \Lambda_j^l \mathbf{W}_{jh}^{n+1/2}$$

решаются явно. При одинаковом выборе вектора  $\mathbf{f} = \mathbf{f}_1$  разностные уравнения на четных шагах решаются по схеме

$$\begin{aligned} [1 + \tau\alpha\Lambda_j v_j^n] \rho^{n+j/6} &= \rho^{n+(2j-1)/12}, \\ [1 + \tau\alpha v_j^n \Lambda_j] v_1^{n+j/6} &= v_1^{n+(2j-1)/12}, \\ [1 + \tau\alpha v_j^n \Lambda_j] v_2^{n+j/6} &= v_2^{n+(2j-1)/12}, \\ [1 + \tau\alpha v_j^n \Lambda_j] v_3^{n+j/6} &= v_3^{n+(2j-1)/12}, \\ p^{n+j/6} &= p^{n+(2j-1)/12} \end{aligned}$$

подобно (3.6.9), где уравнения движения решаются в недивергентной форме. Таким образом, решение уравнений газовой динамики при переходе с  $n$ -го на  $(n+1)$ -й шаг может быть получено за  $Nm$  скалярных прогонок, где  $N$  – размерность задачи по пространству,  $m$  – число уравнений. Для линейных уравнений (для одного и того же  $\mathbf{f}$ ) разностные схемы (3.6.5) и (3.6.8) эквивалентны.

### § 3.7. Об устойчивости разностных схем для многомерных уравнений

Исследование свойств разностных схем расщепления проведем для линеаризованных уравнений газовой динамики (уравнений с постоянными коэффициентами)

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 \mathbf{B}_j \frac{\partial}{\partial x_j} \mathbf{f} = 0, \quad \mathbf{B}_j = \sum_{l=1}^2 \mathbf{B}_j^l, \quad (3.7.1)$$

где  $f = (\rho, v_1, v_2, v_3, p)^T$ ,

$$\mathbf{B}_j^1 = \begin{pmatrix} v_j & \delta_j^1 \rho & \delta_j^1 v_1 & \delta_j^1 v_2 & \delta_j^1 v_3 & 0 \\ 0 & v_j & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & v_j & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & v_j & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad \mathbf{B}_j^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_j^1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_j^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_j^3 \\ 0 & c_j^1 & c_j^2 & c_j^3 & v_j \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_j}. \quad (3.7.2)$$

Разностная схема расщепления по пространственным направлениям (3.5.14) после исключения дробных шагов может быть представлена в виде

$$\frac{\mathbf{f}^{n+1} - \mathbf{f}^n}{\tau} + \sum_{j=1}^3 \mathbf{B}_{jh} \Lambda_j (\alpha \mathbf{f}^{n+1} + \beta \mathbf{f}^n) = \Psi,$$

где

$$\Psi = \tau^2 (\mathbf{B}_{1h} \mathbf{B}_{2h} \Lambda_1 \Lambda_2 + \dots + \mathbf{B}_{2h} \Lambda_j \mathbf{B}_{3h} \Lambda_2 \Lambda_3) \frac{\alpha^2 \mathbf{f}^{n+1} - \beta^2 \mathbf{f}^n}{\tau} + \\ + \tau^2 \mathbf{B}_{1h} \mathbf{B}_{2h} \Lambda_1 \Lambda_2 \Lambda_3 (\alpha^3 \mathbf{f}^{n+1} - \beta^3 \mathbf{f}^n) + \dots$$

Погрешность аппроксимации  $\Psi = O(\tau^2)$  и есть те добавочные члены, которые возникли за счет расщепления исходных операторов по пространственным направлениям. Отметим, что схемы расщепления для трехмерных задач не приводятся к каноническому виду, что может оказаться неудобным при получении стационарного решения методом установления. При нахождении стационарного решения с целью минимизации числа итераций целесообразно выбирать значение шага  $\tau$  максимально большим. Однако при выходе на стационарный режим значение погрешности  $\Psi$  зависит от параметра  $\tau$  и возрастает с его ростом. При получении стационарного решения задачи методом установления необходимо использовать разностные схемы с полной аппроксимацией, предельное решение которых не зависит от шага  $\tau$ .

Разностная схема расщепления по физическим процессам и пространственным направлениям вида (3.5.15) также приводится к виду

$$\frac{\mathbf{f}^{n+1} - \mathbf{f}^n}{\tau} + \sum_{j=1}^3 \mathbf{B}_{jh} \Lambda_j (\alpha \mathbf{f}^{n+1} + \beta \mathbf{f}^n) = \Psi_1,$$

где

$$\Psi_1 = \tau^2 (\mathbf{B}_{1h} \mathbf{B}_{2h} \Lambda_1 \Lambda_2 + \dots + \mathbf{B}_{2h} \mathbf{B}_{3h} \Lambda_2 \Lambda_3 + \mathbf{B}_{1h}^1 \mathbf{B}_{1h}^2 \Lambda_1^2 + \\ \dots + \mathbf{B}_{3h}^1 \mathbf{B}_{3h}^2 \Lambda_3^2) \frac{\alpha^2 \mathbf{f}^{n+1} - \beta^2 \mathbf{f}^n}{\tau} + \tau^2 \mathbf{R}_0 + O(\tau^3),$$

$$\mathbf{R}_0 = \left[ \mathbf{B}_{1h} \mathbf{B}_{2h} \mathbf{B}_{3h} \Lambda_1 \Lambda_2 \Lambda_3 + \sum_{j=1}^3 \sum_{i=1}^3 \sum_{m=1}^2 \mathbf{B}_{jh}^l \mathbf{B}_{ih}^m \mathbf{B}_{lh}^n \Lambda_j \Lambda_i \Lambda_l \right] (\alpha^3 \mathbf{f}^{n+1} + \beta^3 \mathbf{f}^n).$$

Таким образом, разностная схема имеет погрешность того же порядка, что и схема расщепления по пространственным направлениям (3.5.14), но в отличие от нее реализуется скалярными прогонками. Введение дополнительного расщепления по физическим процессам в схеме (3.5.15) приводит к появлению в схеме дополнительных (диссипативных) членов вида  $\mathbf{B}_{jh}^1 \mathbf{B}_{jh}^2 \Lambda_j^2$  (или  $\mathbf{B}_{jh}^2 \mathbf{B}_{jh}^1 \Lambda_j^2$ , если в (3.5.15) заменить порядок дробных шагов), отсутствующих в схеме расщепления по пространственным переменным.

Итак, введение расщепления по физическим процессам приводит к появлению лишь одного члена в одном из уравнений движения, т. е. введенное расщепление уравнений является оптимальным.

Остановимся на устойчивости схем расщепления (3.5.14) и (3.5.15) для линеаризованных уравнений (3.7.1) с оптимальным расщеплением в форме (3.7.2). Устойчивость схемы будем исследовать спектральным методом. Подобно одномерному случаю, представим численное решение в виде

$$\mathbf{f}^n = \mathbf{f}_{j_1, \dots, j_N}^n = \mathbf{f}^0 \lambda^n e^{R}, \quad \lambda = \exp(i\omega\tau), \quad \lambda = e^{i\omega\tau}, \quad R = i \sum_{j=1}^N k_j h_j. \quad (3.7.3)$$

Очевидно, что для схемы расщепления по физическим процессам (3.5.14) справедливо представление

$$\mathbf{f}^{n+1} = \lambda \cdot \mathbf{f}^n = \frac{\mathbf{f}^{n+1}}{\mathbf{f}^{n+2/3}} \cdot \frac{\mathbf{f}^{n+2/3}}{\mathbf{f}^{n+1/3}} \cdot \frac{\mathbf{f}^{n+1/3}}{\mathbf{f}^n} \cdot \mathbf{f}^n = \eta_3 \eta_2 \eta_1 \mathbf{f}^n,$$

и тогда

$$\|\mathbf{f}^{n+1}\| = |\lambda| \cdot \|\mathbf{f}^n\| = |\eta_3| |\eta_2| |\eta_1| \|\mathbf{f}^n\|,$$

т. е. для выполнения условий устойчивости  $|\lambda| \leq 1$  необходимо выполнение условий  $|\eta_j| \leq 1$  ( $j=1, 2, 3$ ) для разностной схемы на каждом дробном шаге. Пусть  $\Lambda_j$  – симметричный оператор. Тогда  $\Lambda_j \mathbf{f}_n = i d_j \mathbf{f}^n$ ,  $d_j = (\tau/h_j) \sin(k_j h_j)$ . Так как

$$\mathbf{f}^{n+j/3} = \eta_j \mathbf{f}^{n+(j-1)/3},$$

то разностной схеме (3.5.14) на каждом шаге соответствует характеристическое уравнение

$$\det \begin{vmatrix} t(\eta-1)+V & A_j^1(\alpha\eta-\beta) & A_j^2(\alpha\eta-\beta) & A_j^3(\alpha\eta-\beta) & 0 \\ 0 & t(\eta-1)+V & 0 & 0 & B_j^1(\alpha\eta-\beta) \\ 0 & 0 & t(\eta-1)+V & 0 & B_j^2(\alpha\eta-\beta) \\ 0 & 0 & 0 & t(\eta-1)+V & B_j^3(\alpha\eta-\beta) \\ 0 & C_j^1(\alpha\eta-\beta) & C_j^2(\alpha\eta-\beta) & C_j^3(\alpha\eta-\beta) & t(\eta-1)+V \end{vmatrix} = 0,$$

где

$$t = 1 + i\alpha d_j v_j, \quad A_j^l = i\delta_j^l \rho, \quad B_j^l = i\delta_j^l (d_j / \rho), \quad C_j^l = i\delta_j^l \gamma \rho, \quad V = i d_j v_j, \quad \eta = \eta_j.$$

Оно может быть переписано в виде  $t(\eta - 1) + V = 0$ ,

$$\det \begin{vmatrix} t(\eta-1)+V & 0 & 0 & B_j^1(\alpha\eta-\beta) \\ 0 & t(\eta-1)+V & 0 & B_j^2(\alpha\eta-\beta) \\ 0 & 0 & t(\eta-1)+V & B_j^3(\alpha\eta-\beta) \\ C_j^1(\alpha\eta-\beta) & C_j^2(\alpha\eta-\beta) & C_j^3(\alpha\eta-\beta) & t(\eta-1)+V \end{vmatrix} = 0.$$

Его корни равны

$$\eta_{1,2,3} = (\eta_j)_{1,2,3} = \frac{1-i\beta d_j v_j}{1+i\alpha d_j v_j}, \quad (\eta_j)_{4,5} = \frac{1-i\beta(d_j v_j \pm sd)}{1+i\alpha(d_j v_j \pm sd)}, \quad d^2 = \sum_{j=1}^3 d_j^2$$

(для  $j = 1, 2, 3$ ), где  $s = \sqrt{\gamma p / \rho}$  – скорость звука, т. е.

$$|(\eta_j)_l| \leq 1 \text{ при } \alpha \geq 0,5, \text{ и, как следствие } |\lambda| = |\eta_3| |\eta_2| |\eta_1| \leq 1.$$

Для разностной схемы (3.5.15) справедливо соотношение

$$\mathbf{f}^{n+1} = \lambda \cdot \mathbf{f}^n = \frac{\mathbf{f}^{n+1}}{\mathbf{f}^{n+5/6}} \dots \frac{\mathbf{f}^{n+1/6}}{\mathbf{f}^n} \cdot \mathbf{f}^n = \eta_6 \dots \eta_l \cdot \mathbf{f}^n \text{ и тогда}$$

$$\|\mathbf{f}^{n+1}\| = |\lambda| \cdot \|\mathbf{f}^n\| = \prod_{l=1}^6 |\eta_l| \|\mathbf{f}^n\|, \text{ где } \mathbf{f}^{n+1/3} = \eta_j \mathbf{f}^{n+(l-1)/6}.$$

Для нечетных шагов ( $j = 1, 2, 3$ ) схеме (3.5.15)

$$\frac{\mathbf{f}^{n+(2j-1)/6} - \mathbf{f}^{n+(j-1)/3}}{\tau} + B_j^1[\alpha \mathbf{f}^{n+(2j-1)/6} + \beta \mathbf{f}^{n+(j-1)/3}] = 0$$

соответствует характеристическое уравнение

$$\det \begin{vmatrix} t(\eta-1)+V & A_j^1(\alpha\eta-\beta) & A_j^2(\alpha\eta-\beta) & A_j^3(\alpha\eta-\beta) & 0 \\ 0 & t(\eta-1)+V & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t(\eta-1)+V & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t(\eta-1)+V & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \eta-1 \end{vmatrix} = 0.$$

Его корни для  $j = 1, 2, 3$  равны

$$\eta_l = (\eta_{(2j-1)/6})_l = \frac{1-i\beta d_j v_j}{1+i\alpha d_j v_j} (l=1, \dots, 4), \quad (\eta_{(2j-1)/6})_5 = 1 \text{ и } |(\eta_{(2j-1)/6})_l| \leq 1$$

при  $\alpha \geq 0,5$ .

На четных шагах разностной схеме (3.5.15)

$$\frac{\mathbf{f}^{n+j/3} - \mathbf{f}^{n+(2j-1)/6}}{\tau} + \mathbf{B}_j^2 [\alpha \mathbf{f}^{n+j/3} + \beta \mathbf{f}^{n+(2j-1)/6}] = 0$$

соответствует характеристическое уравнение

$$\det \begin{vmatrix} \eta-1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \eta-1 & 0 & 0 & B_j^1(\alpha\eta-\beta) \\ 0 & 0 & \eta-1 & 0 & B_j^2(\alpha\eta-\beta) \\ 0 & 0 & 0 & \eta-1 & B_j^3(\alpha\eta-\beta) \\ 0 & C_j^1(\alpha\eta-\beta) & C_j^2(\alpha\eta-\beta) & C_j^3(\alpha\eta-\beta) & t(\eta-1)+V \end{vmatrix} = 0.$$

Его корни равны

$$(h_j)_l = 1 \quad (l=1, 2, 3),$$

$$(\eta_j)_{4,5} = \frac{1 - (\alpha - 0,5)iv_j d_j + \alpha\beta s^2 d_j^2 \pm id_j \sqrt{s^2 + v_j^2/4}}{1 + \alpha iv_j d_j + \alpha^2 s^2 d_j^2}.$$

Нетрудно убедиться, что  $|(\eta_j)_l| \leq 1$  при  $\alpha \geq 0,5$ . Так как условия  $|(\eta_j)_l| \leq 1$  выполняются для всех дробных шагов схемы (3.5.15), то, как следствие,

$$|\lambda| = \prod_{l=1}^6 |\eta_l| \leq 1,$$

т. е. разностная схема (3.5.15) безусловно устойчива и для полного шага. Подобные оценки могут быть получены и при несимметричной аппроксимации операторов  $\mathbf{B}_j^l$ .

Перейдем к анализу схем приближенной факторизации (3.6.5) и предиктор–корректор (3.6.8). Для линейных уравнений газовой динамики (3.6.1) они эквивалентны, в целых шагах записываются в виде

$$\prod_{j=1}^3 (\mathbf{I} + \tau\alpha \mathbf{B}_{jh}^1)(\mathbf{I} + \tau\alpha \mathbf{B}_{jh}^2) \frac{\mathbf{f}^{n+1} - \mathbf{f}^n}{\tau} = - \sum_{j=1}^3 (\mathbf{B}_{jh}^1 + \mathbf{B}_{jh}^2) \mathbf{f}^n \quad (3.7.4)$$

и являются схемами полной аппроксимации в отличие от схем (3.5.15), (3.5.16). Для решений вида (3.7.3) схеме (3.7.4) соответствует характеристическое уравнение

$$\det \left\| \prod_{j=1}^3 (\mathbf{I} + i\alpha d_j \mathbf{B}_j^1)(\mathbf{I} + i\alpha d_j \mathbf{B}_j^2)(\lambda - 1) + i\mathbf{B}_j^2 \sum_{j=1}^3 d_j (\mathbf{B}_j^1 + \mathbf{B}_j^2) \right\| = 0. \quad (3.7.5)$$

Исследовать устойчивость схемы в общем случае затруднительно, поэтому рассмотрим предельные случаи решений:

- 1)  $v_j \ll s$ , когда конвективным переносом можно пренебречь, и
- 2)  $v_j \gg s$ , когда пренебрегают действием сил давления.

В первом случае характеристическое уравнение (3.7.5) схемы (3.7.4) принимает вид

$$\lambda=1, \det \begin{vmatrix} \lambda-1 & -\alpha^2 s^2 d_1 d_1 (\lambda-1) & -\alpha^2 s^2 d_1 d_3 (\lambda-1) & i d_1 (\alpha \lambda - \beta) \\ 0 & \lambda-1 & -\alpha^2 s^2 d_2 d_3 (\lambda-1) & i d_2 (\alpha \lambda - \beta) \\ 0 & 0 & \lambda-1 & i d_3 (\alpha \lambda - \beta) \\ i d_1 s^2 (\alpha \lambda - \beta) & i d_2 s^2 (\alpha \lambda - \beta) & i d_3 s^2 (\alpha \lambda - \beta) & \lambda-1 \end{vmatrix} = 0,$$

где, как и выше  $s$  – скорость звука. Его корни равны

$$\lambda_{1,2,3} = 1, \lambda_{4,5} = \frac{1 + \alpha(1 - \alpha)R^2 \pm i(2\alpha - 1)R}{1 + \alpha^2 R^2} \text{ и } |\lambda_l| \leq 1 \quad (l=1, \dots, 5)$$

при  $\alpha \geq 0,5$ . Здесь

$$R^2 = s^2 [d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + \alpha^2 s^2 (d_1^2 d_2^2 + d_1^2 d_3^2 + d_2^2 d_3^2)] + \alpha^4 s^4 d_1^2 d_2^2 d_3^2.$$

Во втором предельном случае корни характеристического уравнения схемы

$$\det \begin{vmatrix} t(\lambda-1)+V & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t(\lambda-1)+V & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t(\lambda-1)+V & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t(\lambda-1)+V & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda-1 \end{vmatrix} = 0$$

равны

$$\lambda_1 = 1, \lambda_{2, \dots, 5} = \frac{t - iV}{t} = \frac{A + i(B - V)}{A + iB},$$

где

$$t = \prod_{j=1}^3 (1 + i\alpha d_j v_j) = A + iB, \quad V = \sum_{j=1}^3 d_j v_j,$$

$$A = 1 - \alpha^2 (v_1 v_2 d_1 d_2 + v_1 v_3 d_1 d_3 + v_2 v_3 d_2 d_3),$$

$$B = \alpha (V - \alpha^2 v_1 v_2 v_3 d_1 d_2 d_3).$$

Пусть для некоторых узлов сетки выполняются условия

$$d_j v_j = d_0 = \frac{\tau v_j}{h_j} \sin(k_j h_j), \quad (3.7.6)$$

что может достигаться комбинацией параметров  $\tau$ ,  $v_j$ ,  $\sin(k_j h_j)$ . Тогда удовлетворение условий устойчивости схемы

$$|\lambda_{2,\dots,5}|^2 = \frac{A^2 + (B-V)^2}{A^2 + B^2} \leq 1$$

эквивалентно выполнению условия  $V^2 \leq 2VB$ , что с учетом условия (3.7.6) приводит к неравенству

$$3d_0^2 \leq 2d_0 B = 2\alpha d_0^2 [3 - (\alpha d_0)^2].$$

Отсюда следует

$$\tau \leq \frac{h}{|v_0|} \sqrt{\frac{3(2\alpha-1)}{2\alpha^3}}, \quad |v_0| = \max |v_j|.$$

Таким образом, разностная схема (3.7.5) в случае преобладания конвективного переноса (случай 2) условно устойчива (для всех  $\alpha$ ), а при  $\alpha = 0,5$  она абсолютно неустойчива. Таким образом, схемы приближенной факторизации (3.6.3) и предиктор–корректор (3.6.8) для уравнений газовой динамики условно устойчивы. Подобные оценки устойчивости в §1.10 были получены для скалярного уравнения переноса. Максимальное значение шаг  $\tau$  принимает при значении весового множителя  $\alpha = 3/4$ . В этом случае условие устойчивости принимает вид  $\tau \leq 4h/(3|v_0|)$ , т. е. оно близко к устойчивости явных схем. Отметим, что для двумерных уравнений разностные схемы приближенной факторизации и предиктор–корректор безусловно устойчивы при  $\alpha \geq 0,5$ .

Разностные схемы вида (3.7.4) в других газодинамических переменных строятся аналогично. Однако вопросы их устойчивости и способов реализации требуют отдельного исследования.

### § 3.8. Разностные схемы для решения уравнений Навье–Стокса

Разностные схемы для численного решения уравнений Навье–Стокса сжимаемого теплопроводного газа строятся подобно схемам для уравнений газовой динамики. При построении разностных схем воспользуемся представлением уравнений Навье–Стокса в дивергентном виде (3.4.1), записав их в форме, удобной для расщепления:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} = - \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \mathbf{W}_j}{\partial x_j} = - \sum_{j=1}^3 \sum_{l=1}^2 \frac{\partial \widetilde{\mathbf{W}}_j^l}{\partial x_j} + \widetilde{\mathbf{F}}, \quad (3.8.1)$$

где по аналогии с уравнениями газовой динамики введено расщепление уравнений по физическим процессам в специальной форме:



$$W_j = \begin{pmatrix} \rho v_j \\ \rho v_1 v_j + \delta_j^1 p - \sigma_{1j} \\ \rho v_2 v_j + \delta_j^2 p - \sigma_{2j} \\ \rho v_3 v_j + \delta_j^3 p - \sigma_{3j} \\ v_j(E+p) - \kappa \frac{\partial T}{\partial x_j} - \sigma_j \end{pmatrix}, \quad \widetilde{W}_j^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ \delta_j^1 p \\ \delta_j^2 p \\ \delta_j^3 p \\ v_j(\rho e + p) - \kappa \frac{\partial T}{\partial x_j} \end{pmatrix}, \quad \widetilde{W}_j^2 = \begin{pmatrix} \rho v_j \\ \rho v_1 v_j - \eta_j^1 \frac{\partial v_j}{\partial x_j} \\ \rho v_2 v_j - \eta_j^2 \frac{\partial v_j}{\partial x_j} \\ \rho v_3 v_j - \eta_j^3 \frac{\partial v_j}{\partial x_j} \\ \rho v_j v^2 / 2 \end{pmatrix}.$$

Здесь  $\sigma_{ij} = \delta_j^i \lambda \operatorname{div} \mathbf{v} + \mu \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$ ,  $\sigma_j = \sum_{i=1}^3 v_i \sigma_{ij}$ , а  $\eta_j^i = \mu +$

$+\delta_j^i(\lambda + \mu)$ . Операторы  $\widetilde{\mathbf{W}}_j^1$  содержат члены с давлением в уравнениях движения, а в уравнении энергии сохранены члены с давлением и член с теплопроводностью. В операторах  $\widetilde{\mathbf{W}}_j^2$  наряду с конвективными членами (как и в уравнениях газовой динамики) в уравнениях движения включена часть вязких членов, содержащих повторные производные в направлении  $x_j$ . Все оставшиеся члены – смешанные производные в уравнениях движения и диссипативные члены в уравнении энергии перенесены в вектор правых частей  $\widetilde{\mathbf{F}}$ . Таким образом, введение расщепления по физическим процессам и пространственным направлениям позволило свести решение исходной многомерной задачи к набору более простых одномерных уравнений

$$\frac{1}{M} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \widetilde{\mathbf{W}}_1^1}{\partial x_1} = 0, \quad \dots, \quad (3.8.2)$$

$$\frac{1}{M} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \widetilde{\mathbf{W}}_3^2}{\partial x_3} = 0$$

и уравнения

$$\frac{1}{M} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} = \widetilde{\mathbf{F}}, \quad (3.8.3)$$

которое будем полагать как уравнение с известными правыми частями, взятыми, например, с предыдущего временного шага. Здесь  $M = 2N = 6$ . Система уравнений (3.8.2), (3.8.3) слабо аппроксимирует исходные уравнения Навье–Стокса (см. [6]).

Выберем в качестве искоемых функций плотность, компоненты скорости и давление. Тогда дивергентной форме записи уравнений Навье–Стокса (3.8.1) соответствует их недивергентная форма

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 \mathbf{B}_j \mathbf{f} = \mathbf{F}, \quad \mathbf{B}_j = \sum_{l=1}^2 \mathbf{B}'_{jl}, \quad (3.8.4)$$

где

$$\mathbf{f} = \begin{pmatrix} \rho \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ p \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}'_j = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_j^1 \frac{\partial}{\partial x_j} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_j^2 \frac{\partial}{\partial x_j} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_j^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \\ 0 & c_j^1 \frac{\partial}{\partial x_j} & c_j^2 \frac{\partial}{\partial x_j} & c_j^3 \frac{\partial}{\partial x_j} & v_j \frac{\partial}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} \tilde{\kappa} \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{1}{\rho} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{B}_j^2 = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_j} v_j & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & v_j \frac{\partial}{\partial x_j} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} \eta_j^1 \frac{\partial}{\partial x_j} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & v_j \frac{\partial}{\partial x_j} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} \eta_j^2 \frac{\partial}{\partial x_j} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & v_j \frac{\partial}{\partial x_j} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} \eta_j^3 \frac{\partial}{\partial x_j} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$b_j^l = \delta_j^l / \rho$ ,  $c_j^l = \delta_j^l \gamma p$ ,  $\tilde{\kappa} = (\gamma - 1) \kappa / c_v$ ,  $\eta_j^l = \mu + \delta_j^l (\lambda + \mu)$ , а вектор  $\mathbf{F}$  содержит оставшиеся члены уравнений (смешанные производные в уравнениях движения и диссипативные члены в уравнении энергии). Уравнения Навье–Стокса в недивергентном виде (3.8.4) эквивалентны их представлению в предельно дивергентном виде

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} = - \sum_{j=1}^3 \mathbf{B}_j \mathbf{f} + \mathbf{F} = -A^{-1} \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \mathbf{W}_j}{\partial x_j}, \quad A = \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{f}}, \quad \mathbf{B}_j = \sum_{l=1}^2 \mathbf{B}'_{jl}, \quad (3.8.5)$$

что может быть использовано при построении разностных схем. Аппроксимируем операторы  $\mathbf{B}'_j$  и векторы  $\partial \mathbf{W}_j / \partial x_j$  разностными операторами  $\mathbf{B}'_{jh}$  и  $\Lambda_j \mathbf{W}_{jh}$  с порядком  $O(h^k)$  и  $O(h^l)$  подобно п. 5.2 по формулам

$$\Lambda_j \mathbf{W}_{jh} = \Lambda_j \begin{pmatrix} \rho v_j \\ \rho v_1 v_j + \delta_j^1 p - \sigma_{1j} \\ \rho v_2 v_j + \delta_j^2 p - \sigma_{2j} \\ \rho v_3 v_j + \delta_j^3 p - \sigma_{3j} \\ v_j (E + p) - \kappa \Lambda_j T - \sigma_j \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}_{jh} = \mathbf{B}_{jh}^1 + \mathbf{B}_{jh}^2,$$

$$\mathbf{B}_{jh}^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_j^1 \bar{\Lambda}_j \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_j^2 \bar{\Lambda}_j \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_j^3 \bar{\Lambda}_j \\ 0 & c_j^1 \Lambda_j & c_j^2 \Lambda_j & c_j^3 \Lambda_j & v_j \Lambda_j - \Lambda_j \tilde{\kappa} \Lambda_j \frac{1}{\rho} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{B}_{jh}^2 = \begin{pmatrix} \Lambda_j v_j & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Lambda_j v_j - \frac{1}{\rho} \Lambda_j \eta_j^1 \Lambda_j & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & v_j \Lambda_j - \frac{1}{\rho} \Lambda_j \eta_j^2 \Lambda_j & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & v_j \Lambda_j - \frac{1}{\rho} \Lambda_j \eta_j^3 \Lambda_j & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.8.6)$$

Первые и вторые производные в векторах  $\partial \mathbf{W}_j / \partial x_j$  аппроксимируем симметричными операторами  $\Lambda_j \mathbf{W}_{jh}$  со вторым порядком. Для устранения осцилляций подобно одномерному случаю при аппроксимации первых производных сглаживающие операторы второго порядка малости по каждому пространственному направлению задаются по формулам

$$\Lambda_j (W_j)_m = \frac{W_{m+1} - W_{m-1}}{2h_j} - \frac{h}{2} \cdot \text{sign}(v) \varepsilon \frac{W_{m+1} - 2W_m + W_{m-1}}{h_j^2}, \quad (3.8.7)$$

где  $\varepsilon = \frac{|W_{m+1} - 2W_m + W_{m-1}|}{|W_{m+1} - W_m| + |W_m - W_{m-1}|}$  и  $\varepsilon = 0$ , если  $|W_{m+1} - W_m| + |W_m - W_{m-1}| = 0$ .

Здесь  $(W_j)_{j_1, j_2, j_3} = W_m$ , где  $W_m$  – компонента вектора  $W_j$  в узле  $j_m$  ( $m = 1, 2, 3$ ).

Простейшей схемой для численного решения уравнений Навье–Стокса является схема с весами

$$\frac{\mathbf{f}^{n+1} - \mathbf{f}^n}{\tau} + \sum_{j=1}^3 \mathbf{B}_{jh}^n [\alpha \mathbf{f}^{n+1} + \beta \mathbf{f}^n] = \mathbf{F}^n, \quad (3.8.8)$$

аппроксимирующая (3.8.4) с порядком  $O(\tau + h^k)$ . Она линейная относительно  $(n + 1)$ -го временного слоя, так как коэффициенты матричных операторов  $\mathbf{B}_{jh}^n$  выбраны на нижнем  $n$ -м слое. Перепишем ее в канонической форме

$$\left( \mathbf{I} + \tau\alpha \sum_{j=1}^3 \mathbf{B}_{jh}^n \right) \frac{\mathbf{f}^{n+1} - \mathbf{f}^n}{\tau} = - \sum_{j=1}^3 \mathbf{B}_{jh}^n \mathbf{f}^n + \mathbf{F}^n,$$

или с учетом соотношений (3.8.5) в предельно дивергентной форме

$$\left( \mathbf{I} + \tau\alpha \sum_{j=1}^3 \mathbf{B}_{jh}^n \right) \frac{\mathbf{f}^{n+1} - \mathbf{f}^n}{\tau} = - (A^n)^{-1} \sum_{j=1}^3 \Lambda_j \mathcal{W}_j^n. \quad (3.8.9)$$

Разностная схема (3.8.9) аппроксимирует уравнения Навье–Стокса с тем же порядком, что и схема (3.8.8), и реализуется матричной прогонкой.

Схема расщепления по пространственным направлениям

$$\begin{aligned} (I + \tau\alpha \mathbf{B}_{1h}^n) \frac{\mathbf{f}^{n+1/3} - \mathbf{f}^n}{\tau} &= - (A^n)^{-1} \Lambda_1 \mathbf{W}_1^n, \\ (I + \tau\alpha \mathbf{B}_{2h}^n) \frac{\mathbf{f}^{n+1/3} - \mathbf{f}^n}{\tau} &= - (A^n)^{-1} \Lambda_2 \mathbf{W}_1^n, \\ (I + \tau\alpha \mathbf{B}_{3h}^n) \frac{\mathbf{f}^{n+1/3} - \mathbf{f}^n}{\tau} &= - (A^n)^{-1} \Lambda_3 \mathbf{W}_3^n \end{aligned} \quad (3.8.10)$$

также аппроксимирует уравнения Навье–Стокса с порядком  $O(\tau + h^k)$  и реализуется матричными прогонками по каждому направлению  $x_j$ . Подобным образом строится схема расщепления по физическим процессам и пространственным направлениям

$$\begin{aligned} [I + \tau\alpha \mathbf{B}_{1h}^1] \frac{\mathbf{f}^{n+1/6} - \mathbf{f}^n}{\tau} &= - \mathbf{B}_{1h}^1 \mathbf{f}^n + \mathbf{F}^n, \\ [I + \tau\alpha \mathbf{B}_{1h}^2] \frac{\mathbf{f}^{n+2/6} - \mathbf{f}^{n+1/6}}{\tau} &= - \mathbf{B}_{1h}^2 \mathbf{f}^{n+1/6}, \\ &\dots, \\ [I + \tau\alpha \mathbf{B}_{3h}^1] \frac{\mathbf{f}^{n+5/6} - \mathbf{f}^{n+4/6}}{\tau} &= - \mathbf{B}_{3h}^1 \mathbf{f}^{n+4/6}, \\ [I + \tau\alpha \mathbf{B}_{3h}^2] \frac{\mathbf{f}^{n+1} - \mathbf{f}^{n+5/6}}{\tau} &= - \mathbf{B}_{3h}^2 \mathbf{f}^{n+5/6}. \end{aligned} \quad (3.8.11)$$

Она реализуется на дробных шагах скалярными прогонками подобно схеме (3.5.15) для уравнений газовой динамики, аппроксимирует исходные уравнения (3.8.4) также с порядком  $O(\tau + h^k)$  и для ли-

нейных уравнений Навье–Стокса безусловно устойчива при  $\alpha \geq 0,5$ . Как и схема расщепления (3.5.15), она не приводится к канонической форме, т. е. не обладает свойством полной аппроксимации.

Ниже для численного решения уравнений рассмотрены два класса экономичных разностных схем – схемы приближенной факторизации и схемы предиктор–корректор, обладающие свойством полной аппроксимации.

### 3.8.1. Схема приближенной факторизации

При построении разностных схем для численного решения уравнений Навье–Стокса могут использоваться различные газодинамические переменные. Ограничимся для построения разностных схем переменными плотность, компоненты скорости и давление (для других переменных разностные схемы строятся подобно). Аппроксимируем систему уравнений (3.8.5) разностной схемой с весами

$$\frac{\mathbf{f}^{n+1} - \mathbf{f}^n}{\tau} + \sum_{j=1}^3 \sum_{l=1}^2 \mathbf{B}_{jh}^l (\alpha \mathbf{f}^{n+1} + \beta \mathbf{f}^n) = \mathbf{F}_h^n,$$

перепишав ее в канонической форме

$$\left[ I + \tau \alpha \sum_{j=1}^3 \sum_{l=1}^2 \mathbf{B}_{jh}^l \right] \frac{\mathbf{f}^{n+1} - \mathbf{f}^n}{\tau} = -(\mathbf{A}^n)^{-1} \sum_{j=1}^3 \Lambda_j \mathbf{W}_{jh}^n. \quad (3.8.12)$$

Она аппроксимирует, как и схема (3.8.11), систему уравнений (3.8.4) с порядком  $O(\tau + h^k)$ . Приближенно факторизуем стабилизирующий оператор  $I + \tau \alpha \sum_{j=1}^3 \sum_{l=1}^2 \mathbf{B}_{jh}^l$  по формуле

$$I + \tau \alpha \sum_{j=1}^3 \sum_{l=1}^2 \mathbf{B}_{jh}^l \approx \tilde{C} = \prod_{j=1}^3 (I + \tau \alpha \mathbf{B}_{jh}^1) (I + \tau \alpha \mathbf{B}_{jh}^2) = I + \tau \alpha \sum_{j=1}^3 \sum_{l=1}^2 \mathbf{B}_{jh}^l + O(\tau^2).$$

Разностная схема

$$\tilde{C} \frac{\mathbf{f}^{n+1} - \mathbf{f}^n}{\tau} = -(\mathbf{A}^n)^{-1} \sum_{j=1}^3 \Lambda_j \mathbf{W}_{jh}^n \quad (3.8.13)$$

или эквивалентная ей схема в дробных шагах

$$\begin{aligned}
\xi^n &= -(A^n)^{-1} \sum_{j=1}^3 \Lambda_j \mathbf{W}_{jh}^n, \\
(I + \tau\alpha \mathbf{B}_{1h}^1) \xi^{n+1/6} &= \xi^n, \\
(I + \tau\alpha \mathbf{B}_{1h}^2) \xi^{n+2/6} &= \xi^{n+1/6}, \\
&\dots, \\
(I + \tau\alpha \mathbf{B}_{3h}^1) \xi^{n+5/6} &= \xi^{n+4/6}, \\
(I + \tau\alpha \mathbf{B}_{3h}^2) \xi^{n+1} &= \xi^{n+5/6}, \\
\mathbf{f}^{n+1} &= \mathbf{f}^n + \tau \xi^{n+1}
\end{aligned} \tag{3.8.14}$$

также аппроксимирует исходные уравнения Навье–Стокса с порядком  $O(\tau + h^k)$ , а при установлении – стационарные уравнения в дивергентной форме

$$\sum_{j=1}^3 \Lambda_j \mathbf{W}_{jh}^n = 0,$$

так как матрица  $\mathbf{A}$  невырожденная. Остановимся на особенностях реализации схемы (3.8.14) при переходе с  $n$ -го слоя на  $(n+1)$ -й.

Невязки решения на нулевом дробном шаге  $\xi^n = (\xi_p^n, \xi_1^n, \xi_2^n, \xi_3^n, \xi_p^n)^T$  определяются явно из (3.8.14) при известных значениях сеточных функций  $\mathbf{W}_{jh}^n$  на предыдущем слое. На нечетных шагах схемы (3.8.14) для  $j = 1, 2, 3$  решается система разностных уравнений

$$\begin{aligned}
\xi_p^{n+(2j-1)/6} &= \xi_p^{n+(j-1)/3}, \\
\xi_1^{n+(2j-1)/6} + \tau\alpha a_j^1 \bar{\Lambda}_j \xi_p^{n+(2j-1)/6} &= \xi_1^{n+(j-1)/3}, \\
\xi_2^{n+(2j-1)/6} + \tau\alpha a_j^2 \bar{\Lambda}_j \xi_p^{n+(2j-1)/6} &= \xi_2^{n+(j-1)/3}, \\
\xi_3^{n+(2j-1)/6} + \tau\alpha a_j^3 \bar{\Lambda}_j \xi_p^{n+(2j-1)/6} &= \xi_3^{n+(j-1)/3},
\end{aligned} \tag{3.8.15}$$

$$\xi_p^{n+(2j-1)/6} + \tau\alpha \left[ v_j \Lambda_j - \Lambda_j \tilde{\kappa} \Lambda_j \frac{1}{\rho^n} \right] \xi_p^{n+(2j-1)/6} + \tau\alpha c_j^j \Lambda_j \xi_j^{n+(2j-1)/6} = \xi_p^{n+(j-1)/3}.$$

Исключая невязки скоростей  $\xi_l^{n+(2j-1)/6}$  ( $l = 1, 2, 3$ ) из последнего уравнения схемы (3.8.15), получим для невязки давления  $\xi_p^{n+(2j-1)/6}$  разностное уравнение

$$\begin{aligned}
\left[ I + \tau\alpha \left( v_j \Lambda_j - \Lambda_j \tilde{\kappa} \Lambda_j \frac{1}{\rho} \right) - \tau^2 \alpha^2 c_j^j \Lambda_j a_j^j \bar{\Lambda}_j \right] \xi_p^{n+(2j-1)/6} = \\
= \xi_p^{n+(j-1)/3} - \tau\alpha c_j^j \Lambda_j \xi_j^{n+(j-1)/3}.
\end{aligned}$$

Его решение находится скалярными прогонками по каждому направлению  $x_j$ , после чего значения невязок для скоростей  $\xi_l^{n+(2j-1)/6}$  вычисляются по явным формулам

$$\xi_l^{n+(2j-1)/6} = \xi_l^{n+(j-1)/3} - \tau \alpha a_{jh}^l \bar{\Lambda}_j \xi_p^{n+(2j-1)/6} \quad (l = 1, 2, 3),$$

а значение плотности переносится с предыдущего шага.

На четных шагах система разностных уравнений для  $l = 1, 2, 3$

$$\begin{aligned} & \left[ 1 + \tau \alpha \Lambda_j v_j^n \right] \xi_p^{n+j/6} = \xi_p^{n+(2j-1)/12}, \\ & \left[ 1 + \tau \alpha \left( v_j^n \Lambda_j - \frac{1}{\rho} \Lambda_j \eta_j^1 \Lambda_j \right) \right] \xi_1^{n+j/6} = \xi_1^{n+(2j-1)/12}, \\ & \left[ 1 + \tau \alpha \left( v_j^n \Lambda_j - \frac{1}{\rho} \Lambda_j \eta_j^2 \Lambda_j \right) \right] \xi_2^{n+j/6} = \xi_2^{n+(2j-1)/12}, \\ & \left[ 1 + \tau \alpha \left( v_j^n \Lambda_j - \frac{1}{\rho} \Lambda_j \eta_j^3 \Lambda_j \right) \right] \xi_3^{n+j/6} = \xi_3^{n+(2j-1)/12}, \\ & \xi_p^{n+j/6} = \xi_p^{n+(2j-1)/12} \end{aligned} \quad (3.8.16)$$

решается скалярными прогонками независимо для каждого уравнения, а значение невязки для давления переносится с предыдущего шага. Новые значения функций вычисляются явно из последнего уравнения схемы (3.8.14). Таким образом, решение системы уравнений Навье–Стокса подобно схемам для уравнений газовой динамики при переходе с  $n$ -го на  $(n+1)$ -й временной слой может быть получено за  $Nm$  скалярных прогонок, где, как и выше,  $N$  – размерность задачи по пространству,  $m$  – число уравнений. Разностная схема (3.8.13) или (3.8.14) подобно схеме (3.6.4) или (3.6.5) безусловно устойчива для двумерных (линеаризованных) уравнений при  $\alpha \geq 0,5$  и, как и всякая схема приближенной факторизации, условно устойчива в трехмерном случае. При аппроксимации операторов  $\mathbf{B}_{jh}^l$  несимметричными операторами с первым порядком ( $k = 1$ ), а оператора правой части со вторым порядком (с введением сглаживания подобно (3.8.7)), разностные схемы (3.8.13) или (3.8.14) аппроксимируют систему уравнений (3.8.1) с порядком  $O(\tau + \tau h + h^2)$ , а при установлении – стационарные уравнения Навье–Стокса с порядком  $O(h^2)$ . На дробных шагах схема (3.8.14) реализуется трехточечными скалярными прогонками.

### 3.8.2. Схема предиктор–корректор

Для численного решения уравнений Навье–Стокса (3.8.1) при решении стационарных и нестационарных задач также может быть

рассмотрена разностная схема, основанная на методе предиктор–корректор следующего вида:

$$\begin{aligned}
 (I + \tau\alpha\mathbf{B}_{1h}^1)\mathbf{f}^{n+1/2} &= \mathbf{f}^n, \\
 (I + \tau\alpha\mathbf{B}_{1h}^1)\mathbf{f}_1^{n+2/2} &= \mathbf{f}_1^{n+1/2}, \\
 &\dots, \\
 (I + \tau\alpha\mathbf{B}_{3h}^1)\mathbf{f}^{n+5/2} &= \mathbf{f}^{n+4/2}, \\
 (I + \tau\alpha\mathbf{B}_{3h}^2)\mathbf{f}_1^{n+1/2} &= \mathbf{f}_1^{n+5/2}, \\
 \mathbf{U}^{n+1} &= \mathbf{U}^n - \tau \sum_{j=1}^3 \Lambda_j^l \mathbf{W}_{jh}^{n+1/2}.
 \end{aligned} \tag{3.8.17}$$

В ней на этапе предиктора исходные уравнения Навье–Стокса аппроксимируются в недивергентной форме, а консервативность схемы восстанавливается на этапе корректора. Разностная схема (3.8.12) аппроксимирует уравнения Навье–Стокса с порядком  $O(\tau^2 + \tau h^k + h^l)$  и консервативна. Опишем ее реализацию. Разностной схеме (3.8.17) на нечетных шагах для  $j = 1, 2, 3$

$$(I + \tau\alpha\mathbf{B}_{jh}^1)\mathbf{f}^{n+(2j-1)/6} = \mathbf{f}^{n+(j-1)/3}$$

в скалярном виде соответствует система разностных уравнений

$$\begin{aligned}
 \rho^{n+(2j-1)/6} &= \rho^{n+(j-1)/3}, \\
 v_1^{n+(2j-1)/6} + \tau\alpha a_j^1 \bar{\Lambda}_j p^{n+(2j-1)/6} &= v_1^{n+(j-1)/3}, \\
 v_2^{n+(2j-1)/6} + \tau\alpha a_j^2 \bar{\Lambda}_j p^{n+(2j-1)/6} &= v_2^{n+(j-1)/3}, \\
 v_3^{n+(2j-1)/6} + \tau\alpha a_j^3 \bar{\Lambda}_j p^{n+(2j-1)/6} &= v_3^{n+(j-1)/3}, \\
 \rho^{n+(2j-1)/6} + \tau\alpha \left[ v_j \Lambda_j - \Lambda_j \tilde{\kappa} \Lambda_j \frac{1}{\rho} \right] p^{n+(2j-1)/6} + \tau\alpha c_j^j \Lambda_j v_j^{n+(2j-1)/6} &= p^{n+(j-1)/3}.
 \end{aligned} \tag{3.8.18}$$

Подобно системе разностных уравнений схемы (3.8.10), она может быть решена скалярной прогонкой для давления, после чего остальные функции вычисляются явно. Для уравнений Навье–Стокса в качестве искоемых функций также могут быть выбраны плотность, компоненты скорости и температура, для которых обычно и задаются краевые условия. Тогда, с учетом уравнения неразрывности, система разностных уравнений (3.8.18) может быть переписана, например, для уравнения состояния идеального газа  $p = (\gamma - 1)c_v \rho T$  в виде



$$\begin{aligned}
\rho^{n+(2j-1)/6} &= \rho^{n+(j-1)/3}, \\
v_1^{n+(2j-1)/6} + \tau\alpha A_j^1 \bar{\Lambda}_j \rho^{n+(j-1)/3} T^{n+(2j-1)/6} &= v_1^{n+(j-1)/3}, \\
v_2^{n+(2j-1)/6} + \tau\alpha A_j^2 \bar{\Lambda}_j \rho^{n+(j-1)/3} T^{n+(2j-1)/6} &= v_2^{n+(j-1)/3}, \\
v_3^{n+(2j-1)/6} + \tau\alpha A_j^3 \bar{\Lambda}_j \rho^{n+(j-1)/3} T^{n+(2j-1)/6} &= v_3^{n+(j-1)/3}, \\
\rho^{n+(j-1)/3} T^{n+(2j-1)/6} + \tau\alpha \left[ v_j \Lambda_j - \Lambda_j \tilde{\kappa} \Lambda_j \right] \rho^{n+(j-1)/3} T^{n+(2j-1)/6} + \\
+ \tau\alpha \tilde{C}_j^j \Lambda_j v_j^{n+(2j-1)/6} &= \rho^{n+(j-1)/3} T^{n+(j-1)/3},
\end{aligned}$$

где  $A_j^l = (\gamma-1)c_v \delta_j^l / \rho^n$ ,  $\tilde{C}_j^l = \gamma p^n \delta_j^l / (\gamma-1)c_v$ ,  $\tilde{\kappa} = \kappa / c_v$ . Исключая компоненты скорости в последнем уравнении, получим для температуры  $T^{n+(2j-1)/6}$  разностное уравнение

$$\begin{aligned}
\left[ I + \tau\alpha \left( v_j \Lambda_j - \frac{1}{\rho^n} \Lambda_j \tilde{\kappa} \Lambda_j \right) - \tau^2 \alpha^2 \tilde{c}_j^j \Lambda_j A_j^j \bar{\Lambda}_j \right] \rho^{n+(j-1)/3} T^{n+(2j-1)/6} = \\
= T^{n+(j-1)/3} - \tau\alpha \tilde{C}_j^j \Lambda_j v_j^{n+(2j-1)/6}.
\end{aligned}$$

Его решение при известном значении плотности находят скалярной прогонкой, после чего явно вычисляются остальные функции.

На четных шагах система разностных уравнений для  $j = 1, 2, 3$

$$\begin{aligned}
\left[ 1 + \tau\alpha \Lambda_j v_j^n \right] \rho^{n+j/6} &= \rho^{n+(2j-1)/12}, \\
\left[ 1 + \tau\alpha \left( v_j^n \Lambda_j - \frac{1}{\rho} \Lambda_j \Pi_j^1 \Lambda_j \right) \right] v_1^{n+j/6} &= v_1^{n+(2j-1)/12}, \\
\left[ 1 + \tau\alpha \left( v_j^n \Lambda_j - \frac{1}{\rho} \Lambda_j \Pi_j^2 \Lambda_j \right) \right] v_2^{n+j/6} &= v_2^{n+(2j-1)/12}, \\
\left[ 1 + \tau\alpha \left( v_j^n \Lambda_j - \frac{1}{\rho} \Lambda_j \Pi_j^3 \Lambda_j \right) \right] v_3^{n+j/6} &= v_3^{n+(2j-1)/12}, \\
p^{n+j/6} &= p^{n+(2j-1)/12}
\end{aligned}$$

решается скалярными прогонками подобно (3.8.16). Если в качестве искомых функций выбрать плотность, импульс и температуру, то разностные уравнения схемы (3.8.17) на четных шагах

$$\begin{aligned}
 & [1 + \tau\alpha\Lambda_j v_j^n] \rho^{n+j/6} = \rho^{n+(2j-1)/12}, \\
 & \left[ \rho^{n+j/6} + \tau\alpha(\Lambda_j v_j^n - \Lambda_j \eta_j^1 \Lambda_j) \right] v_1^{n+j/6} = (\rho v_1)^{n+(2j-1)/12}, \\
 & \left[ \rho^{n+j/6} + \tau\alpha(\Lambda_j v_j^n - \Lambda_j \eta_j^2 \Lambda_j) \right] v_2^{n+j/6} = (\rho v_2)^{n+(2j-1)/12}, \\
 & \left[ \rho^{n+j/6} + \tau\alpha(\Lambda_j v_j^n - \Lambda_j \eta_j^3 \Lambda_j) \right] v_3^{n+j/6} = (\rho v_3)^{n+(2j-1)/12}
 \end{aligned}$$

также решаются скалярными прогонками независимо для каждого уравнения, но аппроксимируются в дивергентной форме, что может приводить к повышению точности расчетов. Новое значение температуры определяется из уравнения для давления  $p^{n+j/6} = p^{n+(2j-1)/12}$  по явным формулам при вычисленном значении плотности  $\rho^{n+j/6}$ . Новые значения функций на слое  $n+1$  вычисляются явно на этапе корректора (последнее уравнения схемы (3.8.17)). Таким образом, рассмотренные разностные схемы являются оптимальными по числу операций при переходе с одного временного шага на другой. Введение расщепления по физическим процессам в схеме (3.8.17) приводит, как следует из вида диссипативной матрицы схемы

$$\sum_{j=1}^3 \mathbf{B}_{jh}^1 \mathbf{B}_{jh}^2 = \tau^2 \alpha^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t_1 & t_2 & t_3 & 0 \end{pmatrix}, \text{ где } t_j = c_j^j \Lambda_j v_j^n \Lambda_j,$$

к появлению лишь одного дополнительного члена в уравнении энергии по сравнению со схемой расщепления по направлениям (3.8.10), реализация которых сводится к векторным прогонкам. Подобным образом могут быть построены разностные схемы и в других газодинамических переменных. Рассмотренные схемы безусловно устойчивы для двумерных уравнений и условно устойчивы в трехмерном случае. При несогласованной аппроксимации схемы при  $k \neq l$  ( $k=1, l=2$ ) необходимо вводить сглаживание операторов на этапе корректора по алгоритму (3.8.7).

### § 3.9. Разностные схемы в преобразованных координатах

Решение большинства задач аэро- и гидродинамики обычно ищут в областях сложной формы с криволинейными границами. Это приводит к необходимости использования криволинейных сеток или введения специальных преобразований координат, переводящих ис-

ходную область в единичный квадрат или куб в зависимости от размерности задач. Аппроксимация уравнений конечно-разностными схемами в криволинейных ячейках вызывает дополнительные трудности как при построении самих сеток, так и при аппроксимации операторов на таких сетках. Поэтому обычно применяют преобразования координат, переводящие исходную расчетную область в прямоугольную (единичный квадрат или куб), а требуемое сгущение координат задают преобразованием координат. В преобразованной области применяют равномерные сетки, аппроксимация производных на которых наиболее проста. Равномерной сетке в единичной области будет соответствовать неравномерная сетка в исходной криволинейной области. Кроме того, можно подобрать такие преобразования координат, которые позволят сгустить сетку в исходной области в зоне больших изменений градиента решения и таким образом учесть физические особенности решения и получить более точные численные результаты. Некоторые подходы по построению преобразований координат и адаптивных сеток для задач аэро- и гидродинамики изложены в [6, 18–24]. Чтобы упростить изложение алгоритмов в преобразованных координатах, ограничимся рассмотрением двумерных уравнений.

### 3.9.1. Уравнения Навье–Стокса в преобразованных координатах

Рассмотрим систему уравнений Навье–Стокса в декартовых координатах

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} = -\mathbf{W}, \quad \mathbf{W} = \sum_{j=1}^2 \frac{\partial \mathbf{W}_j}{\partial x_j}, \quad p = p(\rho, e), \quad e = e(T), \quad (3.9.1)$$

где, как и выше,

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho v_1 \\ \rho v_2 \\ E \end{pmatrix}, \quad \mathbf{W}_j = \begin{pmatrix} \rho v_j \\ \rho v_1 v_j + \delta_j^1 p - \sigma_j^1 \\ \rho v_2 v_j + \delta_j^2 p - \sigma_j^2 \\ v_j(E + p) - \kappa \frac{\partial T}{\partial x_j} - \sigma_j \end{pmatrix}, \quad E = \rho(e + V^2/2),$$

$$\text{а } \sigma_j^i = \delta_j^i \lambda \operatorname{div} \mathbf{v} + \mu \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right), \quad \lambda = \mu' - \frac{2}{3} \mu, \quad \sigma_j = \sum_{i=1}^2 v_i \sigma_j^i, \quad V^2 = v_1^2 + v_2^2.$$

Введем невырожденное преобразование координат в виде (см., например, [9, 18]):

$$q_i = q_i(x_j), \quad (i=1, 2, \quad j=1, 2) \quad (3.9.2)$$

и будем полагать, что для него существует обратное преобразование

$$x_j = x_j(q_i) \quad (j, i = 1, 2).$$

Тогда коэффициенты преобразования равны

$$\frac{\partial}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^2 q_j^i \frac{\partial}{\partial q_i} \quad (j = 1, 2) \text{ и } q_j^i = \frac{\partial q_i}{\partial x_j}.$$

С учетом введенного преобразования система уравнений Навье–Стокса (3.9.1) в новых переменных  $q_j$  вновь может быть записана в дивергентной форме

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{U}}}{\partial t} = -\bar{\mathbf{W}}. \quad (3.9.3)$$

Здесь

$$\bar{\mathbf{W}} = \sum_{j=1}^2 \frac{\partial \bar{\mathbf{W}}_j}{\partial q_j}, \quad \bar{\mathbf{U}} = \frac{1}{J} \mathbf{U}, \quad \bar{\mathbf{W}}_j = \frac{1}{J} \sum_{i=1}^2 q_j^i \mathbf{W}_i = \frac{1}{J} \begin{pmatrix} V_j \rho \\ V_j \rho v_1 + q_j^1 p - \bar{\sigma}_j^{-1} \\ V_j \rho v_2 + q_j^2 p - \bar{\sigma}_j^{-2} \\ V_j (E + p) - Q_j - \bar{\sigma}_j^{-3} \end{pmatrix},$$

$$V_j = \sum_{i=1}^2 q_j^i v_i, \quad \bar{\sigma}_j^{-l} = \sum_{m=1}^2 q_m^j \sigma_l^m, \quad Q_j = \kappa \sum_{l=1}^2 q_j^l \frac{\partial T}{\partial q_l}, \quad \bar{\sigma}_j^{-3} = \sum_{l=1}^2 v_l \bar{\sigma}_j^{-l},$$

$$q_j = \sum_{m=1}^2 v_m \sigma_j^m, \quad \sigma_j^i = \delta_j^i \lambda \operatorname{div} \mathbf{v} + \mu \sum_{l=1}^2 \left( q_l^i \frac{\partial v_j}{\partial q_l} + q_j^l \frac{\partial v_i}{\partial q_l} \right), \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = \sum_{j=1}^2 \sum_{l=1}^2 q_j^l \frac{\partial v_j}{\partial q_l},$$

а  $J = \det \begin{pmatrix} q_1^1 & q_1^2 \\ q_2^1 & q_2^2 \end{pmatrix}$  – якобиан преобразования координат.

Представим систему уравнений Навье–Стокса (3.9.3) в недивергентном виде

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} + \sum_{j=1}^2 \mathbf{B}_j \mathbf{f} = \mathbf{F}. \quad (3.9.4)$$

Выше было показано, что для численного решения уравнений удобно выбирать в качестве искоемых функций плотность, компоненты скорости и давление (или температуру). Ограничимся рассмотрением алгоритмов в криволинейных преобразованных координатах для искоемых функций  $\mathbf{f} = (\rho, v_1, v_2, p)$  или  $\mathbf{f} = (\rho, \rho v_1, \rho v_2, p)$  (как и

выше, при построении разностных схем на отдельных шагах могут быть использованы различные газодинамические переменные). Тогда матричные операторы  $\mathbf{B}_j$  примут вид

$$\mathbf{f} = \begin{pmatrix} \rho \\ v_1 \\ v_2 \\ p \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}_j = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial q_j} V_j & 0 & 0 & 0 \\ 0 & V_j \frac{\partial}{\partial q_j} - d_j^1 & 0 & a_j^1 \frac{\partial}{\partial q_j} \\ 0 & 0 & V_j \frac{\partial}{\partial q_j} - d_j^2 & a_j^2 \frac{\partial}{\partial q_j} \\ 0 & c_j^1 \frac{\partial}{\partial q_j} & c_j^2 \frac{\partial}{\partial q_j} & V_j \frac{\partial}{\partial q_j} - d_j^3 \end{pmatrix}, \quad (3.9.5)$$

где для  $j = 1, 2; l = 1, 2$ ; соответствующие коэффициенты равны

$$d_j^l = \frac{1}{\rho} q_j^l, \quad c_j^l = \gamma p q_j^l, \quad d_j^l = \frac{1}{\rho} \sum_{m=1}^2 q_m^j \frac{\partial}{\partial q_j} b_m^l q_m^j \frac{\partial}{\partial q_j},$$

$$d_j^3 = \kappa \sum_{m=1}^2 q_m^j \frac{\partial}{\partial q_j} \kappa q_m^j \frac{\partial}{\partial q_j} \frac{1}{\rho}, \quad b_j^l = \mu + \delta_j^l (\mu + \lambda).$$

Матричные операторы  $\mathbf{B}_j$  содержат конвективные члены, члены с давлением и повторные производные по каждому направлению  $q_j$ , а вектор  $\mathbf{F}$  – оставшиеся члены уравнений. Уравнение неразрывности выберем в дивергентной форме, а оставшиеся уравнения – в недивергентной. Наряду с (3.9.5) приведем вид матричных операторов для  $\mathbf{f} = (\rho, \rho v_1, \rho v_2, p)$

$$\mathbf{B}_j = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial q_j} V_j & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial q_j} V_j - d_j^1 & 0 & a_j^1 \frac{\partial}{\partial q_j} \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial q_j} V_j - d_j^2 & a_j^2 \frac{\partial}{\partial q_j} \\ 0 & c_j^1 \frac{\partial}{\partial q_j} \frac{1}{\rho} & c_j^2 \frac{\partial}{\partial q_j} \frac{1}{\rho} & V_j \frac{\partial}{\partial q_j} - d_j^3 \end{pmatrix}. \quad (3.9.6)$$

По аналогии с алгоритмами расщепления для уравнений в декартовых координатах представим матричные операторы  $\mathbf{B}_j$  в форме оптимального расщепления по физическим процессам

$$\mathbf{B}_j = \sum_{l=1}^2 \mathbf{B}_j^l.$$

Тогда для вектора  $\mathbf{f} = (\rho, v_1, v_2, p)^T$  расщепленные операторы равны

$$\mathbf{B}_j^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_j^1 \frac{\partial}{\partial q_j} \\ 0 & 0 & 0 & a_j^2 \frac{\partial}{\partial q_j} \\ 0 & c_j^1 \frac{\partial}{\partial q_j} & c_j^2 \frac{\partial}{\partial q_j} & V_j \frac{\partial}{\partial q_j} - d_j^3 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{B}_j^2 = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial q_j} V_j & 0 & 0 & 0 \\ 0 & V_j \frac{\partial}{\partial q_j} - d_j^1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & V_j \frac{\partial}{\partial q_j} - d_j^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

и соответственно для  $\mathbf{f} = (\rho, \rho v_1, \rho v_2, p)$

$$\mathbf{B}_j^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_j^1 \frac{\partial}{\partial q_j} \\ 0 & 0 & 0 & a_j^2 \frac{\partial}{\partial q_j} \\ 0 & c_j^1 \frac{\partial}{\partial q_j} \frac{1}{\rho} & c_j^2 \frac{\partial}{\partial q_j} \frac{1}{\rho} & V_j \frac{\partial}{\partial q_j} - d_j^3 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{B}_j^2 = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial q_j} V_j & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial q_j} V_j - d_j^1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial q_j} V_j - d_j^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

В отличие от декартовых координат в матричных операторах  $\mathbf{B}_j$  коэффициенты уравнений  $a_j^l \neq 0$ ,  $c_j^l \neq 0$  при  $j \neq l$ .

### 3.9.2. Базовые схемы в криволинейных координатах

Рассмотрим основные разностные схемы для уравнений Навье–Стокса в преобразованных координатах. Аппроксимируем вектор  $\overline{\mathbf{W}}$  в (3.9.3) разностными операторами  $\overline{\mathbf{W}}_h$  с порядком  $O(h^k)$  по формулам

$$\overline{\mathbf{W}}_h = \sum_{j=1}^2 \Lambda_j \overline{\mathbf{W}}_{jh}, \quad (3.9.7)$$

где операторы  $\Lambda_j \overline{\mathbf{W}}_{jh}$  при симметричной аппроксимации первых ( $k=2$ ) и вторых производных равны

$$\Lambda_j \overline{\mathbf{W}}_{jh} = \Lambda_j \frac{1}{J} \begin{pmatrix} V_j \rho \\ V_j \rho v_1 - \overline{\sigma}_j^{-1} + q_j^1 p \\ V_j \rho v_2 - \overline{\sigma}_j^{-2} + q_j^2 p \\ V_j (E+p) - Q_j - \overline{\sigma}_j^{-3} \end{pmatrix}. \quad (3.9.8)$$

Для устранения осцилляций при аппроксимации первых производных в (3.9.8) вводится, как и при построении схем в декартовых координатах, оператор сглаживания по формулам вида (3.8.7).

При несимметричной аппроксимации конвективных членов и членов с давлением векторы  $\Lambda_j \overline{\mathbf{W}}_{jh}$  аппроксимируются с порядком  $O(h_j^k)$  по формулам

$$\Lambda_j \overline{\mathbf{W}}_{jh} = \Lambda_j \frac{1}{J} \begin{pmatrix} V_j \rho \\ V_j \rho v_1 - \overline{\sigma}_j^{-1} \\ V_j \rho v_2 - \overline{\sigma}_j^{-2} \\ V_j (E+p) - Q_j - \overline{\sigma}_j^{-3} \end{pmatrix} + \overline{\Lambda}_j \frac{1}{J} \begin{pmatrix} 0 \\ q_j^1 p \\ q_j^2 p \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Здесь, как и выше, первые производные аппроксимированы несимметричными операторами  $\Lambda_j^k = \partial/\partial x_j + O(h_j^k)$  с учетом знака скорости  $v_j$  по формулам

$$\Lambda_j = \Lambda_{\mp j}^k, \bar{\Lambda}_j = \Lambda_{\pm j}^k, \text{ если } V_j \geq 0,$$

$$\Lambda_j = \Lambda_{\pm j}^k, \bar{\Lambda}_j = \Lambda_{\mp j}^k, \text{ если } V_j \leq 0,$$

а вторые производные – симметричными операторами со вторым порядком. Остановимся на аппроксимации уравнений Навье–Стокса в недивергентном виде (3.9.4). Тогда матричные операторы  $\mathbf{B}_{jh}^l$  для вектора  $\mathbf{f} = (\rho, v_1, v_2, p)^T$  равны

$$\mathbf{B}_{jh}^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_j^1 \bar{\Lambda}_j \\ 0 & 0 & 0 & a_j^2 \bar{\Lambda}_j \\ 0 & c_j^1 \Lambda_j & c_j^2 \Lambda_j & V_j \Lambda_j - d_{jh}^3 \end{pmatrix}, \quad (3.9.9)$$

$$\mathbf{B}_{jh}^2 = \begin{pmatrix} \Lambda_j V_j & 0 & 0 & 0 \\ 0 & V_j \Lambda_j - d_{jh}^1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & V_j \Lambda_j - d_{jh}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

и, соответственно, равны для вектора  $\mathbf{f} = (\rho, v_1, v_2, p)^T$

$$\mathbf{B}_{jh}^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_j^1 \bar{\Lambda}_j \\ 0 & 0 & 0 & a_j^2 \bar{\Lambda}_j \\ 0 & c_j^1 \Lambda_j \frac{1}{\rho} & c_j^2 \Lambda_j \frac{1}{\rho} & V_j \Lambda_j - d_{jh}^3 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{B}_{jh}^2 = \begin{pmatrix} \Lambda_j V_j & 0 & 0 & 0 \\ 0 & V_j \Lambda_j - d_{jh}^1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & V_j \Lambda_j - d_{jh}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.9.10)$$

Отметим, что вид матричных операторов  $\mathbf{B}_{jh}^l$  в новых переменных подобен их виду в декартовых координатах. Тогда для численного решения уравнений Навье–Стокса (3.9.1) в новых переменных можно



использовать разностные схемы, рассмотренные выше, причем их реализация на дробных шагах подобна реализации схем в декартовых координатах. Остановимся на построении и реализации схем предиктор–корректор и схемы приближенной факторизации.

Разностная схема предиктор–корректор

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{I} + \tau\alpha\mathbf{B}_{1h}^1)\mathbf{f}^{n+1/8} &= \mathbf{f}^n, \\
 (\mathbf{I} + \tau\alpha\mathbf{B}_{1h}^2)\mathbf{f}^{n+2/8} &= \mathbf{f}^{n+1/8}, \\
 (\mathbf{I} + \tau\alpha\mathbf{B}_{2h}^1)\mathbf{f}^{n+3/8} &= \mathbf{f}^{n+2/8}, \\
 (\mathbf{I} + \tau\alpha\mathbf{B}_{2h}^2)\mathbf{f}^{n+4/8} &= \mathbf{f}^{n+3/8}, \\
 \frac{\bar{\mathbf{U}}^{n+1} - \bar{\mathbf{U}}^n}{\tau} &= -\bar{\mathbf{W}}_h^{n+1/2},
 \end{aligned} \tag{3.9.11}$$

где операторы  $\mathbf{B}_{jh}^l$  и вектор  $\bar{\mathbf{W}}_h^{n+1/2}$  определены в (3.9.7)–(3.9.10), аппроксимирует систему уравнений Навье–Стокса (3.9.1) с порядком  $O(\tau^m + \tau h^k + h^l)$ , где  $m = 2$  при  $\alpha = 0,5 + O(\tau)$ , и для линеаризованных уравнений (3.9.1) безусловно устойчива при  $\alpha \geq 0,5$  и в двумерном случае и  $k = 1$  условно устойчива для трехмерных уравнений для всех значений весового параметра  $\alpha$ . Здесь  $k$  – порядок аппроксимации операторов  $\mathbf{B}_{jh}^l$ ,  $l$  – вектора  $\bar{\mathbf{W}}_h$ . На первом и третьем дробных шагах решается система разностных уравнений ( $j = 1, 2$ )

$$\begin{aligned}
 \rho^{n+(2j-1)/4} &= \rho^{n+(j-1)/2}, \\
 v_1^{n+(2j-1)/4} + \tau\alpha a_j^1 \bar{\Lambda}_j p^{n+(2j-1)/4} &= v_1^{n+(j-1)/2}, \\
 v_2^{n+(2j-1)/4} + \tau\alpha a_j^2 \bar{\Lambda}_j p^{n+(2j-1)/4} &= v_2^{n+(j-1)/2}, \\
 p^{n+(2j-1)/4} + \tau\alpha \left[ v_j \Lambda_j - \kappa \sum_{m=1}^2 q_m^j \Lambda_j q_m^j \Lambda_j \frac{1}{\rho} \right] p^{n+(2j-1)/4} &+ \\
 + \tau\alpha \sum_{i=1}^2 c_j^i \Lambda_j v_i^{n+(2j-1)/4} &= p^{n+(j-1)/2}.
 \end{aligned} \tag{3.9.12}$$

Подобно (3.7.8), она может быть решена скалярной прогонкой для давления, после чего остальные функции вычисляются явно. Для уравнений Навье–Стокса в качестве искоемых функций могут быть выбраны плотность, компоненты скорости и температура, для которых обычно и задаются краевые условия. Тогда, с учетом уравнения неразрывности система разностных уравнений (3.9.12) может быть переписана в виде

$$\begin{aligned}
\rho^{n+(2j-1)/4} &= \rho^{n+(j-1)/2}, \\
v_1^{n+(2j-1)/4} + \tau\alpha A_j^1 \bar{\Lambda}_j \rho^{n+(j-1)/2} T^{n+(2j-1)/4} &= v_1^{n+(j-1)/2}, \\
v_2^{n+(2j-1)/4} + \tau\alpha A_j^2 \bar{\Lambda}_j \rho^{n+(j-1)/2} T^{n+(2j-1)/4} &= v_2^{n+(j-1)/2}, \\
T^{n+(2j-1)/4} + \tau\alpha \left( v_j \Lambda_j - \kappa \sum_{m=1}^2 q_m^j \Lambda_j q_m^j \Lambda_j \right) T^{n+(2j-1)/4} &+ \quad (3.9.13) \\
+ \tau\alpha \sum_{i=1}^2 C_j^i \Lambda_j v_i^{n+(2j-1)/4} &= T^{n+(j-1)/2},
\end{aligned}$$

где  $A_j^l = (\gamma-1)c_v \delta_j^l / \rho^n$ ,  $C_j^l = p^n \delta_j^l / (\rho^n c_v)$ ,  $\tilde{\kappa} = \kappa / c_v$ . Исключая компоненты скорости в последнем уравнении, получим разностное уравнение

$$\begin{aligned}
\left[ I + \tau\alpha \left( v_j \Lambda_j - \tilde{\kappa} \sum_{m=1}^2 q_m^j \Lambda_j q_m^j \Lambda_j \right) - \tau^2 \alpha^2 \sum_{i=1}^2 C_j^i \Lambda_j A_j^i \bar{\Lambda}_j \rho^{n+(j-1)/2} \right] T^{n+(2j-1)/4} &= \\
= T^{n+(j-1)/2} - \tau\alpha C_j^j \Lambda_j v_j^{n+(2j-1)/2}. &
\end{aligned}$$

Его решение находят скалярной прогонкой, после чего по явным формулам

$$\begin{aligned}
v_1^{n+(2j-1)/4} &= v_1^{n+(j-1)/2} - \tau\alpha A_j^1 \bar{\Lambda}_j \rho^{n+(j-1)/3} T^{n+(2j-1)/4}, \\
v_2^{n+(2j-1)/4} &= v_2^{n+(j-1)/2} - \tau\alpha A_j^2 \bar{\Lambda}_j \rho^{n+(j-1)/3} T^{n+(2j-1)/4}
\end{aligned}$$

вычисляются новые значения скоростей. На четных шагах система разностных уравнений (для  $j = 1, 2$ )

$$\begin{aligned}
[1 + \tau\alpha \Lambda_j v_j^n] \rho^{n+j/4} &= \rho^{n+(2j-1)/8}, \\
\left[ 1 + \tau\alpha \left( v_j^n \Lambda_j - \frac{1}{\rho^n} \sum_{m=1}^2 q_m^j \Lambda_j b_m^1 q_l^j \Lambda_j \right) \right] v_1^{n+j/4} &= v_1^{n+(2j-1)/8}, \\
\left[ 1 + \tau\alpha \left( v_j^n \Lambda_j - \frac{1}{\rho^n} \sum_{m=1}^2 q_m^j \Lambda_j b_m^2 q_l^j \Lambda_j \right) \right] v_2^{n+j/4} &= v_2^{n+(2j-1)/8}, \\
p^{n+j/4} &= p^{n+(2j-1)/8}
\end{aligned}$$

решается скалярными прогонками для плотности и каждой компоненты скорости по каждому пространственному направлению, а тем-

пература восстанавливается из уравнения для давления. Наконец, новые значения функций вычисляются явно из последнего уравнения схемы (3.9.11). Таким образом, разностная схема предиктор–корректор является оптимальной по числу операций при переходе с одного временного шага на другой.

Перейдем к рассмотрению схемы приближенной факторизации. Очевидно, для уравнений Навье–Стокса в преобразованных координатах справедливо представление

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} = -\sum_{j=1}^2 \mathbf{B}_j \mathbf{f} + F = -\mathbf{A}^{-1} J \overline{\mathbf{W}}.$$

Тогда справедливо и их представление и в разностной форме

$$-\sum_{j=1}^2 \mathbf{B}_j \mathbf{f} + \mathbf{F}_h = -\mathbf{A}^{-1} J \overline{\mathbf{W}}_h$$

с точностью до порядка  $O(h^k)$ , где, как и выше,  $\mathbf{B}_j \mathbf{f} = \mathbf{B}_{jh} \mathbf{f} + O(h^k)$ ,  $\overline{\mathbf{W}} = \overline{\mathbf{W}}_h + O(h^l)$ . Разностная схема с весами

$$\frac{\mathbf{f}^{n+1} - \mathbf{f}^n}{\tau} = -\sum_{j=1}^2 \mathbf{B}_{jh} (\alpha \mathbf{f}^{n+1} + \beta \mathbf{f}^n) + \mathbf{F}_h^n,$$

или эквивалентная ей схема в каноническом виде

$$\left[ I + \tau \alpha \sum_{j=1}^2 \mathbf{B}_{jh} \right] \frac{\mathbf{f}^{n+1} - \mathbf{f}^n}{\tau} = -\sum_{j=1}^2 \mathbf{B}_{jh} (\alpha \mathbf{f}^{n+1} + \beta \mathbf{f}^n) + \mathbf{F}_h^n,$$

или в виде

$$\left[ I + \tau \alpha \sum_{j=1}^2 \sum_{l=1}^2 \mathbf{B}_{jh}^l \right] \frac{\mathbf{f}^{n+1} - \mathbf{f}^n}{\tau} = -\mathbf{A}^{-1} J \overline{\mathbf{W}}_h^n \quad (3.9.14)$$

аппроксимируют уравнения (3.9.1) с порядком  $O(\tau + \tau h k + h^l)$ , а стационарные уравнения – в консервативной форме с порядком  $O(h^l)$ , но реализуются матричными прогонками. Приближенно факторизуем стабилизирующий оператор схемы (3.9.14)  $I + \tau \alpha \sum_{j=1}^2 \sum_{l=1}^2 \mathbf{B}_{jh}^l$  по формуле

$$I + \tau \alpha \sum_{j=1}^2 \sum_{l=1}^2 \mathbf{B}_{jh}^l \approx \prod_{j=1}^2 (I + \tau \alpha \mathbf{B}_{jh}^1) (I + \tau \alpha \mathbf{B}_{jh}^2) \approx \mathbf{C} = I + \tau \alpha \sum_{j=1}^2 \sum_{l=1}^2 \mathbf{B}_{jh}^l + (\tau^2). \quad (3.9.15)$$

Разностная схема

$$\mathbf{C} \frac{\mathbf{f}^{n+1} - \mathbf{f}^n}{\tau} = -\mathbf{A}^{-1} \mathbf{J} \overline{\mathbf{W}}_h^n, \quad (3.9.16)$$

где  $\mathbf{C}$  определено в (3.9.15), или эквивалентная ей схема в дробных шагах

$$\begin{aligned} \xi^n &= -\mathbf{A}^{-1} \mathbf{J} \overline{\mathbf{W}}_h^n, \\ (I + \tau \alpha \mathbf{B}_{1h}^1) \xi^{n+1/4} &= \xi^n, \\ (I + \tau \alpha \mathbf{B}_{1h}^2) \xi^{n+1/4} &= \xi^{n+1/4}, \\ (I + \tau \alpha \mathbf{B}_{2h}^1) \xi^{n+1/4} &= \xi^{n+2/4}, \\ (I + \tau \alpha \mathbf{B}_{2h}^2) \xi^{n+1/4} &= \xi^{n+3/4}, \\ \mathbf{f}^{n+1} &= \mathbf{f}^n + \tau \xi^{n+1} \end{aligned} \quad (3.9.17)$$

аппроксимирует, как и схема (3.9.14), уравнения (3.9.1) с порядком  $O(\tau + \tau h^k + h^l)$ , но в отличие от нее на дробных шагах реализуется скалярными прогонками.

На нулевом дробном шаге система разностных уравнений (3.9.17) для невязки  $\xi^n = -\mathbf{A}^{-1} \mathbf{J} \overline{\mathbf{W}}_h^n$  разрешается явно. На первом и третьем дробных шагах разностные уравнения

$$(I + \tau \alpha \mathbf{B}_{jh}^1) \xi^{n+(2j-1)/4} = \xi^{n+(j-1)/2} \quad (j=1, 2)$$

решаются скалярными прогонками относительно невязки давления  $\xi_p^{n+(2j-1)/4}$  подобно (3.9.12), после чего новые значения невязок скоростей  $\xi_j^{n+(2j-1)/4}$  ( $j=1, 2$ ) также находятся явно. На четных шагах

$$(I + \tau \alpha \mathbf{B}_{jh}^2) \xi^{n+j/2} = \xi^{n+(2j-1)/4} \quad (j=1, 2)$$

в силу структуры матриц  $\mathbf{B}_{jh}^2$  разностные уравнения решаются независимо для каждого уравнения скалярными прогонками подобно (3.9.13). Новые значения функций  $\mathbf{f}^{n+1}$  вычисляются явно из последнего уравнения схемы (3.9.18). Таким образом, реализация схемы приближенной факторизации (3.9.9) также сводится к  $N \cdot m$  скалярным прогонкам.

**Замечание.** При численном решении уравнений Навье–Стокса по предложенным алгоритмам возникает необходимость постановки краевых условий на дробных шагах для функций или для их невязок. В методе предиктор–корректор значения функций (или их производ-

ных для краевых условий второго рода) находят путем интерполяции их значений на  $n$ -м или  $(n + 1)$ -м шагах. В методе приближенной факторизации уравнения на дробных шагах разрешаются не относительно искомых переменных, а относительно невязок решения, для которых необходимо поставить краевые условия. Для стационарных краевых условий первого рода проблема их задания может решаться следующим образом. Пусть на некоторой границе  $\Gamma$  выполняется краевое условие

$$f|_{\Gamma} = \beta,$$

и тогда очевидно известны значения функций  $f^{n+1}|_{\Gamma}$ ,  $f^n|_{\Gamma}$ , а следовательно,

$$\xi^n|_{\Gamma} = 0 \text{ и } \xi^{n+1}|_{\Gamma} = 0.$$

Как следствие, на всех дробных шагах можно задавать условие  $\xi|_{\Gamma}^{n+s/4} = 0$  ( $s=1, \dots, 4$ ). Аналогичным способом можно получить краевое условие второго рода. Вновь примем, что на некоторой границе  $\Gamma$  выполняется условие

$$\partial f / \partial n|_{\Gamma} = 0, \quad (3.9.18)$$

тогда полагаем, что  $\partial f / \partial n|_{\Gamma}^n = \partial f / \partial n|_{\Gamma}^{n+1} = 0$ . Отсюда следует краевое условие для невязок

$$\partial \xi / \partial n|_{\Gamma}^{n+s/4} = 0 \quad (s=1, \dots, 4).$$

Это краевое условие, как правило, реализуется с первым порядком, как и в схеме на дробных шагах. При вычислении условий второго рода (3.9.19) на полном шаге целесообразно пересчитывать значения искомых переменных на границах области с более высоким порядком, чем это делалось на дробных шагах. Но это упрощение исходного краевого условия может понижать устойчивость вычислительного алгоритма в целом.

Приведенные оценки устойчивости предложенных схем расщепления и приближенной факторизации справедливы для линейных уравнений Навье–Стокса. При проведении конкретных расчетов практическая устойчивость схем зависит от многих параметров, таких как начальное приближение, соотношения пространственных шагов сетки, параметров исходных уравнений (например, чисел Маха и Рейнольдса, законов зависимостей коэффициентов вязкости и теплопроводности), внешних источников и т. д.

## Глава 4

### РАСЧЕТЫ ДВУМЕРНЫХ ТЕЧЕНИЙ

#### § 4.1. Течение в канале

Для определения эффективности предложенных алгоритмов в многомерном случае и оценки точности были проведены расчеты двумерных задач, в которых имелись подобласти больших градиентов, такие как скачки уплотнения и отрывные зоны. Ниже приведены некоторые результаты расчетов. Более подробно они изложены в работах [43, 53–60]. В данной главе приведены результаты расчетов двумерных течений в приближении уравнений Навье–Стокса сжимаемого теплопроводного газа: течение газа в канале, в том числе с вдувом газа с части поверхности, сверхзвуковые течения газа около элементов модельного летательного аппарата (ЛА) и течение газа за уступом.

Для удобства численного интегрирования и анализа результатов уравнения Навье–Стокса были приведены к безразмерному виду. В качестве безразмерных параметров были выбраны: высота канала  $L$ , скорость набегающего потока  $v_0$ , плотность газа  $\rho_0$ , температура  $T_0$ . Число Рейнольдса  $Re = L\rho_0 v_0/\mu$  определялось по параметрам набегающего потока. Здесь и далее коэффициент динамической вязкости и коэффициент теплопроводности задавались функцией от температуры по степенному закону  $\mu = T^\omega$  (в расчетах  $\omega = 0,76$ ),  $\lambda = \mu' - \frac{2}{3}\mu$ , где  $\mu$  – динамический коэффициент вязкости,  $\mu'$  – второй коэффициент вязкости (в расчетах полагалось  $\mu' = 0$ ). Стационарное решение задачи находилось в приближении уравнений Навье–Стокса в преобразованных координатах по разностным схемам приближенной факторизации и схеме предиктор–корректор (§ 3.9). Расчеты проводились при  $k = 1$ ,  $l = 2$  с введением сглаживания. Решение задачи отыскивалось методом установления, критерием установления, как правило, полагалось выполнение условия

$$\max \left| \frac{f^{n+1} - f^n}{\tau f^n} \right| = \delta \leq 10^{-5} \quad (4.1.1)$$

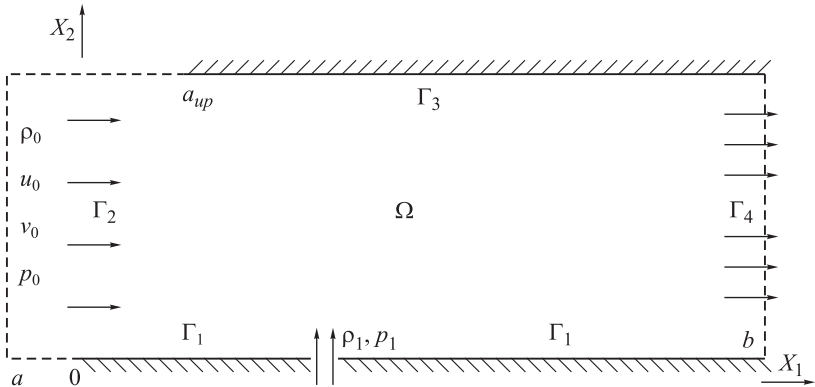


Рис. 4.1.1. Расчетная область.

во всех внутренних узлах расчетной области, где  $f$  – любая из функций. На практике наиболее медленно сходилась плотность, поэтому в большинстве приведенных ниже расчетов критерий установления задавался для плотности.

В первой серии расчетов исследовалось течение в канале. Расчетная область (рис. 4.1.1), в которой находилось решение задачи, представляет собой прямоугольник размером  $6,5 \times 2,0$  единиц, внутри прямоугольника помещался канал. Начало расчетной области находится в точке  $x_1 = -0,5$ , нижняя стенка канала начинается в точке  $x_1 = 0,0$ , верхняя стенка канала смещена относительно нижней стенки вправо и начиналась при  $x_1 = -0,5$ .

На твердых стенках канала при отсутствии вдува задавались условия прилипания для скорости и тепловой изоляции для температуры

$$v_1|_{\Gamma} = v_2|_{\Gamma} = 0, \quad \partial T / \partial n|_{\Gamma} = 0.$$

При наличии вдува на части стенки задается расход газа. На выходе из канала задавались мягкие условия в виде

$$\partial \mathbf{f} / \partial x_1|_{\Gamma} = 0 \quad \text{или} \quad \partial^2 \mathbf{f} / \partial x_1^2|_{\Gamma} = 0,$$

где  $f$  – любая из искомым функций.

На входе в канал задается невозмущенный сверхзвуковой поток под нулевым углом атаки с параметрами

$$v_1 = 1,0, \quad v_2 = 0, \quad \rho = 1,0, \quad p = \frac{1}{\gamma \mathbf{M}^2},$$

$\mathbf{M} = 2$ ,  $\text{Re} = 10^3$ ,  $\gamma = 1,4$ ,  $\text{Pr} = 0,72$ ,  $\omega = 0,76$ .

В первой серии расчетов были исследованы течения газа в канале при отсутствии вдува. При  $t = 0$  внутри области задавались постоянными скорость, плотность и температура, а на границах – краевые условия. Расчеты проводились на различных сетках. С целью оценки точности получаемого решения и оценки его сходимости при измельчении шагов были проведены расчеты на последовательности сгущающихся сеток. Для расчетов была выбрана начальная сетка с  $521 \times 81$  узлами, шаги которой последовательно измельчались в 2 и 4 раза в направлении  $x_2$ . Решения на сетках  $521 \times 162$  и  $521 \times 324$  достаточно хорошо совпадают, максимальная разница решений составляет 2,5 %. В дальнейшем расчеты проводились на двух последних сетках. На рис. 4.1.2 и 4.1.3 приведены распределения числа Маха, полученные на последовательности сеток, в поперечном сечении  $X = 1,125$  и  $X = 2,25$ . Распределения числа Маха, приведенные на рис. 4.1.2, соответствуют течению, частично прошедшему через первый скачок уплотнения, на рис. 4.1.3 – течению, прошедшему через первый скачок уплотнения и частично через второй скачок. Из рисунков видно, что решения на сетках 2 и 3 имеют другой угол наклона ударной волны (различия составляют не более 0,8 %), хотя количественные характеристики течения до и после скачков уплотнения практически совпадают.

Для сеток, содержащих  $521 \times 162$  узлов, установление к стационарному решению достигалось за  $\approx 7 \cdot 10^3$  итераций при несогласованном задании начального поля, а при задании в качестве начальных условий решения задачи при других параметрах число итераций до сходимости уменьшалось в  $\approx 3$  раза (до  $\approx 2,5 \cdot 10^3$  итераций). На рис. 4.1.4 представлены распределения полей скорости и температуры.

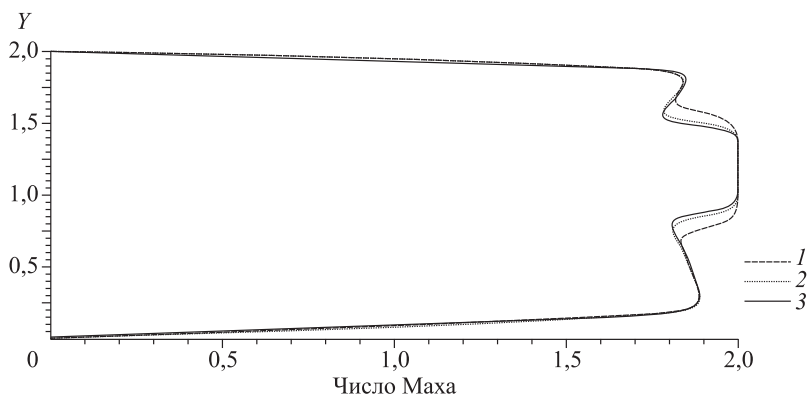


Рис. 4.1.2. Распределение числа Маха в поперечном сечении.

1 –  $521 \times 81$ , 2 –  $521 \times 162$ , 3 –  $511 \times 324$ .



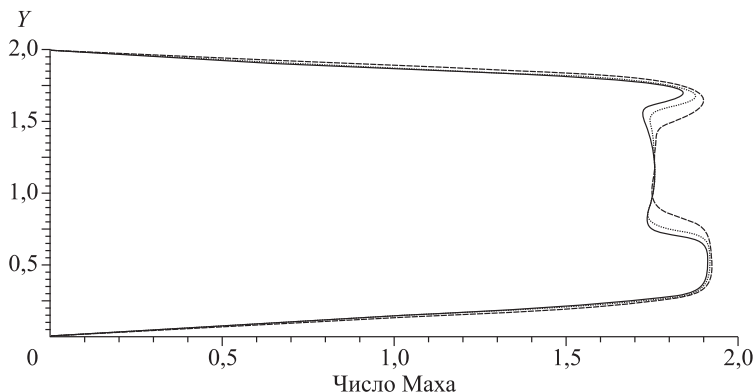


Рис. 4.1.3. Распределение числа Маха в поперечном сечении.

Усл. обозн. см. рис. 4.1.2.

Хорошо видно, что на стенках канала развивается пограничный слой, а в центре канала остается сверхзвуковое ядро течения. Наиболее разогретый газ находится около стенок канала, при продвижении газа вдоль границ канала происходит дальнейший прогрев зон, расположенных около пограничных слоев. В сверхзвуковой части канала газ остается слабо прогретым относительно невозмущенного потока на входе в канал. Небольшое повышение температуры газа возникает в областях прохождения ударных волн. Скачки уплотнения взаимодействуют между собой и отражаются от пограничного слоя, образовавшегося около стенок в канале. После взаимодействия с пограничным слоем интенсивность ударной волны падает, и далее в канале образуется сложная структура взаимодействующих волн уплотнения. По данным, приведенным на рис. 4.1.4, угол падения ударной волны составляет  $\beta \approx 36^\circ$ , из теоретических оценок для указанных чисел Маха и Рейнольдса он должен составлять  $\beta \approx 35^\circ$ .

Еще одна серия расчетов проведена при исследовании течений газа в канале, стенки которого не смещены относительно друг друга. Так как разностные схемы приближенной факторизации и предиктор–корректор используют несимметричные аппроксимации производных (с учетом знака скорости в операторах  $\mathbf{B}_{jh}^i$ ), то важно было оценить симметричность полученных решений. Как показали расчеты, поля течений в верхней и нижней частях канала симметричны. Иллюстрацией служит рис. 4.1.5, где приведены изолинии чисел Маха при  $M = 2$  (вверху) и  $M = 3$  (внизу) при  $Re = 10^4$ . Как и в приведенных выше расчетах, у кромок канала формируются головные скачки уплотнения, угол наклона которых зависит от чисел Маха, на

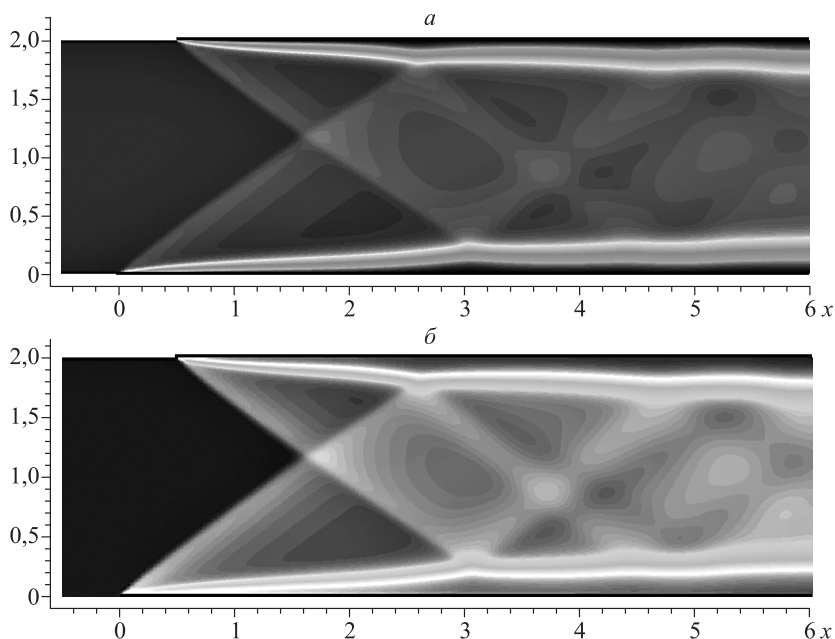


Рис. 4.1.4. Распределение поля скорости (а) и температуры (б) в канале.

стенках канала развивается пограничный слой, а далее по каналу происходит взаимодействие скачков уплотнения и их отражение от пограничного слоя. При уменьшении числа  $Re$  пограничный слой на стенках канала утолщается, а структура скачков начинает размываться, что соответствует современным представлениям о течениях в канале.

Подобные расчеты были проведены и по схеме предиктор–корректор при тех же параметрах набегающего потока и параметрах расчетных сеток (см. также п. 3.9.2). Распределения полей течения и характеристики течения практически совпали по обоим алгоритмам, что позволило сделать вывод об их точности и экономичности. Практически совпали и временные затраты для получения стационарного решения. Углы наклона падающих и отраженных скачков и характерные значения величин хорошо согласуются с решением по обоим алгоритмам.

Из приведенных выше результатов можно сделать вывод, что схема второго порядка аппроксимации по пространству позволяет проводить расчеты сложных течений без возникновения у них нефизических осцилляций. Она устойчива в широком диапазоне итерационных параметров  $\tau$ , однако, минимальное число итераций до сходи-

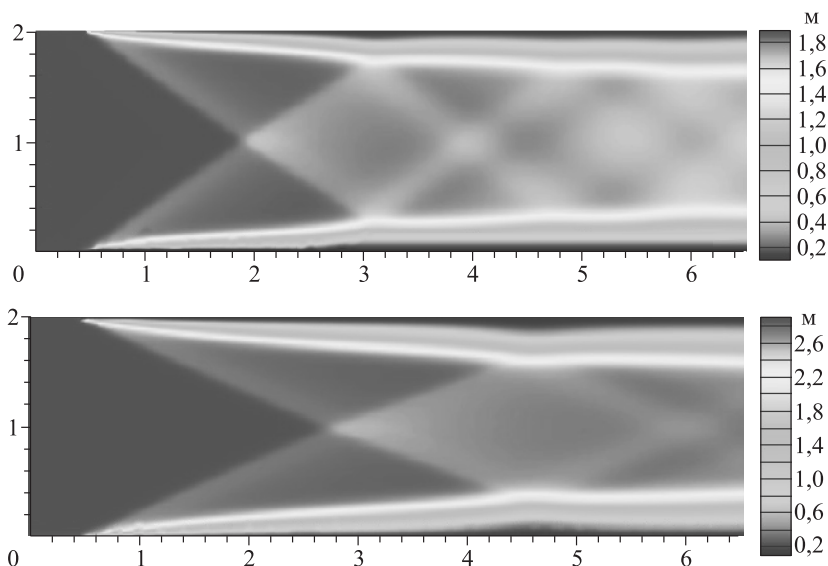


Рис. 4.1.5. Изолинии чисел Маха.

мости было получено при числах Куранта  $1,5 < K < 3,5$ . Для получения решений с более высокой точностью требуется увеличение числа узлов сетки.

#### 4.1.1. Течение в канале со вдувом для различных чисел Маха

Следующая серия расчетов посвящена исследованию структуры течения в канале, с части которого осуществляется вдув газа (см. рис. 4.1.1). Источник вдува газа задавался на участке  $1,0 \leq x_1 \leq 1,05$  на нижней стенке канала. Скорость вдува газа полагалась звуковой. Расчеты проведены для различных чисел Маха  $M_0 = 1,5 - 2,5$  и чисел Рейнольдса  $Re = 10^3 - 10^4$ . Остановимся вначале на влиянии чисел Маха при  $Re = 10^4$  на картину течения. На рис. 4.1.6 приведены распределения поля скорости и изолиний давления газа для числа Маха набегающего потока  $M = 2,0$ ,  $Re = 10^3$ . При попадании газа в канал образуются головные скачки уплотнения, а на его стенках развивается пограничный слой. В отличие от результатов расчетов, приведенных выше, наличие источника вдува приводит к тому, что перед источником формируется область повышенного давления и, как следствие, формируется сильный скачок уплотнения. Этот скачок уплотнения взаимодействует с пограничным слоем на верхней стенке. Отражаясь

от пограничного слоя, скачок уплотнения вызывает образование системы из волны разрежения и скачков уплотнения. В зоне взаимодействия пограничного слоя и скачка уплотнения в зависимости от интенсивности последнего может возникать отрыв пограничного слоя от стенки канала.

В области вдува на нижней стенке формируется сложное течение, перед источником вдува газа образуется зона отрыва пограничного слоя. Интенсивно выдуваемый газ вызывает образование сильного скачка уплотнения, а этот скачок взаимодействует с пограничным слоем на нижней стенке и вызывает его отрыв. Эта особенность движения газа подтверждается также расчетами других авторов и результатами экспериментальных данных [72–74]. Непосредственно перед источником вдува газа образуется небольшая зона вихревого движения газа (рис. 4.1.7, *a*), ее размер определяется параметрами набегающего потока и интенсивностью вдува.

Направление движения газа в зонах вихревого течения перед источником вдува и за ним различается. В области перед источником вдува вращение потока осуществляется против часовой стрелки, за

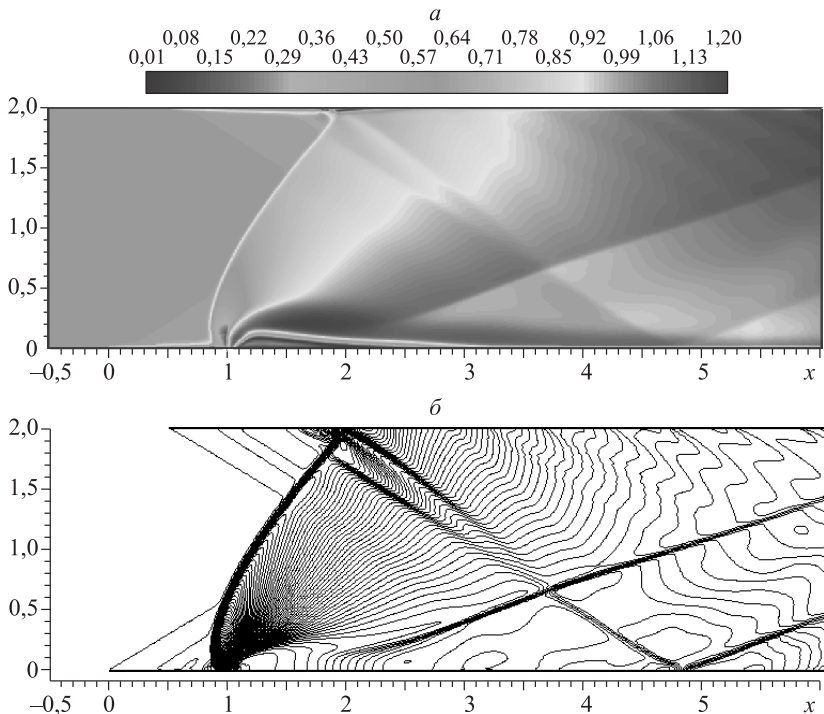


Рис. 4.1.6. Распределение скорости (*a*) и изолинии давления газа (*б*) в канале.

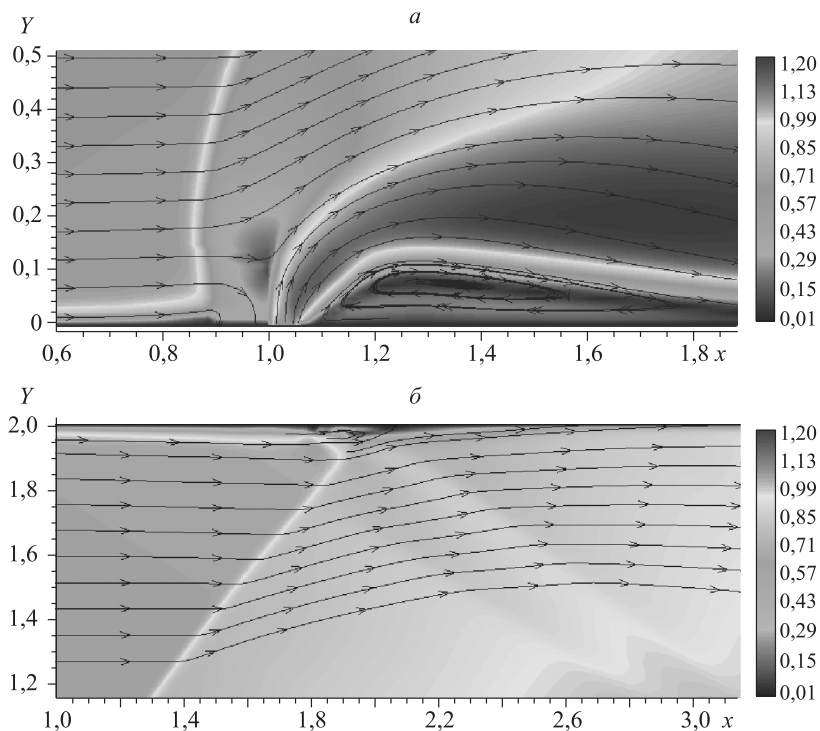


Рис. 4.1.7. Области вихревого течения на нижней (а) и верхней (б) стенках канала.

источником вдува – по часовой стрелке, как и следует из физических соображений. За источником вдува образуется протяженная отрывная зона. За зоной отрыва пограничного слоя возникает скачок уплотнения (см. рис. 4.1.6), который, пересекая канал, взаимодействует с верхней стенкой и, отражаясь в зависимости от параметров набегающего потока, либо уходит за границы вычислительной области, либо успевает отразиться от пограничного слоя на нижней стенке канала.

Остановимся на точности расчетов по схемам первого и второго порядка аппроксимации. На рис. 4.1.8 для  $M = 2,0$ ,  $Re = 10^3$  приведены распределения продольной компоненты скорости и плотности газа в продольных (а) и поперечных (б) сечениях. Как видно из рисунков, в подобластях гладких течений количественные и качественные характеристики течения в приведенных сечениях совпадают. Однако расчет с первым порядком размывает структуру скачка уплотнения, при расчете со вторым порядком видно, что скачок в дей-

ствительности имеет более сложную структуру (см. рис. 4.1.8). Таким образом, применение схем первого порядка аппроксимации на указанных сетках не позволяет детально описать структуру скачков уплотнения. Из рис. 4.1.8, б видно, что при расчетах со вторым порядком точности удастся четко выделить три скачка уплотнения (область  $1,8 < x_1 < 3,0$ ), тогда как расчет с первым порядком аппроксимации позволяет выделить только два скачка. Там же можно видеть, что расчет плотности по схеме первого порядка точности в области  $3,0 < x_1 < 4,0$  для сечения  $x_2(Y) = 0,5$  приводит к размыванию скачка уплотнения, тогда как при расчете со вторым порядком он хорошо различим. Как и ожидалось, использование второго порядка аппроксимации позволяет более точно описывать картину течения газа в канале.

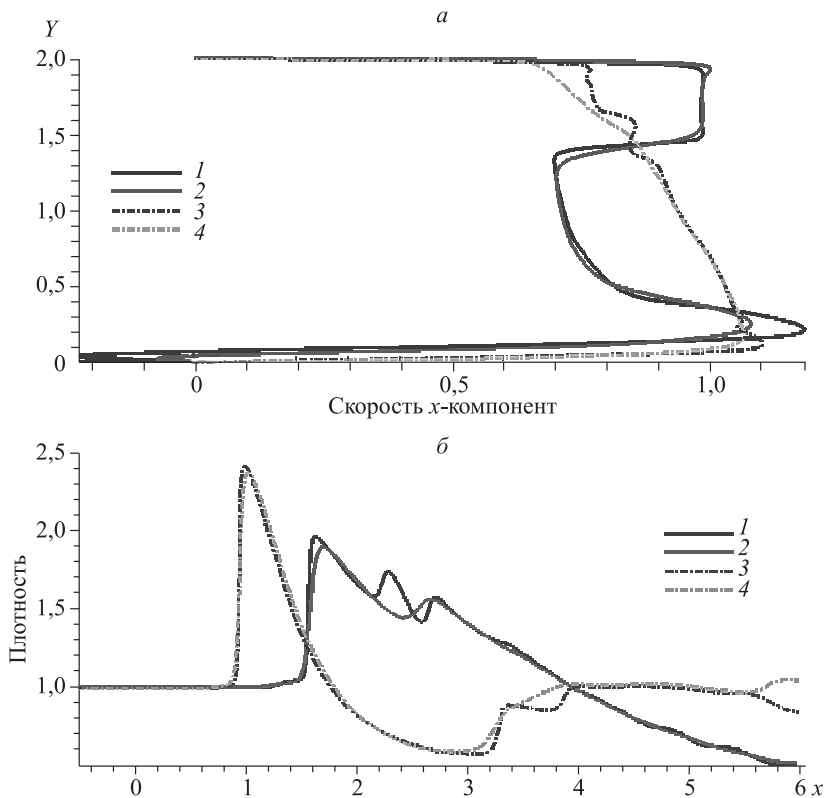


Рис. 4.1.8. Графики скорости (а) и плотности (б) в сечениях  $Y = 0,5$  (3, 4) и  $Y = 1,5$  (1, 2) для схем 1-го (2, 4) и 2-го (1, 3) порядка точности аппроксимации.

Рассмотрим некоторые результаты расчетов при различных числах Маха набегающего потока  $M$ . На рис. 4.1.9–4.1.12 представлены поля скорости и изолинии давления газа для двух значений чисел Маха  $M = 1,5$  и  $M = 2,5$ . Изменение числа Маха набегающего потока существенно влияет на картину течения в канале (рис. 4.1.9, 4.1.10). При  $M = 1,5$  (рис. 4.1.9, 4.1.11) головной скачок уплотнения от источника вдува падает на верхнюю стенку канала и отражается от пограничного слоя, а затем ниже по течению отражается от нижней стенки канала.

Во втором случае при  $M = 2,5$  (см. рис. 4.1.10, 4.1.12) скачок уплотнения вызывает отрыв пограничного слоя, возникают два скачка. Первый из них инициирован отрывом пограничного слоя, а второй – отражением от пограничного слоя. Далее они сливаются в единый скачок и взаимодействуют с потоком. В силу того, что при  $M = 2,5$

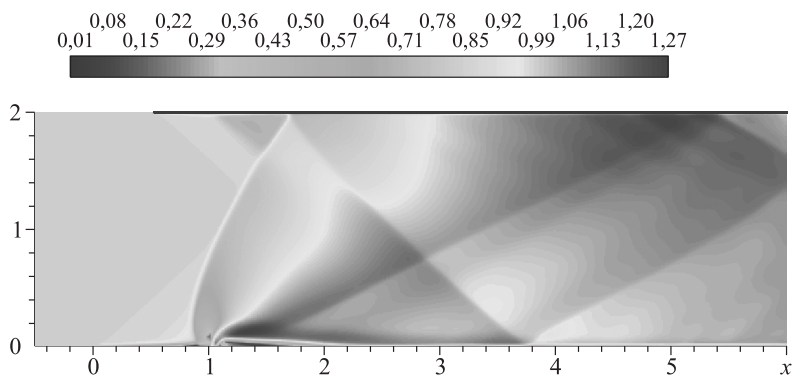


Рис. 4.1.9. Поле скорости при  $M = 1,5$ .

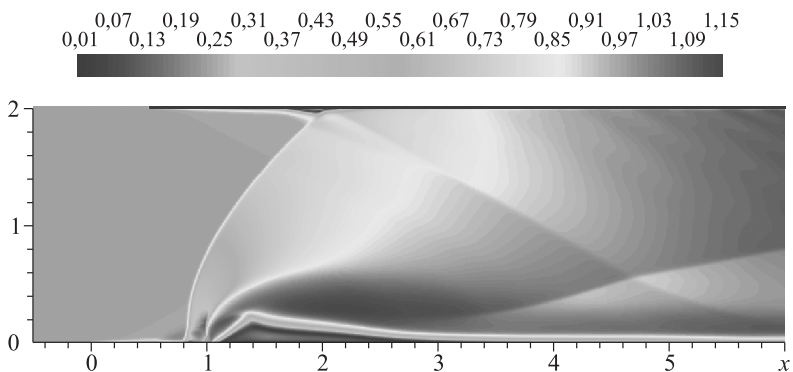


Рис. 4.1.10. Поле скорости при  $M = 2,5$ .

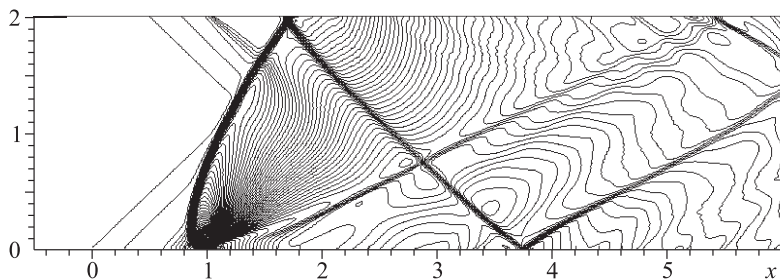


Рис. 4.1.11. Изолинии давления при  $M = 1,5$ .

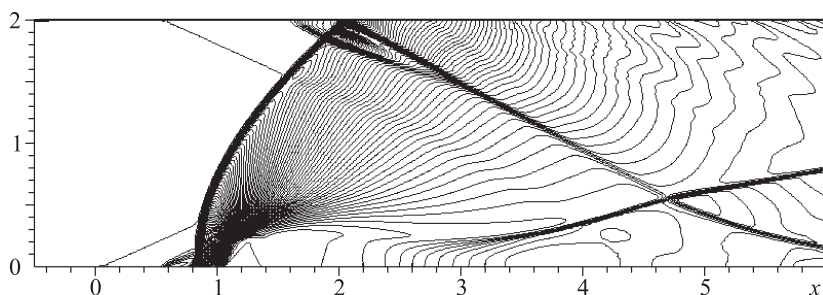


Рис. 4.1.12. Изолинии давления при  $M = 2,5$ .

угол наклона скачка значительно меньше, чем при  $M = 1,5$ , то для рассматриваемой расчетной области он выходит из расчетной области до взаимодействия с нижней стенкой.

От значений чисел Маха набегающего потока существенно зависят размеры областей отрыва пограничного слоя на нижней и верхней стенках канала. На рис. 4.1.13, 4.1.14 представлены распределения полей скорости и области отрыва пограничного слоя около источника вдува для чисел Маха 1,5 и 2,5 соответственно. При малых числах Маха интенсивность головного скачка уплотнения недостаточна для отрыва пограничного слоя у верхней стенки (см. рис. 4.1.11) и отрыв возникает лишь при  $M = 1,5$  (см. рис. 4.1.12).

Во втором случае скачок уплотнения вызывает отрыв пограничного слоя, возникают два скачка (см. рис. 4.1.12): один инициирован отрывом пограничного слоя, а второй – отражением от пограничного слоя. Далее они также сливаются в один скачок, который имеет значительно меньший угол наклона, чем для  $M = 1,5$ . Из рис. 4.1.13, 4.1.14 видно, что размеры отрывных зон за источником вдува газа значительно различаются, что связано с интенсивностью потока газа



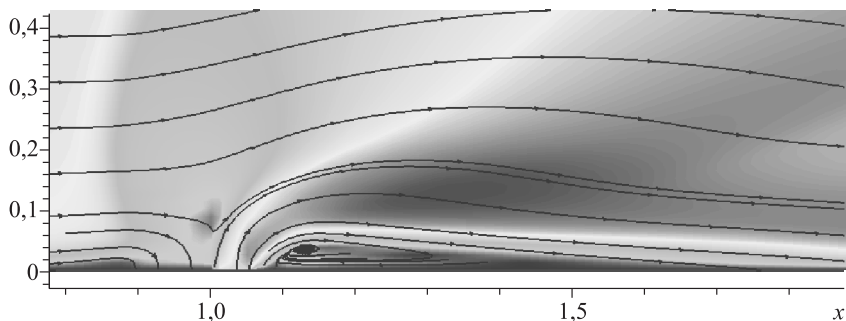


Рис. 4.1.13. Линии тока около источника вдува при  $M = 1,5$ .

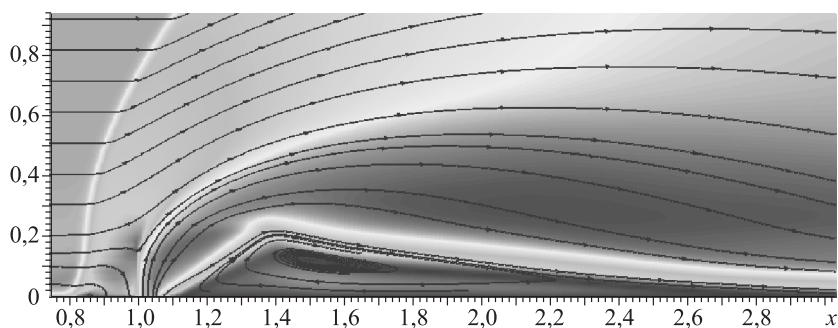


Рис. 4.1.14. Линии тока около источника вдува при  $M = 2,5$ .

после прохождения головных скачков. При оценке размеров отрывной зоны для верхней стенки канала можно сказать, что для числа  $M = 1,5$  интенсивности ударной волны не хватает для отрыва пограничного слоя. Начиная с числа Маха  $M = 1,75$  и для всех последующих значений наблюдается отрыв пограничного слоя. Наибольшая ширина отрывной зоны, как и для нижней стенки, наблюдается для максимального числа Маха  $M = 2,5$ .

#### **4.1.2. Течение в канале со вдувом для различных чисел Рейнольдса**

В следующей серии расчетов было проведено моделирование течения газа в канале воздухозаборника с вдувом газа с части поверхности для различных чисел Рейнольдса (для  $Re = 10^3, 5 \cdot 10^3, 10^4$ ) при фиксированном числе  $M = 2,0$ . На рис. 4.1.15, 4.1.16 приведены поля

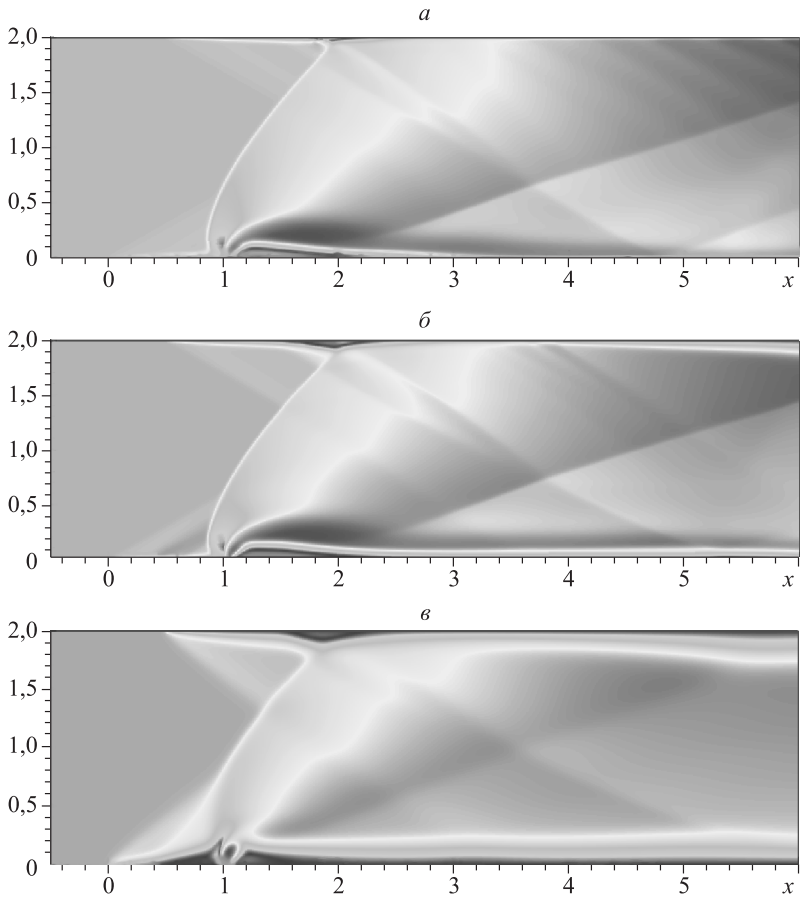


Рис. 4.1.15. Поле скоростей при различных  $Re$ :

$a - 10^4$ ,  $б - 5 \cdot 10^3$ ,  $в - 10^3$ .

скоростей и линии равного уровня давления для всех различных чисел  $Re$ .

Из рисунков видно, что с уменьшением числа  $Re$  толщина пограничного слоя на стенках возрастает и от начала нижней и верхней стенок возникают все более сильные скачки уплотнения. Одновременно с уменьшением числа  $Re$  происходит увеличение толщины скачков уплотнения, что связано с увеличением вязкости газа. В окрестности нижней стенки первый головной скачок и пограничный слой взаимодействуют с головным скачком, возникшим в области вдува. За отрывной зоной в области вдува возникает висячий скачок,

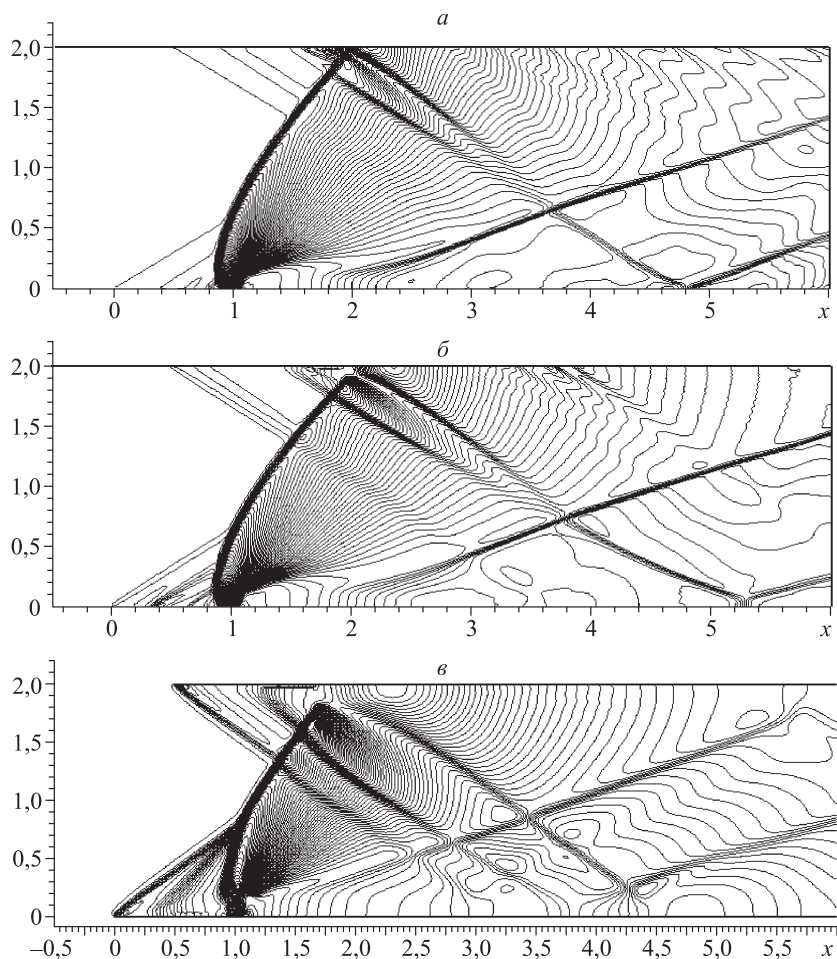


Рис. 4.1.16. Изолинии давления при различных  $Re$  ( $10^4$  (а),  $5 \cdot 10^3$  (б),  $10^3$  (в)).

который взаимодействует с отраженными скачками. Дальнейшее их взаимодействие приводит к сложной картине течения, которая, конечно, зависит от чисел  $Re$ . Отрывные зоны у верхней стенки канала, возникшие после падения головного скачка, приводят к перестройке течения и возникновению вторичных отраженных скачков. С уменьшением чисел  $Re$  толщина пограничного слоя и область с дозвуковыми скоростями возрастают и скачки уплотнения отражаются уже не от стенок канала, а от развитого пограничного слоя.

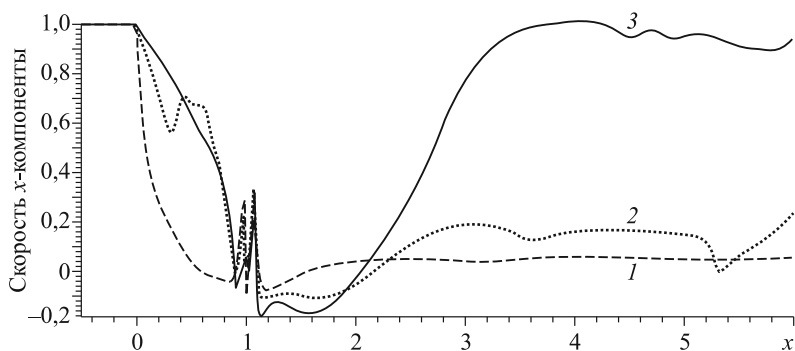


Рис. 4.1.17. Распределение  $x$ -компоненты скорости в сечении  $x_2 = 0,0125$ .  
 $Re = 10^3$  (1),  $5 \cdot 10^3$  (2),  $10^4$  (3).

Увеличение числа  $Re$  также приводит к уменьшению зоны отрыва на верхней стенке канала и к увеличению зоны отрыва пограничного слоя на нижней стенке канала (рис. 4.1.17). Скорость течения при  $Re = 10^3$  (линия 1) значительно падает и после прохождения через скачок уплотнения сохраняет только примерно 5 % от своей первоначальной величины, т. е. рассматриваемая область находится в пограничном слое. Совсем другую картину можно наблюдать для максимального числа  $Re = 10^4$  (3). Здесь после прохождения скачка уплотнения и присоединения пограничного слоя поток быстро набирает свою первоначальную скорость, толщина пограничного слоя в этом случае мала, течение находится вне пограничного слоя и оно сверхзвуковое.

Заметим, что длина возвратной отрывной зоны за областью вдува слабо зависит от числа  $Re$ , т. е. она определяется интенсивностью вдува. В то же время длина возвратной зоны перед областью вдува определяется числом  $Re$ , что и следовало ожидать (см. линии 1 и 3).

Иллюстрацией этому служат рис. 4.1.18, 4.1.19, где приведены картины течения около источника вдува для чисел Рейнольдса  $10^3$  и  $10^4$ . Существенных различий в структурах течений нет: около источника вдува газа формируются зоны отрывного течения, на верхней стенке канала, в области взаимодействия скачка уплотнения и пограничного слоя также происходит отрыв (см. рис. 4.1.19).

С уменьшением чисел Рейнольдса происходит образование на передних кромках канала четко выраженных скачков уплотнения, возникающих за счет торможения газа на пластине. Его взаимодействие с головным скачком уплотнения перед областью вдува газа приводит к формированию  $\lambda$ -структуры течения с висячим скачком уплотнения.

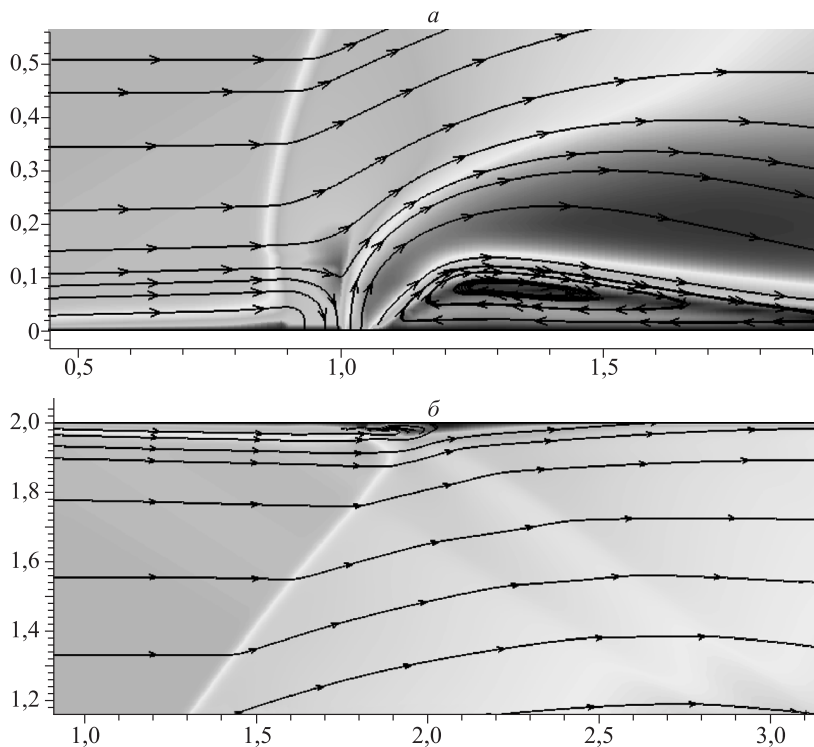


Рис. 4.1.18. Течение на стенках канала при  $Re = 10^4$ .

$a$  – нижняя стенка,  $b$  – верхняя.

**Замечание.** Остановимся на выборе итерационного параметра  $\tau$  при получении стационарного решения методом установления. Сложная структура течения, которая возникает в канале при наличии вдува газа с части поверхности канала, появление отрывных зон и других особенностей течения влияют на скорость установления решения к стационарному решению от несогласованных начальных данных. Используемый в расчетах критерий установления (4.1.1) не дает достоверной информации об установлении. Начиная с некоторого числа итерационных шагов, величина невязки сходимости  $\delta$  в (4.1.1) переходит с режима монотонного убывания в режим пульсации или автоколебания решения с малой амплитудой. Проведенный анализ этого явления показал, что колебание решения (плотности и компонент скоростей) отмечается в областях образования зон отрывного течения. Сходимость решения в этих областях происходит значительно медленнее по сравнению со скоростью сходимости в других областях

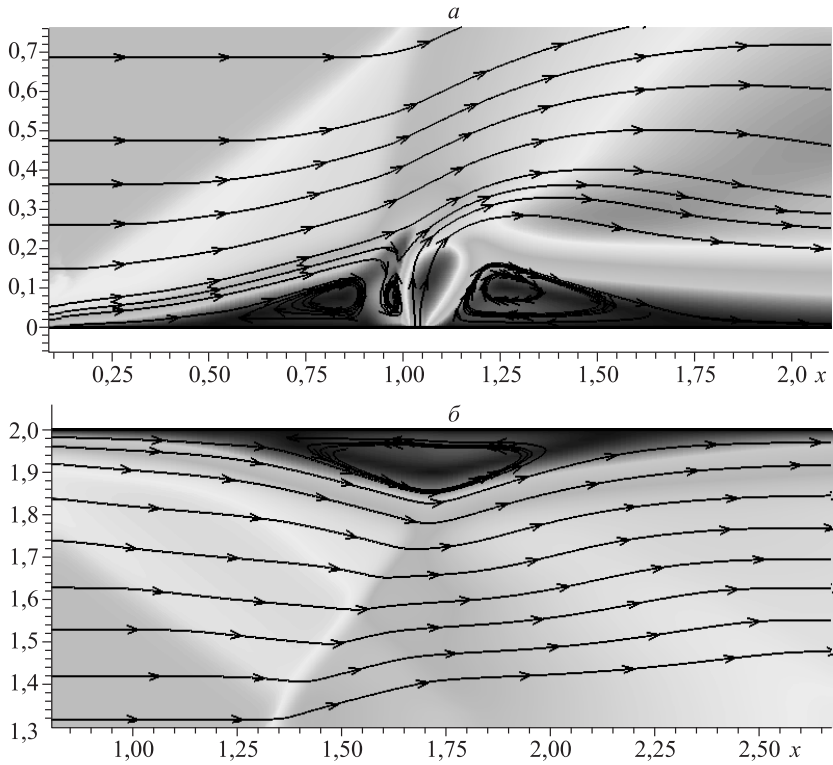


Рис. 4.1.19. Течение на стенках канала при  $Re = 10^3$ .

*а* – нижняя стенка, *б* – верхняя.

решения. Анализ амплитуды колебаний показал, что значения амплитуды повторяются для различных случаев в пределах от 5 до 25 итераций и зависят от величины шага  $\tau$ . Аналогичные явления наблюдались и другими авторами (например, [72, 73]). Стационарное решение в случае его выхода на автоколебательный режим находилось путем осреднения искомым значений функций за полный период колебаний.

Существенное влияние на скорость установления решения оказывает задание начального распределения решения во всей области. Часто заранее неизвестно, как ведет себя решение для исследуемого явления, поэтому в таких случаях для «первого, начального» расчета во всей расчетной области обычно задают распределение параметров газа таким же, как и в невозмущенном потоке, а на границах вычислительной области удовлетворяют граничным условиям. Однако вычислительный эксперимент, как правило, проводится для различных

значений параметров потока (например, чисел Маха и Рейнольдса), и распределение величин газа можно использовать в качестве начального для последующих расчетов с другими параметрами. При проведении расчетов использовались оба варианта начального распределения. При задании в качестве начальных данных решения при других параметрах течения количество итераций сокращалось в 1,5–3 раза. Некоторые результаты расчетов при других параметрах набегающего потока приведены в [76].

## § 4.2. Течение около тела сложной конфигурации

### 4.2.1. Постановка задачи

В качестве другой задачи, на решении которой апробировалась схема приближенной факторизации, рассматривалась задача об обтекании тела сложной геометрии, моделирующего несущую поверхность типового гиперзвукового летательного аппарата (ЛА) (рис. 4.2.1).

На рис. 4.2.1, б представлено поперечное сечение ЛА в плоскости симметрии (верхняя часть на рисунке не приведена). ЛА движется со сверхзвуковой скоростью, слева набегающий поток газа под различными углами атаки. Поток, взаимодействуя с носовой частью летательного аппарата (верхняя сплошная линия), попадает в канал воздухозаборника (ВЗ), из него – в расширяющуюся область, образованную несущей поверхностью кормовой части аппарата и об-

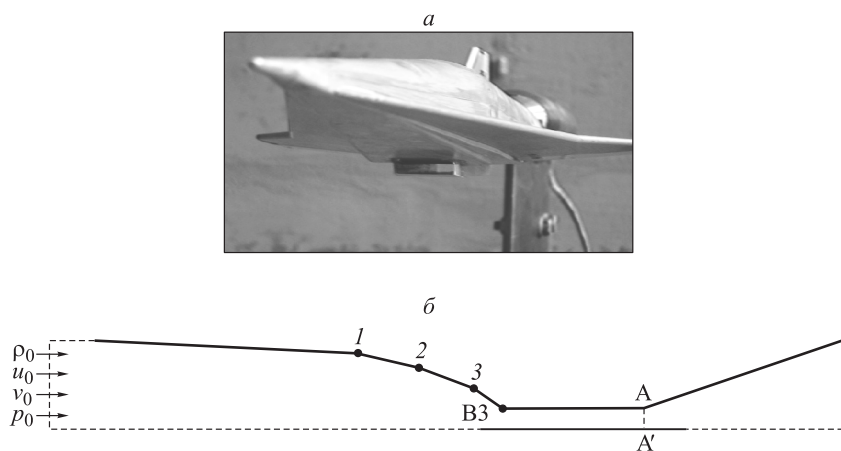


Рис. 4.2.1. Модель гиперзвукового летательного аппарата (а) и расчетная область (б):

1, 2, 3 – точки первого, второго, третьего излома соответственно; ВЗ – воздухозаборник.

ластью свободного истечения газа из канала двигателя. Обтекаемое тело предполагается плоским с затупленной передней кромкой, верхняя образующая до входа в канал воздухозаборника имеет три точки излома:  $x_1 = 3,0; 3,8; 4,5$ . Первый участок образующей (до точки первого излома) задается выражением  $1 - 0,057\sqrt{x_1}$ , остальные участки – кусочно-линейной функцией. Угол наклона второго участка образующей (между точками первого и второго излома) составляет  $15^\circ 49'$ , третьего –  $16^\circ$ , четвертого –  $24^\circ$ . Вход в канал воздухозаборника на верхней образующей начинается в точке  $x_1 = 5,0$ . Длина канала воздухозаборника варьируется. Изменение длины канала достигается за счет увеличения длины нижней стенки канала: выдвигения вперед и продления назад. Для различных расчетов длина канала изменяется от 1,0 до 2,3 единицы. Подобная геометрия летательного аппарата использовалась в [78]. В качестве характерного размера выбрана величина  $L$ , равная расстоянию от нижней плоскости воздухозаборника до носика обтекаемого тела (высоте расчетной области). Высота канала воздухозаборника составляет  $0,25L$ . Результаты вычислительных экспериментов приведены для двух конфигураций вычислительной области. В первом случае расчетная область начиналась от левой границы области и ограничена линией  $AA'$ , длина канала задается равной 1,0, нижняя кромка воздухозаборника находится на одной линии с его верхней кромкой. Во втором случае расчет осуществляется во всей вычислительной области, включающей всю область истечения из канала с верхней твердой границей (см. рис. 4.2.1, б). Нижняя стенка канала воздухозаборника продлена вперед до точки  $x_1 = 4,7$  и назад до точки  $x_1 = 7,0$ . Продление нижней стенки канала приводит к тому, что на выходе из канала образуется сверхзвуковое сопло.

Стационарное решение задачи находилось в приближении уравнений Навье–Стокса в преобразованных координатах методом установления. Преобразование координат задавалось в виде

$$q_1 = \frac{x_1 - a}{b - a}, \quad q_2 = \frac{x_2^1(x_1) - 1}{x_2^2(x_1) - x_2^1(x_1)},$$

где  $x_2^1(x_1)$ ,  $x_2^2(x_1)$  – уравнения нижней и верхней стенок канала;  $a$ ,  $b$  – координаты левой и правой границ расчетной области. Численное решение находилось по схеме приближенной факторизации второго порядка точности по пространству при  $k = 1$ ,  $l = 2$  со сглаживанием (см. п. 3.9.2). В качестве критерия установления использовалось условие (4.1.1).

На границах вычислительной области были поставлены следующие краевые условия:



• на входной границе задавался невозмущенный сверхзвуковой поток с параметрами

$$\rho|_{\Gamma}=1,0, \quad p|_{\Gamma}=1/(\gamma M^2), \quad u|_{\Gamma}=\cos\alpha, \quad v|_{\Gamma}=\sin\alpha,$$

где  $\alpha$  – угол атаки набегающего потока;

• на поверхности тела (сплошные линии на рис. 4.2.1) задавались условия прилипания

$$u|_{\Gamma} = v|_{\Gamma} = 0$$

и условия тепловой изоляции  $\partial T/\partial n|_{\Gamma} = 0$  (или постоянная температура  $T|_{\Gamma} = 4T_0$ );

• на выходе из канала, а также на всех границах, отмеченных штриховой линией на рис. 4.2.1, задавались мягкие условия

$$\partial^2 \mathbf{f}/\partial x_{\Gamma}^2|_{\Gamma} = 0, \quad \text{где } \mathbf{f} = (\rho, u, v, T)^T.$$

В качестве начального распределения задавались значения скорости, плотности и давления, соответствующие их значениям на входной границе вычислительной области.

Сложная структура течения, которая образуется перед каналом при различных значениях определяющих параметров невозмущенного потока газа, влияет на скорость установления решения, а также на устойчивость схемы в целом. Для выбранного начального распределения итерационный шаг  $\tau$  выбирался из условия наискорейшего установления и варьировался в зависимости от значений параметров газа набегающего потока. Как правило, итерационный параметр  $\tau$  задавался равным  $(0,5-0,8) \min(h_1, h_2)$ , что соответствовало числам Куранта  $0,8 \leq K \leq 2,5$ , весовой параметр схемы  $\alpha$  полагался равным 1,0. При проведении расчетов использовались два типа начального распределения: несогласованный вариант (значения параметров потока на входной границе переносились на всю область) и результаты предыдущего численного эксперимента в качестве начального распределения для последующих расчетов. При задании в качестве начального приближения их значений во входном сечении и краевых условий на поверхности до установления к стационарному решению требуется  $\approx 10^4$  итераций. В отличие от предыдущей задачи, где при других параметрах удавалось получать значительное уменьшение количества итераций, необходимых для установления, в данных расчетах уменьшения числа итераций не наблюдалось. Это, возможно, связано с тем обстоятельством, что изменение параметров набегающего потока приводило к существенному изменению решения с кардинальной перестройкой картины течения.

После серии расчетов на последовательности сгущающихся сеток было определено оптимальное количество узлов расчетной области, содержащей  $326 \times 161$  узлов. Большая часть расчетов выполнена на этой разностной сетке. Ниже приведены некоторые результаты расчетов течений при различных числах Маха и углах атаки набегающего потока при изменении геометрии модельного аппарата и краевых условий на несущей поверхности.

#### **4.2.2. Моделирование течений около образующей и в воздухозаборнике**

В данном разделе исследуется течение газа около образующей тела и в канале воздухозаборника. Расчетная область ограничена линией  $AA'$  – длина канала составляет 1,0, нижняя кромка воздухозаборника находится на одной линии с верхней кромкой. Начало канала соответствует координате  $x_1 = 5$ . В первой серии расчетов исследовано влияние чисел Маха на характеристики течения при  $Re = 10^4$  и угле атаки  $\alpha = 6^\circ$ . В расчетах исследованы режимы течения при  $M_0 = 4, 6, 8$ .

На рис. 4.2.2 представлено поле плотности газа около исследуемого тела при различных числах Маха. При увеличении скорости набегающего потока угол наклона головного скачка уплотнения, возникающего при сверхзвуковом обтекании, с ростом числа Маха уменьшается. Образующийся головной скачок при числе  $M_0 = 4$  не попадает в канал (см. рис. 4.2.2, а), при  $M_0 = 6$  он попадает на нижнюю кромку воздухозаборника (см. рис. 4.2.2, б), а при  $M_0 = 8$  попадает внутрь канала воздухозаборника (см. рис. 4.2.2, в). В точках излома верхней образующей возникают скачки уплотнения (см., например, рис. 4.2.2, а), которые вниз по течению взаимодействуют с головным скачком уплотнения. Вблизи нижней кромки канала также возникает головной скачок, взаимодействующий с падающей головной волной. Плотность потока и давление в начальном сечении воздухозаборника резко возрастают. Ударная волна, распространяющаяся от нижней кромки канала, падая на верхнюю стенку воздухозаборника, вызывает отрыв потока, интенсивность которого зависит от числа Маха набегающего потока (см., рис. 4.2.3, где числу  $M_0 = 4$  соответствует рис. 4.2.3, а,  $M_0 = 6$  (4.2.3, б),  $M_0 = 8$  (4.2.3, в)). С увеличением числа Маха увеличиваются размеры зоны возвратного течения, которая образуется на верхней стенке канала. Об их размерах и пространственном положении зон возвратного течения можно судить по рис. 4.2.3.

Из приведенных распределений полей скорости газа можно сделать вывод, что при увеличении числа Маха набегающего потока положение зоны возвратного течения смещается в сторону начала воз-

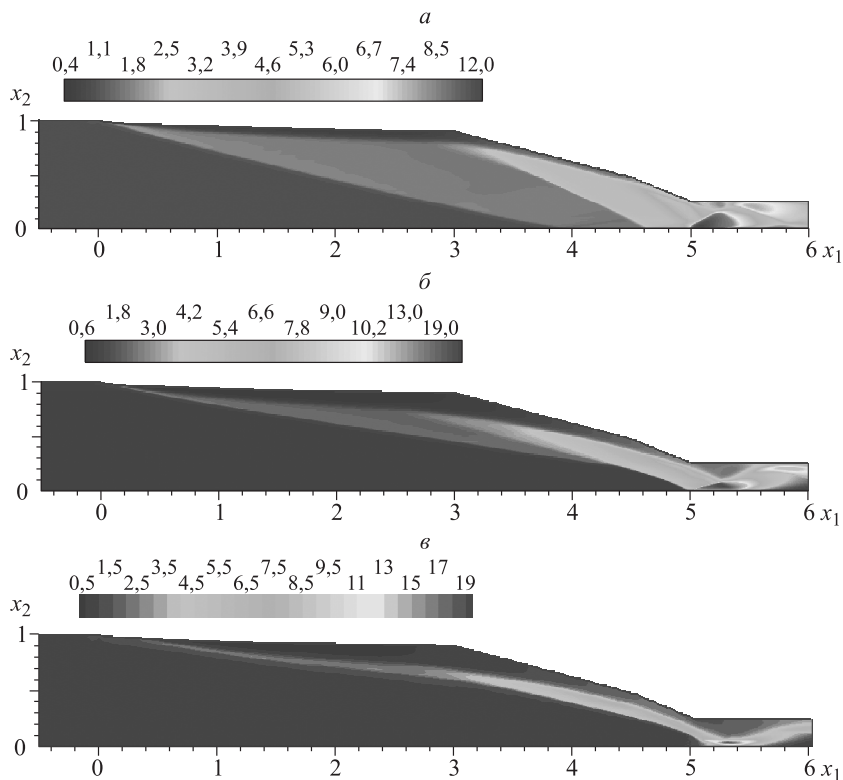


Рис. 4.2.2. Распределение плотности газа при различных числах Маха:  $M_0 = 4$  (а),  $M_0 = 6$  (б),  $M_0 = 8$  (в).

духозаборника. Для числа Маха набегающего потока  $M_0 = 4$  высота зоны возвратного течения составляет 10 %, для  $M_0 = 6$  уже 30 %, а для  $M_0 = 8$  – около 50 % высоты всего канала. Образование обширной зоны возвратного течения для больших чисел Маха приводит к уменьшению области сверхзвукового течения газа в канале воздухозаборника. Рисунок 4.2.3, *в* соответствует режиму течения, близкому к запирианию потока в канале воздухозаборника. Выводы о размерах области сверхзвукового течения газа можно сделать также из рис. 4.2.4, где представлены распределения чисел Маха в сечении канала  $x = 5,3$ .

Из приведенных расчетов можно сделать вывод, что для  $M_0 = 8$  наблюдается максимальная высота области возвратного течения (область отрицательных значений продольной компоненты скорости, ли-

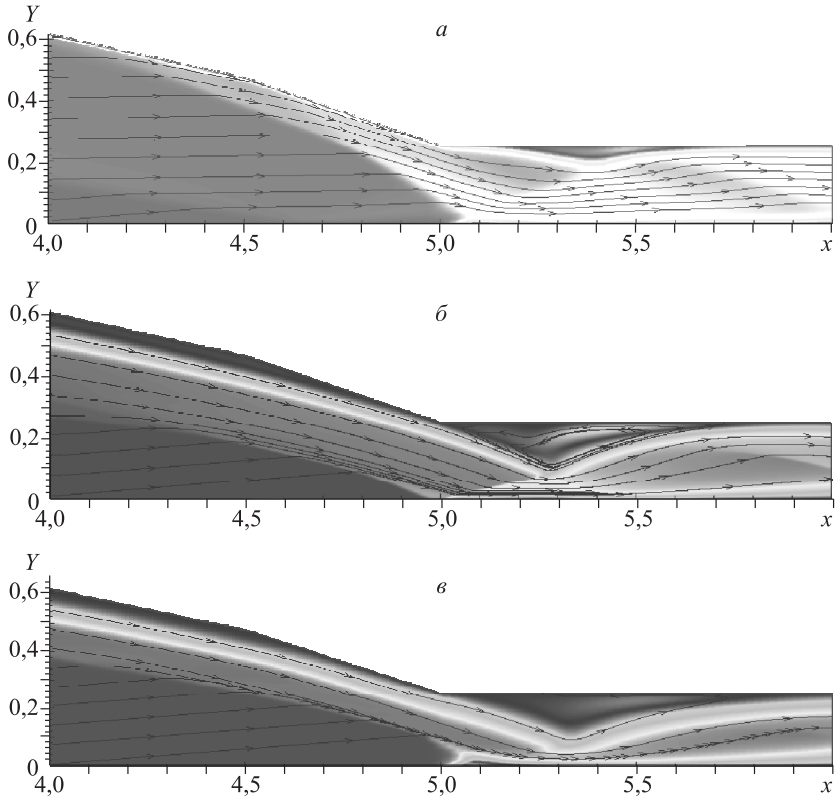


Рис. 4.2.3. Поле скорости в области воздухозаборника при различных числах  $M$ .

Поясн. см. в тексте.

ния, помеченная цифрой 3 на рис. 4.2.4, *а*), и, как следствие, с увеличением числа Маха уменьшается ширина зоны сверхзвукового течения. Так, при  $M_0 = 4$  ширина сверхзвуковой зоны течения в канале составляет 80 % от ширины канала воздухозаборника, при  $M_0 = 6$  – 48 %, а при  $M_0 = 8$  – 38 % (рис. 4.2.4, *б*).

О поведении потока около несущей поверхности (верхней стенке ЛА и в канале воздухозаборника) можно судить из рис. 4.2.5, на котором представлено распределение коэффициента поверхностного трения  $c_f$ , что появление зоны возвратного течения на стенках в области между первым изломом несущей поверхности и входом в канал воздухозаборника зависит от значений параметров набегающего потока. При  $M_0 = 4$  (кривая 1) отрыв потока не наблюдается ( $c_f \geq 0$ ), а

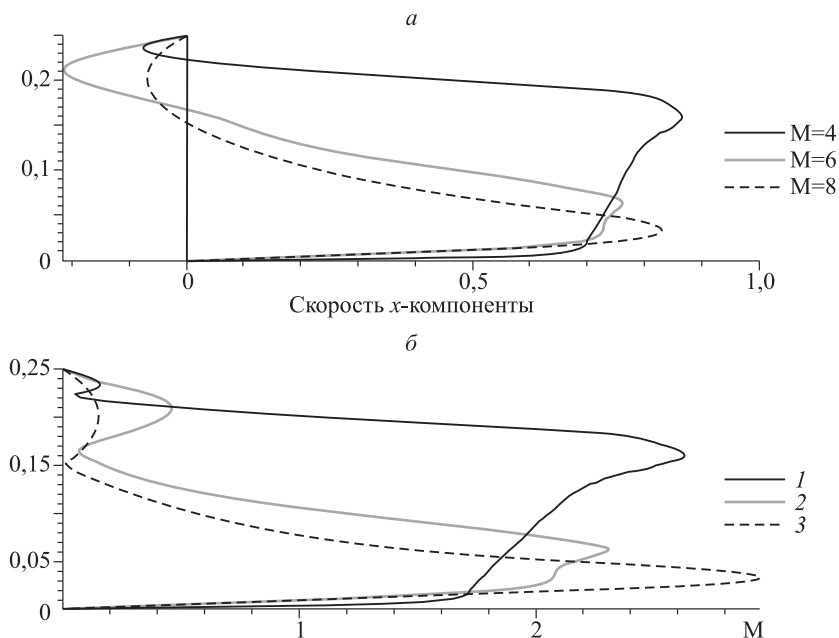


Рис. 4.2.4. Распределение скорости  $v_1$  (а) и чисел  $M$  (4 (1), 6 (2), 8 (3)) в сечении  $x_1 = 5,3$ .

для  $M_0 = 6$  (2), 8 (3) появляется отрывная зона ( $c_f \geq 0$ ), причем для  $M_0 = 6$  размер отрывной зоны больше, чем для  $M_0 = 8$ .

В целом о характере течения газа около элементов ЛА при варьировании числа Маха можно отметить следующее. При увеличении числа Маха наблюдаются увеличение зоны отрывного течения и смещение этой зоны к началу канала воздухозаборника. Увеличение размеров отрывной зоны приводит к тому, что область сверхзвукового течения газа в канале существенно сужается. Увеличение числа Маха также приводит к появлению зон отрыва пограничного слоя на несущей поверхности летательного аппарата в углах сжатия, образованных изломами несущей поверхности.

Во второй серии расчетов исследовано влияние угла атаки набегающего потока  $\alpha$  на характер течения вблизи обтекаемого тела. Тот факт, что изменение угла атаки существенно влияет на характер течения и на аэродинамические характеристики летательного аппарата, известен из многих исследований, однако такие исследования проводятся в основном для оценки аэродинамического качества крыла и определения критических углов атаки. Целью настоящего исследова-

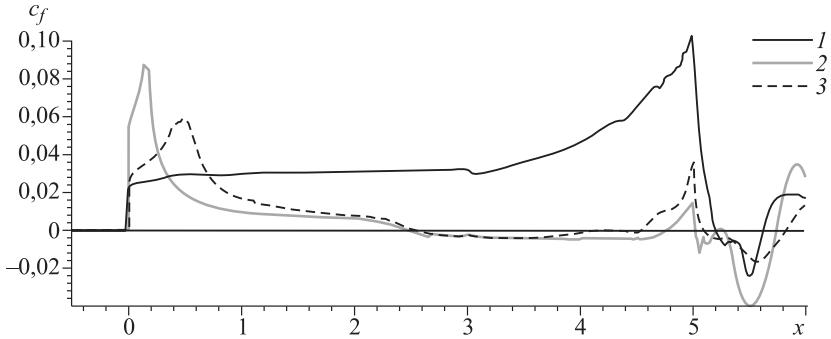


Рис. 4.2.5. Распределение коэффициента поверхностного трения  $c_f$ .

Поясн. см. в тексте.

ния являлось изучение влияния углов атаки набегающего потока на характер течения около (в том числе и в канале) воздухозаборника. На рис. 4.2.6 приведены результаты расчетов для углов атаки  $\alpha = 0$  (а),  $3$  (б),  $9$  (в),  $15$  (г) и фиксированном числе Маха  $M_0 = 6$ . От носка тела образуется головной скачок уплотнения, который в зависимости от угла атаки набегающего потока взаимодействует с волнами уплотнения, образующимися в областях излома несущей поверхности.

При углах атаки набегающего потока  $\alpha < 9^\circ$  и  $\alpha \geq 9^\circ$  в окрестности входа в канал наблюдаются существенно различные режимы течения. При малых углах атаки ( $\alpha < 9^\circ$ ) головной скачок уплотнения не попадает в канал, но при больших углах атаки перед входом в канал формируется более сложная картина течения с тройной конфигурацией и висячим скачком уплотнения (выбитым ударной волной). Более детальная картина течения внутри канала представлена на рис. 4.2.7.

При больших углах атаки зона сверхзвукового течения газа существенно сужается и при  $\alpha = 15^\circ$  достигает минимального значения (см. рис. 4.2.7, г). За висячим скачком уплотнения образуется зона торможения потока с дозвуковой скоростью движения газа. При малых углах атаки набегающего потока (см. рис. 4.2.7, а и 4.2.7, б) на верхней стенке канала образуется протяженная зона возвратного течения. Из расчетов следует, что при углах атаки  $\alpha \geq 9^\circ$  размер области возвратного течения вблизи верхней поверхности канала становится минимальным (см. рис. 4.2.7, в, г). Можно видеть изменение угла наклона висячего скачка уплотнения перед каналом воздухозаборника, что связано с изменением углов атаки набегающего потока (скачок

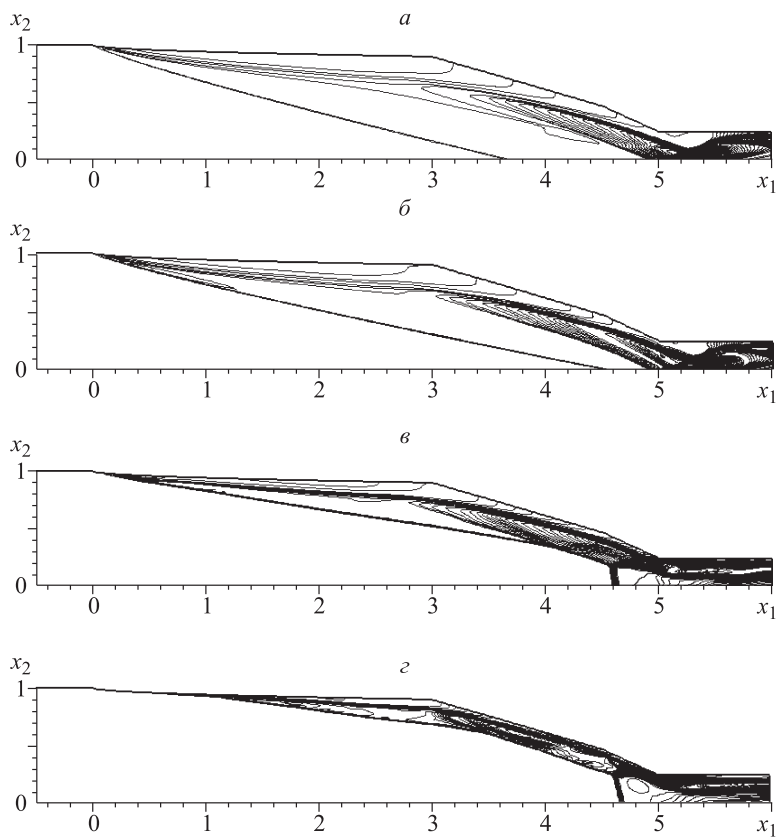


Рис. 4.2.6. Изолинии плотности газа для различных углов атаки.

Поясн. см. в тексте.

уплотнения располагается перпендикулярно линиям тока газа, совпадающим с направлением потока).

На рис. 4.2.8 приведено распределение коэффициента трения на верхней поверхности тела, где 1 –  $\alpha = 0^\circ$ ; 2 –  $\alpha = 3^\circ$ ; 3 –  $\alpha = 9^\circ$ ; 4 –  $\alpha = 15^\circ$ . Небольшие зоны отрыва потока образуются вблизи первой точки излома образующей несущей поверхности и перед входом в канал. При малых углах атаки отрыв пограничного слоя на верхней стенке поверхности до входа в воздухозаборник отсутствует.

На рис. 4.2.9 приведены распределения коэффициентов трения  $c_f$  на нижней стенке. Отметим, что изменение углов атаки набегающего потока не приводит к образованию зон отрыва пограничного слоя. О характере течения, проходящего через висячий скачок уплот-

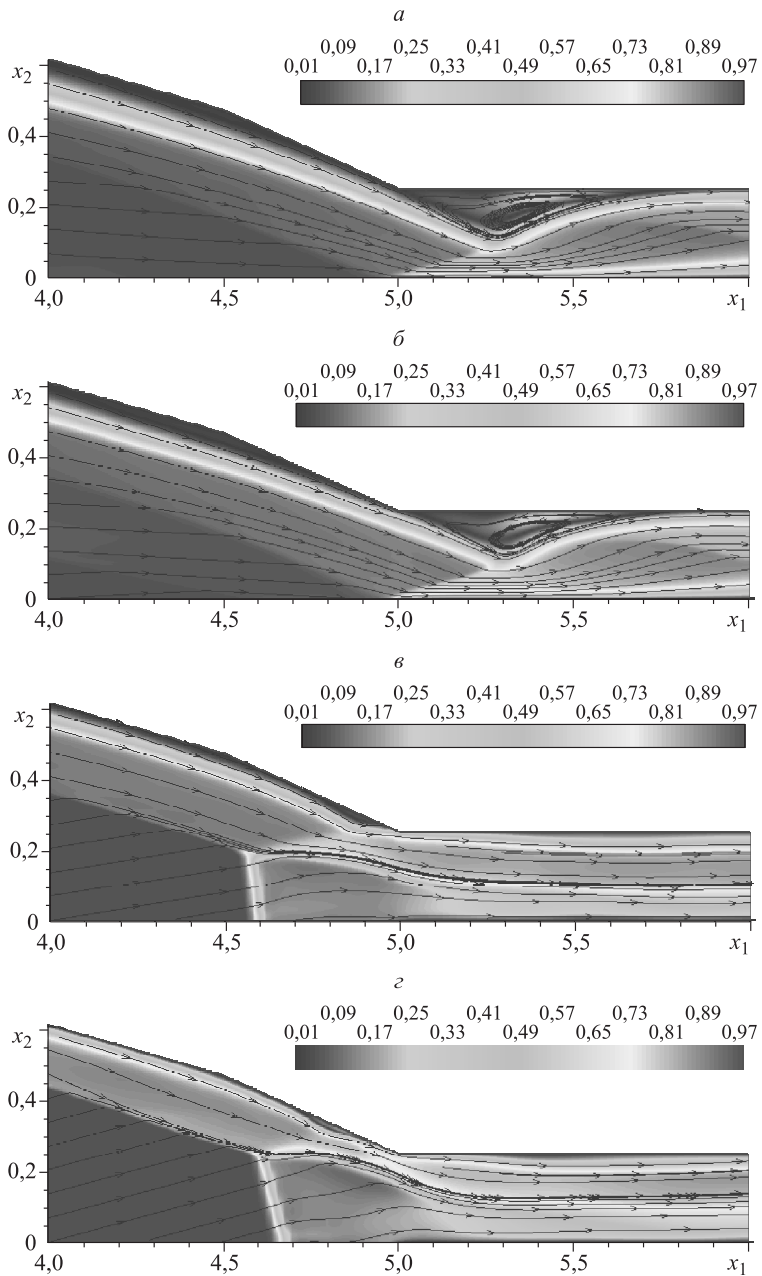


Рис. 4.2.7. Поле скоростей около возмущающей поверхности при различных  $\alpha$ .

Поясн. см. в тексте.



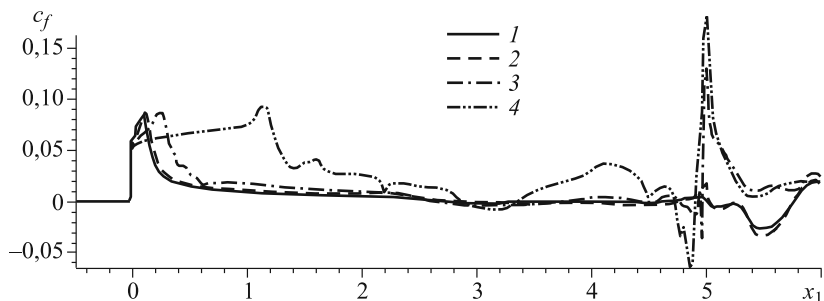


Рис. 4.2.8. Распределение коэффициента трения  $c_f$  на поверхности тела.

Поясн. см. в тексте.

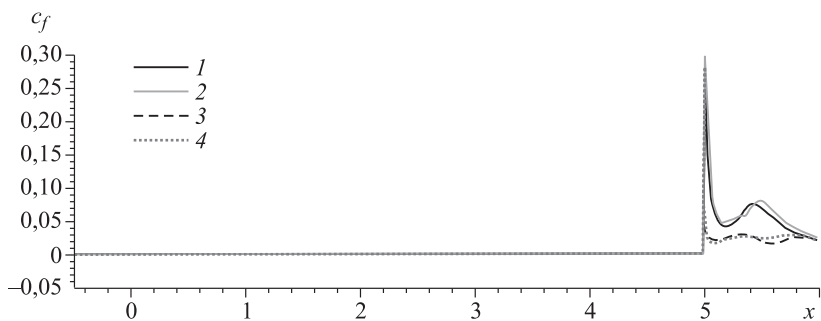


Рис. 4.2.9. Распределение коэффициента трения  $c_f$  на нижней стенке канала.

Поясн. см. в тексте.

нения (выбитая волна уплотнения) можно судить также по рис. 4.2.10, где приведено распределение чисел Маха в среднем продольном сечении для различных углов атаки (1 –  $\alpha = 0^\circ$ ; 2 –  $\alpha = 3^\circ$ ; 3 –  $\alpha = 9^\circ$ ; 4 –  $\alpha = 15^\circ$ ). Скорость потока газа, проходящего через висячий скачок уплотнения, уменьшается до дозвуковой скорости и далее вниз по течению вновь увеличивается до сверхзвуковой. Схожий характер течения наблюдается и для режимов течения газа при углах атаки  $\alpha < 9^\circ$ , различие наблюдается в том, что торможение газа происходит уже непосредственно в канале воздухозаборника, после прохождения области возвратного течения поток вновь набирает скорость. Поведение газа напоминает движение газа сквозь «жидкое» сопло Лавала, в котором роль диффузора играет область возвратного течения: сверхзвуковой поток, замедляясь в области сужения, вновь ускоряется в расширяющейся области.

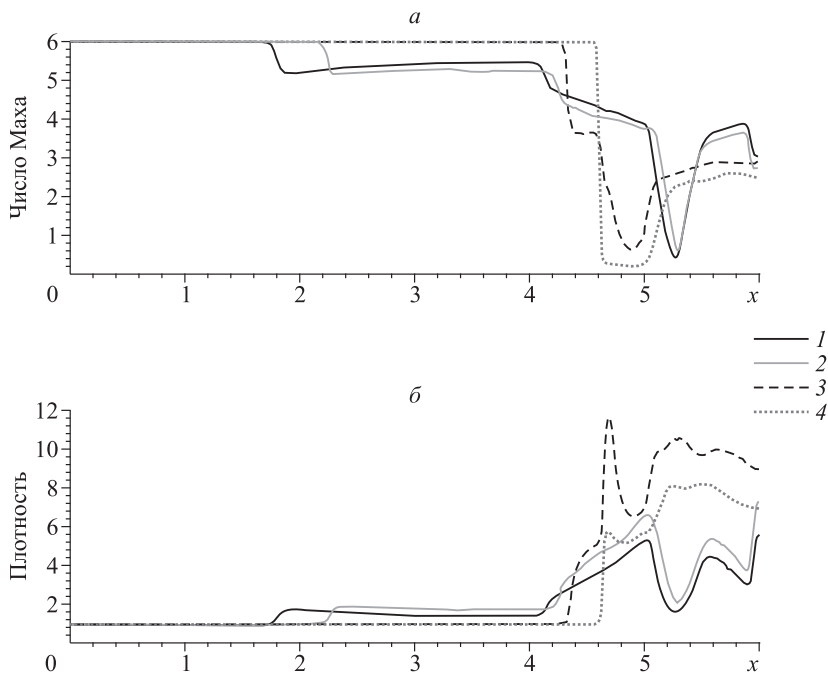


Рис. 4.2.10. Распределение чисел  $M$  (а) и плотности (б) в продольном сечении.

Поясн. см. в тексте.

В качестве заключения к разделу отметим, что изменение угла атаки набегающего потока приводит к формированию двух абсолютно разных картин течения. В первом случае при  $\alpha < 9^\circ$  течение характеризуется формированием зоны отрывного течения в канале, которая влияет на ширину области сверхзвукового течения газа в канале. В другом при  $\alpha > 9^\circ$  перед каналом воздухозаборника формируется выбитая ударная волна, которая перекрывает собой большую часть канала. Непосредственно за ней в канале воздухозаборника течение становится дозвуковым с последующим ускорением ядра потока до сверхзвуковых скоростей.

#### 4.2.3. Моделирование течений в расширенной области

Данная серия расчетов посвящена исследованию течений для полной конфигурации ЛА, включающего несущую поверхность (верхняя стенка области), канал воздухозаборника и кормовую часть. Ос-

новное внимание в расчетах было уделено влиянию изменения конфигурации аппарата на характер и характеристики течения.

Расчеты приведены для чисел  $M_0 = 6$ ,  $\alpha = 3^\circ$ . В связи с изменением конфигурации расчетной области изменилось и количество узлов расчетной сетки. Оно было выбрано на основе расчетов на последовательности сеток и составляло  $451 \times 161$  узлов. Дальнейшее увеличение числа узлов слабо влияло на точность расчетов (различие в расчетах, как правило, не превышало 2%). В данной серии расчетов нижняя кромка воздухозаборника была выдвинута вперед и начиналась в точке  $x = 4,7$ , задняя кромка канала была удлинена по сравнению с предыдущими расчетами, ее концу соответствовала координата  $x = 7$ . Типичная картина расчетной области приведена на рис. 4.2.11, где даны поля температуры и плотности. Как можно видеть из рисунка, для заданных параметров течения головной скачок уплотнения не попадает в канал воздухозаборника.

На верхней стенке воздухозаборника и в его конце на нижней стенке возникает область возвратного течения (при  $5,7 \leq x_1 \leq 6,4$ ). Более детальную картину течения можно видеть на рис. 4.2.12, где приведено поле скорости и области возвратного течения в канале.

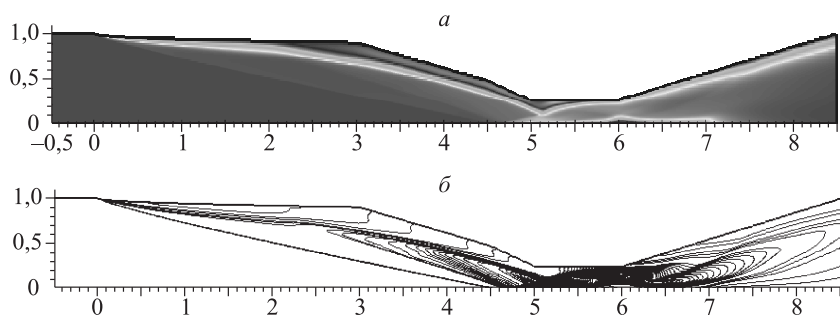


Рис. 4.2.11. Поля температуры (а) и линии равного уровня плотности газа (б) в канале.

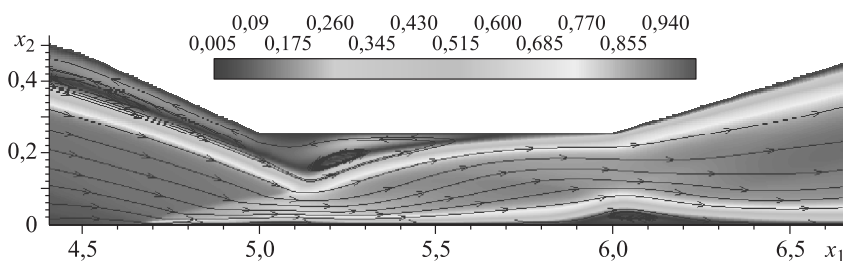


Рис. 4.2.12. Поле скорости газа в канале воздухозаборника.

пределения коэффициентов трения  $c_f$  на верхней (1) и нижней (2) стенках воздухозаборника приведены на рис. 4.2.13. Зона возвратного течения на верхней стенке начинается в области первого излома несущей поверхности (при  $x_1 \approx 2$ ), однако сразу за входом в канал на его верхней части образуется еще одна зона возвратного течения, которая хорошо видна на рис. 4.2.12, 4.2.13. На нижней стенке канала в окрестности точки  $x = 6,0$  также наблюдается зона возвратного течения. Образование этих зон связано с действием скачка уплотнения, распространяющегося от нижней кромки канала, с пограничным слоем верхней стенки при  $5 \leq x_1 \leq 5,2$  (см. рис. 4.2.12). На нижней стенке канала в окрестности точки  $x = 6$  зона отрывного течения обусловлена отражением скачка уплотнения от верхней стенки канала. В канале образуется узкая зона сверхзвукового течения, в которой температура газа увеличивается в 4–8 раз по сравнению с температурой газа в невозмущенном потоке (рис. 4.2.14, а). Линии 1, 2, 3 соответствуют сечениям 0,25, 0,5, 0,75 от высоты канала. На рис. 4.2.14, б приведено распределение поля температуры газа около элементов ЛА. Из расчетов следует, что зоны наиболее прогретого газа находятся около верхней и нижней стенок канала. Наиболее широкая область максимальных температур газа находится в области между первым изломом образующей поверхности и входом в канал воздухозаборника, а также в области возвратного течения газа около верхней стенки в канале воздухозаборника (рис. 4.2.14, б). После прохождения потока через эту зону (при  $x_1 \geq 6$ ) скорость газа растет, а температура падает.

Как известно (см., например, [1]), поток сверхзвукового газа, проходя через расширяющееся сопло, увеличивает скорость своего движения. Аналогичный характер поведения течения газа наблюдается в области выхода из канала воздухозаборника. На выходе из него в расширяющейся области скорость газа увеличивается и становится практически равной скорости невозмущенного потока (см. рис. 4.2.14, а). После прохождения газа в канале воздухозаборника, где достигается самая высокая температура, в расширяющейся области

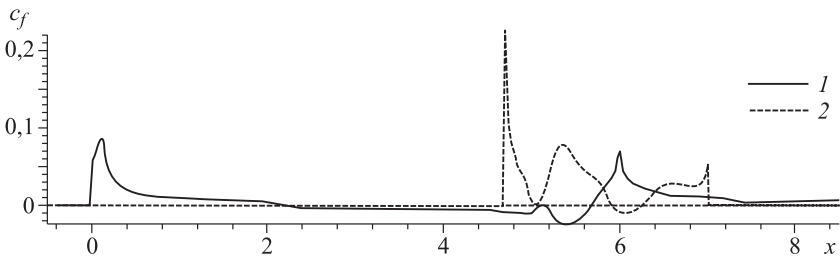


Рис. 4.2.13. Распределение трения  $c_f$  на верхней (1) и нижней (2) стенках канала.

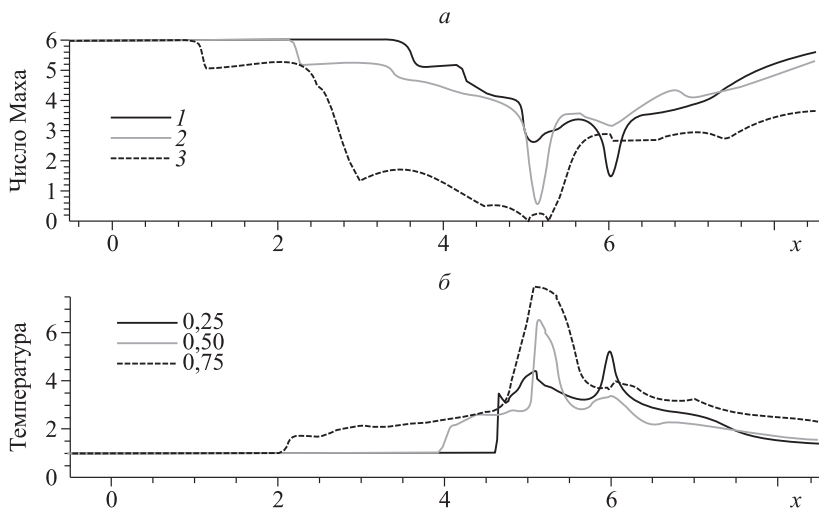


Рис. 4.2.14. Распределения числа Маха (а) и температуры (б) в различных сечениях.

Поясн. см. в тексте.

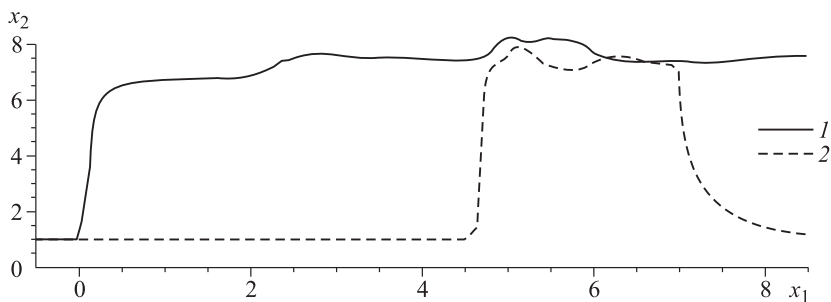


Рис. 4.2.15. Распределение температуры на верхней (1) и нижней (2) стенках.

температура понижается, достигая значения  $T \approx 2T_0$ . На твердых стенках канала температура достигает наибольших значений и составляет  $T \approx 8T_0$  (рис. 4.2.15), что вызвано резким торможением потока. Далее вниз по потоку происходит лишь незначительное изменение температуры стенок.

Наличие таких тепловых нагрузок на стенки канала приводит к необходимости отвода тепла с его поверхности, поэтому далее в расчетах вместо условия тепловой изоляции на стенках канала задавалась постоянная температура.

#### 4.2.4. Влияние краевых условий на характеристику течения

Последняя серия расчетов посвящена моделированию сверхзвуковых течений при изменении краевого условия для температуры на твердых стенках. Для уменьшения тепловой нагрузки на поверхности ЛА и стенок канала воздухозаборника был установлен режим теплоотвода – задавалась температура стенки  $T_1 = 4T_0$ , где  $T_0$  – температура набегающего потока. Моделирование проведено при  $M_0 = 6$  и углах атаки  $\alpha = 6, 12^\circ$ . Как и ожидалось, изменение краевых условий для температуры приводит к существенному изменению структуры течения (рис. 4.2.16).

Головной скачок, распространяющийся от носка тела, и волна, возникшая в точке излома образующей (при  $x_1 = 3$ ), пересекаются и соединяются в один скачок, который и попадает в канал воздухозаборника. У нижней кромки канала также возникает скачок уплотнения, который ниже по течению взаимодействует с головным скачком (см. рис. 4.2.16). Из распределения температуры газа в канале (рис. 4.2.17) можно сделать вывод, что максимальная температура газа не превышает значения  $T = 7$ , которое достигается во внутренней облас-

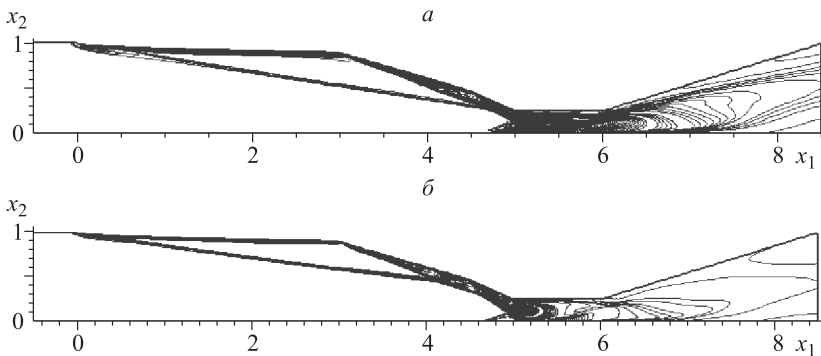


Рис. 4.2.16. Изолинии плотности газа для углов атаки  $\alpha = 6^\circ$  (а) и  $\alpha = 12^\circ$  (б).

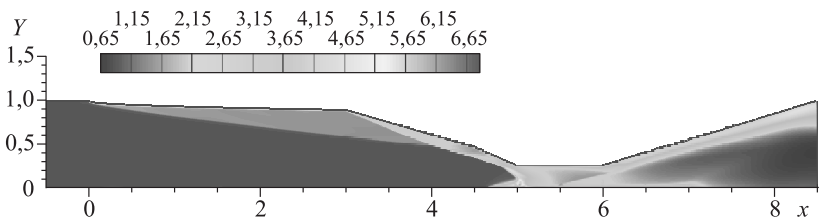


Рис. 4.2.17. Поле температуры в канале.

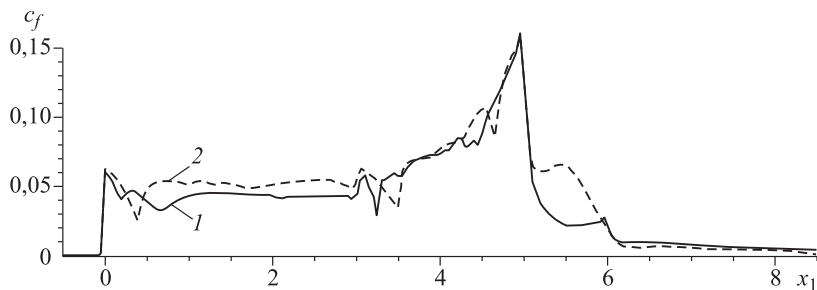


Рис. 4.2.18. Распределение коэффициента трения на верхней стенке.

Поясн. см. в тексте.

ти течения газа, а не в окрестности стенок. Принудительное охлаждение стенок приводит к смещению зоны максимальной температуры от области пограничного слоя в область взаимодействия волны со стенкой (в область при  $x_1 \approx 5$ ).

На рис. 4.2.18 приведено распределение коэффициента трения  $c_f$  для различных углов атаки, где углу атаки  $\alpha = 6^\circ$  соответствует кривая 1, углу  $\alpha = 12^\circ$  — кривая 2. Отметим, что поддержание постоянной температуры стенок канала приводит к исчезновению областей отрыва газа на верхней стенке канала, так как коэффициент трения положителен. Скорость на выходе из канала восстанавливается до ее значений в невозмущенном потоке. Из расчетов следует, что минимальная скорость газа в канале сверхзвуковая и соответствует числу Маха  $M \approx 3$ . Напомним, что при задании условий тепловой изоляции на стенках канала скорость потока в канале уменьшалась до дозвуковой скорости.

Анализ распределения температуры газа в различных продольных сечениях (рис. 4.2.19) показывает, что максимальная температура газа в канале понижается вследствие охлаждения стенок канала. Здесь, как и выше, линия 1 соответствует сечению  $x_2 = 0,25$  от высоты канала; 2 —  $x_2 = 0,5$  — середине канала; 3 —  $x_2 = 0,75$  от высоты канала. На основе анализа расчетов течений вязкого газа в канале с заданной температурой можно сделать следующие выводы:

- принудительное охлаждение твердых стенок канала приводит к снижению тепловых нагрузок и, как следствие, к исчезновению протяженных отрывных зон вблизи стенок канала;

- удлинение нижней стенки канала приводит к изменению структуры скачков уплотнения, перед каналом не возникает отошедшая ударная волна, что положительно влияет на структуру течения. По сравнению с предыдущим режимом течения газа в канале, зона

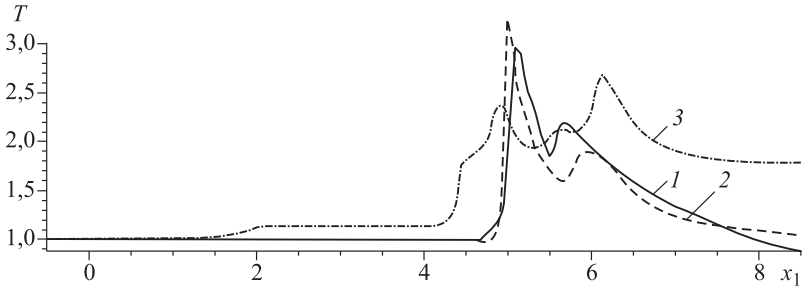


Рис. 4.2.19. Распределение температуры в продольных сечениях.

Поясн. см. в тексте.

сверхзвукового течения занимает практически всю область канала. Этот эффект достигается за счет исчезновения зон отрывного течения на верхней и нижней стенках канала.

### § 4.3. Течение газа за уступом

Следующая серия расчетов посвящена влиянию параметров потока на течение вязкого теплопроводного газа за плоским уступом (рис. 4.3.1). Для повышения точности расчетов исходные уравнения Навье–Стокса решались в преобразованных координатах в переменных  $(\rho, \rho v_1, \rho v_2, T)$  по схеме предиктор–корректор (см. 3.9.11). Узлы расчетной сетки сгущались в области пограничного слоя над поверхностью пластины и в следе за ней. В начальном сечении  $x = 0$  задавался сверхзвуковой поток с параметрами

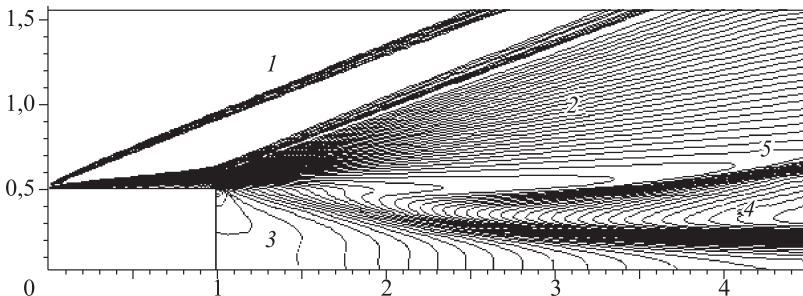


Рис. 4.3.1. Изолинии плотности за уступом при  $M_0 = 3$ ,  $Re = 4 \times 10^3$ .

Поясн. см. в тексте.



$$v_1 = U(\text{Re}), \rho = 1, v_2 = 0, T = 1/[\gamma(\gamma - 1)M_0^2],$$

профиль скорости сглаживался у поверхности тела, его толщина  $\delta = \sqrt{\text{Re}}$  соответствовала заданному числу  $\text{Re}$ . Верхняя граница области задавалась таким образом, чтобы возмущения от головного скачка не достигали ее (на рис. 4.3.1 приведена часть расчетной области). На ней задавался невозмущенный поток. На выходной задней границе задавались мягкие условия, как и в § 4.2.

Стационарное решение задачи находилось, как и ранее, методом установления до выполнения условия (4.1.1). Расчетные сетки выбирались при различном числе узлов. Все приведенные ниже результаты расчетов выполнены на сетке  $200 \times 200$  узлов. Так как решение задачи априори было неизвестным, то в начальный момент при  $t = 0$  значения искомых функций в начальном сечении переносились на всю расчетную область, а в следе за уступом начальная скорость задавалась нулевой. Такие условия были далекими от решения, поэтому получить сходимость удавалось не при всех значениях итерационного параметра  $\tau$ , хотя разностная схема и является безусловно устойчивой (в линейном приближении). При проведении расчетов практически сходимость решения зависела от начального значения  $\tau$ . Использование стандартного условия выхода на стационарный режим (4.1.1) не всегда оказывалось эффективным.

Так, после некоторого числа итерационных шагов (при сходимости решения до величины  $\varepsilon \approx 10^{-5} - 10^{-4}$ ), невязка решения начинала колебаться около некоторого значения (рис. 4.3.2), как и при расчетах по схеме приближенной факторизации, что отмечалось ранее. Амплитуда колебаний и их характер зависели от характера решения и выбора итерационного параметра. Выявить общую закономерность

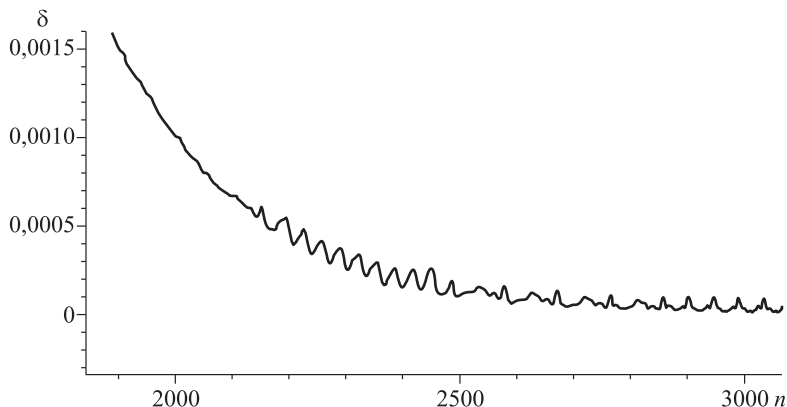


Рис. 4.3.2. Зависимость невязки от числа итераций.

появления зон осцилляций не удалось, однако осцилляции, как правило, возникали в зоне отрыва, когда компоненты скорости могли менять знак. Во избежание псевдоустановления и получения стационарного решения использовался модифицированный критерий сходимости

$$\delta = \max |(f^{n+q} - f^n) / (q\tau f^n)| \leq 10^{-7},$$

где параметр  $q$  изменялся в пределах  $10 \leq q \leq 50$ . Для получения стационарного решения с заданной точностью достаточно было выбрать  $q \approx 40$ . Картина выхода решения на стационарный режим представлена на рис. 4.3.3. Возникшие осцилляции решения можно видеть на рис. 4.3.3 сходимостью к стационарному решению получена при значении параметра  $q = 40$ . Кривые сходимости плотности получены при различных значениях чисел Куранта  $K = 1,2$  (кривая 4),  $K = 1,35$  (3),  $K = 1,5$  (2) и  $K \approx 1,65$  (1). Как следует из рис. 4.3.3, осцилляции решения возникают при определенных значениях итерационного параметра  $\tau$ . Можно видеть, что увеличение итерационного шага  $\tau$  на 37 % приводит к ускорению сходимости на 42 %. Разумеется, выбор итерационного параметра  $\tau$  для получения оптимальной скорости сходимости решения к стационарному решению зависит от многих факторов, что требует дополнительных исследований.

Остановимся на некоторых результатах моделирования сверхзвуковых течений за уступом. На рис. 4.3.1 приведена типичная кар-

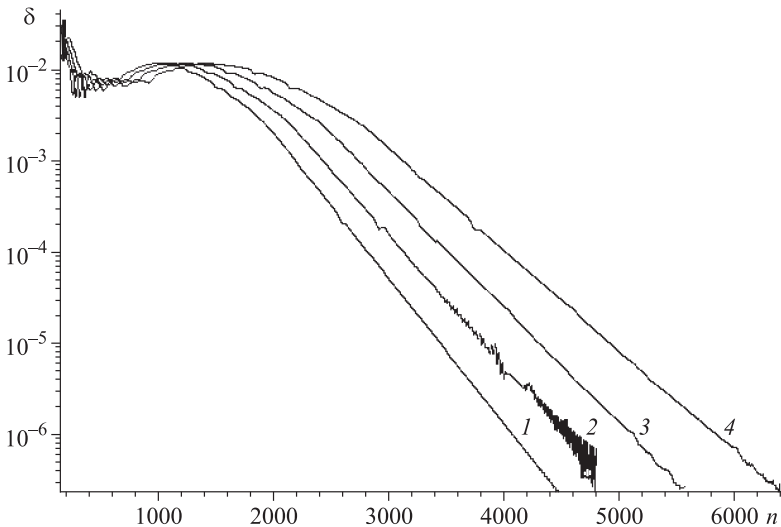


Рис. 4.3.3. Зависимость сходимости решения от  $\tau$ .

тина течения для  $M = 3$ ,  $Re = 10^3$ . Над пограничным слоем на уступе образуется головной скачок (1), его наклон определяется числами  $M_0$  и  $Re$ . За уступом возникает веер волн разрежения (2), возникает зона возвратного течения (3) и формируется след за телом (4), над которым возникает висячий скачок (5).

Известно, что длина возвратной зоны зависит от чисел  $M_0$  и  $Re$ . Увеличение числа Маха при фиксированном числе  $Re$  приводит к увеличению угла поворота потока за кромкой уступа и, как следствие, к уменьшению длины отрывной зоны с ростом числа  $M_0$  (см. рис. 4.3.4, 4.3.5, где приведены распределения плотности и линии тока в следе). При фиксированном числе  $M_0$  размер области возвратного течения зависит от числа  $Re$  (см. рис. 4.3.5). До чисел  $Re = 10$  течение за уступом безотрывное. При  $Re > 10$  за уступом возникает область возвратного течения, длина которой возрастает с ростом числа  $Re$ . С ростом числа  $M_0$  наблюдается также сильный прогрев газа в следе. Отметим, что длина зоны возвратного течения возрастает с ростом числа  $Re$  и при больших значениях выходит на асимптотический режим.

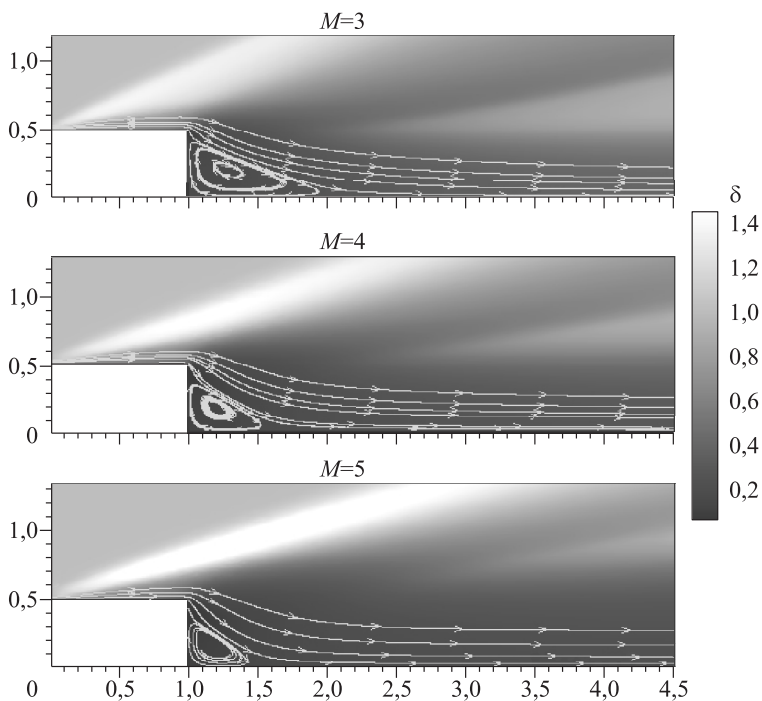


Рис. 4.3.4. Уровни плотности и линии тока для различных чисел  $M_0$ .

В качестве заключения к главе можно сделать следующие выводы:

Приведенные результаты моделирования внутренних течений в канале, элементов ЛА и течений за уступом с возникновением сложной картины течения (возникновением зон ударного перехода и зон отрыва пограничного слоя, их взаимодействием между собой и границами областей) характеризуют эффективность предлагаемых алгоритмов – схем приближенной факторизации и предиктор–корректор и их достаточную точность даже без привлечения специальных алгоритмов сгущения сеток.

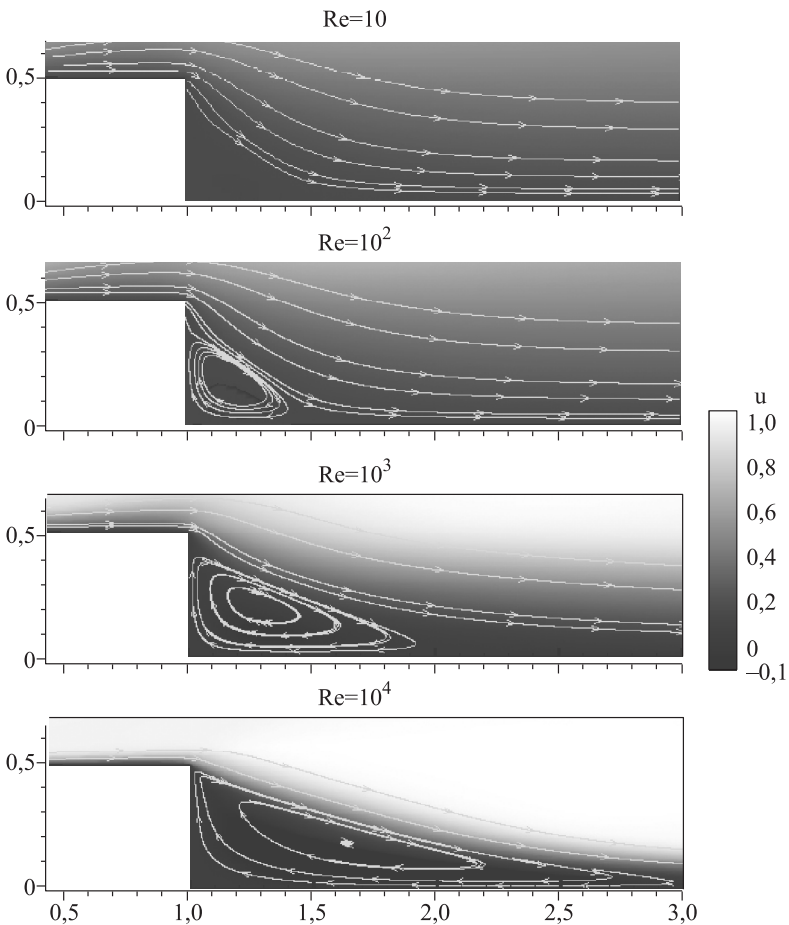


Рис. 4.3.5. Линии тока для  $M_0 = 3$  при различных числах  $Re$ .

Примеры моделирования сверх- и гиперзвуковых течений около модельных форм ЛА показали применимость алгоритма для расчета комбинированных задач аэродинамики (внутренних и внешних) и пригодность алгоритма для расчета обтекания тел сложной формы. Разумеется, эти расчеты носят предварительный характер, так как для получения аэродинамических характеристик реальных ЛА данного типа требуется проведение серийных расчетов двумерных и пространственных течений с учетом физики явлений при гиперзвуковых скоростях и при реальных числах Рейнольдса. Автор надеется, что приведенные результаты моделирования окажутся полезными при исследовании подобных аэродинамических течений.

Простота реализации схемы на дробных шагах, возможность изменения параметров потока и шагов сетки в широком диапазоне (на основании большого запаса устойчивости схемы), экономичность алгоритмов делают их эффективным инструментом для исследования проблем аэродинамики.

## Глава 5

### РАЗНОСТНЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

Традиционно задачи движения вязкой несжимаемой жидкости решаются в формулировке «функция тока – вихрь» ( $\psi$ – $\omega$ -формулировка). В этих переменных уравнение неразрывности удовлетворяется тождественно, и система исходных уравнений Навье–Стокса сводится к параболической системе уравнений для компонент вихря и эллиптической системе для векторного потенциала. При необходимости давление восстанавливается из уравнения Пуассона. Отметим, что для его решения задаются граничные условия Неймана, что вызывает определенные трудности при реализации. В двумерном случае уравнения Навье–Стокса в переменных  $\psi$ – $\omega$  сводятся к одному уравнению переноса завихренности и уравнению Пуассона для функции тока. В трехмерном случае количество уравнений возрастает. Вместо скалярного уравнения Пуассона требуется решать уже векторное уравнение Пуассона, а также три уравнения переноса завихренности для компонент векторного потенциала. Базовые вычислительные алгоритмы, основанные на представлении уравнений в переменных  $\psi$ – $\omega$ , приведены, например, в [81–84]. При решении многомерных задач использование физических переменных может оказаться предпочтительным как из-за уменьшения числа решаемых уравнений в трехмерном случае по сравнению с переменными функция тока–вихрь, так и в связи с практической необходимостью вычисления поля давления. Для численного решения уравнений в физических переменных наиболее часто применяются разностные методы и методы конечных объемов и конечных элементов. Их большая часть использует предположение, что на промежуточном слое по времени градиент давления равен нулю, а давление восстанавливается на полном шаге, т. е. в алгоритме используется идеология расщепления. Более подробные описания различных численных методов для решения уравнений несжимаемой жидкости приведены в [9, 14, 42, 51, 71, 81–111]. Альтернативой этому подходу является метод искус-

ственной сжимаемости, состоящий во введении в уравнение неразрывности дополнительного члена — производной по времени от давления с малым коэффициентом  $\varepsilon$  ([8, 85, 86]). Тогда модифицированная система уравнений является эволюционной, разрешенной относительно производной по времени, и для нее можно применять методы, разработанные для решения таких систем уравнений (например, методы расщепления и приближенной факторизации [85, 86], метод LU-факторизации [71], итерационные методы [88] и т. д.). Ниже будут описаны лишь неявные наиболее часто используемые разностные схемы.

### § 5.1. Исходные уравнения

В качестве исходной модели рассмотрим уравнения Навье–Стокса вязкой несжимаемой жидкости в приближении Буссинеска в безразмерном виде [1, 81]

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{V} &= 0, \\ \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \operatorname{div}(\mathbf{V} \cdot \mathbf{V} - \mathbf{G}) + \nabla p &= \Phi. \end{aligned} \quad (5.1.1)$$

При учете тепловых эффектов в изучаемой среде исходные уравнения дополняются уравнением для температуры

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\nabla \cdot \mathbf{V})T = \operatorname{div}(\kappa \nabla T).$$

Здесь  $\mathbf{V}$ ,  $p$ ,  $T$  — вектор скорости, давление и температура,  $\Phi$  — вектор внешних сил,  $\mathbf{G}$  — тензор напряжений. При записи уравнений плотность полагалась постоянной и в дальнейшем исключена из уравнений. Для удобства численного решения исходные уравнения записывались в безразмерном виде. При переходе к безразмерному виду уравнений Навье–Стокса компоненты скорости нормировались на невозмущенное значение  $V_0$ , давление — на  $U_0^2$ , а температура — на  $T_0$ . В качестве характерного размера задавалось  $L = 1$ .

Для простоты изложения постановку задач проведем для уравнений Навье–Стокса в декартовых координатах в векторном виде без учета внешних сил и отсутствии тепловых эффектов. Тогда система уравнений (5.1.1) может быть представлена в векторном виде

$$\mathbf{M} \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} = -\mathbf{W}, \quad \mathbf{W} = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \mathbf{W}_j, \quad (5.1.2)$$

где

$$\mathbf{f} = \begin{pmatrix} p \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}, \mathbf{W}_j = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_1 v_j + \delta_j^1 p - \tau_{1j} \\ v_2 v_j + \delta_j^2 p - \tau_{2j} \\ v_3 v_j + \delta_j^3 p - \tau_{3j} \end{pmatrix}, \mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$\delta_j^i$  – символ Кронекера,  $\eta$  – коэффициент вязкости, а тензор скоростей деформации в безразмерных переменных равен

$$\tau_{ij} = \eta \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$$

( $\eta = \eta_0 / \text{Re}$ ,  $\text{Re} = V_0 L / \eta_0$  – число Рейнольдса). Наряду с дивергентной формой (5.1.2) перепишем уравнения Навье–Стокса (5.1.2) в не-дивергентном виде

$$\mathbf{M} \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} + \mathbf{B} \mathbf{f} = \mathbf{F}, \quad (5.1.3)$$

где оператор  $\mathbf{B} = \sum_{j=0}^3 \mathbf{B}_j$  представлен в виде расщепления по физическим процессам и пространственным направлениям

$$\mathbf{B}_0 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial}{\partial x_2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial}{\partial x_3} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix}, b_j^i = \eta(1 + \delta_j^i),$$

$$\mathbf{B}_j = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & v_j \frac{\partial}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} b_j^1 \frac{\partial}{\partial x_j} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & v_j \frac{\partial}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} b_j^2 \frac{\partial}{\partial x_j} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & v_j \frac{\partial}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} b_j^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \end{pmatrix},$$



$$f_1 = \frac{\partial}{\partial x_2} \eta \frac{\partial v_2}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_3} \eta \frac{\partial v_3}{\partial x_1}, \quad f_2 = \frac{\partial}{\partial x_1} \eta \frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_3} \eta \frac{\partial v_3}{\partial x_2},$$

$$f_3 = \frac{\partial}{\partial x_1} \eta \frac{\partial v_1}{\partial x_3} + \frac{\partial}{\partial x_2} \eta \frac{\partial v_2}{\partial x_3}.$$

Матричный оператор  $\mathbf{B}_0$  содержит члены уравнения неразрывности и члены с давлением в уравнениях движения, а операторы  $\mathbf{B}_j$  – конвективные и часть вязких членов (лишь повторные производные) в уравнениях движения в направлении  $x_j$ , вектор  $\mathbf{F}$  содержит смешанные производные.

Систему уравнений необходимо дополнить граничными условиями и задать начальное распределение физических величин. На непроницаемой поверхности задаются условия прилипания

$$\mathbf{v}|_S = \mathbf{v}_c,$$

где  $\mathbf{v}_c$  – скорость движения поверхности. Вдали от обтекаемого тела граничное условие имеет асимптотический характер

$$\mathbf{v} \rightarrow \mathbf{v}_\infty \text{ при } r \rightarrow \infty.$$

Отметим, что граничное условие для давления не задается и не требуется в точной математической постановке (см. [8, 79, 80]). Если течение симметричное, то на оси симметрии справедливы соотношения

$$\frac{\partial v_n}{\partial n} = 0, \quad v_\tau = 0,$$

где  $v_n, v_\tau$  – нормальная и касательная к оси симметрии составляющие скорости. Система уравнений Навье–Стокса (5.1.2) или (5.1.3) не является системой уравнений типа Коши–Ковалевской (матрица  $\mathbf{M}$  вырожденная), и поэтому для численного решения невозможно напрямую применять схемы приближенной факторизации и расщепления, описанные выше для решений уравнений, разрешенных относительно производной по времени.

При записи уравнений Навье–Стокса наряду с газодинамическими переменными скорость–давление часто используют переменные функция тока  $\psi$  и вихрь  $\omega$ . Особенно удобно их использование для двумерных задач, когда  $\omega$  и  $\psi$  являются скалярными функциями. Приведем уравнения Навье–Стокса (5.1.1) в двумерном случае в скалярном виде в декартовых координатах

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial x_2} &= 0, \\ \frac{\partial v_1}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial p}{\partial x_1} &= \nu \Delta v_1, \\ \frac{\partial v_2}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_2}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial p}{\partial x_2} &= \nu \Delta v_2, \end{aligned} \quad (5.1.4)$$

где  $\nu$  – коэффициент кинематической вязкости (полагается постоянным в отличие от коэффициента вязкости  $\eta$  из (5.1.2)). Введем новые газодинамические переменные вихрь  $\omega$  и функцию тока  $\psi$  по формулам

$$\omega = \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2}, \quad v_1 = \frac{\partial \psi}{\partial x_2}, \quad v_2 = -\frac{\partial \psi}{\partial x_1}. \quad (5.1.5)$$

В этих переменных уравнение неразрывности удовлетворяется тождественно

$$\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial x_2} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_2 \partial x_1} = 0,$$

а система уравнений движения (после дифференцирования первого уравнения по  $\partial/\partial x_2$ , а второго по  $\partial/\partial x_1$  и вычитания первого уравнения из второго) приводится к виду

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + v_1 \frac{\partial \omega}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial \omega}{\partial x_2} = \nu \Delta \omega, \quad (5.1.6)$$

$$\Delta \psi = -\omega, \quad (5.1.7)$$

где компоненты скорости  $v_1, v_2$  заданы соотношениями (5.1.5). Краевые условия на непроницаемой поверхности и вдали от тела принимают вид

$$\psi = \text{const}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial n} = 0.$$

Так как граничные условия для функции тока определены с точностью до постоянной, то для замкнутой односвязной области можно положить

$$\psi = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial n} = 0. \quad (5.1.8)$$

Отметим, что для вихря отсутствует краевое условие и при решении конкретных задач это условие получают из уравнения (5.1.7),

полагая его справедливым на границе. Таким образом, введение новых переменных – функции тока  $\psi$  и вихря  $\omega$  позволяет уменьшить число решаемых уравнений до двух уравнений, не содержащих давления (для которого не задано краевое условие). Подобные переменные  $\psi$  и  $\omega$  могут быть введены и в трехмерном случае, однако в этом случае число уравнений вместо четырех исходных уравнений в переменных скорость–давление возрастает до шести уравнений – трех уравнений для вихря (вектора в трехмерном случае) и трех уравнений функции тока (векторного потенциала). Остановимся на построении разностных схем в различных газодинамических переменных.

### § 5.2. Схема в переменных $\omega$ – $\psi$

Определим, как и выше, сеточные функции  $\psi^n = \psi_{ij}^n$ ,  $\omega^n = \omega_{ij}^n$  в узлах сетки  $(i, j)$  и введем разностные операторы  $\Lambda_j, \Lambda_{ij}$ , аппроксимирующие первые и вторые производные  $\partial/\partial x_j, \partial^2/\partial x_j \partial x_i$  в исходных уравнениях с порядком  $O(h_j^k)$  и  $O(h_j^2)$  соответственно. Введем оператор  $\Delta_h = \Lambda_{11} + \Lambda_{22}$ , аппроксимирующий оператор Лапласа с порядком  $O(h^2)$ . Пусть на момент времени  $t_n = n\tau$  все искомые функции известны. Решение системы уравнений (5.1.6), (5.1.7) будем находить численно. Значения функции тока  $\psi$  на новом временном шаге  $n + 1$  может быть получено по разностной схеме

$$\Delta_h \psi^{n+1} = -\omega^n, \quad (5.2.1)$$

аппроксимирующей уравнение (5.1.7) с порядком  $O(h^2)$ . Представим схему (5.2.1) в виде

$$\frac{\psi_{i+1j}^{n+1} - 2\psi_{ij}^{n+1} + \psi_{i-1j}^{n+1}}{h_1^2} + \frac{\psi_{ij+1}^{n+1} - 2\psi_{ij}^{n+1} + \psi_{ij-1}^{n+1}}{h_2^2} = \omega_{ij}^n. \quad (5.2.2)$$

Прямое обращение оператора Лапласа требует больших затрат вычислительных ресурсов, поэтому обычно для решения уравнения (5.2.2) используют различные итерационные методы, например, итерационную схему вида

$$\frac{\psi_{i+1j}^{v+1} - 2\psi_{ij}^{v+1} + \psi_{i-1j}^{v+1}}{h_1^2} + \frac{\psi_{ij+1}^v - 2\psi_{ij}^{v+1} + \psi_{ij-1}^{v+1}}{h_2^2} = \omega_{ij}^v, \quad (5.2.3)$$

где  $\psi_{ij}^v = \psi_{ij}^{n+1,v}$ . Его решение может быть получено скалярными трехточечными прогонками до сходимости итераций. Критерий сходимости обычно задают в виде (для  $\psi \neq 0$ )

$$\left| \frac{\psi^{v+1} - \psi^v}{\psi^v} \right| \leq O(h^{2+k}), \text{ где } k = O(1). \quad (5.2.4)$$

В качестве другого подхода решение стационарного уравнения для функции тока (5.1.7) можно находить как предельное решение нестационарной задачи

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \Delta \psi + \omega \quad (5.2.5)$$

со стационарными краевыми условиями (5.1.8). Тогда уравнение (5.2.5) также может быть решено различными методами – по схеме приближенной факторизации, схеме расщепления или по схеме предиктор–корректор. Например, при реализации по неявной схеме приближенной факторизации

$$(I - \bar{\tau}\alpha\Lambda_{11})(I - \bar{\tau}\alpha\Lambda_{22})\frac{\Psi^{v+1} - \Psi^v}{\bar{\tau}} = \Delta_h \Psi^v + \omega^n \quad (5.2.6)$$

методом установления или по эквивалентной ей схеме в дробных шагах

$$\begin{aligned} \xi^v &= \Delta_h \Psi^v + \omega^n, \\ (I - \bar{\tau}\alpha\Lambda_{11})\xi^{v+1/2} &= \xi^v, \\ (I - \bar{\tau}\alpha\Lambda_{22})\xi^{v+1} &= \xi^{v+1/2}, \\ \Psi^{v+1} &= \Psi^v + \bar{\tau}\xi^{v+1}, \end{aligned} \quad (5.2.7)$$

где  $\bar{\tau}$  – фиктивное время. Решение уравнений (5.2.6) находится методом установления до выполнения условия (5.2.4). При установлении разностная схема (5.2.6) или (5.2.7) аппроксимирует стационарное уравнение для функции тока

$$\Delta_h \Psi^{n+1} = -\omega^n$$

с порядком  $O(h^2)$ . Рассмотренная схема (5.2.6) безусловно устойчива при  $\alpha \geq 0,5$ , что обеспечивает сходимость итераций при соответствующем выборе весового параметра  $\alpha$  и позволяет выбирать значение итерационного параметра  $\bar{\tau}$  лишь из условия наиболее быстрой сходимости к решению стационарных уравнений (5.2.7). На дробных шагах схема (5.2.7) реализуется трехточечными скалярными прогонками по каждому пространственному направлению.

Краевые условия для уравнения для функции тока (5.2.8) в разностной форме принимают вид

$$\Psi_\gamma^n = \Psi_\gamma^{n+1} = 0, \quad \Lambda_n \Psi_\gamma^n = \Lambda_n \Psi_\gamma^{n+1} = 0,$$

где  $\Lambda_n$  – разностная производная по нормали к границе  $\gamma$ . Тогда, как следствие, для невязок  $\xi$  получим

$$\xi_\gamma^l = 0, \quad \Lambda_n \xi_\gamma^l = 0,$$

где  $l = n, n + 1/2, n + 1$ . После вычисления на новом временном слое  $\Psi^{n+1}$  явно вычисляются значения компонент скорости из уравнений

$$v_1^{n+1} = \Lambda_2 \Psi^{n+1}, \quad v_2^{n+1} = -\Lambda_1 \Psi^{n+1}.$$

Численное решение уравнения (5.1.6) для вихря может быть получено также по схеме приближенной факторизации

$$\begin{aligned} & \left[ I + \tau\alpha(v_1^n \Lambda_1 - \eta \Lambda_{11}) \right] \left[ I + \tau\alpha(v_2^n \Lambda_2 - \eta \Lambda_{22}) \right] \frac{\omega^{n+1} - \omega^n}{\tau} = \\ & = -\sum_{j=1}^2 (v_j^n \Lambda_j - \eta \Lambda_{jj}) \omega^n \end{aligned} \quad (5.2.8)$$

или эквивалентной ей схеме в дробных шагах

$$\begin{aligned} \xi^n &= -\sum_{j=1}^2 (v_j^n \Lambda_j - \eta \Lambda_{jj}) \omega^n, \\ \left[ I + \tau\alpha(v_1^n \Lambda_1 - \eta \Lambda_{11}) \right] \xi^{n+1/2} &= \xi^n, \\ \left[ I + \tau\alpha(v_2^n \Lambda_2 - \eta \Lambda_{22}) \right] \xi^{n+1} &= \xi^{n+1/2}, \\ \omega^{n+1} &= \omega^n + \tau \xi^{n+1}. \end{aligned} \quad (5.2.9)$$

Она аппроксимирует уравнение для вихря с порядком  $O(\tau + h^k + h^2)$  и на дробных шагах реализуется скалярными прогонками по каждому пространственному направлению. Для линейаризованных уравнений спектральным методом нетрудно показать безусловную устойчивость схемы (5.2.8) при  $\alpha \geq 0,5$ .

Как отмечалось выше, краевые условия для вихря в точной постановке отсутствуют, однако они требуются при разностной постановке задачи. Первый способ определения краевого условия для вихря  $\omega$  с первым порядком аппроксимации по пространству предложен Тома. Пусть  $\Psi_{0j}$  – значение функции на границе  $\gamma$ . Разлагая функцию  $\psi$  вблизи границы  $(1, j)$  в ряд Тейлора

$$\Psi_{1,j} = \Psi_{0,j} + h \left( \frac{\partial \Psi}{\partial n} \right)_{0,j} + \frac{h^2}{2} \left( \frac{\partial^2 \Psi}{\partial n^2} \right)_{0,j} + O(h^3)$$

и сохраняя члены до второго порядка, с учетом соотношений (5.1.8) получим

$$\omega_{0j} = \left( \frac{\partial^2 \Psi}{\partial n^2} \right)_{0,j} = \frac{2\Psi_{1,j} - \Psi_{0,j}}{h^2} - \frac{2}{h} \left( \frac{\partial \Psi}{\partial n} \right)_{0,j} + O(h) = \frac{2\Psi_{1,j}}{h^2} + O(h).$$

Приближение более высокого порядка можно получить из непосредственной аппроксимации уравнения для функции тока (1.6) на границе  $(0, j)$  с учетом краевых условий (5.1.8) из соотношений

$$\omega_{0,j} = \left( \frac{\partial^2 \Psi}{\partial n^2} \right)_{0,j} = \frac{a\Psi_{0,j} + b\Psi_{1,j} + c\Psi_{2,j}}{h^2} + O(h^2) = \frac{8\Psi_{1,j} - \Psi_{2,j}}{2h^2} + O(h^2).$$

При решении разностных уравнений для вихря (5.2.8), (5.2.9) необходимо задавать значения невязок  $\xi$  на дробных шагах. Так как значения  $\Psi^{n+1}$  и  $\Psi^n$  известны из решения уравнения (5.2.6), в том числе и на границе, то, как следствие последнего уравнения схемы (5.2.9), имеем

$$\xi_{0,j}^{n+1} = \frac{\omega_{0,j}^{n+1} - \omega_{0,j}^n}{\tau} = \frac{8(\Psi_{1,j}^{n+1} - \Psi_{1,j}^n) - (\Psi_{2,j}^{n+1} - \Psi_{2,j}^n)}{2\tau h^2}.$$

Тогда из предпоследнего уравнения схемы (5.2.8) получим

$$\xi_{0,j}^{n+1/2} = [I + \tau\alpha(v_2^n \Lambda_2 - \eta \Lambda_{22})] \xi_{0,j}^{n+1} = [I - \tau\alpha\eta \Lambda_{22}] \xi_{0,j}^{n+1}.$$

Таким образом, зная значения невязок  $\xi_{0,j}^{n+1/2}$  и  $\xi_{0,j}^{n+1}$  на границе, можно проводить вычисления по разностной схеме (5.2.9), явно на нулевом дробном шаге и скалярными прогонками по каждому пространственному направлению на первом и втором дробных шагах. Наконец, новые значения вихря вычисляются явно из последнего шага схемы (5.2.9).

### § 5.3. Базовые схемы расщепления

Остановимся на рассмотрении разностных схем в естественных переменных скорость–давление. Аналогично § 5.2 введем сеточные функции  $\mathbf{f}_n$  в целых узлах сетки и аппроксимируем операторы  $\mathbf{B}_j$  и вектор потоков  $\mathbf{W}$  в (5.1.2) соответственно операторами  $\mathbf{B}_{jh}$  и вектором  $\mathbf{W}_h$  с порядком  $O(h_j^k)$  по формулам  $\mathbf{W}_h^n = -\sum_{j=1}^3 \Lambda_j \mathbf{W}_{jh}^n$ ,

$$\Lambda_j \mathbf{W}_{jh}^n = \begin{pmatrix} \Lambda_j v_j \\ \Lambda_j v_1 v_j + \delta_j^1 \bar{\Lambda}_j p - \Lambda_j \eta (\Lambda_j v_1 + \Lambda_1 v_j) \\ \Lambda_j v_2 v_j + \delta_j^2 \bar{\Lambda}_j p - \Lambda_j \eta (\Lambda_j v_2 + \Lambda_2 v_j) \\ \Lambda_j v_3 v_j + \delta_j^3 \bar{\Lambda}_j p - \Lambda_j \eta (\Lambda_j v_3 + \Lambda_3 v_j) \end{pmatrix},$$

$$B_{0h} = \begin{pmatrix} 0 & \Lambda_1 & \Lambda_2 & \Lambda_3 \\ \bar{\Lambda}_1 & 0 & 0 & 0 \\ \bar{\Lambda}_2 & 0 & 0 & 0 \\ \bar{\Lambda}_3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$B_{jh} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & v_j \Lambda_j - \Lambda_j b_j^1 \Lambda_j & 0 & 0 \\ 0 & 0 & v_j \Lambda_j - \Lambda_j b_j^2 \Lambda_j & 0 \\ 0 & 0 & 0 & v_j \Lambda_j - \Lambda_j b_j^3 \Lambda_j \end{pmatrix}, \quad (5.3.1)$$

где  $b_j^i = \eta(1 + \delta_j^i)$ . Первые производные в матричных операторах  $\mathbf{B}_{jh}$  аппроксимируем по формулам

$$\Lambda_j = \Lambda_{j+}, \quad \bar{\Lambda}_j = \Lambda_{j-} \quad \text{при } v_j \leq 0, \quad (5.3.2)$$

$$\Lambda_j = \Lambda_{j-}, \quad \bar{\Lambda}_j = \Lambda_{j+} \quad \text{при } v_j \geq 0$$

с первым порядком при  $k = 1$  и формулам

$$\Lambda_j = \bar{\Lambda}_j = (\Lambda_{j-} + \Lambda_{j+})/2$$

со вторым порядком для  $k = 2$ , где  $\Lambda_{j\pm} = \mp(I - T_{j\pm})/h_j$ ,  $T_{j\pm} f_l = f_{l\pm 1}$ . Вторые производные в операторах  $\mathbf{B}_{jh}$  и векторах  $\mathbf{W}_h$  и  $\mathbf{F}$  аппроксимируем симметричными операторами с порядком  $O(h^2)$ . Таким образом,

$$\mathbf{W} = \mathbf{W}_h + O(h^2), \quad \mathbf{B}_j = \mathbf{B}_{jh} + O(h_j^k), \quad h = \max(h_j).$$

Рассмотрим разностную схему с весами

$$\mathbf{M} \frac{\mathbf{f}^{n+1} - \mathbf{f}^n}{\tau} + \sum_{j=0}^3 \mathbf{B}_{jh} [\alpha \mathbf{f}^{n+1} + (1 - \alpha) \mathbf{f}^n] = \mathbf{F}^n,$$

аппроксимирующую систему уравнений (5.1.3), и перепишем ее в каноническом виде

$$\left( \mathbf{M} + \tau \alpha \sum_{j=0}^3 \mathbf{B}_{jh} \right) \frac{\mathbf{f}^{n+1} - \mathbf{f}^n}{\tau} = - \sum_{j=0}^3 \mathbf{B}_{jh} \mathbf{f}^n + \mathbf{F}^n.$$

Так как

$$\sum_{j=0}^3 \mathbf{B}_{jh} \mathbf{f}^n + \mathbf{F}^n = \mathbf{W}_h^n$$

в соответствии с эквивалентностью уравнений в дивергентной (5.1.2) и в недивергентной форме (5.1.3), то разностная схема

$$\mathbf{C} \frac{\mathbf{f}^{n+1} - \mathbf{f}^n}{\tau} = - \mathbf{W}_h^n, \quad (5.3.3)$$

где

$$\mathbf{C} = \mathbf{M} + \tau\alpha \sum_{j=0}^3 \mathbf{B}_{jh}, \quad \mathbf{W}_h^n = \sum_{j=1}^3 \Lambda_j \mathbf{W}_{jh}^n,$$

аппроксимирует исходные уравнения (5.1.2) с порядком  $O(\tau + h^k)$ , а при установлении – стационарные уравнения Навье–Стокса в консервативном виде с порядком  $O(h^k)$ . Ее численная реализация сводится к матричным прогонкам и неэкономична, так как требует обращения матриц большой размерности и, как следствие, больших затрат ресурсов ЭВМ.

Для численного решения уравнений Навье–Стокса рассмотрим явно-неявные схемы расщепления (см., например, [14, 42, 82])

$$\frac{\tilde{\mathbf{v}} - \mathbf{v}^n}{\tau} = - \sum_{j=0}^3 \tilde{\mathbf{B}}_{jh} \mathbf{v}^n + \tilde{\mathbf{F}}^n, \quad (5.3.4)$$

$$\frac{\mathbf{v}^{n+1} - \tilde{\mathbf{v}}}{\tau} + \nabla_h p^{n+1} = 0, \quad \operatorname{div}_h \mathbf{v}^{n+1} = 0,$$

где

$$\tilde{\mathbf{B}}_{jh} = \begin{pmatrix} v_j \Lambda_j - \Lambda_j b_j^1 \Lambda_j & 0 & 0 \\ 0 & v_j \Lambda_j - \Lambda_j b_j^2 \Lambda_j & 0 \\ 0 & 0 & v_j \Lambda_j - \Lambda_j b_j^3 \Lambda_j \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{F}}^n = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix}.$$

Они аппроксимируют исходные уравнения (5.1.2) с порядком  $O(\tau + h^k)$ . Действительно, исключая в схеме (5.3.4) промежуточный дробный шаг, получим схему в целых шагах

$$\operatorname{div}_h \mathbf{v}^{n+1} = 0, \quad (5.3.5)$$

$$\frac{\mathbf{v}^{n+1} - \mathbf{v}^n}{\tau} + \sum_{j=0}^3 \tilde{\mathbf{B}}_{jh} \mathbf{v}^n + \nabla_h p^{n+1} = \tilde{\mathbf{F}}^n.$$

Остановимся на ее реализации. Вспомогательное значение скорости  $\tilde{\mathbf{v}}$  на первом шаге схемы (5.3.4) находится явно. Значение скорости  $\mathbf{v}^{n+1}$  на новом временном слое находится из решения уравнений

$$\operatorname{div}_h \mathbf{v}^{n+1} = 0, \quad (5.3.6)$$

$$\mathbf{v}^{n+1} - \tilde{\mathbf{v}} = -\tau \nabla_h p^{n+1}.$$

Их непосредственная реализация затруднительна, поэтому обычно поступают следующим образом. Подставляя  $\mathbf{v}^{n+1}$  в уравнение неразрывности  $\operatorname{div}_h \mathbf{v}^{n+1} = 0$ , получим уравнение



$$\operatorname{div}_h \mathbf{v}^{n+1} = \operatorname{div}_h \tilde{\mathbf{v}} - \tau \operatorname{div}_h \nabla_h P^{n+1} = \operatorname{div}_h \tilde{\mathbf{v}} - \tau \Delta_h P^{n+1} = 0.$$

Оно может быть представлено в виде уравнения Пуассона

$$\Delta_h P^{n+1} = \frac{1}{\tau} \operatorname{div}_h \tilde{\mathbf{v}}.$$

Его решение по итерационной схеме

$$(I - \bar{\tau}\alpha\Lambda_{11})(I - \bar{\tau}\alpha\Lambda_{22}) \frac{P^{v+1} - P^v}{\tau} = \Delta_h P^v - \frac{1}{\tau} (\Lambda_1 \tilde{v}_1 + \Lambda_2 \tilde{v}_2) \quad (5.3.7)$$

или по эквивалентной ей схеме в дробных шагах

$$\begin{aligned} \xi^v &= \Delta_h P^v - \frac{1}{\tau} (\Lambda_1 \tilde{v}_1 + \Lambda_2 \tilde{v}_2), \\ (I - \bar{\tau}\alpha\Lambda_{11}) \xi^{v+1/2} &= \xi^v, \\ (I - \bar{\tau}\alpha\Lambda_{22}) \xi^{v+1} &= \xi^{v+1/2}, \\ P^{v+1} &= P^v + \bar{\tau} \xi^{v+1} \end{aligned}$$

и дает после сходимости итераций новое значение давления, после чего из уравнений для скорости (5.3.6) явно определяются значения  $\mathbf{v}^{n+1}$ . После исключения дробных шагов разностная схема (5.3.5) может быть представлена в каноническом виде

$$(\mathbf{M} + \tau \mathbf{B}_{0h}) \frac{\mathbf{f}^{n+1} - \mathbf{f}^n}{\tau} = - \sum_{j=0}^3 B_{jh} \mathbf{f}^n + \mathbf{F}^n.$$

Эта схема условно устойчива в силу явной аппроксимации операторов  $\mathbf{B}_{jh}$  для  $j = 1, 2, 3$ .

Для повышения устойчивости схем вида (5.3.4) предложены неявные схемы расщепления по физическим процессам различного порядка аппроксимации по времени (см. [14, 32, 82]). Для примера рассмотрим разностную схему, аппроксимирующую исходные уравнения с первым порядком по времени:

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{\mathbf{v}} - \mathbf{v}^n}{\tau} + \sum_{j=1}^3 \tilde{\mathbf{B}}_{jh}^n \tilde{\mathbf{v}} &= -\nabla_h P^n + \tilde{\mathbf{F}}^n, \\ \frac{\mathbf{v}^{n+1} - \mathbf{v}^n}{\tau} + \sum_{j=1}^3 B_{jh}^n \tilde{\mathbf{v}} - \tilde{\mathbf{F}}^n + \nabla_h P^{n+1} &= 0, \quad \operatorname{div}_h \mathbf{v}^{n+1} = 0. \end{aligned} \quad (5.3.8)$$

Ее реализация на первом шаге при вычислении значений скорости  $\tilde{\mathbf{v}}$  сводится к матричным прогонкам или к итерационным алгоритмам. Суммирование уравнений приводит к уравнению

$$\frac{\mathbf{v}^{n+1} - \tilde{\mathbf{v}}}{\tau} + \nabla_h (P^{n+1} - P^n) = 0$$

для определения давления на новом шаге. При подстановке значений  $\mathbf{v}^{n+1}$  в уравнение неразрывности  $\operatorname{div}_h \mathbf{v}^{n+1} = 0$  получаем уравнение Пуассона

$$\operatorname{div}_h \nabla_h (p^{n+1} - p^n) = \frac{1}{\tau} \operatorname{div}_h \tilde{\mathbf{v}}.$$

Его решение может быть получено одним из итерационных методов, (см. [15]). После исключения вспомогательных величин  $\tilde{\mathbf{v}}$  схема (5.3.8) может быть представлена в канонической форме

$$\left( I + \tau \sum_{j=1}^3 \mathbf{B}_{jh} \right) \cdot (\mathbf{M} + \tau B_{0h}) \frac{\mathbf{f}^{n+1} - \mathbf{f}^n}{\tau} = - \sum_{j=0}^3 \mathbf{B}_{jh} \mathbf{f}^n + \mathbf{F}^n. \quad (5.3.9)$$

Остановимся на устойчивости разностных схем. В силу явной аппроксимации конвективных и вязких членов разностная схема (5.3.4) условно устойчива. Устойчивость разностной схемы (5.3.9) будем исследовать спектральным методом для линеаризованных уравнений Навье–Стокса, полученных из (5.1.3):

$$\mathbf{M} \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} + \mathbf{B} \mathbf{f} = 0.$$

Тогда разностная схема (5.3.9) для них примет вид

$$\left( I + \tau \sum_{j=1}^3 \mathbf{B}_j \right) \cdot (\mathbf{M} + \tau \mathbf{B}_0) \frac{\mathbf{f}^{n+1} - \mathbf{f}^n}{\tau} = - \sum_{j=0}^3 \mathbf{B}_j \mathbf{f}^n,$$

где вид разностных операторов приведен в (5.3.1), а коэффициенты уравнений  $v_j, \eta$  полагаются постоянными (в этом случае  $\mathbf{F} = 0$ ). Будем отыскивать решение разностных уравнений в виде

$$\mathbf{f}_{j_1 j_2 j_3}^n = \mathbf{f}_0 \exp \left( \omega t_n + i \sum_{l=1}^3 k_{j_l} x_{j_l} \right) = \lambda^n \mathbf{f}_0 \exp \left( i \sum_{l=1}^3 k_{j_l} j_{j_l} h_{j_l} \right),$$

где  $t_n = n\tau$ ,  $x_l = j_l h_l$ ,  $\lambda = e^{\omega\tau}$ . Пусть, для определенности, разностные операторы  $\Lambda_j, \bar{\Lambda}_j$  аппроксимируют первые производные с первым порядком ( $k = 1$ ). Тогда

$$\tau \Lambda_j \mathbf{f}^n = d_j \mathbf{f}^n, \quad \tau \bar{\Lambda}_j \mathbf{f}^n = \bar{d}_j \mathbf{f}^n, \quad \tau \eta \Lambda_{jj} \mathbf{f}^n = -\eta r_j^2 \mathbf{f}^n,$$

и разностной схеме (5.3.9) соответствует характеристическое уравнение

$$\det \begin{vmatrix} 0 & d_1\lambda & d_2\lambda & d_3\lambda \\ \bar{d}_1[(1+t_0)\lambda - t_0] & (1+t_0)\lambda - 1 & 0 & 0 \\ \bar{d}_2[(1+t_0)\lambda - t_0] & 0 & (1+t_0)\lambda - 1 & 0 \\ \bar{d}_3[(1+t_0)\lambda - t_0] & 0 & 0 & (1+t_0)\lambda - 1 \end{vmatrix} = 0,$$

где, например, для  $v \geq 0$ :

$$\begin{aligned} d_j &= K_j(1 - e^{-ik_j h_j}), \quad \bar{d}_j = K_j(e^{ik_j h_j} - 1), \quad t_j = v_j d_j + \eta r_j^2, \quad t = 1 + t_0, \\ t_0 &= t_1 + t_2 + t_3, \quad r_j^2 = 4(\tau/h_j^2) \sin^2(k_j h_j / 2), \quad K_j = \tau/h_j. \end{aligned} \quad (5.3.10)$$

Его корни равны

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = \frac{t_0}{1+t_0}, \quad \lambda_{3,4} = \frac{1}{1+t_0},$$

и, очевидно,  $|\lambda_j| \leq 1$ , т. е. разностная схема (5.3.8), (5.3.9) для линейных уравнений Навье–Стокса устойчива. Напомним, что схема (5.3.8) на первом шаге реализуется матричными прогонками, а на втором новое значение давления находится из решения уравнения Пуассона.

Для схемы второго порядка аппроксимации при  $k = 2$  характеристическое уравнение примет вид

$$\det \begin{vmatrix} 0 & d_1\lambda & d_2\lambda & d_3\lambda \\ d_1[(1+t_0)\lambda - t_0] & (1+t_0)\lambda - 1 & 0 & 0 \\ d_2[(1+t_0)\lambda - t_0] & 0 & (1+t_0)\lambda - 1 & 0 \\ d_3[(1+t_0)\lambda - t_0] & 0 & 0 & (1+t_0)\lambda - 1 \end{vmatrix} = 0,$$

где

$$\begin{aligned} d_j = \bar{d}_j &= K_j(e^{ik_j h_j} - e^{-ik_j h_j})/2 = iK_j \sin(k_j h_j), \quad t_j = iv_j d_j + \eta r_j^2, \quad t = 1 + t_0, \\ t_0 &= t_1 + t_2 + t_3, \quad r_j^2 = 4(\tau/h_j^2) \sin^2(k_j h_j / 2), \quad K_j = \tau/h_j, \end{aligned}$$

и его корни также равны  $|\lambda_j| \leq 1$ , т. е. разностная схема (5.3.9) безусловно устойчива.

Еще одним алгоритмом вычисления компонент скорости  $\mathbf{v}$  может служить схема стабилизирующей поправки [14, 32], которая для удобства записи может быть представлена в виде

$$\begin{aligned}
\frac{\mathbf{v}^{n+1/6} - \mathbf{v}^n}{\tau} + \widetilde{\mathbf{B}}_{1h}(\mathbf{v}^{n+1/6} - \mathbf{v}^n) &= - \left( \sum_{j=1}^3 \widetilde{\mathbf{B}}_{jh} \mathbf{v}^n + \nabla_h p^n \right) \mathbf{v}^n + \widetilde{\mathbf{F}}^n, \\
\frac{\mathbf{v}^{n+2/6} - \mathbf{v}^{n+1/6}}{\tau} + \widetilde{\mathbf{B}}_{2h}(\mathbf{v}^{n+2/6} - \mathbf{v}^n) &= 0, \\
\frac{\mathbf{v}^{n+3/6} - \mathbf{v}^{n+2/6}}{\tau} + \widetilde{\mathbf{B}}_{2h}(\mathbf{v}^{n+3/6} - \mathbf{v}^n) &= 0, \\
\frac{\mathbf{v}^{n+1} - \mathbf{v}^{n+3/6}}{\tau} + \nabla_h(p^{n+1} - p^n) &= 0, \\
\operatorname{div}_h \mathbf{v}^{n+1} &= 0,
\end{aligned} \tag{5.3.11}$$

где матричные операторы  $\widetilde{\mathbf{B}}_{jh}$  и вектор  $\widetilde{\mathbf{F}}^n$  определены в (5.3.5). Ее реализация на дробных шагах сводится к скалярным прогонкам для вычисления компонент вектора скорости и к решению уравнения Пуассона вида (5.3.7) для нахождения давления. После исключения дробных шагов схема (5.3.11) приводится к канонической форме

$$\prod_{j=1}^3 (I + \tau \mathbf{B}_{jh}) \cdot (\mathbf{M} + \tau \mathbf{B}_{0h}) \frac{\mathbf{f}^{n+1} - \mathbf{f}^n}{\tau} = - \sum_{j=0}^3 \mathbf{B}_{jh} \mathbf{f}^n. \tag{5.3.12}$$

Ей соответствует характеристическое уравнение

$$\det \begin{vmatrix} 0 & d_1 \lambda & d_2 \lambda & d_3 \lambda \\ \bar{d}_1 [T(\lambda - 1) + 1] & T(\lambda - 1) + t_0 & 0 & 0 \\ \bar{d}_2 [T(\lambda - 1) + 1] & 0 & T(\lambda - 1) + t_0 & 0 \\ \bar{d}_3 [T(\lambda - 1) + 1] & 0 & 0 & T(\lambda - 1) + t_0 \end{vmatrix} = 0,$$

корни которого для  $k = 2$  равны

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = \frac{T-1}{T}, \quad \lambda_{3,4} = \frac{T-t_0}{T},$$

где  $t_j = \nu_j d_j + \eta r_j^2$ ,  $d_j = K_j (e^{ik_j h_j} - e^{-ik_j h_j})/2 = iK_j \sin(k_j h_j)$ ,

$$T = \prod_{j=1}^3 (1 + t_j) = 1 + t_0 + R, \quad t_0 = t_1 + t_2 + t_3, \quad R = t_1 t_2 + t_1 t_3 + t_2 t_3 + t_1 t_2 t_3.$$

Если пренебречь конвективными членами в уравнениях, полагая  $\nu_j = 0$  ( $l = 1, 2, 3$ ), то очевидно,

$$|\lambda_j| \leq 1 \quad (j = 1, \dots, 4),$$

т. е. разностная схема (5.3.11) безусловно устойчива. Рассмотрим второй предельный случай  $\eta = 0$ , соответствующий уравнениям Эйлера. Тогда для схемы второго порядка аппроксимации при симметричной аппроксимации первых производных корни характеристического уравнения равны

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = \frac{T-1}{T} = \frac{R_1 - i(\tilde{t}_0 - R_2)}{1 - R_1 + i(\tilde{t}_0 - R_2)}, \quad \lambda_{3,4} = \frac{T-t_0}{T} = \frac{1 - R_1 - iR_2}{1 - R_1 - i(\tilde{t}_0 - R_2)}, \quad (5.3.13)$$

где

$$\tilde{t}_j = v_j K_j \sin(k_j h_j), \quad t_0 = \sum_{j=1}^3 \tilde{t}_j, \quad R_1 = \tilde{t}_1 \tilde{t}_2 + \tilde{t}_1 \tilde{t}_3 + \tilde{t}_2 \tilde{t}_3, \\ R_2 = \tilde{t}_1 \tilde{t}_2 \tilde{t}_3, \quad T = 1 - R_1 + i(t_0 - R_2).$$

Так как

$$|\lambda_2|^2 = \frac{R_1^2 + (\tilde{t}_0 - R_2)^2}{(1 - R_1)^2 + (\tilde{t}_0 - R_2)^2},$$

то, очевидно, что условие  $|\lambda_2|^2 \leq 1$  выполняется лишь при  $R_1 \leq 0,5$  как для двумерных, так и трехмерных задач, поскольку величина  $R_1$  может быть любого знака. Выполнение условия устойчивости  $|\lambda_2| \leq 1$  в соотношении (5.3.13) принимает вид

$$\tau \leq \sqrt{\frac{h_1 h_2}{2|v_1 v_2|}} \quad \text{для } N = 2 \quad \text{и} \quad \tau \leq \frac{h}{\sqrt{6}|v|} \quad \text{для } N = 3,$$

где  $h = \min|h_j|$ ,  $|v| = \max|v_j|$ ,  $N$  – размерность задачи по пространству. Для оставшихся корней характеристического уравнения условие устойчивости

$$|\lambda_{3,4}| = \left| \frac{T-t_0}{T} \right| \leq 1$$

выполняется при условии  $2\tilde{t}_0 R_2 \leq \tilde{t}_0^2$ , что эквивалентно удовлетворению условия

$$\tau \leq \sqrt{1,5} \cdot \frac{h}{|v|}.$$

Подобные оценки справедливы и для схемы первого порядка аппроксимации. Таким образом, схема приближенной факторизации вида (5.3.12) для численного решения уравнений Эйлера несжимае-

мой жидкости **теряет свойство безусловной устойчивости уже в двумерном случае** (см. [106]). Для уравнений Навье–Стокса устойчивость разностной схемы (5.3.12) зависит от соотношения конвективных и вязких членов. Отметим, что для систем эволюционных уравнений схемы приближенной факторизации для двумерных задач безусловно устойчивы при значении весового множителя  $\alpha \geq 0,5$ . Можно ожидать, что полученные оценки устойчивости для линейных уравнений будут справедливы и для нелинейной системы уравнений Навье–Стокса. Отметим, что для модели вязких течений Стокса, в которой отсутствуют конвективные члены в уравнениях движения, эти схемы безусловно устойчивы для задач любой размерности.

### § 5.4. Схема приближенной факторизации

Выше отмечалось, что нестационарные уравнения Навье–Стокса не являются системой уравнений эволюционного типа, что не позволяет применять стандартные методы факторизации при построении разностных схем. Однако при специальном расщеплении операторов такие схемы, основанные на методе факторизации, могут быть построены (см. [106–108]).

Рассмотрим разностную схему с весами (3.3), записанную в каноническом виде:

$$\left( \mathbf{M} + \tau\alpha \sum_{j=0}^3 \mathbf{B}_{jh} \right) \frac{\mathbf{f}^{n+1} - \mathbf{f}^n}{\tau} = -\mathbf{W}_h^n = -\sum_{j=1}^3 \Lambda_j \mathbf{W}_{jh}^n, \quad (5.4.1)$$

и аппроксимирующую уравнения Навье–Стокса (5.1.2) с порядком  $O(\tau^m + h^k)$ . Вид операторов  $\mathbf{B}_{jh}$  и вектора  $\mathbf{W}_h^n$  приведен в (5.3.1). Так как  $\mathbf{B}_{jh} \cdot \mathbf{M} = \mathbf{B}_{jh}$  при  $j = 1, 2, 3$ , то оператор  $\mathbf{C} = \mathbf{M} + \tau\alpha \sum_{j=0}^3 \mathbf{B}_{jh}$  можно представить следующим образом (см. [105]):

$$\begin{aligned} \mathbf{M} + \tau\alpha \sum_{j=0}^3 \mathbf{B}_{jh} &\approx \left( I + \tau\alpha \sum_{j=1}^3 \mathbf{B}_{jh} \right) (\mathbf{M} + \tau\alpha \mathbf{B}_{0h}) = \\ &= \mathbf{M} + \tau\alpha \sum_{j=0}^3 \mathbf{B}_{jh} + \tau^2\alpha^2 \left( \sum_{j=1}^3 \mathbf{B}_{jh} \right) \cdot \mathbf{B}_{0h}. \end{aligned} \quad (5.4.2)$$

Тогда, при замене в (5.4.1) нефакторизованного оператора на факторизованный оператор из (5.4.2), получим разностную схему

$$\left( I + \tau \sum_{j=1}^3 \mathbf{B}_{jh} \right) \cdot (\mathbf{M} + \tau\alpha \mathbf{B}_{0h}) \frac{\mathbf{f}^{n+1} - \mathbf{f}^n}{\tau} = -\mathbf{W}_h^n \quad (5.4.3)$$

или эквивалентную ей схему в дробных шагах

$$\begin{aligned}
 \xi^n &= -\mathbf{W}^n, \\
 (I + \tau\alpha \sum_{j=1}^3 \mathbf{B}_{jh}^n) \xi^{n+1/2} &= \xi^n, \\
 (\mathbf{M} + \tau\alpha \mathbf{B}_{0h}^n) \xi^{n+1} &= \xi^{n+1/2}, \\
 \mathbf{f}^{n+1} &= \mathbf{f}^n + \tau \xi^{n+1},
 \end{aligned} \tag{5.4.4}$$

где, как и выше,  $\xi = (\xi_p, \xi_1, \xi_2, \xi_3)$  — невязки давления и компонент скоростей. Разностная схема (5.4.4), как и схема (5.4.1), аппроксимирует уравнения Навье–Стокса с порядком  $O(\tau + h^k)$  и при установлении консервативна. Остановимся на ее реализации. Значения функций на нулевом шаге  $\xi^n$  вычисляются явно. Для реализации схемы (5.4.4) на первом дробном шаге

$$\left( I + \tau\alpha \sum_{j=1}^3 B_{jh}^n \right) \xi^{n+1/2} = \xi^n \tag{5.4.5}$$

могут быть использованы различные подходы, например, итерационные схемы (см., [12, 15]). Проиллюстрируем реализацию схемы на двумерной задаче. Разностное уравнение (5.4.5), например, для невязки первой компоненты скорости  $\xi_1 = \xi$ , может быть записано в виде

$$\left\{ 1 + \tau\alpha \sum_{j=1}^2 \left[ v_{jh} \Lambda_j + \Lambda_j \eta (1 + \delta_j^i) \Lambda_j \right] \right\} \xi_{l,i}^{n+1/2} = \xi_{l,i}^n$$

или в виде пятиточечного разностного соотношения (при симметричной аппроксимации первых производных)

$$a \xi_{l-1,i}^{n+1/2} + b \xi_{l,i}^{n+1/2} + c \xi_{l+1,i}^{n+1/2} + d \xi_{l,i-1}^{n+1/2} + e \xi_{l,i+1}^{n+1/2} = \xi_{l,i}^n,$$

где

$$a = \tau\alpha \left[ \frac{(v_1)_{l,i}}{2h_1} - \frac{2\eta_{l+1/2,i}}{h_1^2} \right], \quad c = \tau\alpha \left[ \frac{(v_1)_{l,i}}{2h_1} - \frac{2\eta_{l-1/2,i}}{h_1^2} \right],$$

$$d = \tau\alpha \left[ \frac{(v_1)_{l,i}}{2h_2} - \frac{2\eta_{l,i-1/2}}{h_2^2} \right],$$

$$e = \tau\alpha \left[ \frac{(v_1)_{l,i}}{2h_2} - \frac{2\eta_{l,i+1/2}}{h_2^2} \right], \quad b = 1 + 2\tau\alpha \left[ \frac{\eta_{l+1/2,i} + \eta_{l,i-1/2}}{h_1^2} + \frac{\eta_{l,i+1/2} + \eta_{l,i-1/2}}{h_2^2} \right].$$

Ее решение может быть получено одним из итерационных методов [12, 15]. Подобным образом могут быть реализованы разно-

стные уравнения и для остальных невязок компонент скорости (в [107] для вычислений  $\xi^{n+1/2}$  использовался метод простой итерации и метод Зейделя).

На втором дробном шаге схемы (5.4.4) решение системы разностных уравнений

$$\begin{aligned} \tau\alpha(\Lambda_1\xi_1^{n+1} + \Lambda_2\xi_2^{n+1} + \Lambda_3\xi_3^{n+1}) &= \xi_p^{n+1/2}, \\ \xi_1^{n+1} + \tau\alpha\bar{\Lambda}_1\xi_p^{n+1} &= \xi_1^{n+1/2}, \\ \xi_2^{n+1} + \tau\alpha\bar{\Lambda}_2\xi_p^{n+1} &= \xi_2^{n+1/2}, \\ \xi_3^{n+1} + \tau\alpha\bar{\Lambda}_3\xi_p^{n+1} &= \xi_3^{n+1/2}, \end{aligned} \quad (5.4.6)$$

подобно схемам (5.3.6), (5.3.8), сводится к решению уравнения Пуассона

$$\tau^2\alpha^2\Delta_h\xi_p^{n+1} = \tau\alpha\sum_{j=1}^3\Lambda_j\xi_j^{n+1/2} - \xi_p^{n+1/2}, \text{ где } \Delta_h = \sum_{j=1}^3\Lambda_j\bar{\Lambda}_j = \sum_{j=1}^3\Lambda_{jj}.$$

Решение уравнения Пуассона может быть найдено по одной из итерационных схем решения систем алгебраических уравнений, или по безусловно устойчивой схеме приближенной факторизации

$$\prod_{j=1}^3(I - \tilde{\tau}\alpha\Lambda_{jj})\frac{\xi_p^{v+1} - \xi_p^v}{\tau} = R^v, \quad (5.4.7)$$

или по эквивалентной ей схеме в дробных шагах

$$\begin{aligned} \xi_p^v &= R^v, \\ (I - \tilde{\tau}\alpha\Lambda_{11})\xi_p^{v+1/3} &= \xi_p^v, \\ (I - \tilde{\tau}\alpha\Lambda_{22})\xi_p^{v+2/3} &= \xi_p^{v+1/3}, \\ (I - \tilde{\tau}\alpha\Lambda_{33})\xi_p^{v+1} &= \xi_p^{v+2/3}, \\ \xi_p^{v+1} &= \xi_p^{n+1} + \tilde{\tau}\xi_p^{v+1}. \end{aligned} \quad (5.4.8)$$

Здесь  $\xi_p^v = \xi_p^{n+1,v}$ ,  $R^v = \xi_p^{n+1/2} + \tau^2\alpha^2\Delta_h\xi_p^v - \tau\alpha\sum_{j=1}^3\Lambda_j\xi_j^{n+1/2}$ . Разностная схема (5.4.8) реализуется скалярными прогонками по каждому пространственному направлению. После нахождения  $\xi_p^{n+1}$  невязки скоростей явно находятся из соотношений (5.4.6) по формулам

$$\xi_j^{n+1} = \xi_j^{n+1/2} - \tau\alpha\bar{\Lambda}_j\xi_p^{n+1}.$$



Наконец, значения функций  $\mathbf{f}^{n+1}$  на новом временном шаге вычисляются явно из последнего уравнения схемы (5.4.4). Разностная схема (5.4.4), подобно схеме (5.3.9), безусловно устойчива для линеаризованных уравнений Навье–Стокса.

Для получения безытерационной схемы для решения уравнений Навье–Стокса приближенно факторизуем исходный стабилизирующий оператор в схеме (5.4.3) по формуле

$$\mathbf{M} + \tau\alpha \sum_{j=0}^3 B_{jh} \approx \mathbf{C},$$

где

$$\mathbf{C} = \prod_{j=1}^3 (I + \tau\alpha \mathbf{B}_{jh}) \cdot (\mathbf{M} + \tau\alpha \mathbf{B}_{0h}) = \mathbf{M} + \tau\alpha \sum_{j=0}^3 \mathbf{B}_{jh} + O(\tau^2)$$

или

$$\mathbf{C} = (\mathbf{M} + \tau\alpha \mathbf{B}_{0h}) \cdot \prod_{j=1}^3 (I + \tau\alpha \mathbf{B}_{jh}) = \mathbf{M} + \tau\alpha \sum_{j=0}^3 \mathbf{B}_{jh} + O(\tau^2),$$

если изменить порядок дробных шагов. Тогда разностная схема

$$\mathbf{C} \frac{\mathbf{f}^{n+1} - \mathbf{f}^n}{\tau} = -\mathbf{W}_h^n \quad (5.4.9)$$

или эквивалентная схеме в дробных шагах

$$\xi^n = -\mathbf{W}^n,$$

$$(I + \tau\alpha \mathbf{B}_{1h}^n) \xi^{n+1/4} = \xi^n,$$

$$(I + \tau\alpha \mathbf{B}_{2h}^n) \xi^{n+2/4} = \xi^{n+1/4},$$

$$(I + \tau\alpha \mathbf{B}_{3h}^n) \xi^{n+3/4} = \xi^{n+2/4},$$

$$(\mathbf{M} + \tau\alpha \mathbf{B}_{0h}^n) \xi^{n+1} = \xi^{n+3/4},$$

$$\mathbf{f}^{n+1} = \mathbf{f}^n + \tau \xi^{n+1}$$

аппроксимирует уравнения Навье–Стокса с порядком  $O(\tau + h^k)$ , как и базовая схема с весами (5.4.5), а при установлении стационарные уравнения в консервативной форме с порядком  $O(h^k)$ . Ее реализация, подобно схеме (5.3.11), сводится на первых трех дробных шагах к решению системы разностных уравнений

$$\xi_0^{n+j/4} = \xi_0^{n+(j-1)/4},$$

$$\left[ I - \tau\alpha (v_{jh} \Lambda_j - \Lambda_j \eta (1 + \delta_j^1) \Lambda_j) \right] \xi_1^{n+j/4} = \xi_1^{n+(j-1)/4},$$

$$\begin{aligned} \left[ I - \tau\alpha(v_{jh}\Lambda_j - \Lambda_j\eta(1 + \delta_j^2)\Lambda_j) \right] \xi_2^{n+j/4} &= \xi_2^{n+(j-1)/4}, \\ \left[ I - \tau\alpha(v_{jh}\Lambda_j - \Lambda_j\eta(1 + \delta_j^3)\Lambda_j) \right] \xi_3^{n+j/4} &= \xi_3^{n+(j-1)/4} \end{aligned}$$

скалярными прогонками при вычислении невязок компонент скоростей. На последнем дробном шаге решение системы уравнений

$$(\mathbf{M} + \tau\alpha\mathbf{B}_{0h}^n)\xi^{n+1} = \xi^{n+3/4}$$

сводится, подобно схеме (5.4.7), (5.4.8), к решению уравнения Пуассона для нахождения невязок давления. Предложенная разностная схема пригодна для решения как нестационарных, так и стационарных задач. В последнем случае стационарное решение находится методом установления как предельное решение нестационарных уравнений со стационарными граничными условиями. Заметим, что в целых шагах схемы (5.3.12) и (5.4.9) различаются только аппроксимацией оператора правой части: в схеме (5.3.12) уравнения Навье–Стокса аппроксимируются в недивергентной форме, а в схеме (5.4.9) – в дивергентной. Как показал проведенный выше анализ устойчивости, схема (5.4.9), подобно (5.3.12), условно устойчива в двумерном и трехмерном случае для линеаризованных уравнений Навье–Стокса.

## § 5.5. Метод искусственной сжимаемости

Как отмечалось выше, особенностью системы уравнений Навье–Стокса вязкой несжимаемой жидкости является отсутствие производной по времени в уравнении неразрывности, что не позволяет применять стандартные методы факторизации и расщепления. В работах [8, 85, 86] было предложено заменить уравнение Навье–Стокса несжимаемой жидкости моделью слабо сжимаемой жидкости, представив уравнение неразрывности в виде

$$\varepsilon \frac{\partial p}{\partial t} + p \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \quad (5.5.1)$$

или в виде

$$\varepsilon \frac{\partial p}{\partial t} + c^2 \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad (5.5.2)$$

где  $\varepsilon$  и  $c^2$  – произвольные постоянные. Решение уравнений (5.5.1), (5.5.2) не имеет физического смысла, пока не достигнуто стационарное решение  $\partial p / \partial t = 0$ . Таким образом, условие  $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$  выполняется только в случае сходимости или при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Система уравнений

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{\partial p}{\partial t} + p \operatorname{div} \mathbf{v} &= 0, \\ \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \operatorname{div}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} - \mathbf{G}) + \nabla p &= 0 \end{aligned} \quad (5.5.3)$$

является уже системой, разрешенной относительно производной по времени и в пределе при  $\varepsilon \rightarrow 0$  аппроксимирует систему уравнений вязкой несжимаемой жидкости. Метод, основанный на решении системы уравнений (5.5.3), может быть назван псевдонестационарным [40, 42], так как переменная  $t$ , входящая в уравнение неразрывности в качестве времени, не имеет физического смысла.

Ограничимся для простоты изложения при построении численных алгоритмов двумерным случаем (обобщение на трехмерный случай не представляет затруднений). Представим систему уравнений (5.5.3) в векторном виде в дивергентной

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} = -\mathbf{W}, \quad \mathbf{W} = \sum_{j=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_j} \mathbf{W}_j \quad (5.5.4)$$

и недивергентной

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} + \sum_{j=1}^2 \mathbf{B}_j \mathbf{f} = \mathbf{F} \quad (5.5.5)$$

формах, где

$$\mathbf{f} = \begin{pmatrix} p \\ v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \mathbf{W}_j}{\partial x_j} = \begin{pmatrix} \frac{p}{\varepsilon} \frac{\partial v_j}{\partial x_j} \\ \frac{\partial}{\partial x_j} (v_1 v_j + \delta_j^1 p - \tau_{1j}) \\ \frac{\partial}{\partial x_j} (v_2 v_j + \delta_j^2 p - \tau_{2j}) \end{pmatrix}, \quad \tau_{ij} = \eta \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right),$$

$$\mathbf{B}_j = \begin{pmatrix} 0 & \delta_j^1 \frac{p}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial x_j} & \delta_j^2 \frac{p}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial x_j} \\ \delta_j^1 \frac{\partial}{\partial x_j} & v_j \frac{\partial}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} b_j^1 \frac{\partial}{\partial x_j} & 0 \\ \delta_j^2 \frac{\partial}{\partial x_j} & 0 & v_j \frac{\partial}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} b_j^2 \frac{\partial}{\partial x_j} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \eta \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_1} \eta \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \end{pmatrix},$$

а  $b_j^i = \eta(1 + \delta_j^i)$ . Отметим эквивалентность представления уравнений в дивергентной (5.5.4) и недивергентной (5.5.5) формах в силу выполнения условий

$$\mathbf{W} = \sum_{j=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_j} \mathbf{W}_j = \sum_{j=1}^2 \mathbf{B}_j \mathbf{f} - \mathbf{F}. \quad (5.5.6)$$

Введем, как и выше, сеточные функции  $\mathbf{f}^n$  в узлах сетки и аппроксимируем операторы  $\mathbf{B}_j$  и векторы  $\mathbf{W}$ ,  $\mathbf{F}$  в системе уравнений (5.5.4), (5.5.5) соответственно операторами  $\mathbf{B}_{jh}$  и векторами  $\mathbf{W}_h$ ,  $\mathbf{F}_h$  с порядком  $O(h_j^k)$  по формулам

$$\mathbf{B}_{jh} = \begin{pmatrix} 0 & \delta_j^1 \frac{p}{\varepsilon} \Lambda_j & \delta_j^2 \frac{p}{\varepsilon} \Lambda_j \\ \delta_j^1 \bar{\Lambda}_j & v_j \Lambda_j - \Lambda_j b_j^1 \Lambda_j & 0 \\ \delta_j^2 \bar{\Lambda}_j & 0 & v_j \Lambda_j - \Lambda_j b_j^2 \Lambda_j \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ f_{1h} \\ f_{2h} \end{pmatrix}, \quad (5.5.7)$$

$$\mathbf{W}_h = - \sum_{j=1}^2 \Lambda_j \mathbf{W}_{jh}, \quad \Lambda_j \mathbf{W}_{jh} = \begin{pmatrix} \frac{p}{\varepsilon} \Lambda_j v_j \\ \Lambda_j v_1 v_j + \delta_j^1 \bar{\Lambda}_j p - \Lambda_j \eta (\Lambda_j v_1 + \Lambda_1 v_j) \\ \Lambda_j v_2 v_j + \delta_j^2 \bar{\Lambda}_j p - \Lambda_j \eta (\Lambda_j v_2 + \Lambda_2 v_j) \end{pmatrix}. \quad (5.5.8)$$

Первые производные  $\partial/\partial x_j$  в операторах  $\mathbf{B}_{jh}$  и векторах  $\Lambda_j \mathbf{W}_{jh}$  аппроксимируем с порядком  $O(h^k)$  по формулам (5.3.2). Вторые производные в исходных уравнениях (5.4.4), (5.5.5) аппроксимируем симметричными операторами с порядком  $O(h^2)$ . Таким образом,

$$\mathbf{W} = \mathbf{W}_h + O(h^2), \quad \mathbf{B}_j = \mathbf{B}_{jh} + O(h_j^k), \quad \mathbf{F} = \mathbf{F}_h + O(h^2),$$

где  $h = \max(h_j)$ . Остановимся на изложении основных неявных методов решения уравнений Навье–Стокса.

### 5.5.1. Схема расщепления по направлениям

Следуя идеологии расщепления, (см. [8, 85, 86]), будем искать решение уравнений (5.5.5) в два этапа: на первом дробном шаге в интервале времени  $t_n \leq t \leq t_{n+1/2}$  решается система уравнений

$$\frac{1}{2} \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} + \mathbf{B}_1 \mathbf{f} = \mathbf{F}_1,$$

а на втором дробном шаге при  $t_{n+1/2} \leq t \leq t_{n+1}$  система

$$\frac{1}{2} \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} + \mathbf{B}_2 \mathbf{f} = \mathbf{F}_2,$$

где операторы  $\mathbf{B}_j$  определены выше, а  $\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$ . Так как правые части уравнений аппроксимируются на нижнем слое, то без понижения порядка аппроксимации будем полагать, что

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1, \quad \mathbf{F}_2 = 0.$$

Аппроксимируем матричные операторы  $\mathbf{B}_j$  разностными операторами  $\mathbf{B}_{jh}^*$  с порядком  $O(h^k)$ , подобно (5.5.7). Для аппроксимации расщепленных уравнений рассмотрим, следуя [8], разностную схему расщепления с весами

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{f}^{n+1/2} - \mathbf{f}^n}{\tau} + \mathbf{B}_{1h}^* (\alpha \mathbf{f}^{n+1/2} + \beta \mathbf{f}^n) &= \mathbf{F}_h^n, \\ \frac{\mathbf{f}^{n+1} - \mathbf{f}^{n+1/2}}{\tau} + \mathbf{B}_{2h}^* (\alpha \mathbf{f}^{n+1} + \beta \mathbf{f}^{n+1/2}) &= 0. \end{aligned} \quad (5.5.9)$$

Здесь  $\mathbf{B}_{1h}^*$  – матричные операторы, коэффициенты которых задаются соответственно на нижнем временном слое  $n$  или на дробных слоях по формулам

$$\mathbf{B}_{1h}^* = \alpha \mathbf{B}_{1h}^{n+1/2} + \beta \mathbf{B}_{1h}^n, \quad \mathbf{B}_{2h}^* = \alpha \mathbf{B}_{1h}^{n+1} + \beta \mathbf{B}_{1h}^{n+1/2},$$

где

$$B_{jh}^* = \begin{pmatrix} 0 & \delta_j^1 \frac{p^*}{\varepsilon} \Lambda_j & \delta_j^2 \frac{p^*}{\varepsilon} \Lambda_j \\ \delta_j^1 \bar{\Lambda}_j & v_j^* \Lambda_j - \Lambda_j b_j^1 \Lambda_j & 0 \\ \delta_j^2 \bar{\Lambda}_j & 0 & v_j^* \Lambda_j - \Lambda_j b_j^2 \Lambda_j \end{pmatrix}, \quad b_j^i = \eta^* (1 + \delta_j^i).$$

Разностная схема (5.5.9) аппроксимирует уравнения Навье–Стокса (5.5.5) с порядком  $O(\tau^m + h^k)$ , где  $m = 2$  при  $\alpha = 0,5 + O(\tau)$ . При  $\alpha \neq 0$  она нелинейна. Остановимся на ее реализации. На первом дробном шаге схемы (5.5.9) система разностных уравнений

$$\begin{aligned} & \frac{p^{n+1/2} - p^n}{\tau} + \frac{p^*}{\varepsilon} \Lambda_1 (\alpha v_1^{n+1/2} + \beta v_1^n) = 0, \\ & \frac{v_1^{n+1/2} - v_1^n}{\tau} + \left[ v_1^* \Lambda_1 - 2\Lambda_1 \eta^* \Lambda_1 \right] (\alpha v_1^{n+1/2} + \beta v_1^n) + \bar{\Lambda}_1 (\alpha p^{n+1/2} + \beta p^n) = f_{1h}, \\ & \frac{v_2^{n+1/2} - v_2^n}{\tau} + \left[ v_1^* \Lambda_1 - \Lambda_1 \eta^* \Lambda_1 \right] (\alpha v_2^{n+1/2} + \beta v_2^n) = f_{2h}, \end{aligned} \quad (5.5.10)$$

где  $d^* = \alpha d^{n+1/2} + \beta d^n$  ( $d = p, v_1, \eta$ ), решается в следующей последовательности. Исключая значение  $p^{n+1/2}$  из уравнения движения, получим разностное уравнение

$$\begin{aligned} & \left[ I + \tau \alpha (v_1^* \Lambda_1 - 2\Lambda_1 \eta^* \Lambda_1 - \frac{\tau \alpha}{\varepsilon} \bar{\Lambda}_1 \frac{p^*}{\varepsilon} \Lambda_1) \right] v_1^{n+1/2} = \\ & = \left[ I - \tau \beta (v_1^* \Lambda_1 - 2\Lambda_1 \eta^* \Lambda_1 - \frac{\tau \alpha}{\varepsilon} \bar{\Lambda}_1 \frac{p^*}{\varepsilon} \Lambda_1) \right] v_1^n - \tau \beta \bar{\Lambda}_1 p^n. \end{aligned}$$

Его решение находится трехточечной скалярной прогонкой (при известных значениях  $v_1^*, p^*$ ), после чего явно вычисляются значения  $p^{n+1/2}$  из первого уравнения (5.5.10). Если коэффициенты разностной схемы аппроксимированы неявно, то для реализации схемы необходимо вводить внутренние итерации. Разностное уравнение для компоненты скорости  $v_2^{n+1/2}$  решается скалярной прогонкой независимо от двух первых.

Разностные уравнения на втором дробном шаге

$$\begin{aligned} & \frac{p^{n+1} - p^{n+1/2}}{\tau} + \frac{p^*}{\varepsilon} \Lambda_2 (\alpha v_2^{n+1} + \beta v_2^{n+1/2}) = 0, \\ & \frac{v_1^{n+1} - v_1^{n+1/2}}{\tau} + \left[ v_2^* \Lambda_2 - \Lambda_2 \eta^* \Lambda_2 \right] (\alpha v_1^{n+1} + \beta v_1^{n+1/2}) = 0, \\ & \frac{v_2^{n+1} - v_2^{n+1/2}}{\tau} + \left[ v_2^* \Lambda_2 - 2\Lambda_2 \eta^* \Lambda_2 \right] (\alpha v_2^{n+1} + \beta v_2^{n+1/2}) + \bar{\Lambda}_2 (\alpha p^{n+1} + \beta p^{n+1/2}) = 0, \end{aligned}$$

решаются подобно (5.5.10) также скалярными прогонками.

В [8, 85] коэффициенты матриц  $\mathbf{B}_{1h}^*$  задавались на  $n$ -м слое, что позволило избежать итераций, а первые производные  $\partial/\partial x_j$  в операторах  $\mathbf{B}_{jh}$  были аппроксимированы несимметричными операторами с учетом знака скорости с первым порядком. Как следствие, разностная схема (5.5.9) имела первый порядок аппроксимации по всем переменным. Для линейаризованных уравнений Навье–Стокса (5.5.5) при  $\alpha \geq 0,5$  она безусловно устойчива, как и всякая схема расщепления.

### 5.5.2. Схема приближенной факторизации

Разностную схему, реализуемую скалярными прогонками, можно построить и на основе метода факторизации (см. § 1.10). Аппроксимируем систему уравнений (5.5.5) разностной схемой с весами

$$\frac{\mathbf{f}^{n+1} - \mathbf{f}^n}{\tau} + \sum_{j=1}^2 \mathbf{B}_{jh} (\alpha \mathbf{f}^{n+1} + \beta \mathbf{f}^n) = \mathbf{F}_h^n$$

и перепишем ее в каноническом виде

$$\left( I + \tau \alpha \sum_{j=1}^2 \mathbf{B}_{jh} \right) \frac{\mathbf{f}^{n+1} - \mathbf{f}^n}{\tau} = - \sum_{j=1}^2 \mathbf{B}_{jh} \mathbf{f}^n + \mathbf{F}_h^n$$

или с учетом соотношений (5.5.6) в предельно дивергентном виде

$$\left( I + \tau \alpha \sum_{j=1}^2 \mathbf{B}_{jh} \right) \frac{\mathbf{f}^{n+1} - \mathbf{f}^n}{\tau} = -\mathbf{W}_h^n. \quad (5.5.11)$$

С учетом соотношений

$$\prod_{j=1}^2 (I + \tau \alpha \mathbf{B}_{jh}^n) \approx I + \tau \alpha \sum_{j=1}^2 \mathbf{B}_{jh}^n$$

разностная схема

$$\prod_{j=1}^2 \left( I + \tau \alpha \mathbf{B}_{jh}^n \right) \frac{\mathbf{f}^{n+1} - \mathbf{f}^n}{\tau} = -\mathbf{W}_h^n \quad (5.5.12)$$

или эквивалентная ей схема в дробных шагах

$$\begin{aligned} \xi^n &= -\mathbf{W}_h^n, \\ (I + \tau \alpha \mathbf{B}_{1h}^n) \xi^{n+1/2} &= \xi^n, \\ (I + \tau \alpha \mathbf{B}_{2h}^n) \xi^{n+1} &= \xi^{n+1/2}, \\ \mathbf{f}^{n+1} &= \mathbf{f}^n + \tau \xi^{n+1} \end{aligned} \quad (5.5.13)$$

аппроксимирует исходные уравнения (5.5.4) с порядком  $O(\tau + h^k)$  и, подобно схеме расщепления (5.5.9), реализуется на дробных шагах скалярными прогонками. В линейном приближении она также безусловно устойчива при  $\alpha \geq 0,5$ . Для повышения порядка аппроксимации первые производные в операторе правой части  $\mathbf{W}_h^n$  в схеме (5.5.12) могут быть аппроксимированы симметричными операторами со вторым порядком, а в операторах левой части  $\mathbf{B}_{jh}^n$  – с первым порядком

несимметричными операторами с учетом знака скорости, подобно (5.5.7). Тогда разностная схема

$$\prod_{j=1}^2 (I + \tau\alpha \tilde{\mathbf{B}}_{jh}^n) \frac{\mathbf{f}^{n+1} - \mathbf{f}^n}{\tau} = - \sum_{j=1}^2 \Lambda_j^2 \mathbf{W}_{jh}^n, \quad (5.5.14)$$

или эквивалентная ей схема в дробных шагах

$$\begin{aligned} \xi^n &= -\mathbf{W}_h^n, \\ (I + \tau\alpha \tilde{\mathbf{B}}_{1h}^n) \xi^{n+1/2} &= \xi^n, \\ (I + \tau\alpha \tilde{\mathbf{B}}_{2h}^n) \xi^{n+1} &= \xi^{n+1/2}, \\ \mathbf{f}^{n+1} &= \mathbf{f}^n + \tau \xi^{n+1} \end{aligned}$$

аппроксимирует систему уравнений (5.5.4) с порядком  $O(\tau + \tau h + h^2)$ , а при установлении – стационарные уравнения Навье–Стокса в консервативной форме с порядком  $O(h^2)$ . Значительного упрощения реализации схемы на дробных шагах не происходит, однако за счет аппроксимации конвективных членов в  $\mathbf{B}_{jh}$  с первым порядком прогонки становятся хорошо обусловленными и не имеют ограничений на шаги сетки, в отличие от симметричной аппроксимации первых производных. Отметим, что при несогласованной аппроксимации производных в стабилизирующем операторе и правой части устойчивость разностной схемы (5.5.14) понижается. При получении стационарного решения все уравнения решаются до установления, а выбор коэффициента искусственной сжимаемости  $\varepsilon$  влияет лишь на скорость сходимости. При решении нестационарных задач необходимо ввести внутренние итерации до выполнения уравнения неразрывности на каждом временном шаге или выбирать параметр искусственной сжимаемости  $\varepsilon$  порядка аппроксимации схемы или  $O(h^{k+1})$ .

## § 5.6. Схемы в криволинейных координатах

Остановимся на особенностях построения разностных схем для уравнений Навье–Стокса, записанных в преобразованных криволинейных координатах. Ограничимся, как и выше, рассмотрением схем двумерных уравнений. Представим уравнения Навье–Стокса в дивергентной и недивергентной формах

$$\mathbf{M} \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} = -\mathbf{B}\mathbf{f} + \mathbf{F} = -\mathbf{W}, \quad \mathbf{W} = \sum_{j=1}^2 \frac{\partial \mathbf{W}_j}{\partial x_j}, \quad \mathbf{B} = \sum_{j=0}^2 \mathbf{B}_j,$$



где

$$\mathbf{f} = \begin{pmatrix} p \\ v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}_0 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 & 0 \\ \frac{\partial}{\partial x_2} & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{B}_j = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & v_j \frac{\partial}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} b_j^1 \frac{\partial}{\partial x_j} & 0 \\ 0 & 0 & v_j \frac{\partial}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} b_j^2 \frac{\partial}{\partial x_j} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{W}_j = \begin{pmatrix} v_j \\ v_1 v_j + \delta_{j1} p - \tau_{j1} \\ v_2 v_j + \delta_{j2} p - \tau_{j2} \end{pmatrix},$$

$$\tau_{ij} = \eta \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right), \quad b_j^i = \eta (1 + \delta_j^i).$$

Пусть

$$q_l = q_l(x_j), \quad j, l = 1, 2$$

– невырожденное преобразование координат, переводящее расчетную область в единичный квадрат. В новых координатах система уравнений Навье–Стокса вновь может быть представлена в дивергентной форме

$$\mathbf{M} \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} = -\overline{\mathbf{W}} \quad (5.6.1)$$

или в недивергентном виде

$$\mathbf{M} \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} = -\tilde{\mathbf{B}} \mathbf{f} + \mathbf{F},$$

где, как и выше,

$$-\tilde{\mathbf{B}} \mathbf{f} + \mathbf{F} = -\overline{\mathbf{W}}, \quad \text{а} \quad \tilde{\mathbf{B}} = -\sum_{j=1}^2 \tilde{\mathbf{B}}_j, \quad \overline{\mathbf{W}} = -\sum_{j=1}^2 \frac{\partial}{\partial q_j} \overline{\mathbf{W}}_j,$$

$$\bar{\mathbf{W}}_j = \frac{1}{J} (z_1^j \mathbf{W}_1 + z_2^j \mathbf{W}_2),$$

$$J = \det \begin{vmatrix} z_1^1 & z_2^1 \\ z_1^2 & z_2^2 \end{vmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{B}}_j = \begin{pmatrix} 0 & z_j^1 \frac{\partial}{\partial q_j} & z_j^2 \frac{\partial}{\partial q_j} \\ z_j^1 \frac{\partial}{\partial q_j} & V_j \frac{\partial}{\partial q_j} + \bar{b}_j & 0 \\ z_j^2 \frac{\partial}{\partial q_j} & 0 & V_j \frac{\partial}{\partial q_j} + \bar{b}_{jj} \end{pmatrix}, \quad z_j^i = \frac{\partial q_i}{\partial x_j},$$

$V_j = z_j^1 v_1 + z_j^2 v_2$  – компонента скорости в направлении  $q_j$ , а  $\bar{b}_j^l = \sum_{i=1}^2 z_i^j \frac{\partial}{\partial q_j} b_i^l z_i^j \frac{\partial}{\partial q_j}$  – повторные производные в направлении  $q_j$ .

Таким образом, матричные операторы  $\tilde{\mathbf{B}}_j$  содержат все члены уравнений с первыми производными и повторные производные по каждому направлению  $q_j$ , а вектор  $\mathbf{F}$  – оставшиеся члены (смешанные производные в новых координатах). Заметим, что структура матричных операторов  $\tilde{\mathbf{B}}_j$  в преобразованных координатах совпадает со структурой операторов  $\mathbf{B}_j$  в декартовых координатах. Поэтому для построения разностных схем решения системы уравнений (5.6.1) могут быть использованы алгоритмы, описанные выше (5.3–5.5). Остановимся, для примера, на алгоритме построения схем приближенной факторизации.

### 5.6.1. Схема приближенной факторизации

Аппроксимируем матричные операторы  $\tilde{\mathbf{B}}_j$  и вектор  $\bar{\mathbf{W}}$  в (5.6.1) соответственно сеточными операторами

$$\tilde{\mathbf{B}}_{jh} = \begin{pmatrix} 0 & z_j^1 \Lambda_j & z_j^2 \Lambda_j \\ z_j^1 \bar{\Lambda}_j & V_j \Lambda_j - \bar{b}_{jh}^1 & 0 \\ z_j^2 \bar{\Lambda}_j & 0 & V_j \Lambda_j - \bar{b}_{jh}^2 \end{pmatrix}$$

и вектором  $\bar{\mathbf{W}}_h$  подобно (5.3.1) порядком  $O(h^k)$ . Представим оператор  $\tilde{\mathbf{B}}$  в виде суммы операторов

$$\tilde{\mathbf{B}} = - \sum_{j=0}^2 \bar{\mathbf{B}}_j, \quad (5.6.2)$$

где

$$\bar{\mathbf{B}}_{0h} = \begin{pmatrix} 0 & \sum_{i=1}^2 z_1^i \Lambda_i & \sum_{i=1}^2 z_2^i \Lambda_i \\ \sum_{i=1}^2 z_1^i \Lambda_i & 0 & 0 \\ \sum_{i=1}^2 z_2^i \Lambda_i & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\bar{\mathbf{B}}_{jh} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & V_j \Lambda_j - \bar{b}_{jh}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & V_j \Lambda_j - \bar{b}_{jh}^{-2} \end{pmatrix} \quad (j = 1, 2).$$

Рассмотрим разностную схему с весами вида (5.3.3), записанную в каноническом виде:

$$\left( M + \tau \alpha \sum_{j=0}^2 \bar{\mathbf{B}}_{jh} \right) \frac{\mathbf{f}^{n+1} - \mathbf{f}^n}{\tau} = -\mathbf{W}_h^n. \quad (5.6.3)$$

Для получения факторизованной схемы приближенно факторизуем исходный стабилизирующий оператор в (5.6.3) по формуле

$$\mathbf{M} + \tau \alpha \sum_{j=0}^2 \bar{\mathbf{B}}_{jh} \approx \prod_{j=1}^2 (I + \tau \alpha \bar{\mathbf{B}}_{jh}) \cdot (\mathbf{M} + \tau \alpha \bar{\mathbf{B}}_{0h}) = \mathbf{M} + \tau \alpha \sum_{j=0}^2 \bar{\mathbf{B}}_{jh} + O(\tau^2).$$

Тогда разностная схема

$$\prod_{j=1}^2 (I + \tau \alpha \bar{\mathbf{B}}_{jh}) \cdot (\mathbf{M} + \tau \alpha \bar{\mathbf{B}}_{0h}) \frac{\mathbf{f}^{n+1} - \mathbf{f}^n}{\tau} = -\mathbf{W}_h^n \quad (5.6.4)$$

или эквивалентная ей схема в дробных шагах

$$\begin{aligned} \xi^n &= -\mathbf{W}^n, \\ (I + \tau \alpha \bar{\mathbf{B}}_{1h}^n) \xi^{n+1/3} &= \xi^n, \\ (I + \tau \alpha \bar{\mathbf{B}}_{2h}^n) \xi^{n+2/3} &= \xi^{n+1/3}, \\ (\mathbf{M} + \tau \alpha \bar{\mathbf{B}}_{0h}^n) \xi^{n+1} &= \xi^{n+2/3}, \\ \mathbf{f}^{n+1} &= \mathbf{f}^n + \tau \xi^{n+1} \end{aligned} \quad (5.6.5)$$

аппроксимирует уравнения Навье–Стокса (5.6.1) с порядком  $O(\tau + h^k)$ , как и базовая схема с весами (5.6.3), а при установлении – стационарные уравнения в консервативной форме с порядком  $O(h^k)$ . Ее решение находится на первых двух дробных шагах скалярными прогонками при вычислении невязок

$$(I + \tau\alpha \overline{\mathbf{B}}_{jh}^n) \xi^{n+1/3} = \xi^{n+(j-1)/3}$$

для каждой из компонент скорости  $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ , так как операторы  $\overline{\mathbf{B}}_{jh}^n$  содержат ненулевые члены только на главной диагонали, и сохранении  $\xi_p^{n+j/3} = \xi_p^n$ . На последнем дробном шаге решение векторного уравнения

$$(\mathbf{M} + \tau\alpha \overline{\mathbf{B}}_{0h}^n) \xi^{n+1} = \xi^{n+2/3}$$

сводится к решению системы линейных уравнений

$$\begin{aligned} \tau\alpha \left( z_1^1 \Lambda_1 \xi_1^{n+1} + z_2^1 \Lambda_1 \xi_2^{n+1} + z_1^2 \Lambda_1 \xi_1^{n+1} + z_2^2 \Lambda_2 \xi_2^{n+1} \right) &= \xi_p^{n+1/2}, \\ \xi_1^{n+1} + \tau\alpha \left( z_1^1 \overline{\Lambda}_1 + z_1^2 \overline{\Lambda}_2 \right) \xi_p^{n+1} &= \xi_1^{n+1/2}, \\ \xi_2^{n+1} + \tau\alpha \left( z_2^1 \overline{\Lambda}_1 + z_2^2 \overline{\Lambda}_2 \right) \xi_p^{n+1} &= \xi_2^{n+1/2}. \end{aligned} \quad (5.6.6)$$

Их решение, подобно (5.4.7), сводится к решению уравнения Пуассона для невязки давления

$$\tau^2 \alpha^2 \Delta_h \xi_p^{n+1} = \tau\alpha \sum_{j=1}^2 (z_j^1 \Lambda_1 + z_j^2 \Lambda_2) \xi_j^{n+2/3} - \xi_p^n,$$

где разностный оператор Лапласа

$$\Delta_h = \sum_{j=1}^2 (z_j^1 \Lambda_1 + z_j^2 \Lambda_2) (z_j^1 \overline{\Lambda}_1 + z_j^2 \overline{\Lambda}_2)$$

содержит, наряду с повторными производными, также и смешанные производные. Решение уравнения Пуассона может быть найдено по одной из итерационных схем решения систем алгебраических уравнений (см. [12, 15]) или по схеме приближенной факторизации

$$\prod_{j=1}^2 (I - \tilde{\tau}\alpha \Lambda_{jj}) \frac{\xi_p^{v+1} - \xi_p^v}{\tau} = R^v, \quad (5.6.7)$$

где  $\xi_p^v = \xi_p^{n+1, v}$ , стабилизирующий оператор содержит только повторные производные  $\Lambda_{jj} = z_j^1 \Lambda_j z_j^1 \overline{\Lambda}_j$ , а оператор правой части – оставшиеся члены

$$R^v = \xi_p^{n+1/2} + \tau^2 \alpha^2 \Delta_h \xi_p^v - \tau \alpha \sum_{j=1}^2 (z_j^1 \Lambda_1 + z_j^2 \Lambda_2) \xi_j^{n+2/3}.$$

Ей эквивалентна схема в дробных шагах

$$\begin{aligned} \xi_p^v &= R^v, \\ (I - \tilde{\tau} \alpha \Lambda_{11}) \xi_p^{v+1/2} &= \xi_p^v, \\ (I - \tilde{\tau} \alpha \Lambda_{11}) \xi_p^{v+1} &= \xi_p^{v+1/2}, \\ \xi_p^{v+1} &= \xi_p^{n+1} + \tilde{\tau} \xi_p^{v+1}, \end{aligned}$$

реализуемая скалярными прогонками по каждому направлению. Итерационный параметр  $\tilde{\tau}$  выбирается лишь из условия наиболее быстрой сходимости итераций. После нахождения  $\xi_p^{n+1}$  невязки скоростей находятся явно из (5.6.6) по формулам

$$\xi_j^{n+1} = \xi_j^{n+1/2} - \tilde{\tau} \alpha (z_1^1 \bar{\Lambda}_1 + z_1^2 \bar{\Lambda}_2) \xi_p^{n+1} \quad (j = 1, 2).$$

Наконец, значения функций  $\mathbf{f}^{n+1}$  на новом временном шаге вычисляются явно из последнего уравнения схемы (5.6.5). Отметим, что в предложенной схеме (5.6.7) решения уравнения Пуассона неявно аппроксимированы лишь повторные производные, а смешанные учитываются лишь в операторе правой части. Это может приводить к понижению устойчивости схемы и, как следствие, понижению скорости сходимости итераций. Предложенная разностная схема пригодна для решения как нестационарных, так и стационарных задач.

### 5.6.2. Схемы в методе искусственной сжимаемости

Рассмотрим особенности построения разностных схем для уравнений Навье–Стокса в преобразованных криволинейных координатах при использовании модели искусственной сжимаемости (5.5.4). В новых координатах система уравнений может быть представлена в недивергентной

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} = -\tilde{\mathbf{B}} \mathbf{f} + \mathbf{F}$$

и предельно дивергентной

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} = -\widehat{\mathbf{M}} \mathbf{W}$$

формах, где они связаны соотношениями

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} = -\widetilde{\mathbf{B}}\mathbf{f} + \mathbf{F} = -\widetilde{\mathbf{M}}\overline{\mathbf{W}}. \quad (5.6.8)$$

Здесь

$$\widetilde{\mathbf{B}} = -\sum_{j=1}^2 \widetilde{\mathbf{B}}_j \mathbf{f}, \quad \overline{\mathbf{W}} = -\sum_{j=1}^2 \frac{\partial}{\partial q_j} \overline{\mathbf{W}}_j, \quad \overline{\mathbf{W}}_j = \frac{z_1^j \mathbf{W}_1 + z_2^j \mathbf{W}_2}{J}, \quad J = \det \begin{vmatrix} z_1^1 & z_2^1 \\ z_1^2 & z_2^2 \end{vmatrix},$$

$$\widetilde{\mathbf{M}} = J \begin{pmatrix} \frac{\varepsilon}{p} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \widetilde{\mathbf{B}}_j = \begin{pmatrix} 0 & z_1^j \frac{p}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial q_j} & z_2^j \frac{p}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial q_j} \\ z_1^j \frac{\partial}{\partial q_j} & V_j \frac{\partial}{\partial q_j} + \bar{b}_j^{-1} & 0 \\ z_2^j \frac{\partial}{\partial q_j} & 0 & V_j \frac{\partial}{\partial q_j} + \bar{b}_j^{-2} \end{pmatrix}, \quad V_j = z_1^j v_1 + z_2^j v_2,$$

$\bar{b}_j^{-l} = \sum_{i=1}^2 z_i^j \frac{\partial}{\partial q_j} b_i^l z_i^j \frac{\partial}{\partial q_j}$  – повторные производные в направлении  $q_j$ .

Аппроксимируем матричные операторы  $\widetilde{\mathbf{B}}_j$  и  $\overline{\mathbf{W}}$  соответственно разностными операторами

$$\widetilde{\mathbf{B}}_{jh} = \begin{pmatrix} 0 & z_j^1 \frac{p}{\varepsilon} \Lambda_j & z_j^2 \frac{p}{\varepsilon} \Lambda_j \\ z_j^1 \Lambda_j & V_j \Lambda_j \frac{\partial}{\partial q_j} + \bar{b}_{jh}^{-1} & 0 \\ z_j^2 \Lambda_j & 0 & V_j \Lambda_j + \bar{b}_{jh}^{-1} \end{pmatrix},$$

$\overline{\mathbf{W}}_h = \sum_{j=1}^2 \Lambda_j \overline{\mathbf{W}}_{jh}$  с порядком  $O(h^k)$  подобно (5.5.7) и (5.5.8). Коэффициенты в матричных операторах  $\widetilde{\mathbf{B}}_{jh}$  будем задавать на  $n$ -м слое. Представим оператор  $\widetilde{\mathbf{B}}_h$  в виде расщепления

$$\widetilde{\mathbf{B}}_h = \sum_{j=0}^2 \widetilde{\mathbf{B}}_{jh}, \quad (5.6.9)$$

где

$$\tilde{\mathbf{B}}_{0h} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{p}{\varepsilon} \sum_{l=1}^2 z_1^l \Lambda_l & \frac{p}{\varepsilon} \sum_{l=1}^2 z_2^l \Lambda_l \\ \sum_{l=1}^2 z_1^l \bar{\Lambda}_l & 0 & 0 \\ \sum_{l=1}^2 z_2^l \bar{\Lambda}_l & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{\mathbf{B}}_{jh} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & V_j \Lambda_j - \bar{b}_{jh}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & V_j \Lambda_j - \bar{b}_{jh}^{-2} \end{pmatrix} \quad (j = 1, 2).$$

Тогда разностная схема

$$\prod_{j=0}^2 (I + \tau \alpha \tilde{\mathbf{B}}_{jh}) \frac{\mathbf{f}^{n+1} - \mathbf{f}^n}{\tau} = -\tilde{\mathbf{M}}^n \bar{\mathbf{W}}_h^n \quad (5.6.10)$$

или эквивалентная ей схема в дробных шагах

$$\begin{aligned} \xi^n &= -\tilde{\mathbf{M}}^n \bar{\mathbf{W}}_h^n, \\ (I + \tau \alpha \tilde{\mathbf{B}}_{0h}) \xi^{n+1/3} &= \xi^n, \\ (I + \tau \alpha \tilde{\mathbf{B}}_{1h}) \xi^{n+2/3} &= \xi^{n+1/3}, \\ (I + \tau \alpha \tilde{\mathbf{B}}_{2h}) \xi^{n+1} &= \xi^{n+2/3}, \\ \mathbf{f}^{n+1} &= \mathbf{f}^n + \tau \xi^{n+1} \end{aligned} \quad (5.6.11)$$

аппроксимирует исходные уравнения с порядком  $O(\tau + h^k)$ , но реализуется на первом дробном шаге, как следует из вида оператора  $\tilde{\mathbf{B}}_{0h}$ , матричными прогонками.

Для построения схем, реализуемых на дробных шагах скалярными прогонками, рассмотрим подобно разностным схемам для уравнений Навье–Стокса сжимаемого теплопроводного газа расщепление оператора  $\tilde{\mathbf{B}}_h$  по физическим процессам и пространственным переменным в виде

$$\tilde{\mathbf{B}}_h = \sum_{j=1}^2 (\mathbf{B}_{jh}^1 + \mathbf{B}_{jh}^2), \quad (5.6.12)$$

где операторы

$$\mathbf{B}_{jh}^1 = \begin{pmatrix} 0 & z_1^j \frac{P}{\varepsilon} \Lambda_{j1} & z_2^j \frac{P}{\varepsilon} \Lambda_j \\ z_1^j \bar{\Lambda}_j & 0 & 0 \\ z_2^j \bar{\Lambda}_j & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

содержат члены с давлением в уравнениях движения и члены вида  $\operatorname{div} \mathbf{v}$  по каждому пространственному направлению  $q_j$ , а операторы

$$\mathbf{B}_{jh}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & V_j \Lambda_j - \bar{b}_{jh}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & V_j \Lambda_j - \bar{b}_{jh}^{-2} \end{pmatrix}$$

– конвективные и вязкие члены в направлении  $q_j$ . Тогда разностная схема

$$\prod_{j=1}^2 (I + \tau \alpha \mathbf{B}_{jh}^1) \cdot (I + \tau \alpha \mathbf{B}_{jh}^2) \frac{\mathbf{f}^{n+1} - \mathbf{f}^n}{\tau} = -(\mathbf{M}^{-1})^n \bar{\mathbf{W}}_h^n \quad (5.6.13)$$

или эквивалентная ей схема в дробных шагах

$$\begin{aligned} \xi^n &= -\widetilde{\mathbf{M}}^n \bar{\mathbf{W}}_h^n, \\ (I + \tau \alpha \mathbf{B}_{1h}^1) \xi^{n+1/4} &= \xi^n, \\ (I + \tau \alpha \mathbf{B}_{1h}^2) \xi^{n+2/4} &= \xi^{n+1/4}, \\ (I + \tau \alpha \mathbf{B}_{2h}^1) \xi^{n+3/4} &= \xi^{n+2/4}, \\ (I + \tau \alpha \mathbf{B}_{2h}^2) \xi^{n+1} &= \xi^{n+3/4}, \\ \mathbf{f}^{n+1} &= \mathbf{f}^n + \tau \xi^{n+1} \end{aligned} \quad (5.6.14)$$

аппроксимирует систему уравнений (5.6.1) с порядком  $O(\tau + h^k)$  и на дробных шагах, реализуется скалярными прогонками. Действительно, на первом (при  $j = 1$ ) и третьем ( $j = 2$ ) дробных шагах решение системы разностных уравнений

$$\begin{aligned} \xi_0^{n+(2j-1)/4} + \tau \alpha \frac{P}{\varepsilon} \sum_{l=1}^2 z_l^j \Lambda_j \xi_l^{n+(2j-1)/4} &= \xi_0^{n+(j-1)/2}, \\ \xi_1^{n+(2j-1)/4} + \tau \alpha z_j^1 \bar{\Lambda}_j \xi_0^{n+(2j-1)/4} &= \xi_1^{n+(j-1)/2}, \\ \xi_2^{n+(2j-1)/4} + \tau \alpha z_j^2 \bar{\Lambda}_j \xi_0^{n+(2j-1)/4} &= \xi_2^{n+(j-1)/2} \end{aligned} \quad (5.6.15)$$



после исключения компонент  $\xi_1^{n+j/2}$ ,  $\xi_2^{n+j/2}$  из первого уравнения сводится к нахождению невязки давления  $\xi_0^{n+(2j-1)/4}$  из решения уравнения

$$\left[ I - \tau^2 \alpha^2 \frac{P}{\varepsilon} \sum_{l=1}^2 z_l^j \Lambda_j z_l^j \bar{\Lambda}_j \right] \xi_0^{n+(2j-1)/4} = \xi_0^{n+(j-1)/2} - \frac{P}{\varepsilon} \tau \alpha \sum_{l=1}^2 z_l^j \Lambda_j \xi_l^{n+(j-1)/2}$$

скалярными прогонками на каждом шаге, после чего явно вычисляются новые значения невязок компонент скоростей  $\xi_1^{n+(2j-1)/4}$ ,  $\xi_2^{n+(2j-1)/4}$ .

На втором при  $j = 1$  и четвертом ( $j = 2$ ) дробных шагах схемы (5.6.14) системы уравнений

$$\xi_0^{n+(j-1)/2} = \xi_0^{n+(2j-1)/4},$$

$$\left[ I + \tau \alpha (V_j \Lambda_j - \bar{b}_{jh}^{-1}) \right] \xi_1^{n+(j-1)/2} = \xi_1^{n+(2j-1)/4},$$

$$\left[ I + \tau \alpha (V_j \Lambda_j - \bar{b}_{jh}^{-2}) \right] \xi_2^{n+(j-1)/2} = \xi_2^{n+(2j-1)/4}$$

решаются независимо для каждой компоненты скорости скалярными прогонками. Таким образом, введение расщепления по физическим процессам позволяет свести решение разностных уравнений в преобразованных координатах на дробных шагах к скалярным прогонкам. Схема вида (5.6.13), (5.6.14) была предложена в [105] при решении уравнений Навье–Стокса в декартовых координатах.

Для построения разностных схем второго порядка аппроксимации по времени предпочтительнее может оказаться схема предиктор–корректор следующего вида:

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{f}^{n+1/8} - \mathbf{f}^n}{\tau} + \mathbf{B}_{1h}^1 \mathbf{f}^{n+1/8} &= 0, \\ \frac{\mathbf{f}^{n+2/8} - \mathbf{f}^{n+1/8}}{\tau} + \mathbf{B}_{1h}^2 \mathbf{f}^{n+1/8} &= 0, \\ &\dots, \\ \frac{\mathbf{f}^{n+1/2} - \mathbf{f}^{n+3/8}}{\tau} + \mathbf{B}_{2h}^2 \mathbf{f}^{n+1/2} &= 0, \\ \frac{\mathbf{f}^{n+1} - \mathbf{f}^{n+1/2}}{\tau} + \widetilde{\mathbf{M}}^n \widetilde{\mathbf{W}}_h^{n+1/2} &= 0. \end{aligned} \tag{5.6.16}$$

На этапе предиктора она, как и схема, реализуется на дробных шагах скалярными прогонками, а на этапе корректора – явно. Она аппроксимирует исходные уравнения Навье–Стокса (5.6.8) с поряд-

ком  $O(\tau^2 + h^k)$  при  $\alpha = 0,5 + O(\tau)$ , а при установлении – исходные стационарные уравнения в консервативной форме. Для линеаризованных уравнений схема (5.6.16) безусловно устойчива. Напомним, что при решении нестационарных задач аппроксимация уравнений Навье–Стокса (5.6.8) имеет место при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . При проведении расчетов нестационарных задач обычно проводят два расчета при  $\varepsilon$  и  $\varepsilon/2$ , а затем путем линейной комбинации находят решение при  $\varepsilon = 0$  по формуле

$$\mathbf{f}_0 = 2\mathbf{f}_{\varepsilon/2} - \mathbf{f}_{\varepsilon},$$

полагая линейную зависимость решения от параметра искусственной сжимаемости.

## § 5.7. Моделирование вязких течений

Апробация предложенного в § 5.4 и § 5.6 метода приближенной факторизации решения уравнений Навье–Стокса, основанного на расщеплении уравнений по физическим процессам и пространственным направлениям, проведена при моделировании ряда задач (см. [107–111]). Ниже приведены некоторые результаты моделирования: исследовано течение жидкости в канале с движущейся крышкой и течение газа при малых скоростях около обтекаемой пластины, с части которой осуществляется микровдув. Первая задача решалась различными авторами (см., например, [39, 83, 84, 94–96]), что позволяет оценить точность предложенного алгоритма и дать оценки его эффективности, по второй задаче имеются экспериментальные данные [112–114].

### 5.7.1. Течение в каверне

Течение в каверне с движущейся крышкой в рамках модели Навье–Стокса сегодня является тестовой задачей, на которых апробируются численные алгоритмы. Остановимся на постановке задачи. Исследуется плоское стационарное течение жидкости в каверне ( $0 \leq x_1 \leq 1$ ,  $0 \leq x_2 \leq 1$ ) (рис. 5.7.1), верхняя крышка которой движется со скоростью  $v_1 = 1$ . На боковых и нижней стенках расчетной области заданы условия прилипания  $v_1 = v_2 = 0$ . В начальный момент времени при  $t = 0$  в расчетной области (кроме верхней стенки) жидкость полагалась неподвижной. Отметим, что начальное поле скоростей удовлетворяет уравнению неразрывности. Вязкость принимается постоянной и равной  $\eta = 1/Re$ . Расчеты проведены при различных числах  $Re$ . Для оценки точности разностной схемы и ее эффективности расчеты были проведены на последовательности сеток с числом узлов  $21 \times 21$  (вариант 1),  $41 \times 41$  (2),  $81 \times 81$  (3). Стационарное ре-

шение уравнений Навье–Стокса отыскивалось по схеме приближенной факторизации (5.4.4) с введением внутренних итераций на каждом дробном шаге. Критерий установления решения при переходе с  $n$ -го на шаг  $n + 1$  задавался по формуле

$$\max_{j,i} |p^{n+1} - p^n / \tau| \leq O(h^2), \quad (5.7.1)$$

так как наиболее медленно устанавливалась плотность. Как правило, временной шаг  $\tau$  задавался равным пространственному шагу сетки. При решении уравнений движения по итерационной схеме (5.4.5) использовался метод Зейделя. Обычно до сходимости итераций требовалось две–четыре итерации. При решении уравнения Пуассона (5.4.6) до сходимости итераций, как правило, требовалось три–пять итераций, кроме первых шагов расчета, когда начальное поле данных было сильно несогласованным (значение скорости во всех внутренних узлах сетки задавалось равным 0, а на пластине – 1). В этом случае требовалось порядка 100–300 итераций (см. [107], где приведены более полно результаты моделирования). Некоторые результаты расчетов приведены ниже.

На рис 5.7.1 представлено распределение линий тока для чисел  $Re = 3 \cdot 10^2$  и  $Re = 10^3$  (справа). С возрастанием чисел  $Re$  размер и интенсивность вторичных вихрей в углах возрастают, как и следует из теоретических оценок и расчетов других авторов. Распределения продольной компоненты скорости  $v_1$  (слева) и поперечной  $v_2$  (справа) в центре каверны в зависимости от числа узлов для  $Re = 3 \cdot 10^2$  приведены на рис. 5.7.2. Можно говорить о достаточной точности схемы

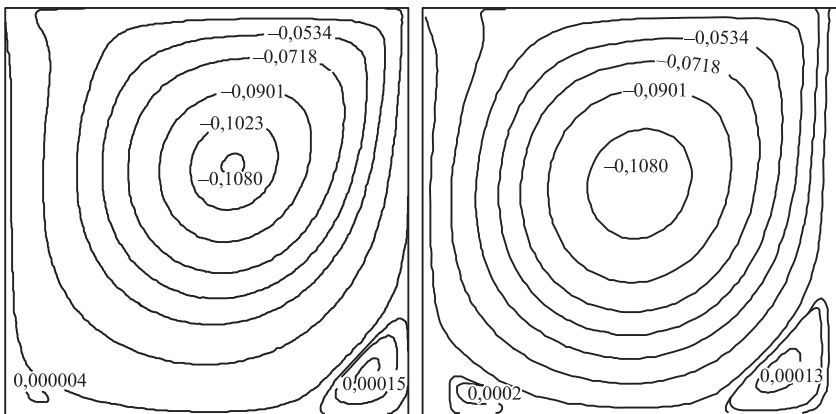


Рис. 5.7.1. Линии тока для различных чисел  $Re$  .

Поясн. см. в тексте.

для сеток с числом узлов  $41 \times 41$  и  $81 \times 81$ . Подтверждением вышесказанного служит также рис. 5.7.3, где приведены распределения скоростей в различных сечениях каверны при  $Re = 10^3$  на сетке с количеством узлов  $81 \times 81$ . Все дальнейшие расчеты проводились на сетках  $81 \times 81$ . Сплошной линией отмечены результаты текущих расчетов, точками – данные из [96, 97]. Отметим хорошее соответствие результатов и для больших чисел  $Re$  (относительная погрешность не превышает 1,5 %), хотя в [97] были использованы разностные схемы 5-го

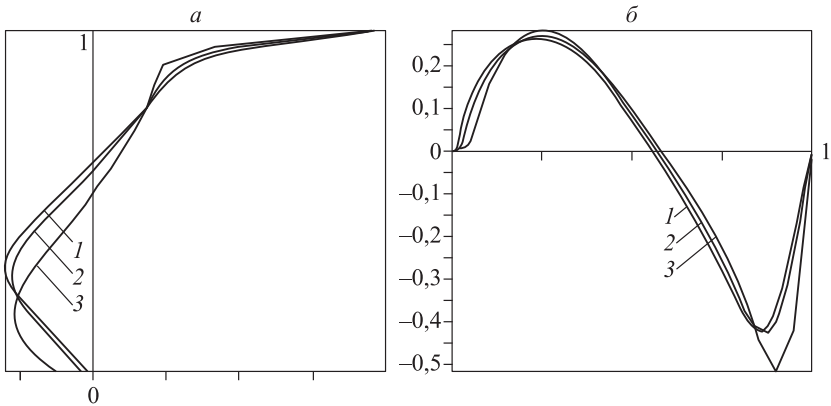


Рис. 5.7.2. Распределение скорости в каверне на различных сетках при  $Re = 3 \cdot 10^2$ .

*a* – продольное, *б* – поперечное. 1 –  $N = 81$ , 2 –  $N = 41$ , 3 –  $N = 21$ .

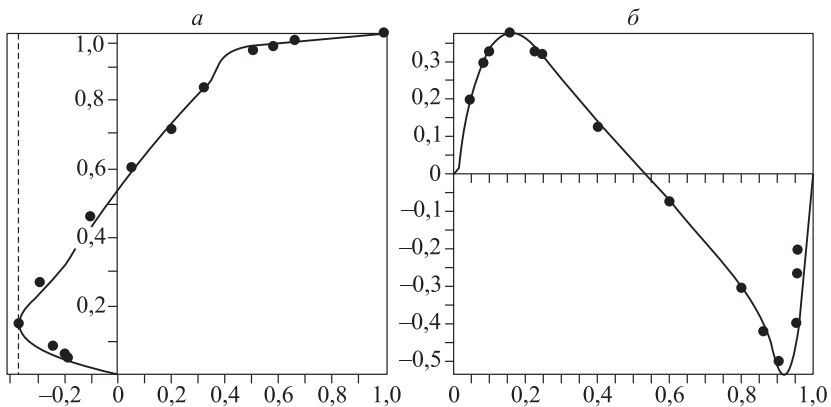


Рис. 5.7.3. Распределение скорости в каверне на различных сетках при  $Re = 10^3$ .

*a* – продольное, *б* – поперечное.

Таблица. 5.7.1

Сравнение значений  $\psi$  в центре основного вихря

Re	Текущие расчеты	Работа [97]	Работа [96]
100	-0,1006 (81-81)	-0,1030(81-81)	-0,1034 (129-129)
400	-0,1084 (81-81)	-0,1131(81-81)	-0,1139 (129-129)
1000	-0,1162 (81-81)	-0,1171(81-81)	-0,1179 (129-129)

Таблица 5.7.2

Сравнение значений  $\omega$  в центре основного вихря

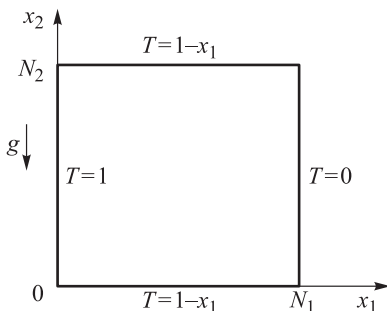
Re	Текущие расчеты	Работа [97]	Работа [96]
100	3,213 (81-81)	3,104 (81-81)	3,166 (129-129)
400	2,255 (81-81)	2,296 (81-81)	2,296 (129-129)
1000	2,034 (81-81)	2,044 (81-81)	2,050 (129-129)

порядка, а в [96] большее число узлов. В табл. 5.7.1, 5.7.2 приведены сравнения значений вихря  $\omega$  и функции тока  $\psi$ , полученные в настоящей работе и в [96] и [97] для различных чисел Re.

Дальнейшее изложение посвящено исследованию скорости сходимости схемы к стационарному решению при различном числе узлов  $N$ . При  $Re = 300$  (на сетке  $21 \times 21$  число итераций составляло 1231,  $41 \times 41 - 1921$ ,  $81 \times 81 - 2521$ ). При различных числах Re число градаций на сетке  $81 \times 81$  соответственно составляло (100 – 1111, 400 – 2731, 1000 – 3651). Как следует из этих данных, число итераций возрастает по линейному закону с ростом числа узлов и также растет при увеличении чисел Re.

В следующей серии расчетов исследовались конвективные течения с постоянной вязкостью в замкнутой плоской камере при подогреве одной из сторон (рис. 5.7.4). Исходная система уравнений Навье–Стокса (5.7.1) дополнялась уравнением для температуры

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\nabla \cdot \mathbf{V})T = \text{div}(\kappa \nabla T), \quad (5.7.2)$$



а в уравнении движения для вертикальной компоненты скорости  $v_2$  добавлялся член вида  $f = -Ra g T$ , описывающий воздействие температуры на движение жидкости, где  $Ra = g L T_0 / V_0^2$  – число Релея,  $\kappa = \kappa_0 / Pr$  –

Рис. 5.7.4. Расчетная область при разогреве одной из сторон.

коэффициент теплопроводности, а  $Pr = \eta/\kappa$  – коэффициент Прандтля (подробнее см. [1, 107]).

Уравнение (5.7.2) решалось по разностной схеме приближенной факторизации

$$[v_1^n \Lambda_j - \Lambda_1 \kappa^n \Lambda_1][v_2^n \Lambda_2 - \Lambda_2 \kappa^n \Lambda_2] \frac{T^{n+1} - T^n}{\tau} = - \sum_{j=1}^2 (v_j^n \Lambda_j - \Lambda_j \kappa^n \Lambda_j) T^n$$

или по эквивалентной ей схеме в дробных шагах

$$\xi_T^n = - \sum_{j=1}^2 (v_j^n \Lambda_j - \Lambda_j \kappa^n \Lambda_j) T^n,$$

$$[v_1^n \Lambda_1 - \Lambda_1 \kappa^n \Lambda_1] \xi_T^{n+1/2} = \xi_T^n,$$

$$[v_2^n \Lambda_2 - \Lambda_2 \kappa^n \Lambda_2] \xi_T^{n+1} = \xi_T^{n+1/2},$$

$$T^{n+1} = T^n + \tau \xi_T^{n+1},$$

реализуемой на дробных шагах скалярными прогонами. На границах области заданы условия прилипания, температура  $T$  на боковых границах задавалась постоянной и равной

$$T(t, 0, x_2) = 1, \quad T(t, N_1, x_2) = 0,$$

а для горизонтальных участков границ – по формуле

$$T(t, x_1, 0) = 1 - x_1, \quad T(t, x_1, N_2) = 1 - x_1.$$

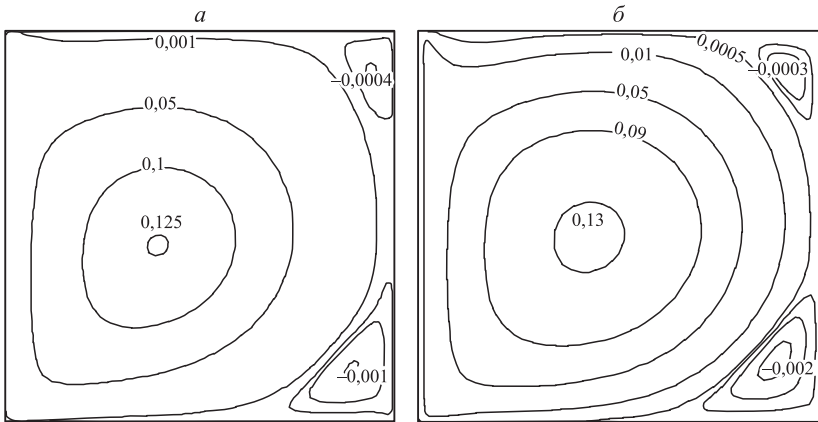


Рис. 5.7.5. Линии тока для чисел  $Re = 4 \times 10^2$  (а) и  $Re = 10^3$  (б).

Расчеты для различных чисел  $Re$ ,  $Pr$  и  $Ra$  приведены в [107]. Для иллюстрации на рис. 5.7.5 представлены линии тока при  $Re = 4 \times 10^2$ ,  $Re = 10^3$ .

Выделяется обширная центральная область циркуляционного течения («центральный вихрь») и вторичные «угловые вихри» в боковой части каверны. Отметим возрастание скорости вихрей при росте чисел  $Re$ . Изменение чисел  $Pr$  для фиксированных  $Re$  и  $Ra$  также приводит к существенной перестройке картины течения, а изменение чисел  $Ra$  в широком диапазоне параметров слабо влияет на конвекцию, как и следует из расчетов других авторов (см. [81, 83, 92–97]).

### § 5.8. Течение около пластины с микровдувом газа

К настоящему времени в аэро- и гидродинамике разработан и апробирован целый ряд эффективных методов управления течением для уменьшения сопротивления трения. Отметим лишь, что в последние десятилетия определенный прогресс по уменьшению сопротивления был достигнут посредством подходов, включающих различную технику управления турбулентными пограничными слоями: использование механизма периодического вдува/отсоса, устройств разрушения вихрей, макропористых стенок и других пассивных и активных методов с целью модификации пограничного слоя и в конечном итоге снижения сопротивления трения обтекаемых тел (см. обзор [112]). В [112–115] предложен метод управления пограничным слоем путем вдува через микропористую проницаемую поверхность, имеющую высококачественную обработку. Экспериментальные исследования, выполненные в [113–115], показали, что можно достичь снижения поверхностного трения до 50 %. Отметим, что в приближении полных уравнений Навье–Стокса этот класс задач до настоящего времени моделировался в отдельных работах лишь в рамках модели сжимаемого газа [117–120]. В данном разделе приведены некоторые результаты исследований течений газа в приближении модели несжимаемой жидкости около пластины, с части которой осуществлялся микровдув газа (см. [109–111]).

Проведено численное моделирование течения газа около пластины при малых скоростях с целью исследования влияния интенсивности микровдува с части поверхности и характера его распределения на поведение локального и интегрального коэффициентов трения. Известно, что в классической постановке такие течения изучаются в приближении пограничного слоя. Однако в зависимости от интенсивности и скорости вдува возможны режимы течения, в которых приближение пограничного слоя может стать несправедливым, поэтому в данной работе в качестве математической модели выбраны уравне-

ния Навье–Стокса вязкой несжимаемой жидкости. Сравнения результатов численных расчетов по модели Навье–Стокса и пограничного слоя показали, что при увеличении расхода микровдува необходимо использовать полные уравнения Навье–Стокса вязкой несжимаемой жидкости. Проведенные расчеты двумерных и пространственных течений в рамках модели Навье–Стокса вязкой несжимаемой жидкости около тел с микровдувом газа с части поверхности показали качественное и количественное совпадение с результатами экспериментов.

### 5.8.1. Постановка задачи и метод решения

Задача об обтекании пластины потоком газа с микровдувом воздуха с части поверхности рассматривалась в двумерном и трехмерном приближениях в рамках двух моделей — пограничного слоя и полных уравнений Навье–Стокса вязкой несжимаемой жидкости. Остановимся на некоторых результатах моделирования двумерных течений (более полно результаты моделирования двумерных и пространственных течений приведены в [109–111]).

В двумерном приближении расчетная область имела форму прямоугольника, основанием которого служила пластина конечной длины, на части поверхности которой задавался микровдув газа (рис. 5.8.1).

При переходе к безразмерному виду, как и выше, все величины нормировались на их невозмущенные значения. Параметры течения во входном сечении брались из решения уравнений пограничного слоя, полученных по алгоритму [121]. На верхней границе области, расположенной вне пограничного слоя, задавались условия невозмущенного потока. В выходном сечении для вектора скорости задава-



Рис. 5.8.1. Расчетная область в двумерном случае.



лись «мягкие» условия  $\partial^2 f / \partial x_1^2 = 0$ . На поверхности пластины задавались условия прилипания, кроме части области, из которой осуществлялся вдув. Положение верхней границы менялось в зависимости от интенсивности микровдува. Оказалось, что для исключения влияния верхней границы на решение, получаемое вблизи пластины, необходимо задавать ее положение на расстоянии до десяти толщин пограничного слоя. Интенсивность микровдува  $C_b$  изменялась в пределах  $0 \leq C_b \leq 10^{-2}$ , что включало диапазон значений вдува в экспериментах [114, 115].

Для получения достаточной точности вводилось сгущение сетки в области пограничного слоя около пластины. С этой целью вводилось преобразование координат, переводящее расчетную область в единичный квадрат (при  $N = 2$ ) или параллелепипед (при  $N = 3$ ), после чего уравнения решались в преобразованных координатах. В вертикальном направлении преобразование координат (сгущение) задавалось формулой

$$x_2(k) = Z_0 + (Z_{\max} - Z_0)(q^{k/k_{\max}} - 1)/(q - 1), \quad q > 1,$$

где  $(Z_{\max} - Z_0)$  – высота расчетной области в исходных координатах. Данная формула обеспечивала сгущение сетки по нормали к пластине, причем шаг сетки у поверхности пластины приблизительно в  $q$  раз мельче шага у верхней границы. Параметры сгущения выбирались таким образом, чтобы в области пограничного слоя оказалось около половины узлов. В продольном направлении  $x_1$  использовалась равномерная сетка, при этом в области вдува иногда могла применяться более мелкая сетка. Для обеспечения большей достоверности расчетов решение уравнений Навье–Стокса находилось по двум численным алгоритмам. Первый алгоритм основан на методе приближенной факторизации при специальном расщеплении исходных уравнений по физическим процессам и пространственным направлениям (подробнее см. § 5.6). Во втором алгоритме, использующем разнесенную сетку и идею искусственной сжимаемости, давление на новом временном слое и компоненты скорости, удовлетворяющие уравнению неразрывности, отыскиваются с помощью внутренних итераций. Оба алгоритма аппроксимируют исходные уравнения со вторым порядком по пространственным координатам.

Для проверки точности предложенных алгоритмов были проведены расчеты обтекания пластины в диапазоне чисел Рейнольдса  $10^3 \leq Re \leq 10^6$  на сетках, обеспечивающих выполнение закона сохранения массы с точностью до  $10^{-4}$  —  $10^{-6}$  (как правило, было достаточно задать  $100 \times 100$  узлов на неравномерной сетке).

### 5.8.2. Результаты расчетов. Ламинарный режим течения

Расчеты обтекания пластины для ламинарного режима течения, выполненные на основе двумерных моделей пограничного слоя и Навье–Стокса, показали при отсутствии вдува практически полное совпадение решений во всем диапазоне чисел  $Re$ . Однако при вдуве начинают появляться различия в картине распределения, причем эти различия возрастают с ростом интенсивности вдува. Для иллюстрации на рис. 5.8.2 приведено распределение местного коэффициента трения для значений вдува  $C_b = 1,0 \times 10^{-3}$  и  $C_b = 3,0 \times 10^{-3}$  при  $Re = 10^5$ .

Область вдува находилась в интервале  $0,7 \leq x_1 \leq 0,91$  и на рисунке обозначена вертикальными линиями. В модели Навье–Стокса, в отличие от модели пограничного слоя [116], влияние вдува распространяется вверх по потоку, что приводит и к различию коэффициента трения. Однако при небольших интенсивностях вдува интегральный коэффициент трения, вычисленный по модели пограничного слоя, оказывается близок к значению, полученному из решения уравнений Навье–Стокса. Так, при вдуве газа при  $C_b = 1,0 \times 10^{-3}$  значения коэффициента трения по мере удаления от участка вдува различаются все меньше, и на участке  $0,4 \leq x_1 \leq 1,4$  различие составляет менее 0,5 %. Возрастание интенсивности вдува приводит к увеличению различий значений коэффициента трения и несовпадению интегрального коэффициента трения, что объясняется неприменимостью модели пограничного слоя для течений со вдувом газа с поверхности. В расчетах с другим размером и положением области вдува (вдув осуществлялся с 55,6 % части поверхности) были получены аналогичные результаты.

Для сравнения коэффициентов трения при различной организации вдува были проведены две серии расчетов. В первой серии вдув

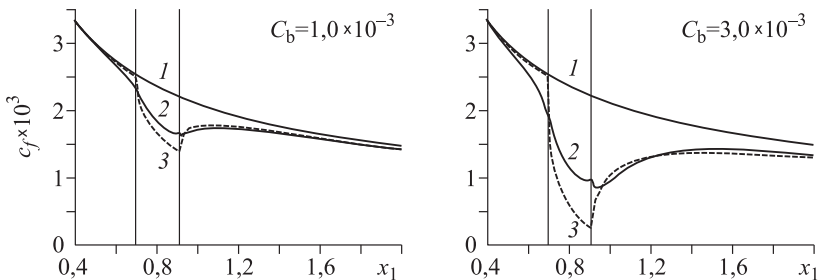


Рис. 5.8.2. Распределение коэффициента трения на пластине при различных значениях  $C_b$ :

1 — без вдува, 2 — модель Навье–Стокса, 3 — модель пограничного слоя.

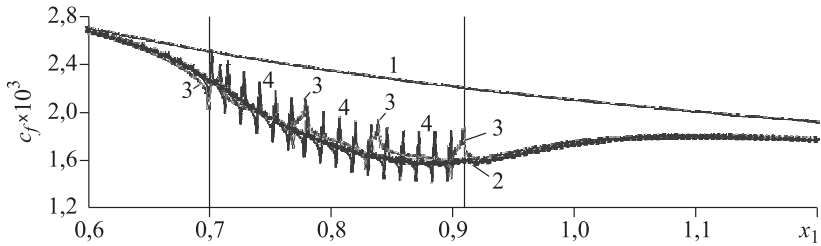


Рис. 5.8.3. Распределение коэффициента  $c_f$  при различном числе участков вдува.

Поясн. см. в тексте.

задавался равномерным по всей подобласти, во втором — осуществлялся из последовательно расположенных в области вдува участков, количество которых варьировалось, но их общая площадь не менялась и составляла 19 % от площади равномерно распределенного вдува, как и в эксперименте. При изменении пространственной структуры изменялась и интенсивность вдуваемого газа таким образом, чтобы массовый расход сохранился. Область вдува (как равномерная со всего участка вдува, так и из отдельных участков) располагалась на интервале  $0,7 \leq x_1 \leq 0,91$ . На рис. 5.8.3 приведено распределение коэффициента трения  $c_f$  для ламинарного режима течения при  $Re = 10^5$  и  $C_b = 10^{-3}$ .

Верхняя кривая 1 соответствует течению без вдува, кривая 2 — равномерному вдуву, а кривые 3 и 4 — областям вдува из 4 и 16 участков. При расчете течения с несколькими подобластями вдува использовались более мелкие сетки при условии, чтобы на каждую подобласть вдува приходилось от 4 до 8 узлов (ячеек). Этого оказалось достаточно, чтобы в области вдува распределение коэффициента трения не зависело от числа узлов сетки (в зоне вдува). Расчеты показали, что с увеличением числа участков вдува интегральный коэффициент трения приближается к соответствующему значению при равномерном вдуве. Вычислялось относительное отклонение  $\delta = (c_f - c_{fu}) / c_{fu}$  величины интегрального коэффициента трения пластины  $c_f$  при различном количестве участков вдува (при 2 и при 4) от коэффициента  $c_{fu}$  для равномерного вдува при  $Re = 10^5$  и  $C_b = 10^{-3}$ . Интегральные коэффициенты трения вычислялись на интервале  $0,6 \leq x_1 \leq 1,2$ , т. е. во всей области, где различается коэффициент трения. Если область вдува состоит из большого числа участков, то коэффициент сопротивления приближается к значению, соответствующему равномерному вдуву при условии сохранения массового расхода вдуваемого газа: при четырех участках вдува  $\delta = -45\%$ , при 16  $\delta = -0,35\%$ . Приведен-

ные результаты позволяют сделать вывод о правомочности замены дискретного вдува, при большом числе участков, на равномерный вдув в этой подобласти. Это упрощает решение задачи, так как дает возможность использовать меньшее число узлов сетки при сохранении точности расчетов.

### 5.8.3. Результаты расчетов. Турбулентный режим течений

Серия расчетов была посвящена исследованию влияния турбулентности на течение газа около пластины со вдувом с части поверхности. Для расчета турбулентного режима течения использовалась алгебраическая модель турбулентности — модель пути перемешивания Прандтля [1]. В исходных уравнениях к вязкости добавляется турбулентная вязкость вида  $\mu_T = l^2 |dv_1/dx_2|$ , где  $l$  — путь перемешивания. Во внешней области он задавался по формуле

$$l = 1,1875 \int_0^{\infty} v_1 (1 - v_1) dx_2,$$

в пристеночной — по формуле

$$l = 0,4 \left[ 1 - \exp \left( -x_2 \sqrt{\operatorname{Re} x (0,25 dv_1/dx_2 + 0,75 dv_1/dx_2 |_{x_2=0}) / 26} \right) \right] x_2.$$

Переход от одной формулы к другой осуществлялся из условия непрерывности турбулентной вязкости.

На рис. 5.8.4 показано распределение коэффициента трения при турбулентном обтекании пластины для различного числа участков вдува при  $\operatorname{Re} = 10^5$  и  $C_b = 10^{-3}$ , где линия 1 — течение без вдува, 2 — равномерный вдув, 3, 4 — дискретный вдув из четырех и восьми участков. Данные расчетов свидетельствуют о том, что и в случае турбулентного течения значение интегрального коэффициента поверхностного трения  $c_f$  с ростом числа участков вдува стремится к его значению при равномерном вдуве, что позволяет в дальнейших исследованиях ограничиться расчетами с равномерно распределенным вдувом. Дальнейшие расчеты проводились при равномерно распределенном вдуве.

На рис. 5.8.5 приведены результаты распределения местного коэффициента трения  $c_f$ , полученного в расчетах с использованием уравнений Навье–Стокса (I) и пограничного слоя (II). С ростом интенсивности вдува различия в коэффициенте трения, рассчитанного по различным математическим моделям, возрастают, причем модель пограничного слоя дает меньшее падение коэффициента трения (для

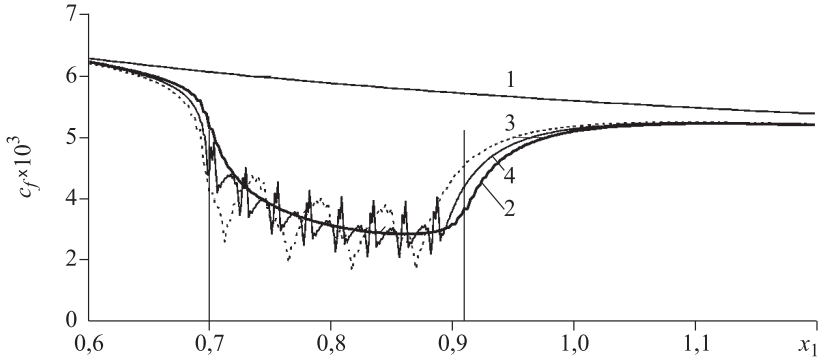


Рис. 5.8.4. Распределение коэффициента  $c_f$  для различного числа участков вдува.

Поясн. см. в тексте.

ламинарных течений модель пограничного слоя предсказывала большее падение).

В следующей серии расчетов было проведено сравнение численных решений уравнений Навье–Стокса с результатами натурального эксперимента [114, 115]. Эксперименты проводились при скорости невозмущенного потока  $U_\infty = 21,2$  м/с, что соответствовало числу  $Re_1 = 1,4 \times 10^6$  м<sup>-1</sup>. При отсутствии вдува коэффициенты трения, полученные на основе решений уравнений Навье–Стокса и уравнений пограничного слоя, совпали. На рис. 5.8.5 представлено изменение коэффициента трения  $c_f$  для режима течения без вдува (кривые 1–3) и со вдувом (4–7), интенсивность которого равна  $C_b = 0,00148$ , что в эксперименте соответствовало массовому расходу  $Q = 0,038$  кг/(с·м<sup>2</sup>). Здесь: данные эксперимента (○, ● – кривые 1, 4 [115]), расчеты по модели Навье–Стокса методом искусственной сжимаемости (---, кривые 2, 5), методом расщепления (3, 6, –) и расчеты по модели пограничного слоя (3, 7, –·–). Отличие рассчитанного коэффициента трения  $c_f$  от экспериментального не превышает 7 %.

В заключение раздела отметим, что модель пограничного слоя справедлива лишь при относительно небольшой интенсивности вдува, что и следовало ожидать. При увеличении интенсивности вдува для ламинарных течений снижение коэффициента трения  $c_f$  в модели пограничного слоя было большим, чем в модели Навье–Стокса. При расчете турбулентных течений модель Навье–Стокса (в отличие от ламинарных течений) дает большее снижение коэффициента трения, чем модель пограничного слоя.

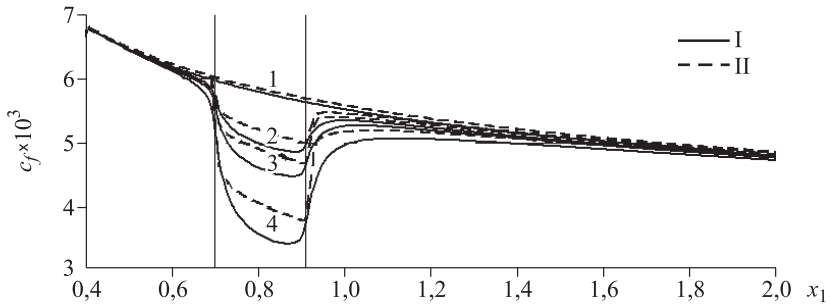


Рис. 5.8.5. Распределение коэффициента  $c_f$  для различных интенсивностей вдува.

Поясн. см. в тексте.

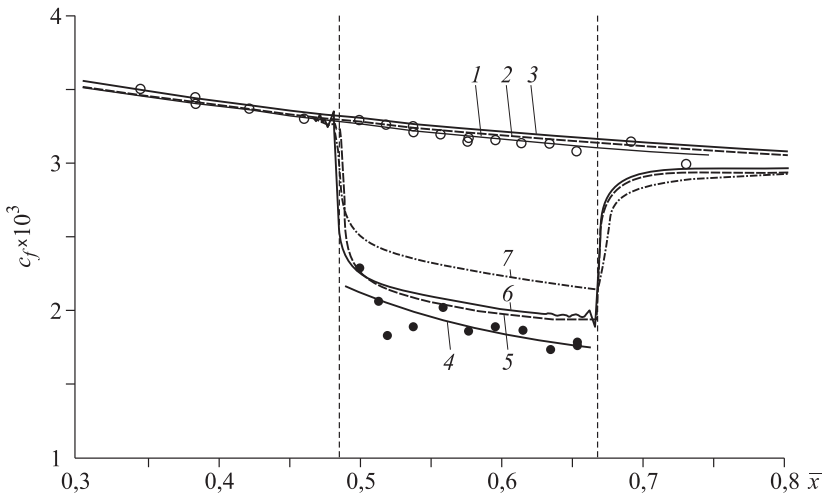


Рис. 5.8.6. Распределение коэффициента  $c_f$  по длине модели.

Поясн. см. в тексте.

Моделирование турбулентных течений с вдувом газа с части поверхности в приближении уравнений Навье–Стокса вязкой несжимаемой жидкости дает адекватные эксперименту результаты, что позволяет с уверенностью утверждать, что снижение сопротивления трения обтекаемых поверхностей при организации микровдува с части поверхности является эффективным способом управления турбулентным пограничным слоем.

Влияние микровдува на расположенную ниже по течению область является более важным, чем на область, расположенную выше по потоку, и это влияние возрастает при увеличении интенсивности вдува. Данный факт может быть использован для создания более эффективного метода снижения турбулентного трения.

Проведенные расчеты позволяют сделать вывод о точности предложенного разностного метода решения уравнений Навье–Стокса – метода приближенной факторизации и его эффективности при расчете ламинарных и турбулентных течений.

## Литература

1. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1978.
2. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. М.: ГИТТЛ, 1954.
3. Седов Л. И. Механика сплошной среды. Т. 1, 2. М.: Наука, 1973.
4. Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н. Системы квазилинейных уравнений. М.: Наука, 1968.
5. Годунов С. К., Рябенский В. С. Разностные схемы (Введение в теорию). М.: Наука, 1973.
6. Ковеня В. М., Яненко Н. Н. Метод расщепления в задачах газовой динамики. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1981.
7. Самарский А. А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1989.
8. Яненко Н. Н. Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1967.
9. Ковеня В. М. Разностные методы решения многомерных задач. Курс лекций / Новосиб. гос. ун-т. Новосибирск, 2004.
10. Марчук Г. И. Методы вычислительной математики. М.: Наука, 1980.
11. Бабенко К. И. Основы численного анализа. М.: Наука, 1987.
12. Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М. Численные методы. М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987.
13. Шокин Ю. И. Метод дифференциального приближения. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1979.
14. Толстых А. И. Компактные разностные схемы и их приложения к проблемам аэродинамики, М.: Наука, 1990.
15. Самарский А. А., Николаев Е. С. Методы решения сеточных уравнений. М.: Наука, 1978.
16. Марчук Г. И., Шайдуров В. В. Повышение точности решений разностных схем. М.: Наука, 1979.
17. Федоренко Р. П. Итерационные методы решения разностных эллиптических уравнений // Успехи математических наук. 1973. Т. 28, № 2 (170).
18. Годунов С. К., Забродин А. В., Иванов М. Я., Крайко А. Н., Прокопов Г. П. Численное решение многомерных задач газовой динамики. М.: Наука, 1976.
19. Лисейкин В. Д. Обзор методов построения структурных адаптивных сеток // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 1996. Т. 36, № 1.
20. Гильманов А. Н. Методы адаптивных сеток в задачах газовой динамики. М.: Физматлит, 2000.



21. Хакимзянов Г. С., Шокин Б. И., Барахнин В. Б., Шокина Н. Ю. Численное моделирование течений жидкости с поверхностными волнами. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2001.
22. Сидоров А. Ф. Об одном алгоритме расчета криволинейных сеток, близких к равномерным // Численные методы механики сплошной среды. 1977. Т. 8, № 4.
23. Глассер А. Г., Лисейкин В. Д., Шокин Ю. И., Васева И. А., Лиханова Ю. В. Построение разностных сеток с помощью уравнений Бельтрами и диффузии. Новосибирск: Наука, СИФ РАН. 2006.
24. Thompson I. P., Thames P. C., Mastin C. W. Automatic numerical generation of body-fitted curvilinear coordinate system for field containing any number of arbitrary two-dimensional bodies // J. Comput. Phys. 1974. N 15.
25. Пинчуков В. И., Шу Ч. В. Численные методы высших порядков для задач аэрогидродинамики. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2000.
26. Osher S., Chakravarthy S. R. High resolution schemes and entropy condition// SIAM J. Numer. Anal. 1984. V. 21, N 5.
27. Harten A., Osher S. Uniformly high order non oscillatory schemes 1 // Ibid. 1987. V 24, N 2.
28. Osher S., Shu C. W. Efficient implementation of the essentially nonoscillatory shock-capturing schemes // J. Comput. Phys. 1988. V. 77, N 2.
29. Марчук Г. И. Методы расщепления и переменных направлений. М.: ОВМ АН СССР, 1986.
30. Коновалов А. Н. Метод дробных шагов решения задачи Коши для многомерного уравнения колебаний // Докл. АН СССР. 1962. Т. 147, № 1.
31. Самарский А. А., Попов Ю. П. Разностные схемы газовой динамики. М.: Наука, 1975.
32. Белоцерковский О. М. Численное моделирование в механике сплошных сред. М.: Наука, 1984.
33. Четверушкин Б. Н. Кинетические схемы и квазигазодинамическая система уравнений. М.: Макс-Пресс, 2004.
34. Белоцерковский О. М., Давыдов Ю. М. Нестационарный метод “крупных частиц” для решения задач внешней аэродинамики. М.: ВЦ АН СССР, 1970.
35. Beam R. M., Warming R. F. An implicit finite-difference algorithm for hyperbolic systems in Conservation Law Form // J. Comput. Phys. 1976. V. 22.
36. Briley W. R. McDonald H. Solution of the 3D Compressible Navier–Stokes equations by an implicit technique // Lect. Notes in Phys. 1975. V. 35.
37. Стергер Д. Л. Неявный конечно-разностный метод расчета двумерного обтекания тел с произвольной геометрией // Ракетн. техника и космонавтика. 1978. Т. 16, № 7.
38. Шенг Дж. С. Обзор численных методов решения уравнений Навье–Стокса для течений сжимаемого газа // Аэрокосмическая техника. 1986. № 2.
39. Роуч П. Вычислительная гидродинамика. М.: Мир, 1980.
40. Флетчер К. Вычислительные методы в динамике жидкостей: В 2 т. М.: Мир, 1991.

41. Pulliam T. H., Steger I. L. Implicit finite-difference simulations of three-dimensional compressible flow // *AIAA Journal*. 1980. V. 18, N 2.
42. Пейре Р., Тейлор Т. Д. Вычислительные методы в задачах механики жидкости. Л.: Гидрометеониздат, 1986.
43. Ковеня В. М., Тарнавский Г. А., Черный С. Г. Применение метода расщепления в задачах аэродинамики. Новосибирск: Наука, Сиб. отд-ние, 1990.
44. Паасонен В. И. Абсолютно устойчивые разностные схемы повышенной точности для систем гиперболического типа // *Численные методы механики сплошной среды*. 1972. Т. 3, № 3.
45. Белов Ю. Я., Кантор С. А. Метод слабой аппроксимации. Красноярск: КрасГУ, 1999.
46. Ковеня В. М., Исмагилов Т. З. Об одном методе построения схем точной факторизации для численного решения гиперболических уравнений // *Вычислительные технологии*. 2003. Т. 8, № 3.
47. Харлоу Ф. Х. Численный метод частиц в ячейках для задач гидродинамики // *Вычислительные методы в гидродинамике*. М.: Мир, 1967.
48. Яненко Н. Н., Анучина Н. Н., Петренко В. Е., Шокин Ю. И. О методах расчета задач газовой динамики с большими деформациями // *Численные методы механики сплошной среды*. 1970. Т. 1, № 1.
49. Анучина Н. Н. О методах расчета течений сжимаемой жидкости с большими деформациями // *Численные методы механики сплошной среды*, 1970. Т. 1, № 4.
50. Григорьев Ю. Н., Вшивков В. А., Федорук М. П. Численное моделирование методами частиц в ячейках. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2004.
51. Вабищевич П. Н., Самарский А. А. Аддитивные схемы для задач математической физики. М: Наука, 1999.
52. Рихтмайер Р., Мортон К. Разностные методы решения краевых задач. М.: Мир, 1972.
53. Ковеня В. М., Лебедев А. С. Модификации метода расщепления для построения экономичных разностных схем // *Журнал вычислительной математики и математической физики*. 1994. Т. 34, № 6.
54. Ковеня В. М., Слюняев А. Ю. Модификации алгоритмов расщепления для решения уравнений Эйлера и Навье–Стокса // *Вычислительные технологии*. 2007. Т. 12, № 3.
55. Ковеня В. М., Слюняев А. Ю. Моделирование сверхзвуковых течений около элементов летательного аппарата // *Прикладная механика и техническая физика*. 2009. Т. 50, № 3.
56. Ковеня В. М., Козлинская Т. В. Об алгоритме расчета нагрева плазмы электронным пучком // *Вычислительные технологии*. 2004. Т. 9, № 6.
57. Ковеня В. М., Слюняев А. Ю. Алгоритмы расщепления при решении уравнений Навье–Стокса // *Журнал вычислительной математики и математической физики*. 2009. Т. 49, № 4.
58. Kovenya V. M. Splitting method in the problems of CFD // *Computational Fluid Dynamics Journal*. 1999. V. 8, N. 2.

59. Лебедев А. С., Черный С. Г. Практикум по численному решению уравнений в частных производных. Учеб. пособие. Новосибирск: Изд-во НГУ, 2000.
60. Kovenya V. M., Slyunyaev A. Yu. Factorization and splitting methods for numerical solution of Euler and Navier-Stokes equations // Russ. J. Anal. Math. Modeling, 2019. V. 25, N 1.
61. Ковеня В. М., Козлинская Т. В. Метод предиктор–корректор для решения задач магнитной гидродинамики // Вычислительные технологии. 2006. Т. 11, Ч. 1, спец. выпуск.
62. Астрелин В. Т., Бурдаков А. В., Ковеня В. М., Козлинская Т. В. Численное моделирование динамики плазмы в неоднородном магнитном поле// Прикладная механика и техническая физика. 2006. Т. 47, № 1.
63. Карамышев В. Б. Монотонные схемы и их приложения в газовой динамике. Новосибирск: Изд-во НГУ, 1994.
64. Арцимович Л. А., Сагдеев Р. З. Физика плазмы для физиков. М.: Атомиздат, 1979.
65. Брушлинский К. В. Математические и вычислительные задачи магнитной газодинамики. М: БИНОМ, Лаборатория знаний, 2009.
66. Астрелин В. Т., Бурдаков А. В., Губер Н. А., Ковеня В. М. Моделирование движения и нагрева неоднородной плазмы // Прикладная математика и теоретическая физика. 2001. Т. 42, № 6.
67. Марчук Г. И. Методы расщепления. М.: Наука, 1988.
68. Головачев Ю. П. Численное моделирование течений вязкого газа в ударном слое. – М.: Физматгиз, 1996.
69. Шевелев Ю. Д. Пространственные задачи вычислительной аэрогидродинамики. М.: Наука, 1986.
70. Газовая динамика. Избранное в 2 т. Под общей редакцией А. Н. Крайко. 2-е изд. испр. М.: Физматлит, 2005.
71. Черный С. Г., Чирков Д. В., Лапин В. Н. и др. Численное моделирование течений в турбомашинах. Новосибирск: Наука, СИФ РАН. 2006.
72. Бекетаева А. О., Найманова А. Ж. Численное моделирование сверхзвукового течения с поперечным вдувом струй // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2004. Т. 45, № 3.
73. Глаголев А. И., Зубков А. И., Панов Ю. А. Взаимодействие струи газа, вытекающей из отверстия на пластине, со сверхзвуковым потоком // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1968. № 2.
74. Глаголев А. И., Зубков А. И., Панов Ю. А. Обтекание струйного газообразного препятствия на пластине сверхзвуковым потоком // Там же. 1967. № 3.
75. Авдучевский В. С., Медведев К. И., Полянский М. Н. Взаимодействие сверхзвукового потока с поперечной струей, вдуваемой через круглое отверстие в пластине // Там же. 1970. № 5.
76. Слюняев А. Ю. Численное моделирование сверхзвуковых течений газа на основе модифицированного метода расщепления. Дисс.... канд. физ.-мат. наук. Новосибирск: ИВТ СО РАН, 2009.

77. Ковеня В. М., Кузьмин М., Полторацкий Р. С. Разностная схема предиктор–корректор для численного решения уравнений Навье–Стокса сжимаемого теплопроводного газа // Вестник НГУ. Серия: математика, механика, информатика. 2011. Т. 11, № 4.
78. He Yuanjuan, Le Jialing, Ni Hongli. Numerical research of airframe/engine integrative hypersonic vehicle // Proc. of the XII Intern. Conf. on the Methods of Aerophysical research. 28 June-3 July 2004. Novosibirsk: Publishing House “Nonparel”, 2004. P. II.
79. Ладыженская О. А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М: Наука, 1970.
80. Антонцев С. Н., Кажихов А. В., Монахов В. Н. Краевые задачи механики неоднородных жидкостей. Новосибирск: Наука, Сиб. отд-ние, 1983.
81. Пасконов В. М., Полежаев В. И., Чудов Л. А. Численное моделирование процессов тепло- и массообмена. М.: Наука, 1984.
82. Белоцерковский О. М., Гуцин В. А., Щенников В. В. Метод расщепления в применении к решению задач динамики вязкой несжимаемой жидкости // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1975. Т. 15, № 1.
83. Полежаев В. И., Бунэ А. В, Везуб Н. А. Математическое моделирование конвективного теплообмена на основе уравнений Навье–Стокса. М.: Наука, 1987.
84. Тарунин Е. Л. Вычислительный эксперимент в задачах свободной конвекции. Иркутск: Изд-во Иркут. ун-та, 1990.
85. Владимирова Н. Н., Кузнецов Б. Г., Яненко Н. Н. Численный расчет симметричного обтекания пластины плоским потоком вязкой несжимаемой жидкости // Некоторые вопросы вычислительной и прикладной математики. Новосибирск: Наука, Сиб. отд-ние. 1966.
86. Chorin A. J. A numerical method for solving incompressible viscous flow problems // J. Comput. Phys. 1967. N 2.
87. Amsden A. A., Harlow F. N. The SMAC Method: Los Alamos Sci. Lab. Rep. N LA-4370, Los Alamos, 1970
88. Захаров Ю. Н. Градиентные итерационные методы решения задач гидродинамики. Новосибирск: Наука, СИФ РАН, 2004.
89. Вабищевич П. Н. Аддитивные схемы для некоторых дифференциально-операторных уравнений // Журнал вычислительной математики и математической физики, 2010. Т. 50, № 11.
90. Вабищевич П. Н., Самарский А. А. Решение задач динамики несжимаемой жидкости с переменной вязкостью // Там же. 2000. Т. 40, № 12.
91. Вабищевич П. Н. Построения схем расщепления на основе аппроксимации оператора перехода // Там же. 2012, Т. 52, № 2.
92. Калиткин Н. Н. Численные методы. М.: Наука, 1978.
93. Shah A., Yuan Li. Flux-difference splitting-based upwind compact schemes for the incompressible Navier–Stokes equations // Int. J. Numer. Meth. Fluids. 2009. V. 61.

94. Hejranfar K., Khajeh-Saeed A. Implementing a high-order accurate implicit operator scheme for solving steady incompressible viscous flows using artificial compressibility method // *Ibid.* 2011. V. 66.
95. Kwak D., Kiris C., Housman J. Implicit methods for viscous incompressible flows // *Computers & Fluids*. 2011. V. 41.
96. Rogers S. E., Kwak D. An upwind differencing scheme for the incompressible Navier–Stokes equations // *Applied Numerical Mathematics*. 1991. V. 8.
97. Ghia U., Ghia K. N., Shin C. T. High-Re solutions for incompressible flow using the Navier–Stokes equations and a multigrid method // *J. Comput. Phys.* 1982. N 48.
98. Червов В. В. Моделирование трехмерной конвекции в мантии Земли с применением неявного метода расщепления по физическим процессам // *Вычислительные технологии*. 2006. Т. 11, № 4.
99. Kawamura T., Takami H., Kuwahara K. New higher-order upwind scheme for incompressible Navier-Stokes equations. // *Lect Notes Phys.* 1985. V. 218.
100. Попов Ю. П., Самарский А. А. Вычислительный эксперимент // *Компьютеры, модели, вычислительный эксперимент*. М.: Наука, 1988.
101. Bruneau Ch.-H., Jouron C. An efficient scheme for solving steady incompressible Navier–Stokes equations // *J. Comput. Phys.* 1990, V. 89, N 2.
102. Kwak D., Kiris C., Housman J. Implicit methods for viscous incompressible flows // *Computers & Fluids*. 2011. V. 41.
103. Hafez M. Numerical simulation of incompressible flows. World Scientific, 2002.
104. Gresho P. M, Sani R. L. Incompressible flow and the finite element method // John Wiley and Sons, 1998.
105. Головачев Ю. П., Колешко С. Б., Шур М. Л. Численные методы решения уравнений гидрогазодинамики. Учебное пособие. СПб.: Изд-во СПбГТУ, 1997.
106. Ковеня В. М. Об устойчивости схем расщепления и приближенной факторизации для решения систем многомерных уравнений // *Вычислительные технологии*. 2011. Т. 16, № 6.
107. Ковеня В. М. Об одном алгоритме решения уравнений Навье–Стокса вязкой несжимаемой жидкости // Там же. 2006. Т. 11, № 2.
108. Базовкин А. В., Вавилова О. М., Ковеня В. М. Метод факторизации для численного решения уравнений вязкой несжимаемой жидкости // Там же. 2009, Т. 14, № 2.
109. Базовкин А. В., Ковеня В. М., Лебедев А. С. Численное моделирование течения газа около пластины с микродувом // Там же. 2012. Т. 17, № 2.
110. Bazovkin A. V., Bilsky A. V., Boiko A. V. et al. A comprehensive analysis of turbulent boundary layer at air blowing through a microperforated surface // *Proc. of the 7th Intern. Symp. on Turbulence, Heat and Mass Transfer, Palermo, Italy, 24–27 Sept, 2012.*

111. Базовкин А. В., Ковеня В. М., Корнилов В. И., Лебедев А. С., Попков А. Н. Влияние микровдува газа с поверхности пластины на ее сопротивление // Прикладная механика и техническая физика. 2012. Т. 53, № 4.
112. Kornilov V. I. Reduction of turbulent friction by active and passive methods (Review) // Thermophysics and Aeromechanics. 2005. V. 12, N 2.
113. Kornilov V. I., Boiko A.V. Periodic forcing of the turbulent boundary layer on a body of revolution // AIAA J. 2008. V. 46, N 3.
114. Бойко А. В., Корнилов В. И. Влияние периодического вдува / отсоса через последовательно расположенные кольцевые щели на турбулентный пограничный слой тела вращения // Теплофизика и аэромеханика. 2008. Т. 15, № 1.
115. Корнилов В. И., Бойко А. В. Использование микровдува воздуха через пористую стенку для снижения трения на плоской пластине // Вестник НГУ. Серия: Физика. 2010. Т. 5, вып. 3.
116. Корнилов В. И., Бойко А. В., Попков А. Н. Влияние микровдува воздуха через проникаемую стенку на турбулентный пограничный слой // Там же. 2011. Т. 6, вып. 1.
117. Шиплюк А. Н., Буров Е. В., Маслов А. А., Фомин В. М. Влияние пористых покрытий на устойчивость гиперзвуковых пограничных слоев // Прикладная математика и теоретическая физика. 2004. Т. 45, № 2.
118. Hwang D. P. A Proof of Concept Experiment for Reducing Skin Friction by Using a Micro Blowing Technique // AIAA Paper 97-0546, 1997.
119. Hwang D. P. Review of Research into the Concept of Micro-Blowing Technique for Turbulent Skin Friction Reduction // Invited Paper, Prog. in Aerospace Sciences, October, 2004.
120. Kudriavtsev V., Braun M. J. Computational Study of Micro-Blowing for Shear Force Reduction // VP-Vol.424-2, Computational Technologies for Fluid Thermal Structural / Chemical Systems with Industrial Applications, Vol. 2, ASME 2001.
121. Колобов Б. П., Попков А. Н. Моделирование двумерного пограничного слоя // Численные методы в механике жидкости и газа / ИТПМ СО АН СССР. Новосибирск, 1980.
122. Cebeci T. Analysis of Turbulent Flows. Elsevier, USA, 2004.

## Оглавление

Предисловие .....	3
Введение .....	8
<b>Глава 1. Базовые численные алгоритмы решения многомерных задач</b> .....	12
§ 1.1. Исходные уравнения .....	–
§ 1.2. Основные понятия теории разностных схем .....	16
§ 1.3. Требования к численным алгоритмам .....	21
§ 1.4. Неявные схемы для скалярного уравнения .....	28
§ 1.5. Неявные схемы для системы уравнения .....	31
§ 1.6. Разностные схемы расщепления .....	33
§ 1.7. Метод расщепления по направлениям .....	35
§ 1.8. Метод предиктор–корректор .....	39
§ 1.9. Метод предиктор–корректор для многомерных уравнений .....	42
§ 1.10. Метод факторизации .....	45
§ 1.11. Устойчивость разностных схем для многомерных уравнений.....	49
§ 1.12. О реализации краевых условий в неявных схемах .....	55
§ 1.13. Метод линеаризации при решении нелинейных уравнений .....	58
<b>Глава 2. Разностные методы решения одномерных задач</b> .....	64
§ 2.1. Разностные схемы для уравнений газовой динамики.....	–
2.1.1. Нефакторизованные разностные схемы .....	–
2.1.2. Схемы приближенной факторизации.....	71
2.1.3. Разностные схемы при специальном расщеплении .....	77
2.1.4. Разностная схема в переменных $\rho$ , $\rho v$ , $p$ .....	80
2.1.5. Диссипативные свойства схем расщепления .....	84
§ 2.2. Схемы для уравнений Навье–Стокса .....	88
§ 2.3. Примеры численных расчетов .....	94
2.3.1. Задача о распаде произвольного разрыва .....	95
2.3.2. Течение в канале переменного сечения.....	97
§ 2.4. Схемы для уравнений магнитной гидродинамики .....	103
2.4.1. Разностная схема для упрощенных уравнений .....	–
2.4.2. Разностная схема для уравнений магнитной гидродинамики.....	105
<b>Глава 3. Разностные методы решения многомерных задач</b> .....	111
§ 3.1. Уравнения Эйлера и Навье–Стокса в многомерном случае .....	112
§ 3.2. Метод расщепления .....	117
§ 3.3. Специальная форма расщепления уравнений газовой динамики ...	122
§ 3.4. Специальная форма расщепления уравнений Навье–Стокса.....	127
§ 3.5. Неявные разностные схемы для уравнений газовой динамики.....	130

§ 3.5.1. Схемы приближенной факторизации .....	131
3.5.2. Схемы расщепления по направлениям .....	137
3.5.3. Схемы расщепления по физическим процессам и пространственным направлениям .....	140
3.5.4. Схемы расщепления по физическим процессам .....	144
§ 3.6. Схемы оптимального расщепления для уравнений газовой динамики .....	148
§ 3.7. Об устойчивости разностных схем для многомерных уравнений	154
§ 3.8. Разностные схемы для решения уравнений Навье–Стокса .....	160
3.8.1. Схема приближенной факторизации .....	165
3.8.2. Схема предиктор–корректор .....	167
§ 3.9. Разностные схемы в преобразованных координатах .....	170
3.9.1. Уравнения Навье–Стокса в преобразованных координатах .....	171
3.9.2. Базовые схемы в криволинейных координатах .....	175
<b>Глава 4. Расчеты двумерных течений</b> .....	182
§ 4. 1. Течение в канале .....	–
4.1.1. Течение в канале со вдувом для различных чисел Маха .....	187
4.1.2. Течение в канале со вдувом для различных чисел Рейнольдса ...	193
§ 4.2. Течение около тела сложной конфигурации .....	199
4.2.1. Постановка задачи .....	–
4.2.2. Моделирование течений около образующей и в воздухозаборнике .....	202
4.2.3. Моделирование течений в расширенной области .....	210
4.2.4. Влияние краевых условий на характеристики течения .....	214
§ 4.3. Течение газа за соплом .....	216
<b>Глава 5. Разностные методы решения уравнений несжимаемой жидкости</b> .....	222
§ 5.1. Исходные уравнения .....	223
§ 5.2. Схема в переменных $\omega$ – $\psi$ .....	227
§ 5.3. Базовые схемы расщепления .....	230
§ 5.4. Схема приближенной факторизации .....	238
§ 5.5. Метод искусственной сжимаемости .....	242
5.5.1. Схема расщепления по направлениям .....	244
5.5.2. Схема приближенной факторизации .....	247
§ 5.6. Схемы в криволинейных координатах .....	248
5.6.1. Схема приближенной факторизации .....	250
5.6.2. Схемы в методе искусственной сжимаемости .....	253
§ 5.7. Моделирование вязких течений .....	258
5.7.1. Течение в каверне .....	–
§ 5.8. Течение около пластины с микровдувом газа .....	263
5.8.1. Постановка задачи и метод решения .....	264
5.8.2. Результаты расчетов. Ламинарный режим течения .....	266
5.8.3. Результаты расчетов. Турбулентный режим течений .....	268
<b>Литература</b> .....	272
<b>Оглавление</b> .....	279



Научное издание

*Ковеня Виктор Михайлович*

**АЛГОРИТМЫ РАСЩЕПЛЕНИЯ ПРИ РЕШЕНИИ  
МНОГОМЕРНЫХ ЗАДАЧ АЭРОГИДРОДИНАМИКИ**

Редактор *Н.А. Ливищ*

Художественный редактор *О.М. Вараксина*

Компьютерная верстка *С.Ю. Бадалян*

Корректор *Н.В. Счастлива*

---

Подписано в печать 26.12.13. Формат 60×90 1/16. Усл. печ. л. 17,5.

Уч.-изд. л. 13,5. Тираж 300 экз. Заказ № 267

---

630090, Новосибирск, Морской просп., 2

E-mail: [psb@sibran.ru](mailto:psb@sibran.ru)

Тел.: (383)330-80-50

Отпечатано в Издательстве СО РАН

Интернет-магазин Издательства СО РАН

<http://www.sibran.ru>