ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ЭКОНОМИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

В. Д. Лисейкин

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Монография

Новосибирск
2009

ББК В161.61 я 73-1
УДК 517.9, 519.3
Л631

Лисейкин В. Д. Обыкновенные дифференциальные уравнения и вариационное исчисление: Монография / Новосиб. гос. ун-т. Новосибирск, 2009. 146 с.
ISBN 978-5-94356-800-8

Монография соответствует программе курса по обыкновенным дифференциальным уравнениям и вариационному исчислению для студентов нематематических специальностей, вводит в теорию оптимального управления Понтрягина.

В монографии приведены более простые формулы решений уравнений n-го порядка и систем первого порядка. В частности, описан единый алгоритм решения систем первого порядка с постоянными коэффициентами и произвольными корнями без привлечения довольно трудной для усвоения техники присоединенных векторов. Также усовершенствован вывод уравнений Эйлера для вариационных задач.

Предназначено для студентов и преподавателей университетов и вузов.

This book corresponds to the course of ordinary differential equations and the calculus of variations for the students of nonmathematical specializations. The book also gives an elementary introduction in the theory of optimal control of Pontryagin.

The monograph contains simple formulas of solutions of the equations of order n and the systems of the first order. In particular, there is presented a uniform algorithm for the solution of the systems with constant coefficients and arbitrary roots. Also there is perfected the proof of Euler theorem for the problems of the calculus of variations.

The book is aimed at the students and teachers of universities and high schools.

Рецензент
д-р физ.-мат. наук, проф. С. И. Фадеев

ISBN 978-5-94356-800-8

Оглавление

Предисловие

Данная монография включает лекционный курс по обыкновенным дифференциальным уравнениям и вариационному исчислению, читаемый автором в течение восьми лет на экономическом факультете НГУ. Для того, чтобы сделать изучение курса более доступным для студентов, в монографии использованы современные подходы, исключена излишняя детализация и упрощены сложные доказательства. Приведена формула в квадратурах решения линейного неоднородного уравнения с постоянными коэффициентами и более простые формулы решений уравнений n-го порядка и систем первого порядка.

В главе 1 представлены примеры обыкновенных дифференциальных уравнений и систем уравнений, моделирующих некоторые процессы в экономике, биологии и механике. Глава 2 посвящена простейшим уравнениям первого порядка и аналитическим методам их решения. Приведено также доказательство теоремы Пикара о существовании и единственности решения уравнения первого порядка, записанного в явной форме. Глава 3 вводит в методы решения линейных систем уравнений первого порядка. В этой главе проводится детальное доказательство теоремы о корневом базисе, что является важным моментом для более глубокого осмысления студентами формул, описывающих решения систем линейных уравнений с постоянными коэффициентами. Вопросы решения уравнений n-го порядка представлены в главе 4, где подробно изложены методы решения линейных уравнений n-го порядка с постоянными коэффициентами. В частности, с помощью представления оператора n-го порядка в виде композиции операторов 1-го порядка выписана в квадратурах формула решения неоднородного линейного уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами. Также приведено детальное объяснение формулы решения уравнения в методе неопределенных коэффициентов. Глава 5 вводит в простейшие методы исследования устойчивости систем уравнений 1-го порядка относительно начальных данных. Вопросы вариационного исчисления изложены в главе 6, в которой даны подробные доказательства вывода уравнений Эйлера как для задач на безусловный экстремум, так и для задач на условный экстремум. Глава 7 посвящена некоторым простейшим задачам оптимального управления.

Автор выражает благодарность преподавателям университета Н. В. Дементьевой и В. А. Чуркину за консультации и полезные замечания по теории матриц и обыкновенным дифференциальным уравнениям, а также Г. С. Лисейкиной, Ю. В. Лихановой и И. А. Васевой за помощь при подготовке рукописи.

Глава 1

Примеры уравнений

1.1. Определение дифференциальных уравнений

1.1.1. Обыкновенные уравнения

Под **обыкновенным дифференциальным уравнением** понимается такое уравнение, которое содержит некоторые производные искомой скалярной функции от одной независимой вещественной переменной и может содержать эту функцию и независимую переменную.

Порядком уравнения называется порядок старшей производной, входящей в уравнение.

Если обозначить через x независимую переменную (аргумент), а через $y(x)$ – искомую скалярную функцию, при этом y называют зависимой переменной, то в общем случае обыкновенное дифференциальное уравнение порядка n записывается в **неявном виде**:

$$\Phi(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0, \tag{1.1}$$

где $\Phi()$ – известная функция $n+2$ независимых переменных в некоторой области $D \subset \mathbf{R}^{n+2}$. Если уравнение (1.1) удается разрешить относительно $y^{(n)}$, т. е. записать в форме

$$y^{(n)} = F(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}), \tag{1.2}$$

то такая запись называется **уравнением в нормальной форме**, или **уравнением в разрешенном относительно старшей производной виде**.

Если правая часть уравнения в нормальной форме линейна относительно неизвестной функции $y(x)$ и ее производных, то такое уравнение называется **линейным**. В этом случае уравнение можно записать в стандартном виде

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x). \qquad (1.3)$$

Уравнение (1.3) называется **однородным**, если $f(x) \equiv 0$, а если $f(x) \neq 0$, то **неоднородным**.

В общем случае при записи уравнений нет жестких ограничений для обозначения как независимой переменной, так и искомой функции. Например, в качестве обозначения искомой функции (зависимой переменной) может использоваться z, а независимой переменной – y. Однако если рассматривается дифференциальная задача, в которой независимой переменной является время, то для обозначения этой переменной используется обычно буква t, а искомая функция записывается в виде $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, $P(t)$, $K(t)$ и т. д.

1.1.2. Системы обыкновенных дифференциальных уравнений

Если в качестве искомой функции рассматривается не скалярная, а вектор-функция $\mathbf{y}(x)$

$$\mathbf{y}(x) = [y_1(x), \ldots, y_n(x)]^T, \qquad n > 1$$

от одной переменной x и задано несколько уравнений, которые включают некоторые производные функции $\mathbf{y}(x)$, а также могут включать эту функцию и независимую переменную x, то совокупность этих уравнений называется **системой обыкновенных дифференциальных уравнений**.

По аналогии с (1.1–1.3) запись системы обыкновенных дифференциальных уравнений порядка l имеет следующие формы:

$$\mathbf{\Phi}(x, \mathbf{y}, \mathbf{y}', \ldots, \mathbf{y}^{(l)}) = \mathbf{0}, \;\; \mathbf{\Phi} = (\Phi_1, \ldots, \Phi_k)^T, \;\; l \geq 1, \; - \text{неявная},$$

$$\mathbf{y}^{(l)} = \mathbf{F}(x, \mathbf{y}, \mathbf{y}', \ldots, \mathbf{y}^{(l-1)}), \;\; \mathbf{F} = (F_1, \ldots, F_n)^T \; - \text{нормальная},$$

$$\mathbf{y}^{(l)} + A_1(x)\mathbf{y}^{(l-1)} + \ldots + A_{l-1}(x)\mathbf{y}' + A_l(x)\mathbf{y} = \mathbf{f}(x) \; - \text{линейная},$$

где A_i – $(n \times n)$ матрицы, $\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_n)^T$.

Если в уравнении, записанном в неявной форме, $k < n$, то система уравнений называется **недоопределенной**, а если $k > n$, то **переопределенной**.

Если для линейной системы уравнений $\mathbf{f}(x) \equiv \mathbf{0}$, то такая система называется **однородной**, если $\mathbf{f}(x) \neq \mathbf{0}$, то – **неоднородной**.

1.2. Примеры уравнений

1.2.1. Модель динамики численности популяции

Простейший закон изменения численности популяции $P(t)$ во времени t в неограниченной среде моделируется следующим линейным уравнением:

$$\frac{dP}{dt} = (\alpha - \beta)P, \tag{1.4}$$

где α – коэффициент рождаемости, β – коэффициент смертности.

В популяциях, рассматриваемых в ограниченных пространствах, коэффициент β зависит от P. Например, в случае линейной зависимости $\beta = \gamma P$ уравнение динамики популяции записывается в виде

$$\frac{dP}{dt} = (\alpha - \gamma P)P. \tag{1.5}$$

1.2.2. Уравнение для капитала

Уравнение для капитала $K(t)$ имеет вид

$$\frac{dK}{dt} = K_2 - K_1, \tag{1.6}$$

где $K_2 = PC_kK_c$, $K_1 = K/T_k$, P – численность населения, C_k – скорость генерации капиталовложений на душу населения, K_c – коэффициент, выражающий возрастание возможностей населения вкладывать средства в расширение производства, а T_k – коэффициент нормального износа основных фондов.

1.2.3. Уравнение для загрязнения

Аналогичным уравнению для капитала является уравнение для загрязнения $Z(t)$ окружающей среды

$$\frac{dZ}{dt} = Z_2 - Z_1, \tag{1.7}$$

где $Z_2 = PZ_0Z_k$, $Z_1 = Z/T_z$, P – численность населения, Z_0 – скорость генерации загрязнения в расчете на одного человека, Z_k – рост загрязненности с ростом удельного капитала, T_z – таблично заданная функция времени.

1.2.4. Модель хищник – жертва

В этом пункте мы укажем пример системы уравнений первого порядка.

Пусть $x(t)$ и $y(t)$ соответственно численность жертв и хищников в момент времени t. Тогда простейшие уравнения системы хищник – жертва записываются в виде

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \alpha x - V(x)y, \\ \frac{dy}{dt} &= y(kV(x) - m), \end{aligned} \tag{1.8}$$

где α и m – коэффициенты относительной скорости прироста жертв и смертности хищников соответственно, $V(x)$ – количество (или биомасса) жертв, потребляемых одним хищником за единицу времени, а k – это часть биомассы, расходуемой на воспроизводство одного хищника. В случае, когда $V(x)$ – линейная функция $V = \beta x$, система (1.5) переходит в

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \alpha x - \beta xy, \\ \frac{dy}{dt} &= y(k\beta x - m). \end{aligned} \tag{1.9}$$

Если в популяции хищников отсутствует внутривидовая конкуренция, то модель хищник-жертва имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \alpha(x)x - V(x)y, \\ \frac{dy}{dt} &= K(x)y, \end{aligned} \tag{1.10}$$

где K – коэффициент естественного прироста хищников.

1.2.5. Уравнение движения материальной точки

Примером системы уравнений второго порядка является векторное уравнение движения материальной точки массы m, описываемое векторфункцией $\mathbf{y}(t)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)^T$, под влиянием силы $\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3)^T$, зависящей от времени, положения точки и ее скорости, т. е. $\mathbf{F} = \mathbf{F}(t, \mathbf{y}(t), \mathbf{y}'(t))$. Согласно законам механики, сила равна произведению массы на ускорение. Ускорение материальной точки равно $\mathbf{y}''(t)$. Поэтому система уравнений движения материальной точки массы m записывается в векторном виде следующим образом:

$$m\frac{d^2\mathbf{y}}{dt^2} = \mathbf{F}\Big(t, \mathbf{y}, \frac{d\mathbf{y}}{dt}\Big). \tag{1.11}$$

1.3. Решение уравнения

Решением обыкновенного дифференциального уравнения n-го порядка называется такая функция, заданная и непрерывная вместе со своими производными до порядка n на некотором интервале $[a, b]$, которая при подстановке в уравнение превращает его в тождество, справедливое при всех значениях аргумента из этого интервала. Например, для уравнения динамики популяции (1.4)

$$P' = (\alpha - \beta)P$$

функция

$$P(t) = ce^{(\alpha-\beta)t},$$

где $t \in R$, является его решением при произвольной константе c. Это выражение для $P(t)$ описывает хорошо известный закон экспоненциального роста численности популяции в неограниченной среде (закон Мальтуса).

Решить уравнение – это значит найти все его решения. Процесс нахождения решения уравнения называется его **интегрированием**. Если в уравнении используется обозначение x для независимой переменной, а y – для зависимой, то решение уравнения может быть записано в следующих формах:

1) $y(x) = \phi(x)$ – явный вид,

2) $\psi(x, y) = 0$ – неявный вид,

3) $x = \psi(s),\ y = \phi(s)$ – параметрический вид.

График решения дифференциального уравнения называется **интегральной кривой**.

Если решение уравнения выражается через элементарные функции и/или через интегралы, то такое решение называют **решением в квадратурах**. Например, решением уравнения

$$y' + e^{x^2} = 0$$

будет следующая функция:

$$y(x) = -\int e^{x^2}\,dx,$$

записанная с помощью интеграла.

Глава 2

Скалярные уравнения первого порядка

Введение

В соответствии со сформулированными во введении определениями обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка записывается в виде:

$\Phi(x, y, y') = 0$	– неявная форма,
$y' = f(x, y)$	– нормальная форма,
$y' + a(x)y = g(x)$	– неоднородное линейное уравнение,
$y' + a(x)y = 0$	– однородное линейное уравнение,

где $\Phi()$, $f()$, $a()$, $g()$ – известные функции соответствующих аргументов.

Функция $y(x)$ является **решением** уравнения на интервале (a, b), если эта функция имеет первую производную во всех точках (a, b) и подстановка $y(x)$ и $y'(x)$ в уравнение превращает его в тождество, справедливое для всех точек этого интервала. Например, если $y(x) = \phi(x)$ – решение уравнения

$$\Phi(x, y, y') = 0,$$

записанного в неявной форме, то должно выполняться следующее тождество:

$$\Phi(x, \phi(x), \phi'(x)) \equiv 0, \qquad x \in (a, b).$$

2.1. Геометрическая интерпретация уравнения в нормальной форме

Пусть обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка записано в форме, разрешенной относительно производной искомой функции:

$$y' = f(x, y). \tag{2.1}$$

Так как $y'(x)$ есть угловой коэффициент, равный $\mathrm{tg}\alpha$, где α – угол наклона касательной к кривой $(x, y(x)) \subset R^2$ (здесь $y(x)$ – решение (2.1)), то функция $f(x, y)$ в уравнении $y' = f(x, y)$ устанавливает зависимость между угловым коэффициентом интегральной кривой и точкой графика решения. Зная x и y, можно вычислить угловой коэффициент с помощью функции $f(x, y)$ в (2.1). Таким образом, для всех значений (x, y) правая часть уравнения (2.1) определяет **поле направлений касательных** в плоскости x, y, и задача интегрирования такого уравнения сводится к задаче нахождения кривых в этой плоскости, называемых **интегральными**, направление касательных к которым в каждой точке совпадает с направлением поля.

Поле направлений удобно строить путем задания семейства **изоклин**, т. е. кривых, определяемых уравнением $f(x, y) = c$. Во всех точках такой кривой направление поля будет одно и то же. Рассматривая разные значения c, мы можем легко построить поле направлений в плоскости x, y и приближенное семейство интегральных кривых, соответствующих этому полю.

Например, пусть уравнение (2.1) имеет вид $y' = y/x$. Тогда изоклинами являются прямые линии $y = cx$ (рис. 2.1). В каждой точке такой линии тангенс угла наклона касательной к интегральной кривой, проходящей через эту точку, равен c. Так как тангенс угла наклона прямой $y = cx$ также равен c, то в каждой точке этой прямой направление поля совпадает с этой же прямой. Очевидно, что прямая $y = cx$ и будет той интегральной кривой, касательные к которой имеют то же направление в каждой точке, что и направление поля в этой точке. Таким образом, функция $y = cx$ и является решением указанного уравнения.

Рассмотрим еще одно уравнение $y' = x^2 + y^2$. Изоклинами для этого уравнения являются окружности $x^2 + y^2 = r^2$, а интегральные кривые в каждой точке фиксированной окружности наклонены к оси x под одним углом (рис. 2.2). При этом при $r = 0$ угол наклона равен нулю и с увеличением r величина угла растет. Схематическое изображение

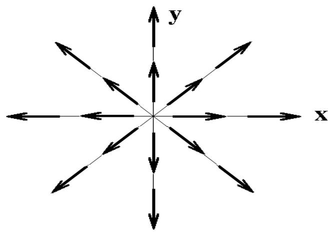

Рис. 2.1

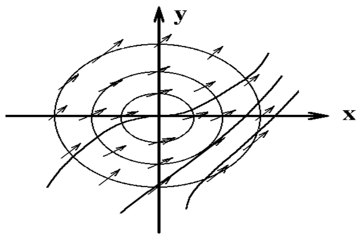

Рис. 2.2

интегральных кривых для этого уравнения показано на рис. 2.2.

Функция $f(x,y)$ позволяет, кроме поля направлений, также определять линии экстремумов и линии перегибов, во всех точках которых интегральные кривые будут иметь соответственно экстремум или перегиб. Очевидно, что линия, точки которой могут быть экстремумами интегральных кривых, определяется из уравнения $y' = f(x,y) = 0$, т. е. является изоклиной для $c = 0$. Если $y'' = f_x + f_y f \neq 0$ во всех точках этой линии, то она будет линией локального максимума (минимума) при $y'' < 0 (y'' > 0)$ семейства интегральных кривых.

Аналогично линия, точки которой могут быть точками перегиба интегральных кривых, определяется из уравнения $y'' = f_x + f_y f = 0$. Если в точках этой кривой $f''' = f_{xx} + 2f_{yx}f + f_{yy}f^2 + f_y f_y f + f_y f_x \neq 0$, то она будет линией перегиба.

Изучение поля направлений полезно в тех случаях, когда уравнение не интегрируется даже в квадратурах.

Если в какой-либо точке (x,y) функция $f(x,y)$ обращается в бесконечность, то геометрически это означает, что коэффициент наклона касательной равен бесконечности, т. е. направление поля в этой точке параллельно оси y. В этом случае для интегрирования нужно рассмотреть уравнение $dx/dy = 1/f(x,y)$, получаемое из (2.1) относительно функции $x(y)$, обратной $y(x)$.

Учитывая взаимозаменяемость переменных x и y, обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка часто записывают в **симметричной форме**:

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0, \tag{2.2}$$

из которой мы получаем нормальную форму уравнения

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{M}{N} \left(\frac{dx}{dy} = -\frac{N}{M}\right)$$

относительно искомой функции $y(x)$, если $N(x, y) \neq 0$ (относительно $x(y)$, если $M(x, y) \neq 0$).

2.2. Общее и частное решение

По графику поля направлений можно заключить, что решением является семейство кривых, зависящих от одного вещественного параметра, т. е. однопараметрическое семейство кривых. Параметр обычно обозначается через c. Это семейство кривых называется **общим решением** дифференциального уравнения 1-го порядка.**Частное решение** получается при некотором значении параметра c.

Общее решение записывается в следующем виде:

$y = \phi(x, c)$ – явная форма,

$F(x, y, c) = 0$ – неявная форма,

$x = \phi(t, c), \quad y = \psi(t, c)$ – параметрическая форма.

В практических приложениях частное решение уравнения первого порядка ищется обычно как решение **задачи Коши** (начальной задачи): $y' = f(x, y),\ y(x_0) = y_0$, т. е. нужно найти интегральную кривую, проходящую через точку (x_0, y_0).

Решение $y = y(x)$ уравнения (2.1), в каждой точке которого нарушается единственность решения задачи Коши, называется **особым решением**. Например, если семейство интегральных кривых имеет **огибающую**, т. е. кривую, в каждой точке касающуюся, по крайней мере, одну интегральную линию, то эта огибающая является особым решением. Кривые $y = \phi(x)$, являющиеся особым решением уравнения (2.1), должны также удовлетворять дополнительному уравнению:

$$f_y(x, y)\big|_{y=\phi(x)} = \infty.$$

2.3. Аналитические методы решения

2.3.1. Уравнения с разделяющимися переменными

Уравнением с разделяющимися переменными называется такое уравнение, которое имеет вид

$$y' = f(x)g(y) \tag{2.3}$$

или в симметричной форме

$$M(x)N(y)dx + P(x)Q(y)dy = 0. \tag{2.4}$$

Для тех значений y, для которых $g(y) \neq 0$, уравнение (2.3) может быть заменено эквивалентным уравнением $dy/g(y) = f(x)dx$. Отсюда мы находим, что $dG(y) = dF(x)$, где $G(y) = \int \frac{1}{g(y)}dy$, $F(x) = \int f(x)dx$. Так как дифференциалы функций $G(y)$ и $F(x)$ совпадают, то они отличаются на константу. Таким образом, мы получаем формулу неявной зависимости между переменными y и x: $G(y) = F(x) + c$, что является неявной формой общего решения уравнения (2.3). Покажем, что функция $y(x)$, являющаяся решением уравнения $G(y) = F(x) + c$, является также и решением дифференциального уравнения (2.3). Для этого воспользуемся формулой производной неявной функции $y(x)$, получаемой из уравнения $\phi(x, y) = 0$. А именно $y'(x) = -\phi_x/\phi_y$. Полагая $\phi(x, y) \equiv G(y) - F(x) - c$, имеем $y'(x) = -\frac{dF}{dx}/\frac{dG}{dy} = f(x)g(y)$, т. е. функция $y(x)$ является решением уравнения (2.3).

Отметим, что частным видом уравнений с разделяющимися переменными являются уравнения, не содержащие искомой функции или не содержащие независимой переменной, а именно $y' = f(x)$ или $y' = g(y)$.

Пример 2.1. Пусть нужно решить уравнение

$$\sqrt{1 + y^4}dx = xy^3dy.$$

Поделив обе части на $x\sqrt{1 + y^4}$, получаем:

$$\frac{dx}{x} = \frac{y^3}{\sqrt{1 + y^4}}dy, \qquad x \neq 0.$$

Отсюда

$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{y^3}{\sqrt{1 + y^4}}dy,$$

и, следовательно, решением уравнения будет

$$\ln|x| = \frac{1}{2}\sqrt{1+y^4} + c, \qquad x \neq 0.$$

Отсюда $|x| = e^c e^{1/2\sqrt{1+y^4}}$ и, значит, $x = \pm e^c e^{1/2\sqrt{1+y^4}}$. А так как функция $x \equiv 0$ также будет решением, то функция $x(y) = c_1 e^{1/2\sqrt{1+y^4}}$, $c_1 \in R$ является решением этого уравнения.

Уравнение вида

$$y' = f(ax + by). \tag{2.5}$$

Если a и b – константы, отличные от нуля, то введение новой зависимой переменной $z = ax + by$ преобразовывает (2.5) в уравнение $z' = a + bf(z)$, не содержащее независимой переменной, т. е. имеющее вид (2.3)

Однородное уравнение

Уравнение, которое может быть преобразовано к виду

$$y' = f\Big(\frac{y}{x}\Big), \tag{2.6}$$

называется **однородным уравнением**. Введение новой зависимой переменной $z = y/x$ приводит к соотношению $y' = z'x + z$, следовательно, уравнение (2.6) приобретает вид $z'x = -z + f(z)$, т. е. форму уравнения с разделяющимися переменными.

Уравнение вида

$$y' = f\Big(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\Big). \tag{2.7}$$

Уравнение (2.7), в котором $a_1,\ b_1,\ c_1$ и $a_2,\ b_2,\ c_2$ – константы, приводится к виду (2.6), если

$$\det\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \neq 0. \tag{2.8}$$

Действительно, производя замену зависимой и независимой переменных по формулам $\overline{x} = x - x_0$, $\overline{y} = y - y_0$, где x_0 и y_0 – решение системы

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1 &= 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 &= 0, \end{aligned} \tag{2.9}$$

мы получаем $\overline{y}' = f\Big(\dfrac{a_1(\overline{x}+x_0)+b_1(\overline{y}+y_0)+c_1}{a_2(\overline{x}+x_0)+b_2(\overline{y}+y_0)+c_2}\Big) = f\Big(\dfrac{a_1\overline{x}+b_1\overline{y}}{a_2\overline{x}+b_2\overline{y}}\Big) = f\Big(\dfrac{a_1+b_1\overline{y}/\overline{x}}{a_2+b_2\overline{y}/\overline{x}}\Big)$, т. е. уравнение в форме (2.6).

Отметим, что решение системы (2.9) существует в силу условия (2.8). Если это условие не выполняется, т. е. матрица в (2.8) вырождена, тогда либо $(a_1, b_1) = k(a_2, b_2)$, либо $(a_2, b_2) = k(a_1, b_1)$ и, значит, уравнение (2.7) имеет вид (2.5).

Уравнение в симметричной форме

Форма (2.6) может быть получена также для уравнений, записанных симметричным образом:

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0, \tag{2.10}$$

если $M(x,y)$ и $N(x,y)$ – однородные функции степени m, т. е. $M(tx,ty) = t^mM(x,y)$, $N(tx,ty) = t^mN(x,y)$. Действительно, в этом случае мы имеем из (2.10) $x^mM(1,y/x)dx + x^mN(1,y/x)dy = 0$, и для $x \neq 0$ получаем уравнение в виде (2.6).

Пример 2.2. Найти решение уравнения $-2xydx + (y^2+2x^2)dy = 0$. Если мы поделим это уравнение на x^2dx, то получим уравнение вида (2.6). Поэтому, вводя замену $y(x) = xz(x)$, мы приходим к уравнению с разделяющимися переменными z и x: $z^3x^2dx + x^3(z^2+2)dz = 0$. Отсюда $\displaystyle\int \frac{dx}{x} + \int \frac{z^2+2}{z^3}dz = 0$, $z \neq 0$, $x \neq 0$, и интегрирование дает $\ln|zx| - \dfrac{1}{z^2} = c$. Поэтому $|y| - e^ce^{x^2/y^2} = 0$ и, значит, $y = \pm e^ce^{x^2/y^2} = 0$. А так как $y(x) \equiv 0$ также будет решением уравнения, то получаем следующее решение в неявной форме: $y - c_1e^{x^2/y^2} = 0$, $c_1 \in R$.

2.3.2. Линейные уравнения первого порядка

В соответствии с определением обыкновенное линейное уравнение первого порядка имеет вид

$$y' + p(x)y = g(x), \tag{2.11}$$

где $p(x)$ и $g(x)$ – известные функции, заданные на интервале (a, b).

Решение однородного линейного уравнения

Если $g(x) \equiv 0$, то (2.11) является однородным линейным уравнением с разделяющимися переменными. Очевидно, что функция $y \equiv 0$ является решением этого уравнения. Остальные решения находятся путем интегрирования соотношения, эквивалентного однородному уравнению при $y \neq 0$: $\dfrac{dy}{y} + p(x)dx = 0$, дающего следующую зависимость между y и $x : \ln|y| + \displaystyle\int p(x)dx = c_1$. Разрешая эту зависимость относительно y, мы получаем $y(x) = \pm e^{c_1} e^{-\int p(x)dx}$. А так как $y(x) \equiv 0$ также решение уравнения (2.11) при $g(x) = 0$, то общее решение однородного линейного уравнения имеет вид

$$y(x) = ce^{-\int p(x)dx}, \qquad c \in \ R. \tag{2.12}$$

Решение неоднородного линейного уравнения

Так как (2.11) – линейное уравнение, то его интегрирование можно свести к интегрированию некоторого однородного линейного уравнения, если известно одно частное решение (2.11). Действительно, пусть $y(x) = \phi(x)$ – решение (2.11), т. е. $\phi'(x) + p(x)\phi(x) = g(x)$. Тогда, вводя новую зависимую переменную $z = y - \phi(x)$, получаем $dz/dx + p(x)z = 0$, т. е. линейное однородное уравнение относительно зависимой переменной z, общее решение которого в соответствии с формулой (2.12) имеет вид $z(x) = ce^{-\int p(x)dx}$. Таким образом, общее решение неоднородного линейного уравнения (2.11) выражается формулой

$$y(x) = \phi(x) + ce^{-\int p(x)dx}, \tag{2.13}$$

где $\phi(x)$ – какое-либо частное решение.

Метод вариации постоянной

Метод **вариации постоянной** заключается в том, что решение неоднородного уравнения (2.11) ищется в форме (2.12), задающей решение однородного линейного уравнения, но в которой c является некоторой функцией $c(x)$, в общем случае представимой в квадратурах. Таким образом, мы полагаем

$$y(x) = c(x)e^{-\int p(x)dx}. \tag{2.14}$$

Следовательно,

$$y'(x) = c'(x)e^{-\int p(x)dx} - c(x)p(x)e^{-\int p(x)dx} = c'(x)e^{-\int p(x)dx} - p(x)y(x).$$

Подставляя эти выражения для $y(x)$ и $y'(x)$ в (2.11), мы получаем уравнение для $c(x)$: $c'(x)e^{-\int p(x)dx} = g(x)$, решением которого будет $c(x) = \displaystyle\int g(x)e^{\int p(x)dx}dx + c$. Учитывая это выражение для $c(x)$ в (2.14), находим из формулы (2.13) общее решение неоднородного линейного уравнения (2.11) в явной форме в квадратурах:

$$y(x) = e^{-\int p(x)dx}(c + \int g(x)e^{\int p(x)dx}dx). \tag{2.15}$$

Решение уравнения (2.11) в форме (2.15) мы можем получить еще одним способом. А именно, умножив уравнение (2.11) на функцию $e^{\int p(x)dx}$ и заметив, что

$$e^{\int p(x)dx}[y' + p(x)y] = (ye^{\int p(x)dx})',$$

мы получаем следующее уравнение

$$(ye^{\int p(x)dx})' = g(x)e^{\int p(x)dx},$$

интегрирование которого дает решение, эквивалентное (2.15).

Пример 2.3. Найти общее решение следующего уравнения 1-го порядка $y' + xy = xe^{x^2}$. В соответствии с записью (2.11), $p(x) = x$, а $g(x) = xe^{x^2}$, поэтому, воспользовавшись формулой (2.15), получаем:

$$y(x) = e^{-x^2/2}(c + \int xe^{x^2}e^{x^2/2}dx) = e^{-x^2/2}(c + \frac{1}{3}e^{3x^2/2}).$$

2.3.3. Нелинейные уравнения, допускающие преобразование в линейные уравнения

Уравнение Бернулли

Уравнение Бернулли имеет вид

$$y' + p(x)y = g(x)y^m. \tag{2.16}$$

Очевидно, что это уравнение при $m = 0$ или $m = 1$ является линейным уравнением вида (2.11). Поэтому мы рассматриваем случай, когда $m \neq 0$ и $m \neq 1$.

Запишем уравнение (2.16) в виде

$$y^m[y'y^{-m} + p(x)y^{1-m} = g(x)]. \tag{2.17}$$

Очевидно, что если $m > 0$, то $y(x) \equiv 0$ будет решением (2.16). Остальные решения находятся из уравнения в квадратных скобках в (2.17), которое может быть записано в форме $\frac{1}{1-m}(y^{1-m})' + p(x)y^{1-m} = g(x)$. Теперь, вводя новую зависимую переменную $z = y^{1-m}$, мы приходим к линейному уравнению $\frac{1}{1-m}z' + p(x)z = g(x)$, которое после умножения на $1 - m$ имеет вид уравнения (2.11), решение которого определяется формулой (2.15).

Пример 2.4. Примером уравнения Бернулли является уравнение

$$y' = (\alpha - \gamma y)y, \tag{2.18}$$

которое в обозначениях $y = P$, $x = t$ моделирует простейший закон изменения численности популяции в ограниченном пространстве (1.5). В согласии с записью (2.16) для этого уравнения $m = 2$. Поэтому нужная замена независимой переменной y будет $z = 1/y$. Соответственно уравнение (2.18) относительно функции $z(x)$ имеет вид $z' + \alpha z = \gamma$. Решение этого уравнения дает формула (2.15) с $p(x) = \alpha$, $g(x) = \gamma$, а именно

$$z(x) = e^{-\alpha x}\Big(c + \frac{\gamma}{\alpha}e^{\alpha x}\Big).$$

Поэтому решением (2.18) будет функция $y(x) = \alpha e^{\alpha x}/(c\alpha + \gamma e^{\alpha x})$. Следовательно, решение задачи Коши с начальным условием $P(t_0) = P_0$ для уравнения (1.5) имеет вид

$$P(t) = \frac{\alpha P_0 e^{\alpha(t-t_0)}}{\alpha + \gamma P_0(e^{\alpha(t-t_0)} - 1)}, \qquad t \geq t_0,$$

где P_0 – численность популяции при $t = t_0$. Очевидно, что $\lim_{t\to\infty} P(t) = \alpha/\gamma$, т. е. согласно модели (1.5) численность популяции в ограниченной среде не может возрастать до бесконечности.

Уравнение Рикатти

Уравнение Рикатти записывается в виде

$$y' + p(x)y + g(x)y^2 = c(x). \tag{2.19}$$

Это уравнение может быть преобразовано к уравнению Бернулли и соответственно к линейному уравнению, если известно одно его частное решение $y(x) = \phi(x)$. В этом случае, производя замену $z = y - \phi(x)$, мы получаем из (2.19) $z' + \phi'(x) + p(x)z + p(x)\phi(x) + g(x)z^2 + g(x)\phi^2(x) + 2g(x)z\phi(x) = c(x)$. А так как $\phi(x)$ – решение (2.19), то мы приходим к следующему уравнению относительно новой зависимой переменной z: $z' + [p(x) + 2g(x)\phi(x)]z + g(x)z^2 = 0$, т. е. к уравнению Бернулли с $m = 2$.

Пример 2.5.

$$y' = y^2 - \frac{6}{x^2}.$$

Одним частным решением этого уравнения Рикатти будет $y(x) = 2/x$. Полагая $y = z + 2/x$, получаем уравнение Бернулли относительно z: $z' - 4z/x - z^2 = 0$. Делая замену $v = 1/z$, имеем $v' + 4v/x + 1 = 0$. Согласно (2.15) решением этого уравнения будет $v(x) = (cx^4 - x)/5$. Следовательно, $z(x) = \dfrac{5}{cx^4 - x}$ и $y(x) = \dfrac{5}{cx^4 - x} + \dfrac{2}{x}$.

2.3.4. Уравнения в полных дифференциалах

Уравнение

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \tag{2.20}$$

называется **уравнением в полных дифференциалах**, если его левая часть является дифференциалом некоторой функции $u(x, y)$, т. е.

$$du = M(x, y)dx + N(x, y)dy = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy. \tag{2.21}$$

Очевидно, что в этом случае общее решение уравнения (2.20) записывается в следующем неявном виде:

$$u(x, y) = c. \tag{2.22}$$

Действительно, пусть $y(x)$ – функция, найденная из уравнения $u(x, y) = c$. Тогда $u[x, y(x)] \equiv c$. Следовательно,

$$\frac{d}{dx}u[x, y(x)] = u_x + u_y\frac{dy}{dx} \equiv 0,$$

т. е. с учетом $M(x, y) = u_x$, $N(x, y) = u_y$ мы получаем, что (2.20) является тождеством для этой функции $y(x)$. Аналогичный результат следует, если уравнение (2.22) разрешимо относительно функции $x(y)$.

Критерий уравнения в полных дифференциалах

Так как функция $u(x, y)$, удовлетворяющая (2.21), заранее не известна, то нам необходим какой-либо алгоритм, указывающий, что уравнение (2.20) является уравнением в полных дифференциалах, а также необходим способ нахождения функции $u(x, y)$. Ответы на эти вопросы дает следующая

Теорема 2.1. *Предположим, что функции $M(x, y)$ и $N(x, y)$ непрерывны в некоторой односвязной области G. Кроме того, предположим, что в области G существуют непрерывные частные производные $\partial M/\partial y$ и $\partial N/\partial x$. Тогда для того чтобы уравнение (2.20) было уравнением в полных дифференциалах, необходимо и достаточно, чтобы в области G выполнялось тождество (Эйлера)*

$$\frac{\partial M}{\partial y} \equiv \frac{\partial N}{\partial x}. \tag{2.23}$$

Докажем необходимость условия (2.23). Пусть (2.20) – уравнение в полных дифференциалах. Тогда из (2.21) мы находим, что

$$M = \frac{\partial u}{\partial x}, \qquad N = \frac{\partial u}{\partial y}. \tag{2.24}$$

Дифференцируя первое тождество по y, а второе по x и учитывая, что

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}, \qquad (x, y) \in G,$$

мы приходим к тождеству (2.23), т. е. к необходимому условию, которому удовлетворяют коэффициенты уравнения (2.20).

Теперь докажем достаточность условия (2.23). Рассматривая независимую переменную y как параметр, мы можем считать первое уравнение в (2.24) обыкновенным дифференциальным уравнением для каждого заданного значения y относительно зависимой переменной u и независмой переменной x:

$$\frac{du}{dx}(x,y) = M(x,y). \tag{2.25}$$

Выберем теперь какую-нибудь точку (x_0, y_0) в области G. Решая уравнение (2.25) для фиксированного y, мы имеем

$$u(x,y) = \int_{x_0}^{x} M(x,y)dx + c(y), \tag{2.26}$$

где $c(y)$ – произвольная функция, зависящая от y. Очевидно, что для данной функции $u(x,y)$ выполняется тождество $\dfrac{\partial u}{\partial x}(x,y) = M(x,y)$. Таким образом, мы нашли семейство функций $u(x,y)$, удовлетворяющих первому тождеству в (2.24). Дифференцируя (2.26) по y, мы получаем

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial M}{\partial y}(x,y)dx + c'(y). \tag{2.27}$$

Так как мы предполагаем, что условие (2.23) выполнено, то уравнение (2.27) может быть преобразовано к виду

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial N}{\partial x}(x,y)dx + c'(y) = N(x,y) - N(x_0,y) + c'(y). \tag{2.28}$$

Таким образом, чтобы выполнялось второе тождество в (2.24), необходимо, чтобы $c'(y) - N(x_0,y) = 0$. Это условие мы можем реализовать, найдя $c(y)$ из уравнения $c'(y) = N(x_0,y)$. Решение этого уравнения определяет $c(y) = \displaystyle\int N(x_0,y)dy + c_1$, где c_1 – постоянная, не зависящая от x и y. Теперь, подставляя это значение $c(y)$ в (2.26), мы получаем выражение для $u(x,y)$:

$$u(x,y) = \int_{x_0}^{x} M(x,y)dx + \int N(x_0,y)dy + c_1, \tag{2.29}$$

удовлетворяющее соотношениям $\dfrac{\partial u}{\partial x}(x,y) = M(x,y)$ и $\dfrac{\partial u}{\partial y}(x,y) = N(x,y)$, т. е. $du = M(x,y)dx + N(x,y)dy$.

Аналогично (2.29) мы можем получить выражение для $u(x,y)$ в следующем виде:

$$u(x,y) = \int_{y_0}^{y} N(x,y)dy + \int M(x,y_0)dx + c.$$

Таким образом, мы определили через квадратуры функцию $u(x,y)$, дифференциал от которой равен левой части уравнения (2.20). Значит (2.20) является уравнением в полных дифференциалах, если выполнено тождество (2.23). Теорема доказана.

Подставляя формулу (2.29) в (2.22), мы находим общий интеграл уравнения (2.20): $\int_{x_0}^{x} M(x,y)dx + \int N(x_0,y)dy = c$ в предположении, что функции $M(x,y)$ и $N(x,y)$ удовлетворяют условию (2.23).

Пример 2.6. Найти решение уравнения $(\sin y - xy)dy + \Big(\cos x - \dfrac{y^2}{2}\Big)dx = 0$. Это уравнение является уравнением в полных дифференциалах, так как $\dfrac{\partial}{\partial x}(\sin y - xy) = \dfrac{\partial}{\partial y}\Big(\cos x - \dfrac{y^2}{2}\Big) = -y$. Далее, используя формулу (2.29), получаем выражение для функции $u(x,y)$, дифференциал которой равен правой части уравнения: $u(x,y) = \int_{x_0}^{x}\Big(\cos x - \dfrac{y^2}{2}\Big)dx + \int(\sin y - x_0 y)dy = \sin x - \sin x_0 - \dfrac{xy^2}{2} - \cos y + c$. Следовательно, решение уравнения в неявной форме имеет вид $\sin x - \cos y - \dfrac{xy^2}{2} = c_1$.

Интегрирующий множитель

В случае, когда (2.20) не является уравнением в полных дифференциалах, можно иногда подобрать такую функцию $\mu(x,y)$, что $\mu(x,y)M(x,y)dx + \mu(x,y)N(x,y)dy = 0$ становится уравнением в полных дифференциалах, т. е. выполняется критерий

$$\frac{\partial \mu(x,y)M(x,y)}{\partial y} \equiv \frac{\partial \mu(x,y)N(x,y)}{\partial x}. \tag{2.30}$$

Такая функция $\mu(x,y)$ называется **интегрирующим множителем**. Отметим, что умножение уравнения (2.20) на $\mu(x,y)$ может привести к появлению лишних решений этого уравнения, определяемых из соотношения $\mu(x,y) = 0$.

Нахождение интегрирующего множителя не всегда легкая задача. Одним из основных приемов вычисления множителя $\mu(x, y)$ является подбор функции $z(x, y)$ и нахождение преобразования $g(z)$, так что $\mu(x, y) = g[z(x, y)]$. В этом случае из тождества (2.30) мы имеем $\frac{dg}{dz}\frac{\partial z}{\partial y}M + g\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{dg}{dz}\frac{\partial z}{\partial x}N + g\frac{\partial N}{\partial x}$. Отсюда выписывается уравнение для $\ln|g|$:

$$\frac{d}{dz}\ln|g| = \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M\frac{dz}{dy} - N\frac{\partial z}{\partial x}}. \tag{2.31}$$

Если мы сумели подобрать $z(x, y)$ так, что правая часть (2.31) есть некоторая функция $f(z)$, то мы фактически можем рассматривать (2.31) как обыкновенное уравнение первого порядка $\frac{d}{dz}\ln|g| = f(z)$. Интегрирование этого уравнения определяет функцию $g(z) = ce^{\int f(z)dz}$, а значит, и интегрирующий множитель для (2.20) $\mu(x, y) = g[z(x, y)]$.

Пример 2.7. Для линейного уравнения $y' + p(x)y = q(x)$, имеющего симметричную форму $[p(x)y - q(x)]dx + dy = 0$, интегрирующим множителем является функция $\mu = g(z)$, где $z(x, y) = x$, так как в этом случае правая часть уравнения (2.31) имеет вид $\frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{-N} = p(x)$, и, следовательно, $\mu(x, y) = g(x) = ce^{\int p(x)dx}$. Теперь, используя формулу (2.29), мы получаем решение, эквивалентное решению в виде (2.15).

2.3.5. Уравнения, не разрешенные относительно производной

Уравнение вида

$$F(y') = 0. \tag{2.32}$$

Предположим, что существует действительный корень $y' = k$ для уравнения (2.32). Так как это уравнение не содержит y и x, то k – константа. Следовательно, интегрируя уравнение $y' = k$, получаем $y = kx + c$. Отсюда $k = (y - c)/x$. Подставляя это выражение для k в уравнение (2.32), находим его решение в неявной форме: $F\left(\frac{y - c}{x}\right) = 0$.

Уравнение, разрешенное относительно искомой функции

Пусть уравнение удается записать в форме

$$y = F(x, y'). \tag{2.33}$$

Уравнение такого вида удобно находить в параметрической форме. В частности, введя параметр $s = y'$, мы имеем

$$y = F(x, s). \tag{2.34}$$

Дифференцируя это уравнение по s и учитывая, что $\dfrac{dy}{ds} = \dfrac{dy}{dx}\dfrac{dx}{ds} = s\dfrac{dx}{ds}$, мы получаем уравнение первого порядка относительно неизвестной функции $x(s)$:

$$s\frac{dx}{ds} = F_x(x, s)\frac{dx}{ds} + F_s(x, s). \tag{2.35}$$

Если удается найти решение этого уравнения в явном виде $x = \phi(s)$, то, подставляя его в (2.34), находим решение (2.33) в параметрическом виде:

$$\begin{aligned} x(s) &= \phi(s), \\ y(s) &= F[\phi(s), s]. \end{aligned} \tag{2.36}$$

Аналогично интегрируется уравнение $x = F(y, y')$, так как в этом случае $F(y, y') = F\Big(y, \dfrac{1}{dx/dy}\Big) = F_1\Big(y, \dfrac{dx}{dy}\Big)$.

Пример 2.8. Рассмотрим в качестве примера для уравнения (2.33) уравнение $y = \phi(y')x + \psi(y')$. Полагая $s = y'$, мы получаем по аналогии с (2.35) уравнение, являющееся линейным относительно $x(s)$, $[s - \phi(s)]\dfrac{dx}{ds} - \phi'(s)x = \psi'(s)$. Решением этого уравнения согласно формуле (2.15) будет $x(s) = e^{-\int \frac{\phi'(s)}{\phi(s)-s}ds}\Big(c + \displaystyle\int \frac{\psi'(s)}{s - \phi(s)} e^{\int \frac{\phi'(s)}{\phi(s)-s}ds} ds\Big)$ и совместно с выражением для y $y(s) = \phi(s)x(s) + \psi(s)$ мы получаем решение рассматриваемого уравнения в параметрическом виде. Отметим, что решение существует для $s \neq \phi(s)$.

Пример 2.9. Если правая часть (2.33) не зависит от x, тогда, полагая $s = y'$, мы имеем $y = F(s)$. Дифференцируя это уравнение по s, мы находим $\dfrac{dy}{ds} = \dfrac{dy}{dx}\dfrac{dx}{ds} = F'(s)$, т. е. $\dfrac{dx}{ds} = \dfrac{1}{s}F'(s)$. Следовательно, мы можем выписать решение этого частного примера уравнения (2.33) в виде $x(s) = \int \frac{1}{s} F'(s) ds,\ y(s) = F(s)$.

2.3.6. Теорема Пикара

Формулировка метода итераций. В данном пункте рассматривается итерационный метод решения задачи Коши для нелинейного уравнения первого порядка, записанного в нормальной форме:

$$\begin{aligned} &y' = f(x, y), \\ &y(x_0) = y_0. \end{aligned} \tag{2.37}$$

Этот метод называется методом последовательных приближений, или **методом Пикара**. Для применимости метода Пикара нужно потребовать, чтобы функции $f(x, y)$ и $\partial f(x, y)/\partial y$ были непрерывны в прямоугольнике $D = [x_0 - a, x_0 + a] \times [y_0 - b, y_0 + b]$.

Если $y = y(x)$ – решение задачи (2.37), то верно тождество $y'(x) \equiv f(x, y(x))$. Интегрируя это тождество в интервале (x_0, x), мы имеем

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f[\xi, y(\xi)] d\xi, \tag{2.38}$$

с учетом начального условия $y_0 = y(x_0)$, заданного в (2.37). Уравнение (2.38) называется **интегральным уравнением**. Очевидно, что решение интегрального уравнения является решением начальной задачи (2.37). Таким образом, задачи (2.37) и (2.38) эквивалентны.

Решение интегрального уравнения (2.38) можно находить с помощью итераций, задав начальное нулевое приближение в виде некоторой функции $y_0(x)$, удовлетворяющей: 1) начальному условию $y_0(x_0) = y_0$ и 2) $(x, y_0(x)) \in D$ для $x \in [x_0 - a, x_0 + a]$. В частности, в качестве начального приближения можно взять функцию $y_0(x) \equiv y_0$. Используя нулевое приближение $y_0(x)$, мы можем вычислить последовательно n-е приближение $y_n(x)$ через $(n-1)$-е приближение $y_{n-1}(x)$ по формуле

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f[\xi, y_{n-1}(\xi)] d\xi, \qquad n = 1, 2, \ldots \tag{2.39}$$

Пример 2.10. Пусть в задаче (2.37) $f(x, y) \equiv y$, $x_0 = 0$, $y_0 = 1$. Положим в качестве начального приближения $y_0(x) \equiv 1$. Тогда, согласно

(2.39), мы легко получаем, что

$$y_n(x) = 1 + \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j!} x^j,$$

т. е. n-е приближение совпадает с n-м разложением в ряд Тейлора функции $y(x) = e^x$, которая и является решением этой конкретной задачи.

Теорема Пикара. *Пусть функции $f(x,y)$ и $f_y(x,y)$ непрерывны в прямоугольнике $D = [x_0 - a, x_0 + a] \times [y_0 - b, y_0 + b]$, тогда решение начальной задачи (2.37) существует и единственно при $|x - x_0| \leq h$, если h удовлетворяет ограничению*

$$0 < h < \min\Big(a, \frac{b}{M}, \frac{1}{N}\Big), \tag{2.40}$$

где $M = \max_{(x,y)\in D} |f(x,y)|$, $N = \max_{(x,y)\in D} |f_y(x,y)|$.

Для доказательства теоремы используем итерационную формулу (2.39). Оказывается, что для значений x, достаточно близких к x_0, т. е. если $|x - x_0| \leq h$, где h удовлетворяет неравенству (2.40), графики функций $y_n(x)$ не выходят за пределы области D. Действительно, если мы имеем $|y_n(x) - y_0| \leq b$ для $|x - x_0| \leq h$, то из (2.39) и (2.40) легко находим, что $|y_{n+1}(x) - y_0| = \left|\int_{x_0}^{x} f[\xi, y_n(\xi)] d\xi\right| \leq \left|\int_{x_0}^{x} M d\xi\right| \leq Mh \leq b$. Таким образом, по индукции мы получаем, что для всех функций $y_n(x)$ верна оценка $|y_n(x) - y_0| \leq b$, если $|x - x_0| \leq h$, т. е. график функции $y_n(x)$ лежит в области D для всех $n \geq 0$.

Теперь для оценки какой-либо непрерывной функции $\phi(x)$ на отрезке $[x_0 - h, x_0 + h]$ введем обозначение $||\phi||$, означающее норму функции $\phi(x)$, по формуле $||\phi|| = \max_{|x-x_0|\leq h} |\phi(x)|$. В математическом анализе выражение $||\phi||$ означает C**-норму** функции $\phi(x)$ в пространстве непрерывных ограниченных функций.

Оценим разность между y_{n+1} и y_n, используя C-норму. Для произвольного $x \in [x_0 - h, x_0 + h]$ имеем:

$$\begin{aligned}
|y_{n+1}(x) - y_n(x)| &= \Big|\int_{x_0}^{x} f[\xi, y_n(\xi)] - f[\xi, y_{n-1}(\xi)] d\xi\Big| \leq \\
&\leq \Big|\int_{x_0}^{x} \max_{(\xi,\nu)\in D}\Big|f_y(\xi,\nu)\Big| |y_n(\xi) - y_{n-1}(\xi)| d\xi\Big| \leq \\
&\leq \Big|\int_{x_0}^{x} N||y_n - y_{n-1}|| d\xi\Big| \leq hN||y_n - y_{n-1}||.
\end{aligned}$$

Так как это неравенство верно для произвольного $x \in [x_0 - h, x_0 + h]$, то мы получаем

$$\|y_{n+1} - y_n\| \le \alpha \|y_n - y_{n-1}\|, \qquad \text{где} \qquad \alpha = hN < 1,$$

и, следовательно, $\|y_{n+1} - y_n\| \le \alpha^n \|y_1 - y_0\|$. Отсюда для всякого $\epsilon > 0$ имеем $\|y_{n+m} - y_n\| \le \|y_{n+1} - y_n\| + \|y_{n+2} - y_{n+1}\| + \ldots + \|y_{n+m} - y_{n+m-1}\| \le \le (\alpha^n + \alpha^{n+1} + \ldots + \alpha^{n+m-1})\|y_1 - y_0\| = \dfrac{\alpha^n - \alpha^{n+m}}{1 - \alpha}\|y_1 - y_0\| \le \epsilon$ при достаточно большом n, так как $0 < \alpha = hN < 1$ согласно (2.40). Таким образом, последовательность непрерывных функций $y_n(x)$ является фундаментальной и, следовательно, имеет предел, являющийся непрерывной функцией

$$y(x) = \lim_{n \to \infty} y_n(x).$$

Очевидно, что последовательность функций $y_n(x)$ сходится равномерно к $y(x)$, т. е. $\|y_n - y(x)\| \to 0$. Покажем, что функция $y(x) = \lim_{n \to \infty} y_n(x)$ является решением интегрального уравнения (2.38). Действительно, пусть $\epsilon > 0$ – произвольное число. Мы имеем

$$\begin{aligned}
&|y(x) - y_0(x) - \int_{x_0}^{x} f[\xi, y(\xi)] d\xi| = \\
&= |y(x) - y_n(x) + y_n(x) - y_0(x) - \int_{x_0}^{x} f[\xi, y(\xi)] d\xi| \le \\
&\le |y(x) - y_n(x)| + \left| \int_{x_0}^{x} f[\xi, y_{n-1}(\xi)] - f[\xi, y(\xi)] d\xi \right| \le \\
&\le |y(x) - y_n(x)| + \left| \int_{x_0}^{x} N \|y_{n-1} - y\| d\xi \right|,
\end{aligned}$$

и, учитывая, что $\|y_n(x) - y(x)\| \to 0$ при $n \to \infty$, мы получаем, что выражение

$$|y(x) - y_0(x) - \int_{x_0}^{x} f[\xi, y(\xi)] d\xi|$$

меньше любого числа $\epsilon > 0$ и, значит, равно нулю. Таким образом, равенство (2.38) верно, т. е. мы нашли функцию $y(x)$, удовлетворяющую интегральному уравнению (2.38), а следовательно, и дифференциальному уравнению (2.37).

Если $y(x)$ и $\varphi(x)$ – два разных решения интегрального уравнения (2.38) и соответственно задачи Коши (2.37), тогда из (2.38) следует

$$|y(x) - \varphi(x)| \leq \left| \int_{x_0}^{x} f[\xi, y(\xi)] - f[\xi, \varphi(\xi)] d\xi \right| \leq hN\|y - \varphi\|.$$

Это неравенство верно для произвольного $x \in [x_0 - h, x_0 + h]$, поэтому получаем

$$\|y - \varphi\| \leq hN\|y - \varphi\|.$$

Так как $hN < 1$, приходим к противоречию, если $y(x) \neq \varphi(x)$.

Значит, решение (2.38) и соответственно (2.37) всегда существует и единственно на отрезке $[x_0 - h, x_0 + h]$, а его график лежит в прямоугольнике

$$D_1 = [x_0 - h, x_0 + h] \times [y_0 - b, y_0 + b].$$

Теорема доказана.

Замечание 2.1. Теорема Пикара будет также верна, если требование непрерывности функции $f_y(x, y)$ заменить следующим требованием (**условие Липшица**):

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq N|y_1 - y_2| \tag{2.41}$$

для $(x, y_1), (x, y_2) \in D$. Очевидно, что непрерывно дифференцируемая функция удовлетворяет условию Липшица. Обратное не всегда верно, например, функция

$$f(x, y) = |y|$$

удовлетворяет (2.41), но не является гладкой.

Глава 3

Линейные системы первого порядка

Введение

Система n линейных дифференциальных уравнений первого порядка относительно искомых функций $y_1(x), \dots, y_n(x)$ имеет вид

$$\frac{dy_k}{dx} - \sum_{j=1}^{n} a_{kj}(x) y_j = f_k(x), \quad k = 1, \dots, n. \tag{3.1}$$

Если обозначить через $\mathbf{y}$ вектор $(y_1, \dots, y_n)^T$, а через $\mathbf{f}(x)$ вектор $(f_1(x), \dots, f_n(x))^T$, то система (3.1) записывается в векторной форме

$$\frac{d\mathbf{y}}{dx} - \mathbf{A}(x)\mathbf{y} = \mathbf{f}(x), \tag{3.2}$$

где $\mathbf{A}(x)$ – матрица $\{a_{kj}(x)\}$, $k, j = 1, \dots, n$, при этом первый индекс k означает номер строки матрицы, а второй индекс j – номер столбца.

Система дифференциальных уравнений (3.2) называется однородной, если $\mathbf{f}(x) = \mathbf{0}$, т. е.

$$\frac{dy_k}{dx} - \sum_{j=1}^{n} a_{kj}(x) y_j = 0, \quad k = 1, \dots, n, \tag{3.3}$$

и неоднородной, если $\mathbf{f}(x) \neq \mathbf{0}$.

Задача Коши для системы (3.2) записывается в виде

$$\begin{aligned} &\frac{d\mathbf{y}}{dx} - \mathbf{A}(x)\mathbf{y} = \mathbf{f}(x), \\ &\mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}_0. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Решить задачу Коши на отрезке $[a, b]$ – это значит найти функцию $\mathbf{y}(x)$, удовлетворяющую начальному условию $\mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}_0$ для $x_0 \in [a, b]$ и являющуюся решением уравнения (3.2).

3.1. Свойства линейных систем

3.1.1. Теорема существования и единственности

Теорема 3.1. *Пусть компоненты $a_{kj}(x)$, $k, j = 1, \ldots, n$ матрицы $\mathbf{A}(x)$ и компоненты $f_j(x)$, $j = 1, \ldots, n$ функции $\mathbf{f}(x)$ непрерывны на отрезке $[a, b]$, тогда решение задачи Коши (3.4) при $x_0 \in [a, b]$ существует и единственно на всем отрезке $[a, b]$.*
Доказательство этой теоремы проводится аналогично доказательству теоремы Пикара для скалярного уравнения, изложенной в главе 2. Вначале определяется последовательность приближений $\mathbf{y}_n(x)$:

$$\mathbf{y}_n(x) = \mathbf{y}_0 + \int_{x_0}^{x} (\mathbf{A}(\xi)\mathbf{y}_{n-1}(\xi) + \mathbf{f}(\xi))d\xi, \quad \mathbf{y}_0(x) \equiv \mathbf{y}_0.$$

Последовательность функций $\mathbf{y}_n(x)$ сходится в некоторой окрестности точки x_0 к функции $\mathbf{y}(x)$, которая является единственным локальным решением задачи (3.4). Затем решение продолжается на весь отрезок $[a, b]$. Такое продолжение возможно в силу линейности системы (3.4).

Так как начальное значение $\mathbf{y}_0$ в (3.4) произвольно и описывается n параметрами $y_{01}, \ldots, y_{0n}$, то, в силу теоремы 3.1, общее решение уравнения (3.2) зависит от n параметров, т. е. имеет вид

$$\mathbf{y} = \mathbf{y}(x, c_1, \ldots, c_n).$$

3.1.2. Операторное представление

Обозначим через L оператор

$$L[\mathbf{y}] \equiv \frac{d\mathbf{y}}{dx} - \mathbf{A}(x)\mathbf{y}, \tag{3.5}$$

отображающий множество гладких вектор-функций в множество непрерывных вектор-функций. Тогда неоднородное уравнение (3.2) записывается как

$$L[\mathbf{y}] = \mathbf{f}(x), \tag{3.6}$$

а однородное уравнение (3.3) в виде

$$L[\mathbf{y}] = \mathbf{0}. \tag{3.7}$$

Так как дифференцирование вектор-функций является линейной операцией, то оператор L – линейный, т. е.

$$L[\sum_{j=1}^{m} c_j \mathbf{y}_j(x)] = \sum_{j=1}^{m} c_j L[\mathbf{y}_j], \tag{3.8}$$

где c_j – произвольные вещественные или комплексные константы.

Из (3.8) легко следуют свойства решений уравнений (3.6) и (3.7):

1. Линейная комбинация решений однородного уравнения (3.7) является решением этого уравнения.

2. Если однородная система (3.7) с вещественными коэффициентами $a_{ij}(x), i, j = 1, \ldots, n$ имеет комплексное решение, то как действительная, так и мнимая его части будут решениями этой системы уравнений.

3. Если функции $\mathbf{y}_j(x), j = 1, \ldots, m$ являются решениями уравнения (3.6) соответственно при $\mathbf{f}(x) = \mathbf{f}_j(x)$, то функция

$$\mathbf{y}(x) = \sum_{j=1}^{m} c_j \mathbf{y}_j(x)$$

является решением уравнения (3.6) при $\mathbf{f}(x) = \sum_{j=1}^{m} c_j \mathbf{f}_j(x)$.

4. Любое решение уравнения (3.6) равно сумме какого-либо частного решения этого уравнения и решения однородного уравнения (3.7).

5. Если неоднородная система (3.6) с вещественными коэффициентами $a_{ij}(x), i, j = 1, \ldots, n$ в $\mathbf{A}$ и вещественной вектор-функцией $\mathbf{f}(x)$ имеет комплексное решение $\mathbf{y}(x) = \mathbf{y}_1(x) + i\mathbf{y}_2(x)$, то $\mathbf{y}_1(x)$ будет решением (3.6), а $\mathbf{y}_2(x)$ – решением однородного уравнения (3.7).

Действительно, $L[\mathbf{y}_1 + i\mathbf{y}_2](x) = L[\mathbf{y}_1](x) + iL[\mathbf{y}_2](x) = \mathbf{f}(x)$, значит, $L[\mathbf{y}_2](x) = 0$ и $L[\mathbf{y}_1](x) = \mathbf{f}(x)$.

3.1.3. Определитель Вронского

Пусть дано n вектор-функций, каждая из которых имеет n компонент: $\mathbf{y}_1(x), \ldots, \mathbf{y}_n(x)$, где $\mathbf{y}_j(x) = (y_{1j}(x), \ldots, y_{nj}(x))^T$. Вектор-функции $\mathbf{y}_j(x)$, $i = 1, \ldots, n$ образуют **матрицу, называемую матрицей Вронского**, j-м столбцом которой является функция $\mathbf{y}_j(x)$, т. е.

$$\mathbf{W}[\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n](x) = \{y_{ij}(x)\}, \quad i, j = 1, \ldots, n.$$

Определителем Вронского этих функций называется определитель матрицы Вронского. Если функции $\mathbf{y}_1(x), \ldots, \mathbf{y}_n(x)$ линейно зависимы на отрезке $[a, b]$, т. е. существуют константы $c_1, \ldots, c_n$, не все равные нулю, такие что

$$\sum_{j=1}^{n} c_j \mathbf{y}_j(x) \equiv \mathbf{0}, \quad x \in [a, b], \tag{3.9}$$

то определитель Вронского этих функций равен нулю. Это утверждение очевидно, так как в этом случае из (3.9) следует, что по крайней мере один столбец матрицы $\mathbf{W}[\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n](x)$ является линейной комбинацией остальных, т. е. эта матрица вырождена.

Тот же вывод следует из соотношения

$$\sum_{j=1}^{n} c_j \mathbf{y}_j(x) \equiv \mathbf{W}[\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n](x)\mathbf{c} = \mathbf{0},$$

где $\mathbf{c}$ – вектор, j-я компонента которого равна c_j. Так как этот вектор $\mathbf{c}$ ненулевой, то из теории матриц следует, что матрица $\mathbf{W}[\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n](x)$ вырождена.

Теорема 3.2. *Пусть вектор-функции $\mathbf{y}_1(x), \ldots, \mathbf{y}_n(x)$ являются решениями однородного уравнения (3.7) с непрерывными коэффициентами $a_{ij}(x), i, j = 1, \ldots, n$ матрицы $\mathbf{A}(x)$ на отрезке $[a, b]$, тогда если определитель Вронского этих функций равен нулю в какой-либо точке $x_0 \in [a, b]$, то они линейно зависимы на всем отрезке $[a, b]$.*

Доказательство. Так как $\det \mathbf{W}[\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n](x_0) = 0$, то уравнение

$$\mathbf{W}[\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n](x_0)\mathbf{b} = \mathbf{0}$$

имеет ненулевое решение $\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_n)^T$. А это означает, что для вектор-функции $\mathbf{y}(x) = \sum_{j=1}^{n} b_j \mathbf{y}_j(x) = \mathbf{W}[\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n](x)\mathbf{b}$ верно соотношение

$$\mathbf{y}(x_0) = \mathbf{W}[\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n](x_0)\mathbf{b} = \mathbf{0}.$$

Таким образом, вектор-функция $\mathbf{y}(x)$ с нулевым значением в точке x_0 является решением однородного уравнения (3.7), и из теоремы единственности для задачи Коши получаем, что $\mathbf{y}(x) \equiv \mathbf{0}$, $x \in [a, b]$, так как функция, тождественно равная нулю, является также решением уравнения (3.7) с нулевым начальным значением в точке x_0. Следовательно,

$$\sum_{j=1}^{n} b_j \mathbf{y}_j(x) \equiv \mathbf{0}, \quad x \in [a, b],$$

т. е. вектор-функции $\mathbf{y}_1(x), \ldots, \mathbf{y}_n(x)$ линейно зависимы. Теорема доказана.

Отметим, что требование в теореме 3.2 о том, что функции $\mathbf{y}_1(x), \ldots, \mathbf{y}_n(x)$ являются решением уравнения (3.7), не может быть устранено. Например, вектор-функции $\mathbf{y}_1(x) = (1, x)^T$ и $\mathbf{y}_2(x) = (1, 1)^T$ линейно независимы, однако определитель Вронского этих функций обращается в нуль в точке $x = 1$. Таким образом, данные вектор-функции не могут быть решением однородной линейной системы из двух уравнений.

Из теоремы 3.2 следует, что если какие-либо n решений уравнения (3.7) являются линейно независимыми на отрезке $[a, b]$, то $\det \mathbf{W}[\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n](x) \neq 0,\ x \in [a, b]$, и наоборот, если определитель Вронского решений $\mathbf{y}_1(x), \ldots, \mathbf{y}_n(x)$ не равен нулю в какой-либо точке $x_0 \in [a, b]$, то эти решения линейно независимы. Набор таких n линейно независимых решений уравнения (3.7) называется **фундаментальной системой решений** этого уравнения.

Теорема 3.3. *Общее решение линейной однородной системы (3.7) с непрерывными коэффициентами $a_{ij}(x), i, j = 1, \ldots, n$ матрицы $\mathbf{A}(x)$ на отрезке $[a, b]$ выражается формулой*

$$\mathbf{y}(x, c_1, \ldots, c_n) = \sum_{j=1}^{n} c_j \mathbf{y}_j(x) = \mathbf{W}[\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n](x)\mathbf{c}, \quad x \in [a, b], \tag{3.10}$$

где $\mathbf{y}_1(x), \ldots, \mathbf{y}_n(x)$ – фундаментальная система решений уравнения (3.7), $\mathbf{c} = (c_1, \ldots, c_n]^T$ – произвольный вектор.

Доказательство. Пусть $\mathbf{z}(x)$ – решение однородного уравнения (3.7) на отрезке $[a, b]$. Покажем, что существуют такие константы $c_1, \ldots, c_n$, что $\mathbf{z}(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j \mathbf{y}_j(x),\ x \in [a, b]$. Для этого выберем точку $x_0 \in [a, b]$ и решим уравнение $\mathbf{W}[\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n](x_0)\mathbf{b} = \mathbf{z}(x_0)$. Из теоремы 3.2 следует, что $\det \mathbf{W}[\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n](x_0) \neq 0$, поэтому существует ненулевое решение этого уравнения, определяемое формулой

$$\mathbf{b} = \mathbf{W}^{-1}[\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n](x_0)\mathbf{z}(x_0).$$

Но тогда функция

$$\mathbf{y}(x) = \sum_{j=1}^{n} b_j \mathbf{y}_j(x) = \mathbf{W}[\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n](x)\mathbf{W}^{-1}[\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n](x_0)\mathbf{z}(x_0),$$

где $x \in [a, b]$, а b_j – j-ая компонента вектора $\mathbf{b}$, удовлетворяет условию $\mathbf{y}(x_0) = \mathbf{z}(x_0)$, и из единственности решения задачи Коши для уравнения (3.7) следует, что $\mathbf{y}(x) \equiv \mathbf{z}(x)$, $x \in [a, b]$. Таким образом, мы показали, что произвольное решение уравнения (3.7) является линейной комбинацией n независимых решений этого уравнения. Теорема доказана.

Из теоремы 3.3 и свойства 4 следует, что общее решение неоднородного уравнения (3.6) записывается в виде

$$\mathbf{y}(x, c_1, \ldots, c_n) = \sum_{j=1}^{n} c_j \mathbf{y}_j(x) + \mathbf{z}(x), \ x \in [a, b], \tag{3.11}$$

где $\mathbf{y}_1(x), \ldots, \mathbf{y}_n(x)$ – фундаментальная система решений уравнения (3.7), а $\mathbf{z}(x)$ – частное решение уравнения (3.6).

Так как

$$\sum_{j=1}^{n} c_j \mathbf{y}_j(x) = \mathbf{W}[\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n](x)\mathbf{c},$$

где $\mathbf{c} = (c_1, \ldots, c_n)^T$, то формулу (3.11) можно записать следующим образом:

$$\mathbf{y}(x, c_1, \ldots, c_n) = \mathbf{W}[\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n](x)\mathbf{c} + \mathbf{z}(x), \ x \in [a, b]. \tag{3.12}$$

Теорема 3.4. *Пусть вектор-функции $\mathbf{y}_1(x), \ldots, \mathbf{y}_n(x)$ являются решениями однородного уравнения (3.7) с непрерывными коэффициентами $a_{ij}(x), i, j = 1, \ldots, n$ матрицы $\mathbf{A}(x)$ на отрезке $[a, b]$, тогда определитель Вронского этих функций вычисляется по следующей формуле:*

$$\det \mathbf{W}[\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n](x) = c_0 e^{\int_{x_0}^{x} tr\mathbf{A}(\xi) d\xi}, \tag{3.13}$$

где x_0 – произвольная точка отрезка $[a, b]$, c_0 – значение определителя Вронского в точке x_0, а $tr\mathbf{A}(x)$ – след матрицы $\mathbf{A}(x) = \{a_{ij}(x)\}$, i, $j = 1, \ldots, n$, т. е.

$$tr\mathbf{A}(x) = a_{11}(x) + \ldots + a_{nn}(x).$$

Доказательство. Так как вектор-функции $\mathbf{y}_1(x), \ldots, \mathbf{y}_n(x)$ являются решениями уравнения (3.7), то матрица Вронского будет решением дифференциального матричного уравнения

$$\frac{d}{dx}\mathbf{W}[\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n](x) = \mathbf{A}(x)\mathbf{W}[\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n](x). \tag{3.14}$$

Производной d/dx матрицы $\mathbf{W}$ является матрица, полученная дифференцированием всех элементов матрицы $\mathbf{W}$. Обозначим через $\mathbf{y}^j(x)$ j-ю строку матрицы Вронского. Тогда из (3.14) следует:

$$\frac{d\mathbf{y}^j}{dx} = \sum_{k=1}^{n} a_{jk}(x)\mathbf{y}^k(x). \tag{3.15}$$

Для того, чтобы получить формулу (3.13), мы вначале выпишем дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет определитель Вронского. Для этого нам нужно его продифференцировать. По правилу дифференцирования определителя произвольной матрицы $\mathbf{B}$ вначале дифференцируется первая строка и вычисляется определитель полученной матрицы $\mathbf{B}_1$, затем дифференцируется вторая строка в $\mathbf{B}$ и вычисляется определитель этой матрицы $\mathbf{B}_2$, и т. д. до последней строки в $\mathbf{B}$. Сумма определителей таких матриц $\mathbf{B}_i$, $i = 1, \ldots, n$, полученных из $\mathbf{B}$ дифференцированием только одной соответствующей i-й строки, и есть производная определителя матрицы $\mathbf{B}$. Теперь, продифференцировав определитель Вронского, мы согласно правилу дифференцирования определителей матриц имеем:

$$\frac{d}{dx}\det \mathbf{W}[\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n](x) = \sum_{j=1}^{n} \det \mathbf{W}_j[\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n](x), \tag{3.16}$$

где $\mathbf{W}_j[\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n](x)$ – матрица, полученная из матрицы Вронского дифференцированием j-ой строки. Для этой строки выполняется соотношение (3.15), т. е. она равна j-ой строке матрицы Вронского, умноженной на $a_{jj}(x)$, плюс линейная комбинация остальных строк матрицы Вронского. Следовательно,

$$\det \mathbf{W}_j[\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n](x) = a_{jj}(x) det \mathbf{W}[\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n](x).$$

Поэтому из (3.16) получаем однородное уравнение

$$\frac{d}{dx}\det \mathbf{W}[\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n] = \Big(\sum_{j=1}^{n} a_{jj}(x)\Big) \det \mathbf{W}[\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n],$$

решение которого задается формулой (3.13). Теорема доказана.

Отметим, что соотношение (3.13) называется формулой Лиувилля.

3.2. Методы решения систем

Если известна фундаментальная система решений однородного уравнения (3.7), то известно общее решение (3.10) этого уравнения и, значит, проблема нахождения общего решения (3.11) неоднородного уравнения (3.6) сводится к нахождению одного его частного решения.

3.2.1. Метод вариации для нахождения частного решения

Оказывается, частное решение уравнения (3.6) может быть получено по аналогии с решением скалярного уравнения (2.11) методом **вариации постоянного вектора** $\mathbf{c} = (c_1, \ldots, c_n)$ в формуле (3.10), т. е. решение уравнения (3.6) ищется в виде (3.10), но с переменными коэффициентами $c_1(x), \ldots, c_n(x)$, которые затем вычисляются. Таким образом, полагаем, что

$$\mathbf{y}_{\text{ч}}(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j(x)\mathbf{y}_j(x), \tag{3.17}$$

где $\mathbf{y}_1(x), \ldots, \mathbf{y}_n(x)$ – фундаментальная система решений уравнения (3.7). Из (3.17) имеем $\mathbf{y}'_{\text{ч}}(x) = \sum_{j=1}^{n} c'_j(x)\mathbf{y}_j(x) + \sum_{j=1}^{n} c_j(x)\mathbf{y}'_j(x)$. Подставляя эти выражения для $\mathbf{y}(x)$ и $\mathbf{y}'(x)$ в (3.6) и учитывая формулу (3.5), получаем:

$$\begin{aligned} L[\mathbf{y}_{\text{ч}}](x) \quad &\equiv \quad \sum_{j=1}^{n} c'_j(x)\mathbf{y}_j(x) + \sum_{j=1}^{n} c_j(x)(\mathbf{y}'_j(x) - \mathbf{A}(x)\mathbf{y}_j(x)) \equiv \\ &\equiv \quad \sum_{j=1}^{n} c'_j(x)\mathbf{y}_j(x) + \sum_{j=1}^{n} c_j(x)L[\mathbf{y}_j](x) = \mathbf{f}(x). \end{aligned}$$

Отсюда следует система уравнений относительно $c_1(x), \ldots, c_n(x)$:

$$\sum_{j=1}^{n} c'_j(x)\mathbf{y}_j(x) = \mathbf{f}(x), \tag{3.18}$$

так как $L[\mathbf{y}_j](x) \equiv 0, \ j = 1, \ldots, n$. При использовании матрицы Вронского уравнение (3.18) записывается в матричном виде следующим образом:

$$\mathbf{W}[\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n](x)\mathbf{c}'(x) = \mathbf{f}(x),$$

где $\mathbf{c}'(x) = (c_1'(x), \ldots, c_n'(x))^T$. Учитывая, что вектор-функции $\mathbf{y}_1(x), \ldots, \mathbf{y}_n(x)$ линейно независимы, а значит, матрица Вронского этих функций невырождена, мы получаем, что уравнение (3.18) разрешимо:

$$\mathbf{c}'(x) = \mathbf{W}^{-1}[\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n](x)\mathbf{f}(x). \tag{3.19}$$

Интегрируя это равенство, находим значения $c_j(x),\ j = 1, \ldots, n$. Вектор-функция $\mathbf{y}(x)$, определенная формулой (3.17) с найденными значениями $c_j(x)$, и будет частным решением неоднородного уравнения (3.6).

Так как из (3.19) следует, что

$$\mathbf{c}(x) = \int \mathbf{W}^{-1}[\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n](x)\mathbf{f}(x)dx,$$

то из (3.17) мы получаем явную формулу в квадратурах

$$\mathbf{y}_{\text{ч}}(x) = \mathbf{W}[\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n](x) \int \mathbf{W}^{-1}[\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n](x)\mathbf{f}(x)dx \tag{3.20}$$

для частного решения уравнения (3.6).

3.2.2. Нахождение частного решения путем преобразования уравнения (3.6)

Приведем еще один способ получения формулы (3.20) для частного решения уравнения (3.6). Для упрощения выкладок мы введем следующие обозначения:

$$\mathbf{W} = \mathbf{W}[\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n](x)\ , \quad \mathbf{W}^{-1} = \mathbf{W}^{-1}[\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n](x)\ , \quad \mathbf{y}(x) = \mathbf{y},$$

где $\mathbf{W}^{-1}$ – матрица, обратная $\mathbf{W}$. Теперь, заметив, что $\mathbf{W}\mathbf{W}^{-1} = \mathbf{E}$, где $\mathbf{E}$ – единичная матрица, имеем $(\mathbf{W}\mathbf{W}^{-1})' = \mathbf{W}'\mathbf{W}^{-1} + \mathbf{W}(\mathbf{W}^{-1})' = \mathbf{0}$, где $'$ означает дифференцирование, $\mathbf{0}$ – матрицу с нулевыми элементами. Поэтому

$$(\mathbf{W}^{-1})' = -\mathbf{W}^{-1}\mathbf{W}'\mathbf{W}^{-1}. \tag{3.21}$$

Теперь, умножив систему (3.6) на матрицу $\mathbf{W}^{-1}$, мы получаем с учетом (3.5)

$$\mathbf{W}^{-1}\mathbf{y}' - \mathbf{W}^{-1}\mathbf{A}(x)\mathbf{y} = \mathbf{W}^{-1}\mathbf{f}(x). \tag{3.22}$$

Из (3.14) следует $\mathbf{A}(x) = \mathbf{W}'\mathbf{W}^{-1}$, поэтому мы находим, принимая во внимание (3.21),

$$\begin{aligned} \mathbf{W}^{-1}\mathbf{y}' - \mathbf{W}^{-1}\mathbf{A}(x)\mathbf{y} &= \mathbf{W}^{-1}\mathbf{y}' - \mathbf{W}^{-1}\mathbf{W}'\mathbf{W}^{-1}\mathbf{y}' \\ &= \mathbf{W}^{-1}\mathbf{y}' + (\mathbf{W}^{-1})'\mathbf{y} = (\mathbf{W}^{-1}\mathbf{y})'. \end{aligned}$$

Следовательно, система (3.22) имеет вид $(\mathbf{W}^{-1}\mathbf{y})' = \mathbf{W}^{-1}\mathbf{f}(x)$, интегрирование которой дает $\mathbf{W}^{-1}\mathbf{y} = \int \mathbf{W}^{-1}\mathbf{f}(x)dx$. Следовательно,

$$\mathbf{y}(x) = \mathbf{W}\int \mathbf{W}^{-1}\mathbf{f}(x)dx,$$

что совпадает с (3.20).

3.2.3. Формула общего решения и решения задачи Коши

В соответствии с формулами (3.12) и (3.20) мы заключаем, что общее решение неоднородного уравнения (3.6) выписывается в виде

$$\mathbf{y}(x) = \mathbf{W}[\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n](x)(\mathbf{c} + \int \mathbf{W}^{-1}[\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n](x)\mathbf{f}(x)dx), \qquad (3.23)$$

где $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_n)$ – произвольный вектор. Отметим, что (3.23) является обобщением формулы (2.15) на системы неоднородных уравнений первого порядка.

Из (3.21) легко выписывается решение задачи Коши для уравнения (3.6) с начальным значением $\mathbf{y}_0$ в точке x_0:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(x) \quad = \quad & \mathbf{W}[\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n](x)(\mathbf{W}^{-1}[\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n](x_0)\mathbf{y}_0 + \\ & + \int_{x_0}^{x} \mathbf{W}^{-1}[\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n](x)\mathbf{f}(x)dx). \end{aligned} \qquad (3.24)$$

3.2.4. Системы с постоянными коэффициентами

Система линейных уравнений (3.6) с постоянной матрицей называется линейной системой с **постоянными коэффициентами**.

Однородные системы

Рассмотрим однородное векторное уравнение

$$\mathbf{y}' - \mathbf{A}\mathbf{y} = \mathbf{0}, \qquad (3.25)$$

где $\mathbf{A} = \{a_{ij}\}, i, j = 1, \dots, n$ – матрица с постоянными коэффициентами. Будем искать решение уравнения (3.25) в виде

$$\mathbf{y}(x) = e^{\lambda x}\mathbf{y}_1, \qquad (3.26)$$

где $\mathbf{y}_1$ – некоторый постоянный вектор, а λ – вещественное или комплексное число. Так как

$$\mathbf{y}'(x) = \lambda e^{\lambda x}\mathbf{y}_1 = \lambda \mathbf{y}(x)$$

и $e^{\lambda x} \neq 0$, то (3.25) преобразуется в векторное уравнение относительно λ и $\mathbf{y}_1$:

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E})\mathbf{y}_1 = \mathbf{0}, \tag{3.27}$$

где $\mathbf{E}$ – единичная матрица. Таким образом, вектор-функция (3.26) является ненулевым решением (3.25), если λ – **собственное значение** матрицы $\mathbf{A}$, а $\mathbf{y}_1$ – ее **собственный вектор**. Из теории матриц известно, что собственными значениями матрицы $\mathbf{A}$ являются корни **характеристического уравнения**

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) = 0, \tag{3.28}$$

а собственные векторы находятся из уравнения (3.27) при заданных значениях корней уравнения (3.28). Множество собственных значений матрицы $\mathbf{A}$ называется **спектром** этой матрицы.

Разные корни. Если все корни $\lambda_j, j = 1, \ldots, n$ характеристического многочлена (3.28) разные, то решениями уравнения (3.25) будут n вектор-функций

$$\mathbf{y}_j(x) = e^{\lambda_j x}\mathbf{y}_j, \tag{3.29}$$

где $\mathbf{y}_j$ – ненулевой собственный вектор матрицы $\mathbf{A}$, соответствующий собственному значению λ_j. Отметим, что если λ_j – комплексное число, то вектор $\mathbf{y}_j$ имеет, по крайней мере, одну комплексную компоненту. Из теории матриц известно, что собственные вектора $\mathbf{y}_j$, $j = 1, \ldots, n$ линейно независимы, поэтому и функции (3.29) линейно независимы, т. е. нет таких комплексных констант $d_1, \cdots, d_n$, по крайней мере, одна из которых не равна нулю, что $\sum\limits_{j=1}^{n} d_j \mathbf{y}_j(x) \equiv 0$. Если λ_k – комплексный корень, т. е. $\lambda_k = \alpha + i\beta$, то $\overline{\lambda}_k = \alpha - i\beta$ также будет корнем характеристического многочлена (3.28). При этом если $\mathbf{y}_k(x)$ – комплексное решение (3.29) для корня λ_k, то сопряженная вектор-функция $\overline{\mathbf{y}}_k(x)$ будет решением (3.29) для корня $\overline{\lambda}_k$. Паре этих корней будут соответствовать два вещественных решения уравнения (3.25):

$$\mathrm{Re}\mathbf{y}_k(x) = \frac{\mathbf{y}_k(x) + \overline{\mathbf{y}}_k(x)}{2} \quad \text{и} \quad \mathrm{Im}\mathbf{y}_k(x) = \frac{\mathbf{y}_k(x) - \overline{\mathbf{y}}_k(x)}{2i}. \tag{3.30}$$

Таким образом, число вещественных решений уравнения (3.25), определенных формулой (3.29) для вещественных корней и формулой (3.30) для каждой пары сопряженных комплексных корней, равно n. Эти решения линейно независимы, иначе с учетом (3.30) были бы линейно зависимыми функции $\mathbf{y}_k(x),\ k = 1, \ldots, n$, определенные формулой (3.29), и поэтому образуют фундаментальную систему решений уравнения (3.25). Общее вещественное решение уравнения (3.25) согласно формуле (3.10) имеет вид

$$\mathbf{y}(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j \mathbf{y}_j(x), \tag{3.31}$$

где $\mathbf{y}_j(x)$ – вещественные решения (3.25) в форме (3.29) для вещественных, а в форме (3.30) – для комплексных собственных значений.

Кратные корни. Пусть теперь λ – корень произвольной кратности характеристического уравнения (3.28) матрицы $\mathbf{A}$. Сразу покажем, что если $\mathbf{y}_\lambda$ – ненулевое решение векторного уравнения

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})^p \mathbf{y}_\lambda = 0, \quad p \geq 1, \tag{3.32}$$

то одно частное решение однородного дифференциального уравнения (3.25), соответствующее этому корню λ и вектору $\mathbf{y}_\lambda$, выписывается в явном виде, а именно:

$$\mathbf{y}(x) = e^{\lambda x}(\mathbf{E} + \sum_{m=1}^{p-1} \frac{x^m}{m!}(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})^m)\mathbf{y}_\lambda. \tag{3.33}$$

Докажем, что эта вектор-функция $\mathbf{y}(x)$ является решением уравнения (3.25), т. е.

$$\mathbf{y}'(x) \equiv \mathbf{A}\mathbf{y}(x), \quad x \in (-\infty, \infty). \tag{3.34}$$

Продифференцировав (3.33), получаем:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{y}'(x) &= \lambda\mathbf{y}(x) + e^{\lambda x}(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E} + \sum_{m=1}^{p-2}\frac{x^m}{m!}(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})^{m+1})\mathbf{y}_\lambda = \\
&= e^{\lambda x}(\mathbf{A} + \sum_{m=1}^{p-2}\frac{x^m}{m!}[(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})^{m+1} + \lambda(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})^m] + \\
&\quad + \frac{x^{p-1}}{(p-1)!}\lambda(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})^{p-1})\mathbf{y}_\lambda = \\
&= e^{\lambda x}(\mathbf{A} + \sum_{m=1}^{p-2}\frac{x^m}{m!}\mathbf{A}(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})^m + \\
&\quad + \frac{x^{p-1}}{(p-1)!}\lambda(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})^{p-1})\mathbf{y}_\lambda = \\
&= e^{\lambda x}(\mathbf{A} + \sum_{m=1}^{p-1}\frac{x^m}{m!}\mathbf{A}(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})^m - \\
&\quad - \frac{x^{p-1}}{(p-1)!}(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})^p)\mathbf{y}_\lambda = \\
&= \mathbf{A}\mathbf{y}(x) - e^{\lambda x}\frac{x^{p-1}}{(p-1)!}(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})^p\mathbf{y}_\lambda = \mathbf{A}\mathbf{y}(x),
\end{aligned}
$$

т. к. согласно (3.32) $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})^p\mathbf{y}_\lambda = 0$. Следовательно, тождество (3.34) выполняется, а значит, функция $\mathbf{y}(x)$, определенная формулой (3.33), является решением уравнения (3.25). Если λ – комплексный корень, то решение (3.33) – комплексная функция, поэтому согласно свойству 2 однородных линейных систем, отмеченному в п. 3.1.2, вещественными решениями (3.25) будут две линейно независимые вектор-функции $\mathrm{Re}\mathbf{y}(x)$ и $\mathrm{Im}\mathbf{y}(x)$.

Отметим, что формула (3.33) совпадает с формулой (3.29) для $p = 1$ (в этом случае $\mathbf{y}_\lambda$ – собственный вектор матрицы $\mathbf{A}$). Таким образом, формула (3.33) является обобщением формулы (3.29). Покажем, что она будет универсальной при нахождении всех решений $\mathbf{y}_\lambda(x)$ для произвольного корня λ характеристического многочлена (3.28) матрицы $\mathbf{A}$.

Для этого докажем лемму.

Лемма 3.1. *Пусть λ_0 – корень кратности k характеристического многочлена вещественной матрицы $\mathbf{M}$ произвольной размерности n. Тогда существует такой базис $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ с вещественными, если λ_0 –*

вещественное, и комплексными, если λ_0 – *комплексное, компонентами, что в этом базисе матрица* $\mathbf{M}$ *переходит в матрицу* $\tilde{\mathbf{M}}$, *где*

$$\tilde{\mathbf{M}} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_1 & \mathbf{B}_2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}_3 \end{pmatrix}. \tag{3.35}$$

Здесь $\mathbf{B}_1$ – $(k \times k)$ *матрица, в которой все элементы на главной диагонали равны* λ_0, *а ниже диагонали все элементы равны нулю, а* $\mathbf{B}_3$ – *нулевая матрица при* $k = n$, *а при* $k < n$ $\mathbf{B}_3$ – $(n-k)\times(n-k)$ *матрица, для которой* $\det(\mathbf{B}_3 - \lambda_0\mathbf{E}) \neq 0$.

Для доказательства леммы напомним, что в новом координатном базисе матрица $\tilde{\mathbf{M}}$ связана с матрицей $\mathbf{M}$ соотношением $\tilde{\mathbf{M}} = \mathbf{T}\mathbf{M}\mathbf{T}^{-1}$, где $\mathbf{T}$ – невырожденная матрица перехода от старого базиса к новому. Матрицы $\mathbf{M}$ и $\tilde{\mathbf{M}}$ называются подобными. Также отметим, что характеристические многочлены матриц $\mathbf{M}$ и $\tilde{\mathbf{M}}$ совпадают, так как

$$\det(\mathbf{M} - \lambda\mathbf{E}) = \det\mathbf{T}(\mathbf{M} - \lambda\mathbf{E})\mathbf{T}^{-1} = \det(\tilde{\mathbf{M}} - \lambda\mathbf{E}).$$

Будем доказывать лемму по индукции. Сначала ее докажем для $k = 1$, т. е. для простого корня. Затем, предположив, что лемма верна для матрицы произвольной размерности и произвольного корня кратности $k - 1$, докажем ее для корня кратности k.

Пусть λ_0 – простой корень уравнения $\det(\mathbf{M} - \lambda_0\mathbf{E}) = 0$, а $\mathbf{y}_1$ – ненулевой собственный вектор вещественной матрицы $\mathbf{M}$, т. е. $\mathbf{M}\mathbf{y}_1 = \lambda_0\mathbf{y}_1$. Отметим, что если λ_0 – вещественное число, то $\mathbf{y}_1$ – вектор с вещественными компонентами, а если λ_0 – комплексное число, то вектор $\mathbf{y}_1$ будет иметь комплексные компоненты. Введем новый базис, который содержит вектор $\mathbf{y}_1$: $\mathbf{y}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$. При этом векторы $\mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ – вещественные. В этом базисе матрица $\mathbf{M}$ переходит в матрицу $\mathbf{M}_1 = \mathbf{C}_1\mathbf{M}\mathbf{C}_1^{-1}$, имеющую вид матрицы (3.35):

$$\mathbf{M}_1 = \begin{pmatrix} \lambda_0 & d_2 & d_3 & \ldots & d_4 \\ 0 & & & & \\ 0 & & \mathbf{D}_1 & & \\ \vdots & & & & \\ 0 & & & & \end{pmatrix}, \tag{3.36}$$

где $\mathbf{D}_1$ – $(n-1)\times(n-1)$-матрица. При этом матрица $\mathbf{M}_1$ будет вещественной, если λ_0 – вещественное число. Очевидно, что

$$\det(\mathbf{M}-\lambda\mathbf{E})=\det(\mathbf{M}_1-\lambda\mathbf{E})=(\lambda_0-\lambda)\det(\mathbf{D}_1-\lambda\mathbf{E}). \qquad (3.37)$$

Следовательно,

$$\det(\mathbf{D}_1-\lambda_0\mathbf{E})\neq 0,$$

так как λ_0 – простой корень, т. е. лемма для простого корня верна.

Пусть λ_0 – корень кратности $k>1$ характеристического многочлена какой-либо $m\times m$ вещественной матрицы $\mathbf{M}$. Аналогично доказательству леммы для $k=1$ находится собственный вектор $\mathbf{y}_2$ матрицы $\mathbf{M}$, соответствующий λ_0, и новый базис $\mathbf{y}_2,\mathbf{b}_2,\ldots,\mathbf{b}_m$, который будет вещественным, если λ_0 – вещественное число. В этом базисе матрица $\mathbf{M}$ также переходит в матрицу $\mathbf{M}_1$ вида (3.36). Но так как $k>1$, то из (3.37) следует, что λ_0 является корнем кратности $k-1$ характеристического многочлена $(m-1)\times(m-1)$ матрицы $\mathbf{D}_1$. По предположению индукции существует такой базис из $(m-1)$ векторов в $(m-1)$-мерном пространстве, или, что то же самое, существует $(m-1)\times(m-1)$ матрица $\mathbf{T}_1$ (вещественная, если λ_0 – вещественное число), что матрица $\tilde{\mathbf{D}}_1=\mathbf{T}_1\mathbf{D}_1\mathbf{T}_1^{-1}$ имеет вид матрицы (3.35) для $n=m-1$. Теперь, окаймив матрицу $\mathbf{T}_1$ верхней строкой $(1,0,0,\ldots,0)$ и левым столбцом $(1,0,0,\ldots,0)^T$, получаем матрицу $\mathbf{T}$ (вещественную, если λ_0 – вещественное число) такую, что матрица $\mathbf{T}\mathbf{M}_1\mathbf{T}^{-1}$ имеет вид матрицы (3.35) для $m=n$.

Лемма доказана.

Из леммы вытекает следствие: если λ_0 – корень кратности k уравнения $\det(\mathbf{M}-\lambda_0\mathbf{E})=0$, то множество решений векторного уравнения $\det(\mathbf{M}-\lambda_0\mathbf{E})^k\mathbf{y}=0$ является k-мерным вещественным пространством, если λ_0 – вещественное, и k-мерным комплексным пространством, если λ_0 – комплексное число. Такое пространство называется корневым.

Для доказательства следствия преобразуем матрицу $\mathbf{M}$ в матрицу (3.35). Согласно описанному алгоритму матрица $\tilde{\mathbf{M}}$ будет вещественной, если λ_0 – вещественное, и комплексной, если λ_0 – комплексное число. Очевидно, что размерности корневых пространств матриц $\mathbf{M}$ и $\tilde{\mathbf{M}}$ совпадают. Поэтому данное утверждение докажем для матрицы $\tilde{\mathbf{M}}$ вида (3.35). Легко видеть тогда, что матрица $(\tilde{\mathbf{M}}-\lambda_0\mathbf{E})^k$ имеет вид

$$(\tilde{\mathbf{M}}-\lambda_0\mathbf{E})^k=\begin{pmatrix}(\mathbf{B}_1-\lambda_0\mathbf{E})^k & \mathbf{B}_4\\ \mathbf{0} & (\mathbf{B}_3-\lambda_0\mathbf{E})^k\end{pmatrix},$$

где $(\mathbf{B}_3 - \lambda_0\mathbf{E})^k$ – невырожденная матрица, так как $\det(\mathbf{B}_3 - \lambda_0\mathbf{E}) \neq 0$. Поскольку $\mathbf{B}_1$ – $(k \times k)$-матрица, у которой диагональные элементы равны λ_0, а поддиагональные – нули, то как диагональные, так и поддиагональные элементы b_{ij} $(k \times k)$ матрицы $(\mathbf{B}_1 - \lambda_0\mathbf{E})$ равны нулю, т. е. $b_{ij} = 0$, $j \geq i$, $i, j \leq k$, в частности, $b_{i1} = 0$, $i = 1, \ldots k$. Теперь обозначим через c_{ij}, $i, j = 1, \ldots k$, элементы матрицы $(\mathbf{B}_1 - \lambda_0\mathbf{E})^2$. Имеем $c_{ij} = \sum_{l=1}^{k} b_{il}b_{lj}$. Так как $b_{lj} = 0$ при $l \geq j$, то $c_{i1} = 0$ и $c_{ij} = \sum_{l=1}^{j-1} b_{il}b_{lj}$, $j \geq 2$. Теперь, если $i + 1 \geq j$, то в этой формуле $i \geq l$ и, значит, $b_{il} = 0$. Тогда $c_{ij} = 0$ при $i + 1 \geq j$. В частности, $c_{ij} = 0$ при $j = 2$. Продолжая этот процесс, получаем, что для элементов v_{ij}, $i, j = 1, \ldots k$, матрицы $(\mathbf{B}_1 - \lambda_0\mathbf{E})^k$ $v_{ij} = 0$ для $i + k - 1 \geq j$, т. е. для всех $i, j = 1, \ldots k$. Таким образом матрица $(\mathbf{B}_1 - \lambda_0\mathbf{E})^k$ – нулевая, а следовательно, матрица $(\tilde{\mathbf{M}} - \lambda_0\mathbf{E})^k$ имеет вид:

$$(\tilde{\mathbf{M}} - \lambda_0\mathbf{E})^k = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{D}_3 \\ \mathbf{0} & (\mathbf{B}_3 - \lambda_0\mathbf{E})^k \end{pmatrix}$$

т. е. первые k столбцов этой матрицы нулевые, а поскольку $\det(\mathbf{B}_3 - \lambda_0\mathbf{E}) \neq 0$, то корневое пространство этой матрицы для $\lambda = \lambda_0$ имеет размерность k и его базис можно задать векторами $\mathbf{e}_i$, $i = 1, \ldots, k$, где $\mathbf{e}_i$ – n-мерный вектор, в котором i-я компонента равна 1, а все остальные компоненты – нулю.

Теперь, если матрица $\mathbf{B}_3$ в (3.35) ненулевая, то значит существует корень λ_1 уравнения $\det(\mathbf{B}_3 - \lambda\mathbf{E}) = 0$. Пусть k_1 – кратность этого корня. Тогда матрица $(\tilde{\mathbf{M}} - \lambda_1\mathbf{E})^{k_1}$ имеет вид

$$(\tilde{\mathbf{M}} - \lambda_1\mathbf{E})^{k_1} = \begin{pmatrix} (\mathbf{B}_1 - \lambda_1\mathbf{E})^{k_1} & \mathbf{B}_2 \\ \mathbf{0} & (\mathbf{B}_3 - \lambda_1\mathbf{E})^{k_1} \end{pmatrix}.$$

Корневое пространство этой матрицы для $\lambda = \lambda_1$ имеет размерность k_1. А так как у матрицы $(\mathbf{B}_1 - \lambda_1\mathbf{E})$ на диагонали будут числа $\lambda_0 - \lambda_1 \neq 0$, а под диагональю элементы равны нулю, то выписанные независимые векторы $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k$ из корневого пространства для $\lambda = \lambda_0$ переходят под действием матрицы $(\tilde{\mathbf{M}} - \lambda_1\mathbf{E})^{k_1}$ в ненулевые независимые вектора $(\lambda_0 - \lambda_1)^{k_1}\mathbf{e}_1, \ldots, (\lambda_0 - \lambda_1)^{k_1}\mathbf{e}_k$, т. е. они не попадут в корневое пространство для $\lambda = \lambda_1$. Если λ_0 и λ_1 произвольные, то из этого следует, что все корневые пространства пересекаются только в точке $\mathbf{0}$.

Замечание. Доказательства леммы и следствия о корневом разложении были предложены В. А. Чуркиным. Альтернативное доказательство следствия о корневом разложении, а также алгоритм нахождения корневого базиса и объяснение, откуда получается формула (3.33), приведены в учебном пособии *Дементьева Н. В., Лисейкин В. Д., Чуркин В. А.* Линейные системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Построение фундаментальной матрицы решений однородной системы с использованием корневого базиса. Новосибирск: НГУ, 2008.

Алгоритм нахождения общего решения однородного уравнения

Используя формулы (3.32) и (3.33), мы можем найти фундаментальную систему решений и, соответственно, общее решение однородного уравнения (3.25).

Обозначим через $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ все разные корни характеристического уравнения (3.28). Пусть кратность корня λ_j равна k_j. Тогда справедлива следующая формула:

$$\sum_{j=1}^{p} k_j = n. \tag{3.38}$$

Пусть $S_j, j = 1, \ldots, p$ – корневое подпространство, состоящее из всех векторов, являющихся решением уравнения (3.32) для корня λ_j. Тогда, если корень λ_j вещественный, то пространство S_j вещественно, а если λ_j – комплексный корень, то пространство S_j комплексно. Нами показано, что размерность пространства S_{λ_j} равна k_j, а множество всех корневых пространств распадается в прямую сумму подпространств $S_j, j = 1, \ldots, p$.

В каждом подпространстве S_j мы выберем k_j линейно независимых векторов

$$\mathbf{y}^1_{\lambda_j}, \ldots, \mathbf{y}^{k_j}_{\lambda_j}, \quad j = 1, \ldots, p,$$

которые являются решениями уравнения (3.32) для $p = k_j$, и все эти векторы для $j = 1, \ldots, p$ будут линейно независимы, так как все подпространства $S_j, j = 1, \ldots, p$ пересекаются только в точке $\mathbf{0}$. Каждому вектору $\mathbf{y}^m_{\lambda_j}$ соответствует вектор-функция $\mathbf{y}^m_{\lambda_j}(x)$, определенная формулой (3.33) и, следовательно, являющаяся решением уравнения (3.25). Так как из формулы (3.33) следует, что $\mathbf{y}^1_{\lambda_j}(0) = \mathbf{y}^1_{\lambda_j}, \ldots, \mathbf{y}^{k_j}_{\lambda_j}(0) =$

$= \mathbf{y}_{\lambda_j}^{k_j}$, $j = 1, \ldots, p$, то из теоремы 3.2 получаем, что вектор-функции $\mathbf{y}_{\lambda_j}^1(x), \ldots, \mathbf{y}_{\lambda_j}^{k_j}(x)$, $j = 1, \ldots, p$ также линейно независимы при произвольном $x \in (-\infty, \infty)$.

Теперь заметим, что если характеристическое уравнение имеет комплексный корень $\lambda_j = \alpha_j + i\beta_j$ кратности k_j, то существует также и сопряженный корень $\overline{\lambda}_j = \alpha_j - i\beta_j$ этого уравнения той же кратности k_j. Далее, если $\mathbf{y}_{\lambda_j}$ – комплексный вектор, являющийся решением уравнения (3.32) для $\lambda = \lambda_j$, то сопряженный вектор $\overline{\mathbf{y}}_{\lambda_j}$ будет решением того же уравнения (3.32) для сопряженного корня $\lambda = \overline{\lambda}_j$, т. е. уравнения

$$(\mathbf{A} - \overline{\lambda}_j \mathbf{E})^{k_j} \overline{\mathbf{y}}_{\lambda_j} = \mathbf{0}.$$

Следовательно, пространства S_{λ_j} и $S_{\overline{\lambda}_j}$ – взаимно сопряженные комплексные пространства размерности k_j. Поэтому если мы выберем базис из комплексных линейно независимых векторов $\mathbf{y}_{\lambda_j}^1, \ldots, \mathbf{y}_{\lambda_j}^{k_j}$ в S_{λ_j}, то сопряженные векторы $\overline{\mathbf{y}}_{\lambda_j}^1, \ldots, \overline{\mathbf{y}}_{\lambda_j}^{k_j}$ (их компонентами являются комплексные числа, сопряженные соответствующим компонентам векторов $\mathbf{y}_{\lambda_j}^m$) будут составлять базис пространства $S_{\overline{\lambda}_j}$. Пусть базис пространства всех корневых подпространств образован из линейно независимых векторов пространств S_λ для вещественных λ и серий взаимно сопряженных линейно независимых векторов пространств S_{λ_j} и $S_{\overline{\lambda}_j}$. Тогда вектор-функции

$$\mathbf{y}_{\lambda_j}^1(x), \ldots, \mathbf{y}_{\lambda_j}^{k_j}(x), \; j = 1, \ldots, p, \tag{3.39}$$

соответствующие выбранным базисным векторам и определенные формулой (3.33) и, следовательно, являющиеся решением уравнения (3.25), распадаются на два множества. Первое множество состоит из вещественных вектор-функций, каждая из которых соответствует некоторому вещественному корню. Второе множество состоит из взаимно сопряженных комплексных вектор-функций, образованных из всех пар взаимно сопряженных корней. Как вещественная, так и мнимая компоненты этих комплексных вектор-функций являются решением уравнения (3.25). Таким образом, для каждой пары взаимно сопряженных функций $\mathbf{y}_{\lambda_j}^m(x)$ и $\mathbf{y}_{\overline{\lambda}_j}^m(x) = \overline{\mathbf{y}}_{\lambda_j}^m(x)$ мы получаем только две линейно независимые вещественные вектор-функции $\mathbf{y}_1(x) = \mathrm{Re}\mathbf{y}_{\lambda_j}^m(x)$ и $\mathbf{y}_2(x) =$

$= \mathrm{Im}\mathbf{y}^m_{\lambda_j}(x)$, являющиеся решением уравнения (3.25). Очевидно, что

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_1(x) &= \frac{1}{2}(\mathbf{y}^m_{\lambda_j}(x) + \mathbf{y}^m_{\overline{\lambda}_j}(x)), \\ \mathbf{y}_2(x) &= \frac{1}{2i}(\mathbf{y}^m_{\lambda_j}(x) - \mathbf{y}^m_{\overline{\lambda}_j}(x)). \end{aligned} \tag{3.40}$$

Ясно, что число всех этих вещественных вектор-функций, соответствующих вещественным корням и всем парам сопряженных корней, равно n. Эти вектор-функции линейно независимы, так как в противном случае из (3.40) следовало бы, что функции (3.39) линейно зависимы. Таким образом, эти вещественные вектор-функции составляют фундаментальную систему решений уравнения (3.25), и, следовательно, мы можем выписать общее решение этого уравнения с помощью формулы (3.10).

Теперь, основываясь на описанных рассуждениях, мы можем сформулировать алгоритм нахождения общего решения уравнения (3.25).

Первый этап. Находятся все разные корни характеристического уравнения (3.28).

Второй этап. Из этих корней выбираются вещественные корни и по одному корню от каждой пары взаимно сопряженных комплексных корней. Пусть все эти выбранные вещественные и комплексные корни обозначаются $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$, а их кратности соответственно $k_1, \ldots, k_m$.

Третий этап. Для каждого выбранного корня λ_j кратности k_j находится базис корневого подпространства S_{λ_j}, т. е. из уравнения (3.32) при $p = k_j$ находятся k_j линейно независимых векторов:

$$\mathbf{y}^1_{\lambda_j}, \ldots, \mathbf{y}^{k_j}_{\lambda_j}, \quad j = 1, \ldots, m.$$

Отметим, что эти вектора можно также находить последовательно, вначале при $p = 1$ в уравнении (3.32), т. е. для пространства собственных векторов матрицы $\mathbf{A}$ для корня λ_j. Затем, если размерность пространства собственных векторов меньше k_j, то дополнительные независимые вектора корневого подпространства S_{λ_j} находятся из уравнения (3.32) для $p = 2$ и т. д., пока их число не станет равным k_j.

Четвертый этап. Для каждого вектора, полученного на третьем этапе, находится решение уравнения (3.25) по формуле (3.33).

Пятый этап. Из вещественных и комплексных решений, полученных на четвертом этапе, определяются n линейно независимых вещественных вектор-функций $\mathbf{y}_1(x), \ldots, \mathbf{y}_n(x)$, образующих фундаментальную систему решений уравнения (3.25). Этими функциями являются все решения, полученные на четвертом этапе для вещественных корней, а также мнимые и вещественные части всех полученных комплексных решений.

Шестой этап. Выписывается общее решение уравнения (3.25) с помощью формулы (3.10).

Отметим, что если корень λ характеристического уравнения (3.28) один, то он вещественный и его кратность равна n. Следовательно, размерность пространства S_λ тоже равна n. Это возможно, только если $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})^n \equiv \mathbf{0}$. Поэтому в этом случае нет необходимости решать уравнение (3.32): $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})^n\mathbf{y}_\lambda = \mathbf{0}$, так как произвольный вектор $\mathbf{y} = (c_1, \ldots, c_n)^T$ будет решением этого уравнения. А тогда общим решением дифференциального уравнения (3.25) будет, согласно (3.33),

$$\mathbf{y}(x) = e^{\lambda x}(\mathbf{E} + \sum_{m=1}^{n-1} \frac{x^m}{m!}(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})^m)\mathbf{c}, \ \mathbf{c} = (c_1, \ldots, c_n)^T. \tag{3.41}$$

Метод неопределенных коэффициентов для нахождения решений однородного уравнения

Так как мы теперь знаем, какими могут быть компоненты решения уравнения (3.25) в зависимости от корня λ и его кратности, то решение уравнения (3.25) мы можем также отыскать методом неопределенных коэффициентов. Для этого вычисляются все корни характеристического многочлена, затем для каждого корня λ_j решение уравнения (3.25) ищется в виде вектор-функции

$$\mathbf{y}_j(x) = (\mathbf{y}_{j1} + x\mathbf{y}_{j2} + \ldots + x^{k_j-1}\mathbf{y}_{jk_j})e^{\lambda_j x},$$

где $\mathbf{y}_{j1}, \ldots, \mathbf{y}_{jk_j}$ – искомые постоянные векторы с неизвестными пока компонентами, k_j – кратность корня λ_j. Подставив эту функцию в уравнение (3.25), мы получаем решение уравнения для компонент этих векторов $\mathbf{y}_{j1}, \ldots, \mathbf{y}_{jk_j}$. Решив эти уравнения, получаем, таким образом, решение уравнения (3.25). Если решение будет комплексным, то нужно выбрать его вещественные и мнимые части, которые также будут решениями уравнения (3.25).

Алгоритм нахождения общего решения неоднородного линейного уравнения

Для нахождения общего решения неоднородного уравнения

$$\mathbf{y}' - \mathbf{A}\mathbf{y} = \mathbf{f}(x), \tag{3.42}$$

где $\mathbf{A}$ – матрица с постоянными коэффициентами, воспользуемся формулой (3.23). Эта формула включает матрицу Вронского и ее обратную матрицу. Столбцами матрицы Вронского в (3.23) являются вектор-функции, образующие фундаментальную систему решений уравнения (3.25). Поэтому для нахождения общего решения по формуле (3.23) мы должны сформировать фундаментальную систему решений уравнения (3.25) с матрицей $\mathbf{A}$ из (3.42), т. е. выполнить первые пять описанных выше этапов получения общего решения однородного уравнения. Далее мы выполняем

Шестой этап. Из фундаментальной системы решений $\mathbf{y}_1(x), \ldots, \mathbf{y}_n(x)$ уравнения (3.25), полученных на пятом этапе, выписываем матрицу Вронского $\mathbf{W}[\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n](x)$. Ее j-м столбцом является вектор-функция $\mathbf{y}_j(x)$.

Седьмой этап. Из уравнения $\mathbf{W}[\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n](x)\mathbf{b}(x) = \mathbf{f}(x)$, где $\mathbf{f}(x)$ – правая часть системы уравнений (3.42), вычисляется вектор-функция $\mathbf{b}(x) = (\mathbf{b}_1(x), \ldots, \mathbf{b}_n(x))^T$. Это можно сделать, например, предварительно вычислив обратную матрицу $\mathbf{W}^{-1}[\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n](x)$ матрицы Вронского. Тогда $\mathbf{b}(x) = \mathbf{W}^{-1}[\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n](x)\mathbf{f}(x)$.

Восьмой этап. Вычисляется интеграл $\int \mathbf{b}(x)dx = \mathbf{r}(x)$.

Девятый этап. Находится частное решение уравнения (3.42) по формуле

$$\mathbf{y}_{\text{ч}}(x) = \mathbf{W}[\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n](x)\mathbf{r}(x).$$

Десятый этап. Выписывается общее решение неоднородного уравнения (3.42) по формуле (3.23):

$$\mathbf{y}(x) = \mathbf{W}[\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n](x)(\mathbf{c} + \mathbf{r}(x)).$$

Примеры решений линейных систем с постоянными коэффициентами

Пример 3.1. В качестве первого примера рассмотрим однородную систему из трех уравнений:

$$\begin{aligned} y_1' &= -2y_1 + y_2 - 2y_3, \\ y_2' &= y_1 - 2y_2 + 2y_3, \\ y_3' &= 3y_1 - 3y_2 + 5y_3. \end{aligned} \tag{3.43}$$

Отсюда

$$\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E} = \begin{pmatrix} -2-\lambda & 1 & -2 \\ 1 & -2-\lambda & 2 \\ 3 & -3 & 5-\lambda \end{pmatrix}, \qquad \lambda_1 = 3,\ \lambda_2 = \lambda_3 = -1.$$

Собственным вектором, соответствующим простому корню $\lambda_1 = 3$, будет $\mathbf{y}_1 = (-1, 1, 3)^T$. Для двукратного корня $\lambda = -1$ имеем:

$$\mathbf{A} + \mathbf{E} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Так как ранг матрицы $\mathbf{A} + \mathbf{E}$ равен единице, то корневое пространство для $\lambda = -1$ совпадает с пространством собственных векторов матрицы $\mathbf{A}$ для $\lambda = -1$. Решением уравнения (3.32) для $\lambda = -1$ и $p = 1$, т. е. уравнения $(\mathbf{A} + \mathbf{E})\mathbf{y} = \mathbf{0}$, будут два независимых вектора $\mathbf{y}_2 = (1, 1, 0)^T$ и $\mathbf{y}_3 = (0, 2, 1)^T$. Поэтому согласно (3.33) получаем решение (3.41) для $\lambda_1 = 3$ и $p = 1$:

$$\mathbf{y}_1(x) = e^{3x}\mathbf{y}_1.$$

Для кратного корня $\lambda = -1$ имеем из (3.33) для $p = 1$ два независимых решения:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_2(x) &= e^{-x}\mathbf{y}_2, \\ \mathbf{y}_3(x) &= e^{-x}\mathbf{y}_3. \end{aligned}$$

Таким образом, общим решением рассмотренной системы (3.43) будет $\mathbf{y}(x) = c_1 e^{3x}\mathbf{y}_1 + c_2 e^{-x}\mathbf{y}_2 + c_3 e^{-x}\mathbf{y}_3$, или в покомпонентном виде:

$$\begin{aligned} y_1(x) &= -c_1 e^{3x} + c_2 e^{-x} \ , \\ y_2(x) &= c_1 e^{3x} + (c_2 + 2c_3)e^{-x} \ , \\ y_3(x) &= 3c_1 e^{3x} + c_3 e^{-x} \ . \end{aligned}$$

Пример 3.2. Найдем решение однородной системы уравнений

$$\begin{aligned} y_1' &= 2y_1 - y_2 + 2y_3, \\ y_2' &= y_1 + 2y_3, \\ y_3' &= y_1 - 2y_2 - y_3. \end{aligned} \tag{3.44}$$

Имеем:

$$\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 & 2 \\ 1 & -\lambda & 2 \\ 1 & -2 & -1-\lambda \end{pmatrix}, \qquad \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = i,\ \lambda_3 = -i.$$

Согласно правилу второго этапа для нахождения решения, достаточно использовать вещественный корень $\lambda_1 = 1$ и один комплексный корень $\lambda_2 = i$. Собственным вектором для $\lambda_1 = 1$ будет

$$\mathbf{y}_1 = (6, 4, -1)^T,$$

а для $\lambda_2 = i$

$$\mathbf{y}_2 = (2, 2, i-1)^T.$$

По правилам четвертого и пятого этапов фундаментальной системой решений уравнения (3.44) будут следующие вектор-функции:

$$\mathbf{y}_1(x) = e^x\mathbf{y}_1,\ \mathbf{y}_2(x) = \mathrm{Re}(e^{ix}\mathbf{y}_2),\ \mathbf{y}_3(x) = \mathrm{Im}(e^{ix}\mathbf{y}_2).$$

Общее решение уравнения (3.44) имеет вид

$$\mathbf{y}(x) = c_1\mathbf{y}_1(x) + c_2\mathbf{y}_2(x) + c_3\mathbf{y}_3(x),$$

или в покомпонентной записи:

$$\begin{aligned} y_1(x) &= 6c_1 e^x + 2c_2\cos x + 2c_3\sin x \ , \\ y_2(x) &= 4c_1 e^x + 2c_2\cos x + 2c_3\sin x \ , \\ y_3(x) &= -c_1 e^x - c_2(\cos x + \sin x) + c_3(\cos x - \sin x) \ . \end{aligned}$$

Пример 3.3. В качестве третьего примера рассмотрим неоднородную систему уравнений

$$\begin{aligned} y_1' &= y_1 - 2y_2 + \frac{e^{2x}}{x}, \\ y_2' &= \frac{1}{2}y_1 + 3y_2 + \frac{e^{2x}}{x-1}. \end{aligned} \tag{3.45}$$

Для нахождения решения системы (3.45) воспользуемся формулой (3.23). Согласно этой формуле мы должны получить матрицу Вронского, столбцами которой являются независимые решения однородной системы уравнений

$$\begin{aligned} y_1' &= y_1 - 2y_2 \ , \\ y_2' &= \frac{1}{2}y_1 + 3y_2 \ . \end{aligned} \tag{3.46}$$

Имеем:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ \frac{1}{2} & 3 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{A} - \lambda\mathbf{E} &= \begin{pmatrix} 1-\lambda & -2 \\ \frac{1}{2} & 3-\lambda \end{pmatrix}, \qquad \lambda_1 = \lambda_2 = 2, \\ \mathbf{A} - 2\mathbf{E} &= \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}, \\ (\mathbf{A} - 2\mathbf{E})^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Следовательно, решением уравнения (3.32) при $p = 2$ для однородной системы дифференциальных уравнений (3.46) будет произвольный вектор

$$\mathbf{y}_2 = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}.$$

Тогда общим решением однородной системы (3.46) будет согласно (3.41)

$$\mathbf{y}_{\text{ОД}}(x) = e^{2x}(\mathbf{E}+x(\mathbf{A}-2\mathbf{E}))\mathbf{y}_2 = e^{2x}\begin{pmatrix} 1-x & -2x \\ \dfrac{1}{2}x & 1+x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} =$$

$$= e^{2x}\begin{pmatrix} c_1(1-x)-2c_2x \\ \dfrac{c_1}{2}x + c_2(1+x) \end{pmatrix}, \qquad (3.47)$$

или в покомпонентном виде:

$$y_1(x) = (c_1(1-x)-2c_2x)e^{2x},$$

$$y_2(x) = \Big(\frac{c_1x}{2} + c_2(1+x)\Big)e^{2x}.$$

Решение (3.47) соответствует первому слагаемому формулы (3.23).

В качестве фундаментальной системы решений уравнения (3.46) полагаем вектор-функции

$$\mathbf{y}_1(x) = \begin{pmatrix} 1-x \\ \dfrac{x}{2} \end{pmatrix} e^{2x} \quad \text{и} \quad \mathbf{y}_2(x) = \begin{pmatrix} -2x \\ 1+x \end{pmatrix} e^{2x},$$

которые получаются из общего решения (3.47) при $c_1 = 1$, $c_2 = 0$ и $c_2 = 1$, $c_1 = 0$ соответственно. Имеем:

$$\mathbf{W}[\mathbf{y}_1,\mathbf{y}_2](x) = \begin{pmatrix} (1-x)e^{2x} & -2xe^{2x} \\ \dfrac{x}{2}e^{2x} & (1+x)e^{2x} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{W}^{-1}[\mathbf{y}_1,\mathbf{y}_2](x) = \begin{pmatrix} (1+x)e^{-2x} & 2xe^{-2x} \\ -\dfrac{x}{2}e^{-2x} & (1-x)e^{-2x} \end{pmatrix}.$$

Для нахождения частного решения уравнения (3.45) нужно согласно формуле (3.23) вычислить интеграл

$$\int \mathbf{W}^{-1}[\mathbf{y}_1,\mathbf{y}_2](x)\mathbf{f}(x)dx, \quad \mathbf{f}(x) = \Big(\frac{e^{2x}}{x}, \frac{e^{2x}}{x-1}\Big)^T.$$

Имеем:

$$\int \mathbf{W}^{-1}[\mathbf{y}_1,\mathbf{y}_2](x)\mathbf{f}(x)dx = \int \begin{pmatrix} \dfrac{1+x}{x}+\dfrac{2x}{x-1} \\ -\dfrac{3}{2} \end{pmatrix} dx =$$

$$= \begin{pmatrix} 3x+\ln(|x|(x-1)^2)+c_1 \\ -\dfrac{3}{2}x+c_2 \end{pmatrix}.$$

Полагая в этой формуле $c_1 = c_2 = 0$ и используя формулу второго слагаемого в (3.23), получаем следующее выражение для частного решения уравнения (3.45):

$$\mathbf{y}_{\text{ч}}(x) = \mathbf{W}[\mathbf{y}_1,\mathbf{y}_2](x) \begin{pmatrix} 3x+\ln(|x|(x-1)^2) \\ -\dfrac{3}{2}x \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (1-x)\Big(\ln(|x|(x-1)^2)\Big)+3x \\ \dfrac{x}{2}\Big(\ln(|x|(x-1)^2)\Big)-\dfrac{3}{2}x \end{pmatrix} e^{2x}.$$

Общим решением уравнения (3.45) будет

$$\mathbf{y}_{\text{об}}(x) = \mathbf{y}_{\text{од}}(x) + \mathbf{y}_{\text{ч}}(x),$$

где $\mathbf{y}(x)$ – общее решение однородного уравнения (3.46), описанное формулой (3.47).

Глава 4

Уравнения высокого порядка

Введение

Формальная запись обыкновенных уравнений n-го порядка представлена формулами (1.1–1.3). В этой главе будут рассмотрены в основном аналитические методы решения уравнений в явной форме:

$$y^{(n)} = F(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}), \tag{4.1}$$

где $F()$ – известная функция $n + 1$-го аргумента.

В практических приложениях обычно исследуются уравнения n-го порядка не изолированно, а совместно с начальными или граничными условиями. Так, например, начальная задача (задача Коши) для уравнения (4.1) записывается в виде

$$\begin{aligned} &y^{(n)} = F(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}), \\ &[y(x_0), y'(x_0), \dots, y^{(n-1)}(x_0)] = (y_0, y_0', \dots, y_0^{(n-1)}), \end{aligned} \tag{4.2}$$

где $y_0, y_0', \dots, y_0^{(n-1)}$ – заданные соответственно значения функции $y(x)$ и ее производных в точке x_0. Вектор $\mathbf{y}_0 = (y_0, y_0', \dots, y_0^{(n-1)})$ будем называть **начальным вектором** в точке x_0 для задачи Коши, а вектор $\mathbf{y}(x_0) = [y(x_0), y'(x_0), \dots, y^{(n-1)}(x_0)]$ – **начальным вектором** функции $y(x)$ в точке x_0.

Также часто рассматриваются задачи, в которых кроме уравнения заданы значения функции и ее производных не в одной точке, а в двух. Например, для уравнения второго порядка популярной является так называемая **смешанная краевая задача**:

$$\begin{aligned} &y'' = F(x, y, y'), \qquad a < x < b, \\ &a_1 y(a) + a_2 y'(a) = A, \qquad b_1 y(b) + b_2 y'(b) = B. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Если $a_1, b_1 = 1,\ a_2, b_2 = 0$, то (4.3) называется **двухточечной краевой задачей**.

4.1. Теорема существования и единственности

Для задачи Коши (4.2) верна теорема Пикара о существовании и единственности решения в следующей формулировке:

Теорема 4.1. *Если функция $F(x, z_1, \ldots, z_n)$ непрерывна в открытой окрестности точки $(x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)})$ и имеет непрерывные в этой окрестности частные производные по $z_1, \ldots, z_n$, то задача (4.2) имеет единственное решение $y(x)$, удовлетворяющее начальным значениям*

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_0', \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$$

для $|x - x_0| \le h$ при некотором $h > 0$.

Теорема Пикара легко доказывается так же, как в п. 3.1.1, с помощью обобщения метода итераций, рассмотренного в п. 2.3.6, на векторные уравнения. Для этого задача (4.2) преобразовывается в начальную задачу для системы уравнений первого порядка относительно n-мерной вектор-функции

$$\mathbf{z}(x) = [z_1(x), \ldots, z_n(x)]$$

с помощью замены

$$z_1 = y,\ z_2 = y',\ \ldots,\ z_n = y^{(n-1)}. \tag{4.4}$$

В результате этой замены мы получаем вместо (4.2) эквивалентную задачу Коши для системы уравнений

$$\begin{cases} z_1' = z_2, \\ z_2' = z_3, \\ \vdots \\ z_{n-1}' = z_n, \\ z_n' = F(x, z_1, \ldots, z_n) \end{cases} \tag{4.5}$$

с начальным условием

$$\mathbf{z}(x_0) = \mathbf{z}_0 = [y_0, y'(0), \ldots, y^{(n-1)}(0)] \tag{4.6}$$

или в векторной форме

$$\begin{aligned} &\mathbf{z}' = \mathbf{F}(x, \mathbf{z}), \qquad \mathbf{F} = (F_1, \ldots, F_n)^T \\ &\mathbf{z}(x_0) = \mathbf{z}_0, \end{aligned} \tag{4.7}$$

где

$$F_1(x, \mathbf{z}) = z_2, \ \ldots, \ F_{n-1}(x, \mathbf{z}) = z_n, \ F_n(x, \mathbf{z}) = F(x, z_1, \ldots, z_n).$$

Проблема нахождения решения начальной задачи (4.7) эквивалентна решению интегрального уравнения

$$\mathbf{z}(x) = \mathbf{z}_0 + \int_{x_0}^{x} \mathbf{F}[\xi, \mathbf{z}(\xi)] d\xi. \tag{4.8}$$

Это уравнение решается методом итераций аналогично методу, рассмотренному в п. 2.3.6 для скалярных интегральных уравнений (2.38), путем последовательного нахождения n-го приближения через $(n-1)$-е по формуле

$$\mathbf{z}_n(x) = \mathbf{z}_0 + \int_{x_0}^{x} \mathbf{F}[\xi, \mathbf{z}_{n-1}(\xi)] d\xi.$$

Так же, как и в скалярном случае, функция $\mathbf{z}(x)$, являющаяся пределом последовательности $\mathbf{z}_n(x)$, и будет единственным локальным решением начальной задачи (4.7), а функция $y(x) = z_1(x)$ – решением начальной задачи (4.2), требуемой теоремой Пикара.

Общим решением дифференциального уравнения (4.1) является все множество решений, удовлетворяющих этому уравнению. Если функция $F(x, z_1, \ldots, z_n)$ удовлетворяет условиям теоремы Пикара, то общее решение зависит от n параметров, которыми, например, являются начальные значения функции и значения ее производных, так как они могут быть заданы независимо. Таким образом, общим решением уравнения (4.1) будет функция

$$y = \phi(x, c_1, \ldots, c_n) \ - \ \text{явная форма}$$

или выражение

$$\phi_1(x, y, c_1, \ldots, c_n) = 0 \ - \ \text{неявная форма.}$$

Общее решение, записанное в неявной форме, называют также **общим интегралом**.

Решение, получающееся из общего решения при конкретных значениях параметров $c_1, \ldots, c_n$, называется **частным**.

4.2. Уравнения, допускающие понижение порядка

В данном параграфе рассматриваются примеры уравнений n-го порядка, которые с помощью замен переменных или промежуточного интегрирования преобразовываются в уравнения меньшего порядка, что обычно облегчает их интегрирование.

Уравнение вида

$$\Phi(x, y^{(k)}, \ldots, y^{(n)}) = 0, \qquad k \geq 1\ . \tag{4.9}$$

С помощью замены $z = y^{(k)}$ уравнение (4.9) преобразовывается в уравнение порядка $n - k$:

$$\Phi(x, z, z', \ldots, z^{(n-k)}) = 0\ . \tag{4.10}$$

Общим решением (4.10), записанным в явной форме, будет функция

$$z = z(x, c_1, \ldots, c_{n-k})\ ,$$

а ее k-кратное интегрирование определяет общее решение (4.9):

$$y = y(x, c_1, \ldots, c_n)\ .$$

Пример 4.1. Решить уравнение $xy'' = y'$. Полагая $y' = z$, получаем уравнение $xz' = z$, решением которого будет $z = cx$. Следовательно, $y(x) = \displaystyle\int cxdx = c_1x^2 + c_2$.

Уравнение вида

$$\Phi(y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0\ . \tag{4.11}$$

Это уравнение не содержит независимой переменной x, поэтому, считая y новой независимой переменной, а $z = y'$ – зависимой переменной, мы имеем:

$$\frac{dy}{dx} = z\,,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}z = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx} = z\frac{dz}{dy}\,,$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d}{dx}\Big(\frac{d^2y}{dx^2}\Big) = \frac{d}{dx}\Big(z\frac{dz}{dy}\Big) = \Big(\frac{dz}{dy}\Big)^2 z + z^2\frac{d^2z}{dy^2}$$

и т. д. Теперь докажем, что для произвольного k

$$\frac{d^ky}{dx^k} = \Phi_k\Big(z, \frac{dz}{dy}, \ldots, \frac{d^{k-1}z}{dy^{k-1}}\Big).$$

Для $k = 1, 2$ и 3 это верно. Предположим, что эта формула верна для $k-1$, т. е.

$$\frac{d^{k-1}y}{dx^{k-1}} = \Phi_{k-1}\Big(z, \frac{dz}{dy}, \ldots, \frac{d^{k-2}z}{dy^{k-2}}\Big).$$

Тогда имеем:

$$\frac{d^ky}{dx^k} = \frac{d}{dx}\Big(\frac{d^{k-1}y}{dx^{k-1}}\Big) = \frac{d}{dx}\Big(\Phi_{k-1}\Big(z, \frac{dz}{dy}, \ldots, \frac{d^{k-2}z}{dy^{k-2}}\Big) =$$

$$= \Big(\frac{\partial\Phi_{k-1}}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial\Phi_{k-1}}{\partial dz/dy}\frac{d^2z}{dy^2} + \ldots + \frac{\partial\Phi_{k-1}}{\partial d^{k-2}z/dy^{k-2}}\frac{d^{k-1}z}{dy^{k-1}}\Big)\frac{dy}{dx} =$$

$$= \Phi_k\Big(z, \frac{dz}{dy}, \ldots, \frac{d^{k-1}z}{dy^{k-1}}\Big).$$

Таким образом, производные d^ky/dx^k выражаются через z и производные d^mz/dy^m для $m < k$. Подставляя полученные выражения для $y', \ldots, y^{(n)}$ в (4.11), мы имеем уравнение $n-1$-го порядка относительно функции $z(y)$

$$F(y, z, z', \ldots, z^{(n-1)}) = 0,$$

эквивалентное (4.11).

Пример 4.2. Решим уравнение $y'' = ay'^2$. Положим, y – независимая, а $z = y'$ – зависимая переменные. Тогда относительно z получаем уравнение $zdz/dy = az^2$, решением которого будет $z = ce^{ay}$. Поэтому имеем $y' = ce^{ay}$ и, следовательно, $dx/dy = c_1e^{-ay}$. Значит, $x(y) = c_2e^{-ay} + c_3$, т. е.

$$y(x) = -\frac{1}{a}\ln(cx + c_1).$$

Уравнение вида

$$\Phi(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = \frac{d}{dx}[\Phi_1(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})] = 0. \tag{4.12}$$

Интегрируя (4.12), мы получаем соотношение

$$\Phi_1(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) = c,$$

которое является уравнением $(n-1)$-го порядка.

Иногда уравнение

$$\Phi(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0 \tag{4.13}$$

становится уравнением вида (4.12) после умножения на некоторый множитель $\mu(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$. Очевидно, что лишние решения уравнения $\mu = 0$ должны быть устранены из общего решения уравнения

$$\mu(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})\Phi(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0.$$

Пример 4.3. Пусть нужно решить уравнение $yy'' + y'^2 + \sin x = 0$. Это уравнение записывается в виде $(yy' - \cos x)' = 0$. Значит, $yy' = \cos x + c$ и, полагая $z(x) = y^2(x)$, получаем $z' = 2\cos x + c_1$. Следовательно, решением будет $y^2 - 2\sin x + c_1 x + c_2 = 0$.

Уравнение, однородное относительно $y, y', \dots, y^{(n)}$

Если левая часть уравнения (4.13) однородна относительно неизвестной функции и ее производных, т. е.

$$\Phi(x, ky, ky', \dots, ky^{(n)}) = k^p \Phi(x, y, y', \dots, y^{(n)}),$$

то порядок уравнения (4.13) понижается на единицу подстановкой

$$y = ce^{\int z(x)dx},$$

где $z(x)$ – новая искомая функция. Покажем это. Имеем:

$$y' = cze^{\int z(x)dx}, \qquad y'' = c(z' + z^2)e^{\int z(x)dx},$$

Теперь докажем, что

$$y^{(n)} = c\Phi_n(z, z', \dots, z^{(n-1)})e^{\int z(x)dx}.$$

Для этого предположим, что эта формула верна для $k-1$, т. е. $y^{(k-1)} = c\Phi_{k-1}(z, z', \ldots, z^{(k-2)})e^{\int z(x)dx}$. Тогда

$$y^{(k)} = \frac{d}{dx}(y^{(k-1)}) = \frac{d}{dx}\Phi_{k-1}(z, z', \ldots, z^{(k-2)})e^{\int z(x)dx} = \\ = c\Phi_k(z, z', \ldots, z^{(k-1)})e^{\int z(x)dx}$$

и, следовательно, в силу однородности функции $\Phi(x, y, y', \ldots, y^{(n)})$ мы находим, что (4.13) преобразовывается в уравнение

$$c^p e^{p\int z(x)dx}\Phi_2(x, z, z', \ldots, z^{(n-1)}) = 0,$$

эквивалентное уравнению $(n-1)$-го порядка относительно функции $z(x)$:

$$\Phi_2(x, z, z', \ldots, z^{(n-1)}) = 0.$$

Пример 4.4. Решим уравнение $yy'' - y'^2 = y^2 \cos x$. Введя замену $y = ce^{\int z(x)dx}$, получаем следующее уравнение относительно $z(x)$: $z' = \cos x$. Отсюда $z(x) = \sin x + c_1$ и, следовательно,

$$y(x) = c_2 e^{-\cos x + c_1 x}.$$

4.3. Линейные уравнения

Линейным дифференциальным уравнением n-го порядка называется уравнение вида

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x). \tag{4.14}$$

Если функции $a_1(x), \ldots, a_n(x)$ и $f(x)$ непрерывны на отрезке $[a, b]$, то, согласно теореме Пикара 4.1, решение начальной задачи для уравнения (4.14) всегда существует и единственно в некоторой окрестности начальной точки $x_0 \in [a, b]$. Следовательно, общее решение (4.14) можно записать в виде $y = y(x, c_1, \ldots, c_n)$.

Замечание 4.1. Для линейной задачи (4.14) теорема Пикара справедлива на всем отрезке $[a, b]$. А именно, решение начальной задачи для уравнения (4.14) всегда существует и единственно на отрезке $[a, b]$, если коэффициенты $a_1(x), \ldots, a_n(x)$ и функция $f(x)$ непрерывны на $[a, b]$. Доказывается это утверждение с помощью продолжения локальных решений с отрезка $[x_0 - h, x_0 + h] \subset [a, b]$ на $[a, b]$. Отметим, что в нелинейном случае не всегда возможно продолжение локального решения на весь отрезок $[a, b]$. Таким образом, если $y_1 = \phi_1(x)$ и $y_2 = \phi_2(x)$ – два решения (4.14) на отрезке $[a, b]$ и начальные векторы этих функций совпадают в произвольной точке $x_0 \in [a, b]$, т. е.

$$[\phi_1(x_0), \phi_1'(x_0), \ldots, \phi_1^{(n-1)}(x_0)] = [\phi_2(x_0), \phi_2'(x_0), \ldots, \phi_2^{(n-1)}(x_0)],$$

то функции $\phi_1(x)$ и $\phi_2(x)$ тождественны на всем отрезке $[a, b]$.

Если $f(x) \equiv 0$, то уравнение (4.14) называется **однородным линейным**, если $f(x) \neq 0$ – **неоднородным**. Термин однородное линейное уравнение применяется к уравнению (4.14) с условием $f(x) \equiv 0$, потому что левая часть (4.14) является однородной функцией относительно $y, y', \ldots, y^{(n)}$. Согласно п. 4.2, порядок такого уравнения можно понизить на единицу с помощью замены $y = ce^{\int z(x)dx}$. Однако уравнение, полученное в результате такой замены, уже может не быть линейным.

4.3.1. Линейные однородные уравнения

Операторное представление

Запишем линейное однородное уравнение в виде

$$L[y] = 0, \tag{4.15}$$

где

$$L[y] = y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)y. \tag{4.16}$$

Если $a_1(x), \ldots, a_n(x)$ – непрерывные функции, а $\phi(x)$ – какая-либо функция, имеющая непрерывные производные до порядка n, то с помощью формулы (4.16) можно определить новую функцию

$$L[\phi](x) = \phi^{(n)}(x) + a_1(x)\phi^{(n-1)}(x) + \ldots + a_n(x)\phi(x),$$

т. е. (4.16) устанавливает отображение пространства гладких функций до порядка n в пространство непрерывных функций. Такие отображения называются операторами. В частности, оператором является операция i-кратного дифференцирования d^i/dx^i.

Свойства однородных уравнений

Так как для оператора d^i/dx^i верно свойство

$$\frac{d^i}{dx^i}\Big(\sum_{k=1}^{m} c_k\phi_k(x)\Big) = \sum_{k=1}^{m} c_k\frac{d^i}{dx^i}\phi_k(x),$$

где $c_k, k = 1, \ldots, m$ – произвольные константы, $\phi_k(x), k = 1, \ldots, m$ – гладкие функции до порядка n, то мы легко получаем, что это свойство выполняется и для оператора L:

$$L[\sum_{k=1}^{m} c_k\phi_k] = \sum_{k=1}^{m} c_k L[\phi_k]. \tag{4.17}$$

В соответствии со свойством (4.17) оператор L, определенный формулой (4.16), называют **линейным дифференциальным оператором n-го порядка**.

Из (4.17) следует, что линейная комбинация решений однородного линейного уравнения (4.15) является решением этого же уравнения. Отсюда мы находим, что если линейное дифференциальное уравнение (4.15) с действительными коэффициентами $a_i(x)$ имеет комплексное решение $y(x) = u(x) + iv(x)$, то функции $u(x)$ и $v(x)$ являются решениями (4.15). Например, уравнение $y'' + y = 0$ имеет комплексное решение $y(x) = ce^{ix} = c(\cos x + i\sin x)$, и, следовательно, функции $c_1\cos x$ и $c_2\sin x$ являются решениями этого уравнения.

Фундаментальная система решений

В теории линейных однородных дифференциальных уравнений бывает важно выделить такой минимальный набор решений, называемый **фундаментальной системой решений**, или **базисом**, что всякое решение является линейной комбинацией этих базисных решений. В данном пункте обсуждаются некоторые вопросы, касающиеся фундаментальных систем решений уравнения (4.15).

Для определения фундаментальной системы необходимо ввести понятие линейной зависимости, а также линейной независимости функций. Функции $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ называются **линейно зависимыми** на отрезке $[a, b]$, если существуют такие константы $a_1, \ldots, a_n$, при этом, по крайней мере, одно a_i не равно нулю, что

$$a_1y_1(x) + \ldots + a_ny_n(x) \equiv 0, \qquad x \in [a, b]. \tag{4.18}$$

Если таких констант не существует, то функции $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ называются **линейно независимыми** на отрезке $[a, b]$.

Определитель Вронского. Когда функции $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ – линейно зависимы на отрезке $[a, b]$, т. е. в тождестве (4.18) существует

$a_i \neq 0$, тогда очевидно, что функция $y_i(x)$ является линейной комбинацией остальных. Таким образом, функции $y_1(x), \dots, y_n(x)$ не могут быть фундаментальной системой решений, так как, по крайней мере, функция $y_i(x)$ может быть устранена в силу требования минимальности множества функций, составляющих базис решений. Встает вопрос, как определить, что функции $y_1(x), \dots, y_n(x)$ являются линейно зависимыми. Оказывается, есть простой алгоритм, позволяющий ответить на этот вопрос. Для этого нужно вычислить определитель Вронского

$$\det \mathbf{W}[y_1, \dots, y_n](x), \qquad x \in [a, b],$$

где матрица

$$\mathbf{W}[y_1, \dots, y_n](x) = \begin{pmatrix} y_1(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \vdots & & \\ y_1^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}$$

является матрицей Вронского, определенной в п. 3.1.3, столбцами которой будут начальные векторы функций $y_i(x), i = 1, \dots, n$ в точке x.

Теорема 4.2. *Если функции $y_1(x), \dots, y_n(x)$ линейно зависимы на отрезке $[a, b]$, то определитель Вронского равен нулю для всех $x \in [a, b]$.*

Для доказательства теоремы мы воспользуемся тождеством (4.18), являющимся условием линейной зависимости этих функций. Дифференцируя это тождество $(n-1)$ раз, мы получаем систему

$$\begin{array}{llll} a_1 y_1(x) & + \dots & + a_n y_n(x) & \equiv 0, \\ a_1 y_1'(x) & + \dots & + a_n y_n'(x) & \equiv 0, \\ \vdots & & & \\ a_1 y_1^{(n-1)}(x) & + \dots & + a_n y_n^{(n-1)}(x) & \equiv 0, \end{array}$$

которая записывается с помощью матрицы Вронского в виде

$$\mathbf{W}[y_1, \dots, y_n](x)\mathbf{a} \equiv \mathbf{0}, \qquad x \in [a, b],$$

где $\mathbf{0}$ – нулевой вектор, $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)^T$, T – означает операцию транспонирования. В силу линейной зависимости функций $y_1(x), \dots, y_n(x)$

мы знаем, что $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, а это значит, что $\det \mathbf{W}[y_1, \ldots, y_n](x) \equiv 0$, так как в противном случае уравнение $\mathbf{W}[y_1, \ldots, y_n](x)\mathbf{a} = \mathbf{0}$ имело бы только нулевое решение $\mathbf{a} = \mathbf{0}$. Теорема доказана.

Например, согласно этой теореме функции $1, x, x^2, \ldots, x^{n-1}$, являющиеся решением уравнения $y^{(n)} = 0$, не будут зависимыми, поскольку матрица $\mathbf{W}[1, x, x^2, \ldots, x^{n-1}]$ для этих функций треугольная с ненулевыми коэффициентами на главной диагонали.

Определитель Вронского позволяет также делать некоторые заключения о линейной независимости функций, являющихся решением уравнения (4.15).

Теорема 4.3. *Если n линейно независимых функций $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ являются решением уравнения (4.15) с непрерывными коэффициентами $a_1(x), \ldots, a_n(x)$ на отрезке $[a, b]$, то определитель Вронского не может обратиться в нуль ни в одной точке отрезка $[a, b]$.*

Эта теорема доказывается методом от противного. Допустим, что $\det \mathbf{W}[y_1, \ldots, y_n](x_0) = 0$ в некоторой точке $x_0 \in [a, b]$, тогда система уравнений

$$\mathbf{W}[y_1, \ldots, y_n](x_0)\mathbf{a} = \mathbf{0} \tag{4.19}$$

имеет по крайней мере одно ненулевое решение $\mathbf{a}^0 = (a_1^0, \ldots, a_n^0)^T$. Так как функции $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ являются решением уравнения (4.15), то в силу линейности L функция

$$y(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i^0 y_i(x) \tag{4.20}$$

будет также решением (4.15). Введем n-мерный вектор $\mathbf{y} = (y(x), y'(x), \ldots, y^{(k-1)}(x))$, где $y(x)$ – функция, определяемая формулой (4.20). Очевидно, что $\mathbf{y}(x) = \mathbf{W}[y_1, \ldots, y_n](x)\mathbf{a}^0$, и, значит, в силу соотношения (4.19) мы имеем

$$y(x_0) = 0,\ y'(x_0) = 0, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = 0,$$

т. е. функция $y(x)$, определенная формулой (4.20), является решением задачи Коши для уравнения (4.15) с нулевым начальным вектором в точке x_0. Так как функция $y(x) \equiv 0$ также является решением уравнения (4.15) с нулевым начальным вектором, то в силу теоремы 4.1 о существовании и единственности решения задачи Коши функция $y(x)$, заданная формулой (4.20), тождественно равна нулю для $x \in [a, b]$.

А это значит, что функции $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ линейно зависимы, что противоречит условию теоремы. Таким образом, $\det \mathbf{W}[y_1, \ldots, y_n](x) \neq 0$ для произвольного $x \in [a, b]$. Теорема доказана.

Отметим, в теореме 4.3 существенным является условие того, что функции $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ удовлетворяют уравнению (4.15). Рассмотрим, например, две функции:

$$y_1(x) = \begin{cases} x^2 & 1 \geq x \geq 0, \\ 0 & 0 \geq x \geq -1, \end{cases}$$
$$y_2(x) = y_1(-x).$$

Эти функции непрерывно дифференцируемые и линейно независимые, так как первая равна нулю при $0 \geq x \geq -1$ и не равна нулю при $1 \geq x > 0$, а вторая, наоборот, равна нулю при $1 \geq x \geq 0$ и не равна нулю при $0 > x \geq -1$. Однако очевидно, что определитель Вронского этих функций на отрезке $[-1, 1]$ тождественно равен нулю:

$$\det \mathbf{W}[y_1, y_2](x) = y_1(x)y_2'(x) - y_2(x)y_1'(x) \equiv 0, \quad x \in [-1, 1].$$

Из теоремы 4.3 следует

Следствие 4.1. *Общее решение уравнения (4.15) с непрерывными коэффициентами $a_i(x), i = 1, \ldots, n$ на отрезке $[a, b]$ выражается следующей формулой:*

$$y(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i y_i(x), \tag{4.21}$$

где $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ – независимые решения (4.15).

Вначале отметим, что функция $y(x)$, заданная формулой (4.21), является решением задачи (4.15) при произвольных значениях констант $c_i, i = 1, \ldots, n$. Пусть теперь $\psi(x)$ – какое-либо решение (4.15), а x_0 – произвольная точка отрезка $[a, b]$. Покажем, что существуют такие константы $c_1, \ldots, c_n$, что функция $y(x)$, определенная формулой (4.21), совпадает с $\psi(x)$. В силу единственности решения начальной задачи для уравнения (4.15) на отрезке $[a, b]$ эти константы можно найти из условия совпадения начальных векторов решений $y(x)$ и $\psi(x)$ в точке x_0, т. е.

$$[y(x_0), y'(x_0), \ldots, y^{(n-1)}(x_0)] = [\psi(x_0), \psi'(x_0), \ldots, \psi^{(n-1)}(x_0)],$$

или в покомпонентном виде с учетом (4.21)

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n} c_i y_i(x_0) = \psi(x_0),\\
&\sum_{i=1}^{n} c_i y_i'(x_0) = \psi'(x_0),\\
&\vdots\\
&\sum_{i=1}^{n} c_i y_i^{(n-1)}(x_0) = \psi^{(n-1)}(x_0).
\end{aligned}$$

Эти соотношения составляют систему линейных уравнений относительно $c_1, \ldots, c_n$. В матричной форме данная система имеет вид

$$\mathbf{W}[y_1, \ldots, y_n](x_0)\mathbf{c} = \mathbf{b}, \tag{4.22}$$

где $\mathbf{c} = (c_1, \ldots, c_n)^T$, $\mathbf{b} = (\psi(x_0), \psi'(x_0), \ldots, \psi^{(n-1)}(x_0))^T$. Так как функции $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ являются решением (4.15) и линейно независимы, то $\det \mathbf{W}[y_1, \ldots, y_n](x_0) \neq 0$ согласно теореме 4.3. Следовательно, система (4.22) разрешима, т. е. существуют константы $c_1, \ldots, c_n$, удовлетворяющие уравнению (4.22). Но в этом случае начальные векторы в точке x_0 решения $y(x)$ с найденными значениями $c_i, i = 1, \ldots, n$ и решения $\psi(x)$ совпадают, и в силу теоремы 4.1 о единственности решения мы заключаем, что $y(x) \equiv \psi(x)$ для $x \in [a, b]$.

Таким образом, мы показали, что произвольное решение (4.15) является линейной комбинацией решений $y_1(x), \ldots, y_n(x)$. Следствие доказано.

Из этого следствия мы получаем, что максимальное число линейно независимых решений равно порядку уравнения, т. е. в приложении к уравнению (4.15) фундаментальной системой решений этого уравнения называется любой набор из n линейно независимых решений этого уравнения. Также мы получаем, что для общего решения уравнения (4.15) верна формула (4.21).

Формула Остроградского – Лиувилля

Оказывается, что определитель Вронского $\det \mathbf{W}[y_1, \ldots, y_n]$ легко вычисляется, если функции $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ составляют фундаментальную систему решений уравнения (4.15) на отрезке $[a, b]$. Для этого продифференцируем определитель Вронского. По правилу дифференцирования определителя произвольной матрицы $\mathbf{A}$ сумма определителей матриц $\mathbf{A}_i, i = 1, \ldots, n$, полученных из $\mathbf{A}$ дифференцированием только одной соответствующей i-й строки, и есть производная определителя матрицы $\mathbf{A}$. Применим это правило дифференцирования к определителю Вронского. Очевидно, что каждая матрица, полученная дифференцированием какой-либо строки из первых $n-1$ строк матрицы Вронского, будет вырождена, так как соседние строки совпадают. Таким образом, производной определителя матрицы Вронского будет определитель матрицы $\mathbf{W}_n[y_1, \ldots, y_n]$, полученной дифференцированием последней строки матрицы Вронского:

$$\mathbf{W}_n[y_1, \ldots, y_n](x) = \left\{ \begin{array}{lll} y_1(x) & \ldots & y_n(x) \\ y_1'(x) & \ldots & y_n'(x) \\ \vdots & & \\ y_1^{(n-2)}(x) & \ldots & y_n^{(n-2)}(x) \\ y_1^{(n)}(x) & \ldots & y_n^{(n)}(x) \end{array} \right\}.$$

Обозначим через $\mathbf{y}(x)$ вектор-функцию $[y_1(x), \ldots, y_n(x)]$. Тогда $\mathbf{y}^{(i)}(x)$, при $i = 0, \ldots, n-2$ – это $(i+1)$-я строка матрицы Вронского $\mathbf{W}_n[y_1, \ldots, y_n](x)$, а $\mathbf{y}^{(n)}(x)$ – n-я строка этой матрицы. Здесь и далее $\mathbf{y}^{(0)}(x) = \mathbf{y}(x)$. Так как функции $y_i(x), i = 1, \ldots, n$ являются решением уравнения (4.15), то для вектор-функции $\mathbf{y}(x)$ верно следующее тождество:

$$\mathbf{y}^{(n)}(x) \equiv -a_1(x)\mathbf{y}^{(n-1)}(x) - \ldots - a_n(x)\mathbf{y}(x), \quad x \in [a, b].$$

Следовательно,

$$\mathbf{W}_n[y_1, \ldots, y_n](x) = \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{y}(x) \\ \mathbf{y}'(x) \\ \vdots \\ \mathbf{y}^{(n-2)}(x) \\ -a_1(x)\mathbf{y}^{(n-1)}(x) - \sum\limits_{i=2}^{n} a_i(x)\mathbf{y}^{(n-i)}(x) \end{array} \right\}.$$

Учитывая, что определитель матрицы $\mathbf{W}_n[y_1, \ldots, y_n](x)$ не меняется при добавлении к какой-либо строке произвольной линейной комбинации остальных строк, выражение

$$-a_2(x)\mathbf{y}^{(n-2)}(x) - \ldots - a_n(x)\mathbf{y}(x)$$

можно исключить из этой матрицы. Но такая матрица совпадает с матрицей, полученной из матрицы Вронского умножением последней строки на $-a_1(x)$. Следовательно,

$$\det\mathbf{W}_n[y_1, \ldots, y_n](x) = -a_1(x)\det\mathbf{W}[y_1, \ldots, y_n](x).$$

А так как

$$\det\mathbf{W}_n[y_1, \ldots, y_n](x) = \frac{d}{dx}\det\mathbf{W}[y_1, \ldots, y_n](x),$$

то мы получаем однородное уравнение первого порядка относительно $\det\mathbf{W}[y_1, \ldots, y_n](x)$:

$$\frac{d}{dx}\det\mathbf{W}[y_1, \ldots, y_n](x) = -a_1(x)\det\mathbf{W}[y_1, \ldots, y_n](x).$$

Решением этого уравнения с начальным условием $\det\mathbf{W}[y_1, \ldots, y_n](x_0) = c_0$ будет

$$\det\mathbf{W}[y_1, \ldots, y_n](x) = c_0 e^{-\int_{x_0}^{x} a_1(\xi)d\xi}, \; x \in [a, b].$$

Это выражение для определителя Вронского называется формулой Остроградского – Лиувилля.

Пример 4.5. Формула Остроградского – Лиувилля дает возможность найти общее решение линейного однородного уравнения второго порядка

$$y'' + p(x)y' + g(x)y = 0,$$

если известно одно его ненулевое решение $y_1(x)$. Согласно формуле Остроградского – Лиувилля

$$\det\mathbf{W}[y_1, y_2](x) = c_0 e^{-\int_{x_0}^{x} p(\xi)d\xi},$$

где $y_2(x)$ – второе линейно независимое решение. Из этого соотношения получаем линейное уравнение первого порядка относительно $y_2(x)$:

$$y_1(x)y_2' - y_1'(x)y_2 = c_0 e^{-\int_{x_0}^{x} p(\xi)d\xi},$$

решением которого согласно формуле (1.15) является

$$y_2(x) = cy_1(x) + c_0 y_1(x) \int \frac{e^{-\int_{x_0}^{x} p(\xi) d\xi}}{y_1^2(x)} dx.$$

Так как константы c_0 и c_1 произвольные, то эта формула представляет общее решение указанного выше линейного однородного уравнения второго порядка.

4.3.2. Неоднородные линейные уравнения

Свойства решений неоднородных уравнений

Основываясь на понятии оператора L, линейное неоднородное уравнение (4.14) можно записать в виде

$$L[y] = f(x), \tag{4.23}$$

где $L[y] \equiv y^{(n)} + a_1(x) y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x) y$.

Используя свойство (4.17) оператора L, мы можем легко доказать следующие 4 свойства решений уравнения (4.23).

1. Любое решение уравнения (4.23) равно сумме произвольного фиксированного частного решения и некоторого решения уравнения (4.15).

Действительно, пусть $y_1(x)$ и $y_2(x)$ – два решения (4.23), одно из которых, например $y_2(x)$, мы считаем частным. Тогда $L[y_1 - y_2](x) \equiv 0$. Таким образом, функция $y_3(x) = y_1(x) - y_2(x)$ является решением однородного уравнения (4.15), и, так как $y_1(x) = y_2(x) + y_3(x)$, мы убеждаемся в правильности сформулированного утверждения.

2. Если функции $y_i = y_i(x), i = 1, \ldots, m$ являются решениями соответствующих уравнений $L[y] = f_i(x), i = 1, \ldots, m$, то функция $y(x) = \sum_{i=1}^{m} c_i y_i(x)$ является решением (4.23) при $f(x) = \sum_{i=1}^{m} c_i f_i(x)$.

В самом деле, в силу (4.17)

$$L[y](x) = L[\sum_{i=1}^{m} c_i y_i](x) = \sum_{i=1}^{m} c_i L[y_i](x) = \sum_{i=1}^{m} c_i f_i(x) = f(x).$$

3. Общее решение (4.23) может быть записано в виде

$$y(x) = \phi(x) + \sum_{i=1}^{n} c_i y_i(x), \tag{4.24}$$

где $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ – фундаментальная система решений уравнения (4.15).

Формула (4.24) следует из свойства 1 и формулы (4.21).

4. Если $y(x) = y_1(x) + iy_2(x)$ – комплексное решение неоднородного уравнения (4.23), то $y_1(x)$ – также решение этого уравнения, а $y_2(x)$ – решение однородного уравнения (4.15).

Действительно, $L[y_1 + iy_2](x) = L[y_1](x) + iL[y_2](x) = f(x)$ и так как $f(x)$ – вещественная функция, то $L[y_2](x) = 0$, т. е. $y_2(x)$ является решением уравнения (4.15). Следовательно, $L[y_1](x) = f(x)$.

Метод вариаций

Согласно (4.24) интегрирование неоднородного линейного уравнения (4.23) сводится к нахождению одного его частного решения и к нахождению фундаментальной системы решений однородного линейного уравнения (4.15). Оказывается, частное решение уравнения (4.23) может быть найдено в виде общего решения (4.21) линейного однородного уравнения (4.15), если полагать коэффициенты $c_1, \ldots, c_n$ в (4.21) неизвестными функциями. Такой метод нахождения решения называется **методом вариации постоянных**. Таким образом, частное решение уравнения (4.23) ищется по аналогии с методом, рассмотренным в п. 2.3.3 для линейных уравнений первого порядка и в п. 3.2.1 для систем линейных уравнений в виде

$$y(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i(x) y_i(x), \tag{4.25}$$

где $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ – фундаментальная система решений однородного линейного уравнения (4.15), в котором оператор L взят из (4.23).

Сведение к линейной системе уравнений. Для определения функций $c_i(x)$, $i = 1, \ldots, n$ в (4.25) мы используем результаты п. 3.2.1. С этой целью перейдем от скалярного уравнения (4.23) к системе уравнений относительно вектор-функции $\mathbf{z}(x)$, связанной с функцией $y(x)$ формулой $\mathbf{z}(x) = [y(x), y'(x), \ldots, y^{(n-1)}(x)]^T$:

$$\begin{cases} z_1' - z_2 = 0, \\ z_2' - z_3 = 0, \\ \vdots \\ z_{n-1}' - z_n = 0, \\ z_n' + a_n(x) z_1 + a_{n-1}(x) z_2 + \ldots + a_1(x) z_n = f(x) \end{cases} \tag{4.26}$$

или в матричном виде

$$\mathbf{z}' - \mathbf{A}(x)\mathbf{z} = \mathbf{f}(x), \tag{4.27}$$

где $\mathbf{A}(x)$ – матрица, имеющая вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_n(x) & -a_{n-1}(x) & -a_{n-2}(x) & -a_{n-3}(x) & \dots & -a_2(x) & -a_1(x) \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_n)^T, \quad \mathbf{f}(x) = [\underbrace{0, \dots, 0}_{n-1}, f(x)]^T.$$

Если функция $y(x)$ является решением уравнения (4.23), то вектор-функция $\mathbf{z}(x) = [y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x)]^T$ является решением (4.27), и обратно, если вектор-функция $\mathbf{z}(x) = [z_1(x), z_2(x), \dots, z_n(x)]^T$ – решение системы (4.27), то ее первая компонента $z_1(x)$ будет решением уравнения (4.23).

Алгоритм определения функций $c_i(x)$, $i = 1, \dots, n$. Пусть теперь n скалярных функций $y_1(x), \dots, y_n(x)$ составляют фундаментальную систему решений однородного уравнения (4.15) с оператором L из (4.23). Так как функции $y_1(x), \dots, y_n(x)$ линейно независимы, то очевидно, что вектор-функции $\mathbf{z}_i(x) = [y_i(x), y_i'(x), \dots, y_i^{(n-1)}(x)]^T$, $i = 1, \dots, n$ также линейно независимы и, значит, образуют фундаментальную систему решений однородного векторного уравнения $\mathbf{z}' - \mathbf{A}(x)\mathbf{z} = \mathbf{0}$, полученного из (4.27) при $\mathbf{f}(x) \equiv \mathbf{0}$. Отметим, что матрица Вронского для скалярных функций $y_i(x)$ и вектор-функций $\mathbf{z}_i(x)$ совпадают, т. е. $\mathbf{W}[\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_n] = \mathbf{W}[y_1, \dots, y_n]$. Из п. 3.2.1. следует, что частное решение неоднородной системы (4.27) можно определить в виде

$$\mathbf{z}(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i(x)\mathbf{z}_i(x), \tag{4.28}$$

где вектор-функция $\mathbf{c}(x) = [c_1(x), \dots, c_n(x)]^T$, компонентами которой являются функции $c_i(x)$ из (4.28), удовлетворяет векторному дифференциальному уравнению первого порядка

$$\mathbf{W}[\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_n](x)\mathbf{c}'(x) = \mathbf{f}(x), \tag{4.29}$$

которое в покомпонентной записи имеет вид

$$\begin{cases} c_1'y_1(x) & +\dots & +c_n'y_n(x) & =0, \\ c_1'y_1'(x) & +\dots & +c_n'y_n'(x) & =0, \\ \vdots \\ c_1'y_1^{(n-2)}(x) & \dots & +c_n'y_n^{(n-2)}(x) & =0, \\ c_1'y_1^{(n-1)}(x) & +\dots & +c_n'y_n^{(n-1)}(x) & =f(x), \end{cases}$$

т. е. $\mathbf{W}[y_1,\dots,y_n](x)\mathbf{c}'=\mathbf{f}(x)$, где $\mathbf{W}[y_1,\dots,y_n](x)$ – матрица Вронского функций $y_1(x),\dots,y_n(x)$. Так как функции $y_1(x),\dots,y_n(x)$ линейно независимы и являются решениями однородного линейного уравнения, то по теореме 4.3 определитель Вронского $\mathbf{W}[y_1,\dots,y_n](x)$ не равен нулю ни в одной точке $x\in(-\infty,\infty)$. Значит, вектор-функция $\mathbf{c}'(x)$, удовлетворяющая (4.29), существует и выражается однозначно в виде

$$\mathbf{c}'(x)=\mathbf{W}^{-1}[y_1,\dots,y_n](x)\mathbf{f}(x).$$

Интегрирование этого уравнения дает явный вид искомой вектор-функции $\mathbf{c}(x)$:

$$\mathbf{c}(x)=\int\mathbf{W}^{-1}[y_1,\dots,y_n](x)\mathbf{f}(x)dx. \tag{4.30}$$

С помощью компонент $c_i(x)$, $i=1,\dots,n$ этой вектор-функции $\mathbf{c}(x)$ определяется частное решение $\mathbf{z}(x)$ векторного уравнения (4.27) по формуле (4.28). Тогда частным решением $y(x)$ неоднородного уравнения (4.23) будет первая компонента $\mathbf{z}(x)$, т. е. функция (4.25), в которой $c_i(x)$ является i компонентой вектор-функции (4.30), а $y_i(x)$, $i=1,\dots,n$ – функции фундаментальной системы решений, а именно

$$y(x)=\sum_{i=1}^{n}c_i(x)y_i(x)=\mathbf{y}(x)\cdot\mathbf{c}(x)=\mathbf{y}(x)\cdot\int\mathbf{W}^{-1}[y_1,\dots,y_n](x)\mathbf{f}(x)dx,$$

где $\mathbf{y}(x)=(y_1(x),\dots,y_n(x))^T$, а $(\cdot)$ означает операцию скалярного произведения векторов. И согласно (4.24) общее решение уравнения (4.23) записывается в форме

$$y(x)=\mathbf{y}(x)\cdot\Big(\int\mathbf{W}^{-1}[y_1,\dots,y_n](x)\mathbf{f}(x)dx+\mathbf{c}\Big), \tag{4.31}$$

где $\mathbf{y}(x)=(y_1(x),\dots,y_n(x))^T$, $y_1(x),\dots,y_n(x)$ – фундаментальная система решений, а $\mathbf{c}=(c_1,\dots,c_n)^T$ – вектор, компонентами которого являются произвольные константы $c_1,\dots,c_n$.

4.4. Линейные уравнения с постоянными коэффициентами

В данном параграфе рассматриваются частные примеры линейных уравнений (4.15) и (4.23), а именно уравнения, в которых оператор L является оператором с постоянными коэффициентами $a_j, j = 1, \ldots, n$, а именно

$$L[y] \equiv y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y. \tag{4.32}$$

4.4.1. Линейные однородные уравнения

Линейный оператор с постоянными коэффициентами (4.32) для однородного уравнения $L[y] \equiv y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = 0$ обладает всеми свойствами, отмеченными в п. 4.3.1.

Пусть L_1 и L_2 – два оператора с постоянными коэффициентами. Обозначим через $L_1 \cdot L_2$ оператор, являющийся композицией (произведением) операторов L_2 и L_1, т. е. $L_1 \cdot L_2[y] = L_1[L_2[y]]$. Для операторов вида (4.32) с постоянными коэффициентами верно важное свойство коммутативности, а именно

$$L_1 \cdot L_2 \equiv L_2 \cdot L_1, \text{ т. е. } L_1[L_2[y]] = L_2[L_1[y]],$$

где L_1 и L_2 – произвольные линейные операторы с постоянными коэффициентами. Отметим, что линейные операторы с непостоянными коэффициентами в общем случае не коммутируют. Так как для произвольного оператора вида (4.32) $L[0] = 0$ и если оператор L удается представить в виде композиции линейных операторов L_1 и L_2 с постоянными коэффициентами, то решениями однородного уравнения $L[y] = 0$ будут решения каждого уравнения

$$L_1[y] = 0 \quad \text{или} \quad L_2[y] = 0,$$

так как

$$L_1[0] = L_2[0] = 0.$$

Покажем, что частное решение уравнения (4.15) $L[y] = 0$ для оператора (4.32) можно найти в виде показательной функции $y(x) = e^{\lambda x}$ для некоторого λ. Действительно, вычисляя $y^{(j)}(x) = \lambda^j e^{\lambda x}$, $j = 1, \ldots, n$ и подставляя значения $y(x)$ и $y^{(j)}(x)$ в (4.32), мы получаем

$$L[e^{\lambda x}](x) = e^{\lambda x}(\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n).$$

Таким образом, функция $y(x) = e^{\lambda x}$ будет решением уравнения $L[y] = 0$ для оператора (4.32), если λ является корнем уравнения

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0. \qquad (4.33)$$

Отметим, что для комплексного корня λ решение $y(x) = e^{\lambda x}$ будет также комплексным. А именно, если $\lambda = \alpha + i\beta$, то

$$y(x) = e^{\lambda x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x).$$

Это комплексное решение порождает два вещественных решения уравнения $L(y) = 0$:

$$y_1(x) = e^{\alpha x}\cos\beta x \quad \text{и} \quad y_2(x) = e^{\alpha x}\sin\beta x$$

в соответствии со свойством для линейного оператора L, изложенным в п. 4.3.1.

Уравнение (4.33) называется **характеристическим уравнением**, его левая часть – **характеристическим многочленом**, а его корни – **характеристическими корнями**. Характеристические корни могут быть вещественным, комплексными, а также кратными, и в зависимости от этого определяется фундаментальная система решений однородного уравнения для оператора (4.32).

Разные вещественные характеристические корни

Пусть характеристическое уравнение (4.33) для оператора (4.32) имеет n разных вещественных корней $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Эти корни определяют n функций $y_j(x) = e^{\lambda_j x}, j = 1, \ldots, n$, являющихся решением однородного уравнения $L[y] = 0$ для оператора (4.32). Оказывается, что функции $y_j(x) = e^{\lambda_j x}, j = 1, \ldots, n$ линейно независимы на отрезке $[a, b]$ и, значит, образуют фундаментальную систему решений этого уравнения. Это утверждение следует из следующей теоремы.

Теорема 4.4. *Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ – разные вещественные либо комплексные числа. Тогда, если верно тождество*

$$\sum_{j=1}^{p} P_j(x)e^{\lambda_j x} \equiv 0, \qquad x \in [a, b], \qquad (4.34)$$

где $P_j(x)$ – многочлены с комплексными коэффициентами, то $P_j(x) \equiv 0,\ x \in [a, b],\ j = 1, \ldots, p$.

Доказывать будем по индукции. Так как $e^{\lambda x} \neq 0$, то для $p = 1$ утверждение теоремы очевидно. Предположим, что для $p \leq k$ теорема доказана, и пусть $p = k+1$. Допустим вначале, что какое-либо λ_i равно нулю, например $\lambda_1 = 0$. Тогда, продифференцировав (4.34) $(l+1)$ раз, где l – степень многочлена $P_1(x)$, мы приходим к тождеству вида

$$\sum_{j=2}^{p} Q_j(x)e^{\lambda_j x} \equiv 0, \qquad x \in [a,b].$$

По предположению индукции

$$Q_j(x) \equiv 0, \quad x \in [a,b], \quad j = 2,\ldots,p.$$

Теперь учитывая, что $\lambda_j \neq 0$, $j = 2,\ldots,p$, имеем $d^{l+1}/dx^{l+1}P_j(x)e^{\lambda_j x} = Q_j(x)e^{\lambda_j x}$, где $Q_j(x)$ – многочлен того же порядка, что и $P_j(x)$, т. е.

$$P_j(x) \equiv 0, \quad x \in [a,b], \quad j = 2,\ldots,p.$$

Теперь пусть в (4.34) все $\lambda_j \neq 0, j = 1,\ldots,p$. Тогда, поделив тождество (4.34) на $e^{\lambda_1 x}$, мы приходим к уже рассмотренному случаю, где роль чисел λ_j играют числа $\lambda_j - \lambda_1, j = 1,\ldots,p$, которые также не равны между собой. Таким образом, $P_j(x) \equiv 0, j = 1,\ldots,p$ для произвольного p, если верно тождество (4.34). Теорема доказана.

Согласно теореме 4.4, функции $e^{\lambda_j x}, j = 1,\ldots,n$, где λ_j – разные вещественные корни характеристического уравнения (4.33), линейно независимы на отрезке $[a,b]$ и значит образуют фундаментальную систему решений однородного уравнения $L[y] = 0$ для оператора (4.32). В соответствии с формулой (4.21) в этом случае общее решение однородного уравнения $L[y] = 0$ для оператора (4.32) имеет вид

$$y(x) = \sum_{j=1}^{n} c_i e^{\lambda_i x}.$$

Разные комплексные и вещественные характеристические корни

Если среди корней $\lambda_j, j = 1,\ldots,n$ характеристического многочлена уравнения (4.33) есть комплексный корень $\lambda_k = \alpha + i\beta$, то существует и корень, сопряженный к нему, $\overline{\lambda}_k = \alpha - i\beta$. Эти два корня порождают два комплексных решения однородного уравнения $L[y] = 0$ для оператора (4.32)

$$e^{\lambda_k x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x),$$

$$e^{\overline{\lambda}_k x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x - i\sin\beta x),$$

определяющие два частных вещественных решения этого уравнения:

$$\begin{aligned} y_1(x) &= \frac{e^{\lambda_k x} + e^{\overline{\lambda}_k x}}{2} = e^{\alpha x}\cos\beta x, \\ y_2(x) &= \frac{e^{\lambda_k x} - e^{\overline{\lambda}_k x}}{2i} = e^{\alpha x}\sin\beta x. \end{aligned} \tag{4.35}$$

Аналогичные решения дают остальные комплексные корни. Таким образом, в случае разных вещественных и комплексных характеристических корней фундаментальная система решений уравнения (4.32) состоит из частных решений в форме (4.35), соответствующих всем парам сопряженных комплексных корней, и решений вида $e^{\lambda x}$, соответствующих вещественным корням. Так как из (4.35) следует, что $y_1(x) + iy_2(x) = e^{\lambda_k x}$, $y_1(x) - iy_2(x) = e^{\overline{\lambda}_k x}$, независимость этих частных решений следует из теоремы 4.4.

Наличие кратных корней

Если уравнение (4.33) имеет кратные корни, то их число меньше n, и следовательно, решений вида $e^{\lambda_k x}$ для вещественных λ_k и решений вида (4.35) для λ_k комплексных недостаточно для образования фундаментальной системы решений однородного уравнения $L[y] = 0$ для оператора (4.32). Покажем, что если λ – характеристический корень кратности $s > 1$, то недостающими решениями будут следующие функции:

$$xe^{\lambda x}, x^2e^{\lambda x}, \ldots, x^{s-1}e^{\lambda x}$$

для λ – вещественного и

$$xe^{\alpha x}\cos\beta x,\ x^2e^{\alpha x}\cos\beta x,\ \ldots,\ x^{s-1}e^{\alpha x}\cos\beta x,$$

$$xe^{\alpha x}\sin\beta x,\ x^2e^{\alpha x}\sin\beta x,\ \ldots,\ x^{s-1}e^{\alpha x}\sin\beta x$$

для λ – комплексного: $\lambda = \alpha + i\beta$.

Заметим, что характеристический многочлен уравнения (4.33) записывается также в виде произведения многочленов первой степени $\lambda-\lambda_j$:

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n = (\lambda-\lambda_1)^{k_1} \cdot \ldots \cdot (\lambda-\lambda_p)^{k_p}, \qquad (4.36)$$

где $\lambda_j, j = 1, \ldots, p$ – корни характеристического многочлена, а $k_j, j = 1, \ldots, p$ – кратность корня λ_j. При этом выполняется соотношение $\sum\limits_{j=1}^{p} k_j = n$. Оказывается, что оператор L в (4.32) можно записать аналогично (4.36), в виде произведения простых операторов, а именно:

$$L[y] \equiv (D-\lambda_1 E)^{k_1} \cdot (D-\lambda_2 E)^{k_2} \cdot \ldots \cdot (D-\lambda_p E)^{k_p}[y], \qquad (4.37)$$

где D – оператор первой производной: $D[f] = f'(x)$, E – тождественный оператор: $E[f] = f(x)$, знак $\ll \cdot \gg$ означает операцию композиции (произведение) операторов, например, для двух операторов $D-\lambda_1 E$ и $D-\lambda_2 E$. Имеем

$$(D-\lambda_1 E)\cdot(D-\lambda_2 E)[y] = (D-\lambda_1 E)[(D-\lambda_2 E)[y]] = y''-(\lambda_1+\lambda_2)y'+\lambda_1\lambda_2 y.$$

Степень k_j в (4.37) означает k_j-кратную композицию оператора $(D-\lambda_j E)$, например,

$$(D-\lambda_j E)^2[y] = (D-\lambda_j E)\cdot(D-\lambda_j E)[y] = y'' - 2\lambda_j y' + (\lambda_j)^2 y.$$

Отметим, что некоторые или все λ_j в выражении (4.37) могут быть комплексными.

Если оператор (4.32) имеет вид $L[y] = y^{(n)} = D^n[y]$, то корнем характеристического многочлена будет 0 кратности n и, значит, формула (4.37) в этом случае очевидна и имеет вид $L[y] = D^n[y]$.

Докажем формулу (4.37) по индукции. При $n = 1$ оператором (4.32) будет $L[y] = y' + a_1 y$ и, значит, характеристическим многочленом будет $\lambda + a_1$, корнем которого является $\lambda_1 = -a_1$. Поэтому $L[y] = (D-\lambda_1 E)[y]$. Таким образом, для $n = 1$ формула (4.37) верна. Предположим, что (4.37) справедливо до $n = k-1$ и рассмотрим произвольный линейный дифференциальный оператор k-го порядка с постоянными коэффициентами:

$$\begin{aligned} L_k[y] &= y^{(k)} + a_1 y^{(k-1)} + \ldots + a_k y = \\ &= D^k[y] + a_1 D^{k-1}[y] + \cdots + a_{k-1}D[y] + a_k E[y]. \end{aligned}$$

Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ – корни характеристического уравнения для этого оператора, при этом пусть корень $\lambda_j,\ j = 1, \ldots, m$ имеет кратность k_j, $j = 1, \ldots, m$. Характеристическим многочленом этого оператора будет

$$\lambda^k + a_1\lambda^{k-1} + \ldots + a_{k-1}\lambda + a_k = (\lambda - \lambda_1)P_{k-1}(\lambda),$$

где $P_{k-1}(\lambda)$ – многочлен степени $k-1$:

$$\begin{aligned} P_{k-1}(\lambda) &= (\lambda-\lambda_1)^{k_1-1}(\lambda-\lambda_2)^{k_2}\ldots(\lambda-\lambda_m)^{k_m} = \\ &= \lambda^{k-1} + b_1\lambda^{k-2} + \ldots + b_{k-1}. \end{aligned}$$

При этом коэффициенты $a_j,\ j = 1, \ldots, k$ и $b_l,\ l = 1, \ldots, k-1$ связаны соотношениями

$$a_1 = b_1 - \lambda_1,\ a_2 = b_2 - \lambda_1 b_1, \ldots, a_{k-1} = b_{k-1} - \lambda_1 b_{k-2},\ a_k = -\lambda_1 b_{k-1}.$$

Теперь заметим, что многочлен $P_{k-1}(\lambda)$ является характеристическим многочленом для оператора

$$L_{k-1}[y] = y^{(k-1)} + b_1 y^{(k-2)} + \ldots + b_{k-1}y.$$

Имеем:

$$(D - \lambda_1 E)\cdot L_{k-1}[y] = y^{(k)} + \sum_{i=1}^{k-1}(b_i - \lambda_1)y^{(k-i)} - \lambda_1 b_{k-1}y.$$

И в силу выписанных соотношений между коэффициентами a_i и b_j

$$(D - \lambda_1 E)\cdot L_{k-1}[y] = L_k[y].$$

По предположению индукции

$$L_{k-1}[y] = (D-\lambda_1 E)^{k_1-1}\cdot(D-\lambda_2 E)^{k_2}\cdot\ldots\cdot(D-\lambda_m E)^{k_m}[y],$$

следовательно,

$$L_k[y] = (D-\lambda_1 E)^{k_1}\cdot(D-\lambda_2 E)^{k_2}\cdot\ldots\cdot(D-\lambda_m E)^{k_m}[y],$$

значит, формула (4.37) верна.

Таким образом, согласно (4.37) однородное уравнение $L[y] = 0$ для оператора (4.32) записывается в виде

$$(D-\lambda_1 E)^{k_1}\cdot(D-\lambda_2 E)^{k_2}\cdot\ldots\cdot(D-\lambda_p E)^{k_p}[y] = 0. \qquad (4.38)$$

Так как λ_j – константа, то, как отмечалось ранее, операция композиции линейных операторов $(D - \lambda_j E)$ коммутативна, и, учитывая, что $(D - \lambda E)[0] = 0$, получаем, что решениями уравнения (4.38) будут все решения более простых уравнений вида

$$(D - \lambda_j E)^p[y] = 0, \qquad 1 \leq p \leq k_j, \tag{4.39}$$

в частности, таким решением будет функция $ce^{\lambda_j x}$.

Для решения уравнения (4.39) введем для произвольного λ – вещественного или комплексного – многозначный оператор B_λ, определяемый через многозначный оператор интегрирования $\int : \int[f] = \int f(x)dx$

$$B_\lambda[g](x) = e^{\lambda x} \int e^{-\lambda x} g(x)dx, \tag{4.40}$$

в частности, $B_0[g](x) = \int g(x)dx$. Оператор B_λ определен на множестве непрерывных функций $g(x)$, а поскольку интеграл – это многозначный оператор, то значениями оператора (4.40) для произвольной функции $g(x)$ будет множество функций вида $g_1(x) + ce^{\lambda x}$, где $B_\lambda[g_1](x) = g(x)$, $c \in R$, в частности, $B_\lambda[0](x) = ce^{\lambda x}$.

Обозначим через $(B_\lambda)^k$ оператор, являющийся k-кратной композицией оператора B_λ, а через $\int^k$ – оператор k-кратного интегрирования, который будем записывать $\int^k[\;]dx^k$. Тогда

$$(B_\lambda)^k[g](x) = e^{\lambda x} \int^k e^{-\lambda x} g(x)dx^k = e^{\lambda x} \underbrace{\int \Big(\ldots \Big(\int}_{k} e^{-\lambda x} g(x) \underbrace{dx \Big) \ldots \Big) dx}_{k}.$$

Легко проверяется, что

$$(D - \lambda E) \cdot B_\lambda[g](x) = g(x),$$

следовательно,

$$(D - \lambda E)^k \cdot (B_\lambda)^k[g](x) = g(x).$$

Таким образом, композиция операторов $(B_\lambda)^k$ и $(D - \lambda E)^k$ является тождественным оператором E. Отсюда следует, что решением уравнения (4.39) для $p = k_j$ будет функция

$$(B_{\lambda_j})^{k_j}[0] = e^{\lambda_j x} \int^{k_j} e^{-\lambda_j x} 0 dx^{k_j} = (c_1 + c_2 x + \cdot + c_{k_j} x^{k_j - 1}) e^{\lambda_j x},$$

где $c_1,\ c_2,\ \ldots, c_{k_j}$ – произвольные константы. Эта функция определяет следующие k_j простых линейно независимых решений уравнения (4.39):

$$y_1(x) = e^{\lambda_j x},\ y_2(x) = xe^{\lambda_j x},\ \ldots,\ y_{k_j}(x) = x^{k_j-1}e^{\lambda_j x}, \tag{4.41}$$

так как функции $1, x, \ldots, x^{k_j-1}$ линейно независимы.

Если характеристический корень λ_j комплексный, т. е. $\lambda_j = \alpha+$ $+i\beta$, и порядка k_j, то функции (4.41) будут комплексными решениями (4.39). Отметим, что вместе с λ_j тогда существует также и сопряженный корень $\overline{\lambda}_j = \alpha - i\beta$ степени k_j, и, следовательно, левая часть уравнения (4.38) будет включать операторы $(D-\lambda_j E)^{k_j}$ и $(D-\overline{\lambda}_j E)^{k_j}$. Так как функции $y_i(x),\ i = 1,\ \ldots,\ k_j$, в (4.41) будут решениями уравнения $(D-\lambda_j E)^{k_j} = 0$, то функции $\overline{y}_i(x),\ i = 1,\ \ldots,\ k_j$, будут решениями уравнения $(D-\overline{\lambda}_j E)^{k_j} = 0$. Поэтому получаем, что фундаментальной системой композиции этих двух операторов будут функции $y_{m1}(x)$ и $y_{m2}(x)$, $m = 1, \ldots, k_j$,

$$\begin{aligned} y_{m1}(x) &= \frac{y_m(x) + \overline{y}_m(x)}{2} = \frac{x^{m-1}(e^{\lambda_j x} + e^{\overline{\lambda}_j x})}{2}, \\ y_{m2}(x) &= \frac{y_m(x) - \overline{y}_m(x)}{2i} = \frac{x^{m-1}(e^{\lambda_j x} - e^{\overline{\lambda}_j x})}{2i}, \end{aligned} \tag{4.42}$$

которые расписываются в следующей форме:

$$y_{m1}(x) = x^{m-1}e^{\alpha x}\cos(\beta x), \quad m = 1, \ldots, k_j,$$
$$y_{m2}(x) = x^{m-1}e^{\alpha x}\sin(\beta x), \quad m = 1, \ldots, k_j.$$

Таким образом, в соответствии с представлением решений уравнения (4.39) в форме (4.41) и (4.42) мы получаем n частных решений уравнения (4.32):

$$x^{m-1}e^{\lambda_j x}, \quad m = 1, \ldots, k_j$$

для вещественных корней λ_j степени k_j и

$$x^{m-1}e^{\alpha x}\cos(\beta x) = \frac{1}{2}x^{m-1}(e^{\lambda_l x} + e^{\overline{\lambda}_l x}), \quad m = 1, \ldots, k_l,$$
$$x^{m-1}e^{\alpha x}\sin(\beta x) = -\frac{1}{2}x^{m-1}i(e^{\lambda_l x} - e^{\overline{\lambda}_l x}), \quad m = 1, \ldots, k_l,$$

для пары комплексных корней λ_l и $\overline{\lambda}_l$ степени k_l. Из теоремы 4.4 и линейной независимости функций $1, x, x^2, \ldots, x^{k_j-1}$ следует, что эти n функций линейно независимы, следовательно, образуют фундаментальную систему решений уравнения (4.32).

Уравнение Эйлера

Уравнением Эйлера называется уравнение

$$x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} x y' + a_n y = 0, \tag{4.43}$$

где a_i – константы.

Введение новой независимой переменной t по формуле $x = e^t$ позволяет свести уравнение (4.43) к линейному однородному уравнению с постоянными коэффициентами. Это происходит из-за того, что верна следующая формула:

$$\frac{d^k y}{dx^k} = e^{-kt} \Big(\sum_{j=1}^{k} b_j \frac{d^j y}{dt^j} \Big), \tag{4.44}$$

где b_j – константы. Соотношение (4.44) легко доказывается по индукции. А именно, при $k = 1$ имеем

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = e^{-t} \frac{du}{dt},$$

т. е. формула (4.44) для $k = 1$ верна. Предположим, что эта формула верна для $k \geq 1$ и докажем ее для $k + 1$. Учитывая (4.44), получаем:

$$\frac{d^{k+1} y}{dx^{k+1}} = \frac{d}{dx} \Big(\frac{d^k y}{dx^k} \Big) = \frac{d}{dt} \Big(\frac{d^k y}{dx^k} \Big) \frac{dt}{dx} = e^{-t} \frac{d}{dt} \Big(\frac{d^k y}{dx^k} \Big) = e^{-kt} \Big(\sum_{j=1}^{k+1} c_j \frac{d^j y}{dt^j} \Big).$$

Таким образом, формула (4.44) верна для произвольного $k \geq 1$. Заменяя $y^{(k)}$, $k = 1, \ \ldots, \ n$, выражениями (4.44), получаем уравнение

$$\sum_{j=1}^{n} c_j \frac{d^j y}{dt^j} + c_{n+1} y = 0,$$

где c_j, c_{n+1} – постоянные. Это уравнение является уравнением вида (4.32).

4.4.2. Линейные неоднородные уравнения

Линейное неоднородное уравнение с постоянными коэффициентами имеет вид

$$L[y] \equiv y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = f(x). \tag{4.45}$$

Это уравнение может быть проинтегрировано с помощью метода вариаций, рассмотренного в п. 4.3.2. Укажем еще один метод решения уравнения (4.45).

Метод композиции

В методе композиции используется тот факт, что линейный оператор с постоянными коэффициентами может быть представлен композицией (произведением) элементарных линейных операторов $(D - \lambda_j E)$, $j = 1, \dots, p$ в форме (4.37), и, значит, уравнение (4.45) преобразуется к виду

$$L[y] \equiv (D - \lambda_1 E)^{k_1} \cdot \ldots \cdot (D - \lambda_p E)^{k_p}[y] = f(x), \tag{4.46}$$

где λ_j – корни характеристического многочлена оператора L, а k_j, $j = 1, \dots, p$ – степень корня λ_j. Частное решение уравнения (4.46) легко выписывается в квадратурах. Для этого используем операторы B_{λ_j}, $j = 1, \dots, p$, определенные формулой (4.40). Так как композиция $(B_{\lambda_j})^{k_j}$ и $(D - \lambda_j E)^{k_j}$ является тождественным оператором, т. е. $(D - \lambda_j E)^{k_j} \cdot (B_{\lambda_j})^{k_j} = E$, то, действуя последовательно на оператор L в (4.46) оператором $(B_{\lambda_1})^{k_1}$, где

$$(B_{\lambda_1})^{k_1}[z](x) = e^{\lambda_1 x} \int^{k_1} e^{-\lambda_1 x} z(x) dx^{k_1} =$$

$$= e^{\lambda_1 x} \underbrace{\int \Big(\dots \Big(\int}_{k_1} e^{-\lambda_1 x} z(x) \underbrace{dx \Big) \dots \Big) dx}_{k_1},$$

затем аналогично оператором $(B_{\lambda_2})^{k_2}$ и т. д., заканчивая оператором $(B_{\lambda_p})^{k_p}$, мы слева получаем $y(x)$, а справа – формулу в квадратурах для $y(x)$, т. е.

$$y(x) = (B_{\lambda_p})^{k_p} \dots (B_{\lambda_1})^{k_1}[f](x). \tag{4.47}$$

Таким образом, получаем рекурентную формулу для решения $y(x)$:

$$z_1(x) = (B_{\lambda_1})^{k_1}[f](x) = e^{\lambda_1 x} \int^{k_1} e^{-\lambda_1 x} f(x) dx^{k_1},$$

$$z_2(x) = (B_{\lambda_2})^{k_2}[z_1](x) = e^{\lambda_2 x} \int^{k_2} e^{-\lambda_2 x} z_1(x) dx^{k_2},$$

$$\vdots$$

$$z_{p-1}(x) = (B_{\lambda_{p-1}})^{k_{p-1}}[z_{p-2}](x) = e^{\lambda_{p-1} x} \int^{(k_{p-1})} e^{-\lambda_{p-1} x} z_{p-2}(x) dx^{k_{p-1}},$$

$$y(x) = (B_{\lambda_p})^{k_p}[z_{p-1}](x) = e^{\lambda_p x} \int^{k_p} e^{-\lambda_p x} z_{p-1}(x) dx^{k_p},$$

т. е.

$$\begin{gathered} y(x) = e^{\lambda_p x} \int^{k_p} \Big(e^{(\lambda_{p-1} - \lambda_p)x} \dots \\ \dots \int^{k_2} \Big(e^{(\lambda_1 - \lambda_2)x} \int^{k_1} e^{-\lambda_1 x} f(x) dx^{k_1} \Big) dx^{k_2} \dots \Big) dx^{k_p}. \end{gathered} \tag{4.48}$$

Так как операторы $(D - \lambda_i E)^{k_i}$ и $(D - \lambda_j E)^{k_j}$ перестановочны, то формулы (4.47) и (4.48) частного решения уравнения (4.45) справедливы при произвольном упорядочивании характеристических корней $\lambda_1, \dots, \lambda_p$. Однако отметим, что разность любых двух таких решений будет решением однородного уравнения.

Частным случаем формулы (4.48) будет решение уравнения $y^{(n)} = f(x)$, для которого $y(x) = \int^n f(x) dx^n$. Для этого уравнения $\lambda = 0$ – n-кратный корень, и, значит, $y(x) = (B_0)^n[f] = \int^n f(x) dx^n$. Таким образом, формула (4.48) является обобщением этой простой формулы для уравнения $y^{(n)} = f(x)$ на произвольные неоднородные линейные уравнения с постоянными коэффициентами.

Заметим, что решение (4.47) будет комплексным, если существуют комплексные характеристические корни, т. е. в этом случае $y(x) = y_1(x) + iy_2(x)$. Так как функция $f(x)$ в (4.45) вещественная, то функция $y_2(x)$ удовлетворяет уравнению $L[y_2] = 0$. Поэтому вещественным частным решением уравнения (4.45) будет

$$y(x) = y_1(x) + cy_2(x).$$

Распишем формулу (4.48) для всевозможных ситуаций при $n = 2$ и $n = 3$.

Уравнение второго порядка. Если в (4.45) $n = 2$, то возможны два случая:

1. корни λ_1 и λ_2 – разные;
2. $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$.

В первом случае из (4.48) имеем

$$y(x) = B_{\lambda_2} \cdot B_{\lambda_1}[f](x) = e^{\lambda_2 x} \int \Big(e^{(\lambda_1 - \lambda_2)x} \int e^{-\lambda_1 x} f(x) dx \Big) dx,$$

или, меняя порядок λ_1 и λ_2,

$$y(x) = B_{\lambda_1} \cdot B_{\lambda_2}[f](x) = e^{\lambda_1 x} \int \Big(e^{(\lambda_2 - \lambda_1)x} \int e^{-\lambda_2 x} f(x) dx \Big) dx.$$

Напомним, что при замене порядка нумерации корней первое решение может отличаться от второго на функцию, являющуюся решением однородного уравнения.

Если $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, то согласно (4.48)

$$y(x) = (B_\lambda)^2[f](x) = e^{\lambda x} \int \Big(\int e^{-\lambda x} f(x) dx \Big) dx.$$

Уравнение третьего порядка. Для $n = 3$ в (4.45) имеем три качественно различных возможности:

1. корни λ_1, λ_2 и λ_3 разные;
2. только два корня одинаковые, например $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda,\ \lambda_1 \neq \lambda$;
4. три корня одинаковые: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda$.

В первом случае формула (4.48) дает

$$y(x) = e^{\lambda_3 x} \int \Big[e^{(\lambda_2 - \lambda_3)x} \int \Big(e^{(\lambda_1 - \lambda_2)x} \int e^{-\lambda_1 x} f(x) dx \Big) dx \Big] dx.$$

Меняя нумерацию корней, можно получить таким образом шесть частных решений уравнения (4.45). Очевидно, что разность любых двух будет решением однородного уравнения.

Во втором случае из (4.48) следует

$$y(x) = e^{\lambda x} \int \Big[\int \Big(e^{(\lambda_1 - \lambda)x} \int e^{-\lambda_1 x} f(x) dx \Big) dx \Big] dx,$$

или, считая $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda,\ \lambda_3 \neq \lambda$,

$$y(x) = e^{\lambda_3 x} \int \Big[e^{(\lambda-\lambda_3)x} \int \Big(\int e^{-\lambda x} f(x) dx \Big) dx \Big] dx.$$

В третьем случае частное решение согласно (4.48) имеет вид

$$y(x) = (B_\lambda)^3[f](x) = e^{\lambda x} \int \Big[\int \Big(\int e^{-\lambda x} f(x) dx \Big) dx \Big] dx.$$

Пример 4.4. В качестве первого примера для этого метода нахождения решения рассмотрим уравнение $y'' + y = e^x$. Характеристическими корнями однородного уравнения будут $\lambda_1 = i$ и $\lambda_2 = -i$. Согласно (4.48) решение этого уравнения выражается формулой

$$\begin{aligned} y(x) &= e^{\lambda_2 x} \int \Big(e^{(\lambda_1 - \lambda_2)x} \int e^{(1-\lambda_1)x} dx \Big) dx = \\ &= e^{-ix} \int \Big(e^{2ix} \int e^{(1-i)x} dx \Big) dx = \\ &= e^{-ix} \int e^{2ix} \Big(\frac{1}{1-i} e^{(1-i)x} + c_1 \Big) dx = \\ &= e^{-ix} \int \Big(\frac{1}{1-i} e^{(1+i)x} + c_1 e^{2ix} \Big) dx = \\ &= \frac{1}{2} e^x + \frac{c_1}{2i} e^{ix} + c_2 e^{-ix}. \end{aligned}$$

Отсюда, учитывая, что $e^{\pm ix} = \cos x \pm i \sin x$, получаем, что вещественным решением рассмотренного уравнения будет функция

$$y(x) = \frac{1}{2} e^x + a_1 \cos x + a_2 \sin x, \qquad a_1,\ a_2 \in R.$$

Пример 4.5.

$$y''' - 3y'' + 3y' - 1 = (\sum_{i=0}^{k} a_i x^i) e^x.$$

Для этого примера единица является характеристическим корнем кратности 3, т. е. $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$. Следовательно, из (4.48)

$$y(x) = (B_1)^3[e^x](x) = e^x \int \Big(\int \Big(\int e^{-x} e^x (\sum_{i=0}^{k} a_i x^i) dx \Big) dx \Big) dx =$$

$$= \Big(c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + \sum_{i=0}^{k} \frac{a_i x^{i+3}}{(i+1)(i+2)(i+3)} \Big) e^x.$$

Неоднородное уравнение Эйлера

Формула (4.48) позволяет найти в квадратурах решение неоднородного уравнения Эйлера

$$x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} x y' + a_n y = f(x),$$

где a_i – константы. Вначале это уравнение, так же как и для однородного уравнения Эйлера (4.43), с помощью замены независимой переменной $x = e^t$ сводится к линейному неоднородному уравнению с постоянными коэффициентами

$$\sum_{j=1}^{n} c_j \frac{d^j y}{dt^j} + c_{n+1} y = m f(c e^t),$$

решение которого находится по формуле (4.47). Затем, переходя к старой переменной x, мы получаем решение уравнения Эйлера в квадратурах.

Метод неопределенных коэффициентов

Иногда правая часть уравнения (4.45) имеет такой специальный вид, что частное решение можно подобрать в аналогичной форме с некоторыми коэффициентами. Вычисляя эти коэффициенты, мы получаем решение уравнения (4.45). Такой подход к нахождению решения называется методом неопределенных коэффициентов.

Метод неопределенных коэффициентов является эффективным, например для уравнений вида

$$L[y] \equiv y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = e^{\lambda x} P(x), \tag{4.49}$$

где $a_i,\ i=1,\dots,n$ – вещественные числа, а $P(x)$ – многочлен степени m, при этом λ и коэффициенты многочлена $P(x)$ могут быть комплексными.

Вначале заметим, что если λ не совпадает ни с одним корнем λ_i характеристического многочлена оператора L в (4.49), т. е. $\lambda-\lambda_i\neq 0$, то

$$B_{\lambda_i}[e^{\lambda x}P(x)](x)=e^{\lambda_i x}\int e^{(\lambda-\lambda_i)x}P(x)dx=e^{\lambda_i x}P_1(x), \tag{4.50}$$

где $P_1(x)$ – многочлен того же порядка, что и $P(x)$. При этом многочлен $P_1(x)$ выписывается явно формулой

$$P_1(x)=\sum_0^m(-1)^i(\lambda-\lambda_i)^{-i-1}P^{(i)}(x),$$

где $P^{(i)}(x)$ означает i-ю производную $P(x)$, при этом $P^{(0)}(x)=P(x)$. Таким образом, в случае, когда $\lambda\neq\lambda_i$, из формулы (4.47) следует, что решением уравнения (4.49) будет функция $y(x)=P_2(x)e^{\lambda x}$, где $P_2(x)$ – многочлен того же порядка, что и $P(x)$ в (4.49).

Пусть λ совпадает с каким-либо корнем порядка k характеристического многочлена оператора L в (4.49). Так как

$$(B_\lambda)^k[e^{\lambda x}P(x)](x)=e^{\lambda x}\int^k P(x)dx^k=e^{\lambda x}P_3(x),$$

где $P_3(x)$ – многочлен порядка $k+m$, то, учитывая, что согласно (4.50) для других корней характеристического многочлена порядок многочлена перед $e^{\lambda x}$ не будет увеличиваться, получаем из формулы (4.47), что в случае, когда λ – s-кратный корень характеристического многочлена для оператора L в (4.49), решение уравнения (4.49) имеет вид $y(x)=e^{\lambda x}P_4(x)$, где $P_4(x)$ – многочлен порядка $s+m$. Теперь, замечая, что функция $e^{\lambda x}P_3(x)$, где $P_3(x)$ – многочлен порядка $s-1$, является решением однородного уравнения для оператора L в (4.49), получаем, что решением уравнения (4.49) будет более простая функция

$$y(x)=e^{\lambda x}P_5(x), \tag{4.51}$$

где

$$P_5(x)=x^s(b_0x^m+b_1x^{m-1}+\ldots+b_{m-1}x+b_m),$$

$s=0$, если λ не является корнем характеристического многочлена, а если λ является корнем характеристического многочлена, то s – порядок этого корня, $b_i,\ i=0,\ \dots,\ m$ – константы, в общем случае комплексные.

Таким образом, решение уравнения (4.49) ищется в виде (4.51). Подставляя значение функции $y(x)$ из (4.51) в уравнение (4.49), мы получаем слева выражение вида $(c_0x^m + c_1x^{m-1} + \ \ldots \ + c_{m-1}x + c_m)e^{\lambda x}$, где коэффициенты $c_j, \ j = 0, \ldots, m$ являются линейной комбинацией искомых коэффициентов $b_j, \ j = 0, \ldots, m$ из (4.51). Приравнивая каждый коэффициент $c_j, \ j = 0, \ldots, m$ соответственно коэффициенту перед x^j в многочлене $P(x)$, мы получаем систему уравнений для $b_j, \ j = 0, \ldots, m$. Вычислив значения b_j, удовлетворяющие этой системе, мы находим многочлен $P_5(x)$ и, соответственно, решение $y(x)$ по формуле (4.51), удовлетворяющее уравнению (4.49). Если $P(x)$ и λ в (4.49) вещественные, то, учитывая, что мнимая часть решения неоднородного уравнения является решением однородного уравнения, получаем, что коэффициенты $b_i, \ i = 0, \ldots, m$, в (4.51) можно взять вещественными, т. е. $P_5(x)$ – вещественный многочлен.

Аналогичный способ применяется для нахождения решений уравнения (4.45), если его правая часть имеет вид

$$f(x) = P_1(x)e^{\alpha x}\cos\beta x + P_2(x)e^{\alpha x}\sin\beta x, \tag{4.52}$$

где $P_1(x)$ и $P_2(x)$ – вещественные многочлены. Такая правая часть представляется в виде суммы двух комплексных функций вида (4.51), а именно

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x),$$

где

$$f_1(x) = \frac{1}{2}[P_1(x) - iP_2(x)]e^{\lambda x},$$

$$f_2(x) = \overline{f}_1(x) = \frac{1}{2}[P_1(x) + iP_2(x)]e^{\overline{\lambda}x}.$$

Поэтому решением уравнения (4.45) для $f(x)$, заданного формулой (4.52), будет сумма решений уравнения (4.49) с комплексной правой частью $P(x)e^{\lambda x}$ и $\overline{P}(x)e^{\overline{\lambda}x}$, где $P(x) = 1/2(P_1(x) - iP_2(x))$. Так как $P(x)e^{\lambda x}$ и $\overline{P}(x)e^{\overline{\lambda}x}$ – взаимно сопряженные комплексные функции, то функция $y(x) = y_1(x) + iy_2(x)$, являющаяся решением уравнения (4.49) для $P(x)e^{\lambda x}$, определяет решение уравнения (4.49) с правой частью $\overline{P}(x)e^{\overline{\lambda}x}$ в сопряженном виде, а именно $y(x) = y_1(x) - iy_2(x)$. Поэтому решением уравнения (4.45) с правой частью в форме (4.52) будет вещественная часть решения уравнения (4.49) для $(P_1(x) - iP_2(x))e^{\lambda x}$, где $\lambda = \alpha + i\beta$, т. е. согласно формуле (4.51) решение имеет вид $y(x) = \mathrm{Re} P_5(x)e^{\lambda x}$, а именно

$$y(x) = x^s(P_3(x)e^{\alpha x}\cos(\beta x) + P_4(x)e^{\alpha x}\sin(\beta x)). \tag{4.53}$$

В этой формуле $P_3(x)$ и $P_4(x)$ – вещественные многочлены, степень каждого из которых равна максимальной степени многочленов $P_1(x)$ и $P_2(x)$. В частности, если $P_1(x) \equiv 0$, то степень многочленов $P_3(x)$ и $P_4(x)$ равна степени многочлена $P_2(x)$. Показатель степени s в (4.53) равен нулю, если комплексное число $\lambda = \alpha + i\beta$ не является корнем характеристического уравнения, а если $\lambda = \alpha + i\beta$ – корень этого уравнения, то s равно его кратности.

Пример 4.6.

Найти решение уравнения

$$y'' - 2y' + y = xe^x. \tag{4.54}$$

Так как единица – 2-кратный вещественный корень характеристического многочлена, то решение этого уравнения согласно формуле (4.51) ищется в виде

$$y(x) = x^2(b_0x + b_1)e^x.$$

Имеем:

$$y'(x) = [b_0x^3 + (b_1 + 3b_0)x^2 + 2b_1x]e^x,$$

$$y''(x) = [b_0x^3 + (b_1 + 6b_0)x^2 + (4b_1 + 6b_0)x + 2b_1]e^x.$$

Подставляя эти значения $y(x)$, $y'(x)$ и $y''(x)$ в (4.54), получаем следующее уравнение для определения коэффициентов b_0 и b_1:

$$b_0x^3 + (b_1 + 6b_0)x^2 + (4b_1 + 6b_0)x + 2b_1 - 2b_0x^3 -$$

$$-2(b_1 + 3b_0)x^2 - 4b_1x + b_0x^3 + b_1x^2 = x.$$

Отсюда, приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, имеем

$$4b_1 + 6b_0 - 4b_1 = 1, \qquad 2b_1 = 0,$$

поэтому $b_0 = 1/6$, $b_1 = 0$. Таким образом, частным решением неоднородного уравнения (4.54) будет функция $y(x) = (1/6)x^3e^x$.

Отметим, что из формулы (4.47) мы получаем сразу общее решение уравнения (4.54):

$$y(x) = (B_1)^2[xe^x](x) = e^x\int^2 x dx^2 = e^x\int\Big(\int xdx\Big)dx = \Big(\frac{x^3}{6} + c_1x + c_2\Big)e^x.$$

Пример 4.7.
Решить уравнение
$$y'' + y = \cos x. \tag{4.55}$$

Характеристическими корнями для этого уравнения будут $\lambda_1 = i$ и $\lambda_2 = -i$. Так как $s = 1$, то согласно формуле (4.53) решение уравнения (4.55) ищется в виде $y(x) = x(c_1 \cos x + c_2 \sin x)$. Имеем:

$$y'(x) = x(c_2 \cos x - c_1 \sin x) + (c_1 \cos x + c_2 \sin x),$$

$$y''(x) = -y(x) + 2(c_2 \cos x - c_1 \sin x).$$

Подставляя выражение для $y(x)$ и $y''(x)$ в уравнение, получаем:

$$2c_2 \cos x - 2c_1 \sin x = \cos x.$$

Отсюда $c_1 = 0$, а $c_2 = 1/2$. Таким образом, частным решением неоднородного уравнения (4.55) будет функция $y(x) = 1/2x \sin x$.

Глава 5

Вопросы устойчивости решений

Введение

В практических приложениях начальные условия для искомых функций, а также коэффициенты уравнений часто получают опытным путем, и, следовательно, они могут отличаться от истинных значений из-за погрешности измерений. В связи с этим возникает вопрос, какое влияние оказывает эта погрешность измерений на погрешность решения. Если влияние сильное, то необходимо совершенствовать модель, описывающую исследуемое явление. Если неточность данных не сказывается сильно на погрешности решения, то такая модель может быть эффективной для практических приложений.

В данной главе излагаются некоторые результаты, касающиеся вопросов исследования поведения решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений при изменении начальных данных.

5.1. Устойчивость и фазовое пространство

5.1.1. Понятие устойчивости решения

Вопросы поведения решения при изменении начальных данных для больших значений независимой переменной исследуются методами теории устойчивости. Так как проблемы теории устойчивости касаются в основном задач, зависящих от времени, то независимую переменную в уравнениях будем обозначать буквой t.

Пусть исследуется задача Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} &\frac{dy_i}{dt} = f_i(t, y_1, \ldots, y_n), \quad i = 1, \ldots, n, \quad t > t_0, \\ &y_i(t_0) = y_{i0}, \quad i = 1, \ldots, n, \end{aligned} \tag{5.1}$$

или в векторном виде:

$$\begin{aligned} &\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{F}(t, \mathbf{y}), \quad t > t_0, \\ &\mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0, \end{aligned} \tag{5.2}$$

где

$$\begin{aligned} &\mathbf{y}(t) = (y_1(t), \ldots, y_n(t))^T, \\ &\mathbf{F}(t, \mathbf{y}) = (f_1(t, y_1, \ldots, y_n), \ldots, f_n(t, y_1, \ldots, y_n))^T. \end{aligned}$$

Решение $\mathbf{y}(t)$ задачи (5.2) называется **устойчивым** (**устойчивым по Ляпунову**), если для любого $\epsilon > 0$ можно подобрать такое $\delta(\epsilon) > 0$, что для всякого решения $\mathbf{y}_1(t)$, удовлетворяющего в точке t_0 условию

$$\|\mathbf{y}_1(t_0) - \mathbf{y}_0\| \leq \delta(\epsilon),$$

выполнено неравенство

$$\|\mathbf{y}_1(t) - \mathbf{y}(t)\| \leq \epsilon, \quad t \geq t_0, \tag{5.3}$$

где $\|\mathbf{y}\|$ для произвольного вектора $\mathbf{z} = (z_1, \ldots, z_n)^T$ означает

$$\|\mathbf{z}\| = \max_{1 \leq i \leq n} |z_i|.$$

Если существует такое $\epsilon > 0$, что невозможно подобрать $\delta(\epsilon) > 0$ для выполнения условия (5.3), то решение $\mathbf{y}(t)$ называется **неустойчивым**.

Если устойчивое решение $\mathbf{y}(t)$ удовлетворяет кроме (5.3) еще дополнительному условию

$$\lim_{t \to \infty} \|\mathbf{y}_1(t) - \mathbf{y}(t)\| = 0, \tag{5.4}$$

то решение называется **асимптотически устойчивым**.

Пример 5.1. Решение $y = e^{ct}$ задачи Коши

$$\begin{aligned} &y' = cy, \quad t > 0, \\ &y(0) = 1 \end{aligned}$$

будет асимптотически устойчивым для $c < 0$, так как

$$\|y_1(t) - y(t)\| = |y_1(0) - 1|e^{ct} \to 0 \quad \text{при} \quad t \to \infty.$$

Аналогично получаем, что решение $y = e^{ct}$ будет неустойчивым, если $c > 0$, и решение будет устойчивым, но не будет асимптотически устойчивым при $c = 0$.

Пусть $\mathbf{y}_1(t)$ – решение задачи (5.2), которое исследуется на устойчивость. Переходя в (5.2) к переменным $\mathbf{z} = \mathbf{y} - \mathbf{y}_1$, $\tau = t - t_0$, мы получаем задачу Коши относительно вектор-функции $\mathbf{z}(\tau)$:

$$\frac{d\mathbf{z}}{d\tau} = -\frac{d\mathbf{y}_1}{dt}(\tau + t_0) + \mathbf{F}(\tau + t_0, \mathbf{z} + \mathbf{y}_1), \quad \tau > 0,$$
$$\mathbf{z}(0) = \mathbf{0}.$$

Решением этой задачи, соответствующим $\mathbf{y}_1(t)$, будет $\mathbf{z}(\tau) \equiv \mathbf{0}$. Таким образом, не теряя общности, можно ограничиться исследованием устойчивости только нулевого решения $\mathbf{y} \equiv 0$, которое называют **тривиальным решением**, или нулевой **точкой покоя**, так как это решение не зависит от t.

Таким образом, в соответствии с описанным выше определением тривиальное решение уравнения при $t \geq 0$

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{F}(t, \mathbf{y})$$

является **устойчивым**, если для всякого $\epsilon > 0$ можно подобрать такое $\delta(\epsilon) > 0$, что для всякого решения $\mathbf{y}(t)$ этого уравнения, удовлетворяющего условию $\|\mathbf{y}(0)\| \leq \delta(\epsilon)$, выполняется неравенство $\|\mathbf{y}(t)\| \leq \epsilon$, $t \geq 0$. Если, кроме того,

$$\lim_{t \to \infty} \|\mathbf{y}(t)\| = 0,$$

то тривиальное решение называется **асимптотически устойчивым**.

5.1.2. Понятие фазового пространства

График решения задачи (5.2) интерпретируется геометрически как кривая в пространстве R^{n+1}, проходящая через точку $(t_0, \mathbf{y}_0) \in R^{n+1}$, $\mathbf{y}_0 = (y_{01}, \ldots, y_{0n})$. Это же решение имеет и кинематическое истолкование как движение материальной точки по кривой в пространстве R^n, т. е. независимая переменная t считается параметром, и каждому значению t ставится в соответствие положение $\mathbf{y}(t)$ материальной точки в пространстве R^n. В кинематической интерпретации пространство R^n называется **фазовым пространством**, а кривая в R^n, вдоль которой движется воображаемая материальная точка, называется **фазовой траекторией**. Очевидно, что фазовая траектория – это проекция графика решения задачи (5.2) на фазовое пространство. В кинематической формулировке правая часть уравнения (5.2) – это вектор скорости движения точки вдоль ее траектории, поэтому вектор-функцию $\mathbf{F}(t, \mathbf{y})$ в (5.2) называют **фазовой скоростью**.

В соответствии с кинематической интерпретацией нулевая точка покоя $\mathbf{y}(t) \equiv \mathbf{0}$ устойчива, если всякая траектория в фазовом пространстве, начинающаяся достаточно близко от нее, не выходит за ее ϵ-окрестность. Если же траектории неограниченно приближаются к точке покоя, то она асимптотически устойчива. Обратно, если существует траектория, которая, как бы ни была близка в начальный момент к нулевой точке покоя, отделяется от нее с течением времени t на расстояние больше некоторого фиксированного положительного числа, то нулевая точка покоя неустойчива.

5.2. Автономные системы

Система обыкновенных дифференциальных уравнений в (5.2) называется автономной, если вектор-функция $\mathbf{F}(t, \mathbf{y})$ не зависит от t. Таким образом, автономная система может быть записана в виде

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{y}), \tag{5.5}$$

где $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)^T$, $\mathbf{F} = (f_1, \ldots, f_n)^T$.

Решение $\mathbf{y}(t)$ системы (5.5) называют **точкой покоя** этой системы, если оно не зависит от t, т. е. $\mathbf{y}(t) = \mathbf{y}(t_0)$. Очевидно, что точка покоя является решением уравнения $\mathbf{F}(\mathbf{y}(t_0)) = \mathbf{0}$.

Решение $\mathbf{y}(t)$ системы (5.5) называется **периодическим**, если существует такая константа $T > 0$, что $\mathbf{y}(t) \equiv \mathbf{y}(t + T)$. Число T называется **периодом**, а траектория в фазовом пространстве R^n, описываемая периодическим решением, будет замкнутой траекторией и называется **циклом**.

5.2.1. Классификация траекторий автономных систем

Будем предполагать, что вектор-функция $\mathbf{F}(\mathbf{y})$ в (5.5) имеет непрерывные частные производные по y_j, $j = 1, \ldots, n$, гарантирующие существование и единственность решения задачи Коши для уравнения (5.5). Отметим некоторые свойства решений автономной системы (5.5).

1. Если $\mathbf{y}(t)$ – решение уравнения (5.5), то вектор-функция $\mathbf{y}_1(t) = \mathbf{y}(t + c)$ также будет решением этого уравнения.

Действительно,

$$\mathbf{y}_1'(t) = \mathbf{y}'(t + c) = \mathbf{F}(\mathbf{y}(t + c)) = \mathbf{F}(\mathbf{y}_1(t)),$$

таким образом, вектор-функция $\mathbf{y}_1(t)$ удовлетворяет уравнению (5.5).

2. Траектория решения уравнения (5.5), которая пересекает себя, является либо замкнутой траекторией (циклом), либо вырождается в точку (точку покоя).

Действительно, пусть $\mathbf{y}(t)$ – решение (5.5), траектория которого имеет пересечение. Это означает, что существуют такие t_0 и t_1, что $\mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}(t_1)$. Согласно первому свойству вектор-функция $\mathbf{y}_1(t) = \mathbf{y}(t+t_1-t_0)$ также является решением уравнения (5.5). Имеем $\mathbf{y}_1(t_0) = \mathbf{y}(t_1) = \mathbf{y}(t_0)$. Следовательно, из единственности решения задачи Коши для уравнения (5.5) получаем

$$\mathbf{y}_1(t) \equiv \mathbf{y}(t),$$

т. е.

$$\mathbf{y}(t) \equiv \mathbf{y}(t + T), \quad T = t_1 - t_0.$$

Таким образом, траектория будет замкнута. Пусть T – минимальное число, для которого выполнено это тождество, тогда если $T > 0$, то траектория будет циклом периода T, а если $T = 0$, то траектория вырождается в точку, и, значит, в этом случае решение является точкой покоя.

Из свойства 2 следует, что все траектории системы (5.5) распадаются на три множества: 1) траектории без пересечений, 2) периодические траектории (циклы) и 3) точки покоя.

5.2.2. Фазовые траектории двумерных линейных систем с постоянными коэффициентами

В этом параграфе будут описаны фазовые траектории на фазовой плоскости для двумерной системы линейных уравнений

$$
\begin{aligned}
y_1' &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2,\\
y_2' &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2,
\end{aligned}
\tag{5.6}
$$

которая в векторной записи имеет вид

$$
\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.
$$

Матрица $\mathbf{A}$ имеет два собственных значения λ_1 и λ_2, которые являются корнями характеристичекого уравнения $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = 0$, т. е.

$$
(a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) - a_{12}a_{21} = 0.
$$

Ненулевые корни

Оказывается, если λ_1 и λ_2 – ненулевые собственные значения матрицы $\mathbf{A}$, то траектории решения уравнения (5.6), в соответствии с их геометрическим расположением в фазовой плоскости, классифицируются как "узел" (рис. 5.1), "седло" (рис. 5.2), "фокус" (рис. 5.3) и "центр" (рис. 5.4) в зависимости от значений этих корней. А именно, если корни характеристического уравнения вещественные и одного знака, то траектории образуют узел. Если корни вещественные и разного знака, то траектории образуют седло, если комплексные и их вещественные части не равны нулю – то фокус, если чисто комплексные – то центр.

Отметим, что если оба корня ненулевые, то $\det\,\mathbf{A} \neq 0$, и, следовательно, точкой покоя системы уравнений (5.6) может быть только нулевая точка покоя, т. е. тривиальное решение $\mathbf{y}(t) \equiv \mathbf{0}$.

Далее, если λ_1 и λ_2 – разные вещественные собственные значения матрицы $\mathbf{A}$ и отличные от нуля, то в этом случае все ненулевые решения системы (5.6), в соответствии с формулой (3.29), имеют вид

$$
\begin{aligned}
y_1(t) &= c_1 b_{11} e^{\lambda_1 t} + c_2 b_{12} e^{\lambda_2 t},\\
y_2(t) &= c_1 b_{21} e^{\lambda_1 t} + c_2 b_{22} e^{\lambda_2 t},
\end{aligned}
\tag{5.7}
$$

где $c_1 \neq 0$ или $c_2 \neq 0$, $\mathbf{b}_j = (b_{1j}, b_{2j})^T$, $j = 1, 2$ – ненулевой собственный вектор матрицы $\mathbf{A}$ для собственного значения λ_j, т. е. ненулевое решение уравнения $(\mathbf{A} - \lambda_j \mathbf{E})\mathbf{b}_j = \mathbf{0}$. Отметим, что собственные векторы $\mathbf{b}_1$ и $\mathbf{b}_2$ линейно независимы.

Вычитая из первой строки в (5.7), умноженной на b_{22}, вторую строку, умноженную на b_{12}, получаем

$$b_{22}y_1 - b_{12}y_2 = c_1 \Delta e^{\lambda_1 t},$$

где $\Delta = b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}$. Так как векторы $\mathbf{b}_1$ и $\mathbf{b}_2$ линейно независимы, то $\Delta \neq 0$.

Аналогично умножив первую строку на b_{21}, а вторую – на b_1 и произведя вычитание, имеем

$$b_{21}y_1 - b_{11}y_2 = -c_2 \Delta e^{\lambda_2 t}.$$

Теперь, вводя новые переменные

$$z_1 = \frac{b_{22}y_1 - b_{12}y_2}{\Delta}, \quad z_2 = \frac{b_{21}y_1 - b_{11}y_2}{\Delta},$$

имеем из полученных выражений $z_1 = c_1 e^{\lambda_1 t}$ и $z_2 = -c_2 e^{\lambda_2 t}$. Пусть для определенности $c_1 \neq 0$. Для $c_2 \neq 0$ последующие выводы аналогичны. Заметим, что тогда $z_1 \neq 0$, и как c_1, так и z_1 имеют один и тот же знак, т. е. $z_1/c_1 > 0$. Имеем следующую зависимость между z_1 и z_2 в плоскости z_1, z_2:

$$z_2 = -c_2 (z_1/c_1)^{\lambda_2/\lambda_1}. \tag{5.8}$$

Так как $z_1/c_1 > 0$, то данная формула имеет смысл при любых вещественных λ_1 и λ_2, не равных нулю.

Узел. Если λ_1 и λ_2 одного знака, то формула (5.8) определяет семейство кривых в плоскости z_1, z_2, у которых при стремлении одной координаты к нулю вторая координата также стремится к нулю. Таким образом, траектории решения задачи (5.6) при неравных, вещественных и одного знака λ_1 и λ_2 имеют вид, представленный на рис. (5.1).

Теперь предположим, что $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$ и $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Тогда произвольные начальные точки траектории решения (5.7) неограниченно приближаются при $t \to \infty$ к точке покоя $\mathbf{0} = (0, 0)^T$, собираясь в узел (рис. 5.1, *a*), т. е. нулевая точка покоя асимптотически устойчива. В этом случае нулевая точка покоя называется **устойчивым узлом**.

Обратно, если $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$ и $\lambda_1 \neq \lambda_2$, то согласно (5.7) произвольные начальные точки траектории решения неограниченно удаляются

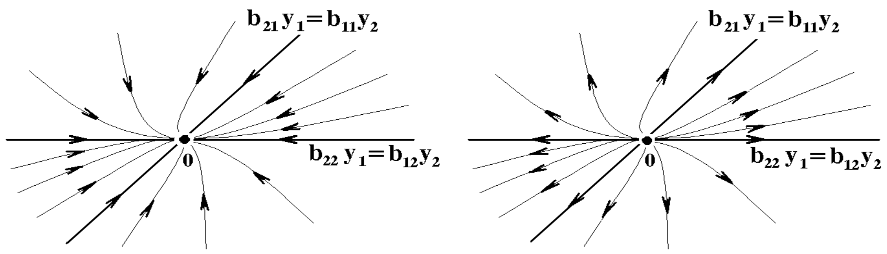

Рис. 5.1

вдоль траектории от точки покоя $\mathbf{0}$ (рис. 5.1, *б*), поэтому нулевая точка покоя неустойчива и называется **неустойчивым узлом**.

Теперь рассмотрим случай $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \neq 0$. Заметим, что ранг пространства собственных векторов матрицы $\mathbf{A}$ равен 2, только если матрица $\mathbf{A}$ имеет вид $\mathbf{A} = \lambda\mathbf{E}$, где $\mathbf{E}$ – единичная матрица. Тогда очевидно, что решение имеет вид (5.7), и, значит, траектории образуют узел. А нулевая точка покоя будет асимптотически устойчивой, если $\lambda < 0$, и неустойчивой, если $\lambda > 0$.

Пусть ранг пространства собственных векторов при $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ равен 1 и $\mathbf{b}_1 = (b_{11},\ b_{21})^T$ – собственный вектор матрицы $\mathbf{A}$ для собственного значения λ, а $\mathbf{b}_2 = (b_{12},\ b_{22})^T$ – другой вектор, непараллельный $\mathbf{b}_1$. Так как $(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E})\mathbf{b}_2 \neq \mathbf{0}$, а $(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E})^2\mathbf{b}_2 = \mathbf{0}$, то $(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E})\mathbf{b}_2 = a\mathbf{b}_1,\ a \neq 0$. Поэтому, согласно п. 4.2.2, общее решение имеет вид

$$\mathbf{y}(t) = c_1 e^{\lambda t}\mathbf{b}_1 + c_2 e^{\lambda t}[\mathbf{E} + t(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})]\mathbf{b}_2 = e^{\lambda t}[(c_1 + c_2 at)\mathbf{b}_1 + c_2\mathbf{b}_2],$$

или в покомпонентной записи

$$y_1(t) = [(c_1 + c_2 at)b_{11} + c_2 b_{12}]e^{\lambda t},$$

$$y_2(t) = [(c_1 + c_2 at)b_{21} + c_2 b_{22}]e^{\lambda t}.$$

Отсюда, так же как и для разных собственных значений, получаем

$$z_2(t) = \frac{b_{11}y_2 - b_{21}y_1}{\Delta} = c_2 e^{\lambda t},$$

$$z_1(t) = \frac{b_{22}y_1 - b_{12}y_2}{\Delta} = (c_1 + c_2 at)e^{\lambda t},$$

где $\Delta = b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21} \neq 0$. Пусть для определенности $c_2 \neq 0$, тогда, учитывая, что z_2 и c_2 имеют один и тот же знак, получаем $t = 1/\lambda \ln(z_2/c_2)$, и, значит,

$$z_1(t) = \frac{1}{c_2}\Big(c_1 + \frac{c_2 a}{\lambda}\ln(z_2/c_2)\Big).$$

Так как $t \ln|t| \to 0$ при $t \to 0$, получаем, что при стремлении z_2 к нулю z_1 также стремится к нулю, и наоборот. Таким образом, траектории образуют узел, как на рис. 5.1, а нулевое решение будет асимптотическим устойчивым узлом, если $\lambda < 0$, и не будет устойчивым, если $\lambda > 0$.

Седло. Пусть λ_1 и λ_2 – вещественные, не равные нулю корни, но разного знака, т. е. $\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$. Формулы (5.7) и (5.8) по-прежнему представляют соответственно решения и траектории решений в плоскости z_1, z_2 для таких λ_1 и λ_2. Пусть для определенности $\lambda_1 > 0$. При $c_2 = 0$ решение (5.7) имеет вид

$$y_1(t) = c_1 b_{11} e^{\lambda_1 t}, \qquad y_2(t) = c_1 b_{21} e^{\lambda_1 t}, \tag{5.9}$$

представляя траекторию, уходящую в бесконечность при $t \to \infty$ для произвольной константы c_1. Следовательно, тривиальная точка покоя не будет устойчивой. Так как вектор $\mathbf{b}_1 = (b_{11}, b_{21})^T$ ненулевой, то траекторией решения (5.7) в фазовой плоскости y_1, y_2 будет прямая при $c_2 = 0$

$$b_{21}y_1 - b_{11}y_2 = 0.$$

Отметим, что кривая (5.7) при $c_1 = 0$

$$y_1(t) = c_2 b_{12} e^{\lambda_2 t}, \qquad y_2(t) = c_2 b_{22} e^{\lambda_2 t}$$

определяет траекторию в фазовом пространстве, начальные точки которой неограниченно приближаются к тривиальной точке покоя $\mathbf{0}$, так как $\lambda_2 < 0$. Этой траекторией будет прямая линия $b_{22}y_1 - b_{12}y_2 = 0$.

Траектории, определенные формулой (5.8) при $\lambda_2 < 0$ (рис. 5.2), подобны линиям уровня седловой поверхности, поэтому в этом случае нулевая точка покоя называется седлом.

Фокус. Пусть один корень λ_1 комплексный, т. е. $\lambda_1 = \alpha + i\beta$, $\beta \neq 0$. Тогда $\lambda_2 = \alpha - i\beta$. Пусть $\mathbf{d} = (d_1, d_2)^T$ – собственный вектор матрицы $\mathbf{A}$, соответствующий собственному значению λ_1. Общее вещественное решение системы (5.6) выписывается согласно (3.30) в виде

$$\mathbf{y}(t) = c_1 \mathrm{Re}(e^{\lambda_1 t}\mathbf{d}) + c_2 \mathrm{Im}(e^{\lambda_1 t}\mathbf{d}), \tag{5.10}$$

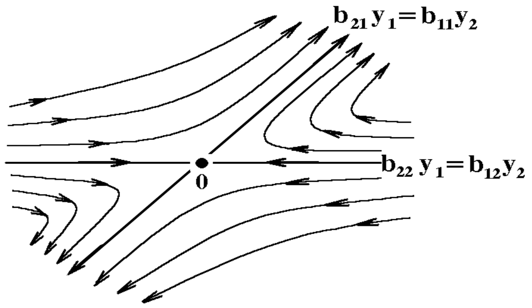

Рис. 5.2

Рис. 5.3

где $\mathbf{y}(t) = (y_1(t), y_2(t))^T$. Отметим, что компонентами вектора $\mathbf{d}$ являются комплексные числа, т. е. $\mathbf{d} = \mathbf{d}_1 + i\mathbf{d}_2$. Учитывая, что $e^{\lambda_1 t} = e^{\alpha t}(\cos\beta t + i\sin\beta t)$, имеем:

$$\mathrm{Re}(e^{\lambda_1 t}\mathbf{d}) = e^{\alpha t}(\mathbf{d}_1\cos\beta t - \mathbf{d}_2\sin\beta t),$$
$$\mathrm{Im}(e^{\lambda_1 t}\mathbf{d}) = e^{\alpha t}(\mathbf{d}_2\cos\beta t + \mathbf{d}_1\sin\beta t).$$

Следовательно, решение (5.10) записывается в виде

$$\mathbf{y}(t) = e^{\alpha t}[c_1(\mathbf{d}_1\cos\beta t - \mathbf{d}_2\sin\beta t) + c_2(\mathbf{d}_2\cos\beta t + \mathbf{d}_1\sin\beta t)]. \qquad (5.11)$$

Рассмотрим две качественно различные ситуации.

1. $\alpha < 0$. В этом случае множитель $e^{\alpha t}$ стремится к нулю, а выражение в квадратных скобках формулы (5.11) описывает замкнутые периодические кривые (эллипсы) периода $2\pi/\beta$. Поэтому траектория, представляемая вектор-функцией (5.11) при заданных c_1 и c_2 и $\alpha < 0$, будет спиралью, накручивающейся бесконечное число раз на точку покоя $\mathbf{0}$ и неограниченно приближающейся к ней (рис. 5.3). Поэтому нулевая точка покоя будет асимптотически устойчива и называется **устойчивым фокусом**.

2. $\alpha > 0$. В этом случае траектории будут также спиралями, но движение точки вдоль траектории происходит в противоположном направлении. Из-за множителя $e^{\alpha t}$ точка, находящаяся сколь угодно близко к точке покоя $\mathbf{0}$, с возрастанием t выходит вдоль траектории из произвольной фиксированной ϵ-окрестности этой точки. Поэтому нулевая точка покоя неустойчива и носит название **неустойчивого фокуса**.

Центр. Пусть $\lambda = i\beta$. В этом случае решение уравнения (5.6) попрежнему задается формулой (5.11), в которой $\alpha = 0$, и, следовательно, $e^{\alpha t} = 1$. Значит, вектор-функция (5.11) описывает при фиксированных c_1 и c_2 периодическую траекторию (эллипс) с периодом $2\pi/\beta$. Поэтому траекториями являются замкнутые кривые, а именно, траектории, являющиеся эллипсами и содержащие внутри себя точку покоя $\mathbf{0}$, которая называется центром (рис. 5.4). Так как при $c_1, c_2 \to 0$ эти траектории неограниченно стягиваются к $\mathbf{0}$, то центр является устойчивой точкой покоя. Однако при фиксированных значениях c_1 и c_2 в формуле (5.11) траектория будет эллипсом, и, следовательно, ее точки отделены от $\mathbf{0}$ при $t \to \infty$. Таким образом, центр не является асимптотической точкой покоя.

Классификация нулевой точки покоя в зависимости от инвариантов матрицы A. Характеристическое уравнение для матрицы $\mathbf{A}$ в (5.6) имеет вид

$$\lambda^2 - I_1\lambda + I_2 = 0,$$

где $I_1 = a_{11} + a_{22} = \mathrm{tr}\,\mathbf{A}$, $I_2 = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \det\mathbf{A}$. Величины I_1 и I_2 являются инвариантами ортогональных преобразований матрицы $\mathbf{A}$. Очевидно, что характеристические корни λ_1 и λ_2 являются функциями инвариантов I_1 и I_2:

$$\lambda_{1,2} = \frac{I_1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{I_1^2 - 4I_2}.$$

При этом $\lambda_1 + \lambda_2 = I_1$, $\lambda_1\lambda_2 = I_2$. Из этих соотношений и анализа, проведенного выше, с очевидностью следует, что точка покоя $\mathbf{0}$ является:

1. Асимптотически устойчивым узлом, если $I_1^2 \geq 4I_2$, $I_2 > 0$, $I_1 < 0$, и неустойчивым узлом, если $I_1^2 \geq 4I_2$, $I_2 > 0$, $I_1 > 0$.

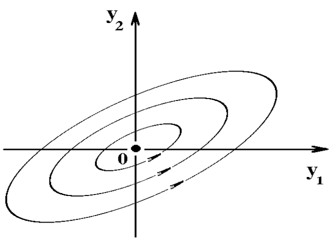

Рис. 5.4

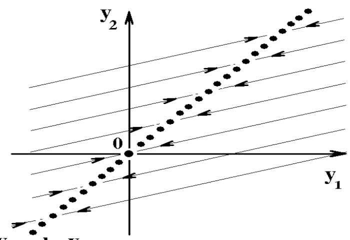

Рис. 5.5

2. Седлом, если $I_2 < 0$.

3. Устойчивым фокусом, если $I_1^2 < 4I_2$, $I_1 < 0$, и неустойчивым фокусом, если $I_1^2 < 4I_2$, $I_1 > 0$.

4. Центром, если $I_1 = 0$, $\quad I_2 > 0$.

Пример 5.2. Выяснить, при каких значениях константы a в системе уравнений

$$y_1' = ay_1 + y_2,$$
$$y_2' = y_1 + 2ay_2$$

нулевое решение будет седлом. Условием, при котором точка $\mathbf{0}$ – седло, является $I_2 < 0$. Значит, $2a^2 - 1 < 0$, и, следовательно, $|a| < \sqrt{1/2}$.

Нулевой корень

Пусть вначале $\lambda_1 = 0$, а $\lambda_2 \neq 0$. Очевидно, что λ_2 – вещественный корень, а матрица $\mathbf{A}$ имеет ненулевой собственный вектор $\mathbf{b} = (b_1, b_2)^T$, соответствующий собственному значению $\lambda_1 = 0$, т. е. является решением уравнения $\mathbf{Ab} = \mathbf{0}$. Следовательно, постоянная вектор-функция $\mathbf{y}(t) \equiv c\mathbf{b}$ (точка покоя) будет решением уравнения (5.6). Поэтому решение уравнения (5.6) имеет в этом случае континуум точек покоя $\mathbf{y} = c\mathbf{b}$, расположенных на прямой $y_1b_2 - y_2b_1 = 0$ в фазовой плоскости y_1, y_2. Пусть $\mathbf{d} = (d_1, d_2)^T$ – собственный вектор, соответствующий собственному значению λ_2. Тогда согласно п. 4.2.2 общее решение системы (5.6) имеет вид

$$\mathbf{y}(t) = c_1\mathbf{b} + c_2\mathbf{d}e^{\lambda_2 t}. \tag{5.12}$$

Исключая отсюда t, получаем, что траекториями вектор-функции (5.12) является семейство прямых $y_1d_2 - y_2d_1 = c_1(b_1d_2 - b_2d_1)$. Если $\lambda_2 < 0$, то точка, лежащая на одной из таких прямых, стремится согласно формуле (5.12) при $t \to \infty$ к точке покоя $\mathbf{y} = c_1\mathbf{b}$ (рис. 5.5). Так как при $c_1 \to 0$ эти точки покоя приближаются к нулевой точке покоя, то тривиальное решение будет устойчивым, но асимптотической устойчивости не будет, потому что в произвольной окрестности нулевой точки покоя существуют ненулевые точки покоя. Если $\lambda_2 > 0$, то траекториями являются также прямые, как и в случае $\lambda_2 < 0$, но движение точки на каждой прямой происходит в направлении от точки покоя, лежащей на этой прямой. Очевидно, что нулевая точка покоя в этом случае не будет устойчивой.

Пусть теперь $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Тогда согласно формуле (3.39) решение имеет вид

$$\mathbf{y}(t) = (\mathbf{E} + t\mathbf{A})\mathbf{c}, \tag{5.13}$$

где $\mathbf{c} = (c_1, c_2)^T$ – произвольный вектор. Отсюда следует, что нулевая точка покоя устойчива, только если матрица $\mathbf{A}$ тождественно равна нулю, так как в этом случае решением, определенным формулой (5.13), будет $\mathbf{y}(t) \equiv \mathbf{c}$. В противном случае нулевая точка покоя неустойчива.

5.2.3. Линейные системы с постоянными коэффициентами

В этом параграфе проведем исследование устойчивости нулевых решений многомерных однородных линейных систем с постоянными коэффициентами

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{y}, \tag{5.14}$$

где $\mathbf{A} = \{a_{ij}\},\ i,j = 1,\ldots,n,\ \mathbf{y} = (y_1,\ldots,y_n)^T$.

Теорема 5.1. *Пусть для всех корней $\lambda_1,\ldots,\lambda_p$ характеристического уравнения матрицы $\mathbf{A}$ выполнено условие $Re\lambda_j \le 0$. Тогда если $Re\lambda_j < 0,\ j = 1,\ldots,p$, то нулевое решение уравнения (5.14) асимптотически устойчиво, а если для каждого корня λ, для которого $Re\lambda = 0$, размерность пространства собственных векторов матрицы $\mathbf{A}$, соответствующих корню λ, равна кратности этого корня, то нулевое решение устойчиво.*

Доказательство. Пусть $\mathbf{y}(t)$ – вектор-функция, являющаяся решением уравнения (5.14). Оценим норму $\mathbf{y}(t)$ в зависимости от нормы начального значения $\mathbf{y}(0)$. Для этого используем фундаментальную систему решений $\mathbf{y}_1(t),\ldots,\mathbf{y}_n(t)$, построенную с помощью алгоритма, описанного в конце п. 4.2.2. Определитель Вронского этой фундаментальной системы не равен нулю ни в одной точке $t \in (-\infty,\infty)$, т. е. матрица Вронского $\mathbf{W}[\mathbf{y}_1,\ldots,\mathbf{y}_n](t)$ этой системы не вырождена для $t \in (-\infty,\infty)$. Отметим, что компонентами матрицы Вронского являются функции $y_{ij}(t),\ i,j = 1,\ldots,n$, где $y_{ij}(t)$ – i-я компонента вектор-функции $\mathbf{y}_j(t)$. Так как матрица Вронского не вырождена, то существует обратная матрица $\mathbf{W}^{-1}[\mathbf{y}_1,\ldots,\mathbf{y}_n](t)$. Обозначим через $\mathbf{z}(t)$ вектор-функцию, определенную формулой

$$\mathbf{z}(t) = \mathbf{W}[\mathbf{y}_1,\ldots,\mathbf{y}_n](t)\mathbf{W}^{-1}[\mathbf{y}_1,\ldots,\mathbf{y}_n](0)\mathbf{y}(0).$$

Очевидно, что $\mathbf{z}(t)$ – решение уравнения (5.14), и, кроме того, $\mathbf{z}(0) = \mathbf{y}(0)$. Поэтому из теоремы существования и единственности решения задачи Коши для уравнения (5.14) следует, что $\mathbf{z}(t) \equiv \mathbf{y}(t)$, $t \in (-\infty, \infty)$. Таким образом, мы имеем

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{W}[\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n](t)\mathbf{W}^{-1}[\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n](0)\mathbf{y}(0). \tag{5.15}$$

Отметим, что формула (5.15) также следует из (3.24) при $\mathbf{f}(t) \equiv \mathbf{0}$ и верна для произвольной фундаментальной системы решений $\mathbf{y}_1(t), \ldots, \mathbf{y}_n(t)$. Пусть компонентами матрицы $\mathbf{W}^{-1}[\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n](0)$ являются числа d_{ij}, $i, j = 1, \ldots, n$ и пусть

$$d = \max_{1 \le i,j \le n} |d_{ij}|.$$

Число d является нормой матрицы $\mathbf{W}^{-1}[\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n](0)$. Так как i-я компонента вектора $\mathbf{W}^{-1}[\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n](0)\mathbf{y}(0)$ равна $\sum d_{ij} y_j(0)$, где $y_j(0)$ – j-я компонента вектора $\mathbf{y}(0)$, то

$$\|\mathbf{W}^{-1}[\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n](0)\mathbf{y}(0)\| \le nd\|\mathbf{y}(0)\|. \tag{5.16}$$

Аналогично из (5.15) имеем:

$$\|\mathbf{y}(t)\| \le n \max_{1 \le i,j \le n} |y_{ij}(t)| \|\mathbf{W}^{-1}[\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n](0)\mathbf{y}(0)\|.$$

Отсюда, учитывая (5.16), получаем:

$$\|\mathbf{y}(t)\| \le n^2 d \max_{1 \le i,j \le n} |y_{ij}(t)| \|\mathbf{y}(0)\|. \tag{5.17}$$

Формула (5.17) дает оценку нормы произвольного решения $\mathbf{y}(t)$ через норму его значения в точке $t = 0$, модули компонент вектор-функций, составляющих фундаментальную систему решений уравнения (5.14) и норму матрицы $\mathbf{W}^{-1}[\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n](0)$. Отметим, что число d, представляющее норму матрицы $\mathbf{W}^{-1}[\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n](0)$, не равно нулю.

Так как фундаментальная система решений $\mathbf{y}_1(t), \ldots, \mathbf{y}_n(t)$ выбрана в соответствии с алгоритмом, описанным в конце п. 4.2.2, то мы имеем

$$y_{ij}(t) = e^{\mathrm{Re}\lambda_k t}[P_1(t)\cos(\mathrm{Im}\lambda_k t) + P_2(t)\sin(\mathrm{Im}\lambda_k t)], \tag{5.18}$$

где λ_k – некоторый корень характеристического уравнения, а $P_1(t)$ и $P_2(t)$ – фиксированные многочлены, степени которых меньше кратности корня λ_k.

Пусть теперь действительная часть всех характеристических корней матрицы $\mathbf{A}$ отрицательна, т. е. $\mathrm{Re}\lambda_k < 0,\ k = 1, \ldots, p$. Заметим, что для произвольных положительных чисел $\beta > 0,\ k > 0$ верно неравенство

$$\max_{0 \le t < \infty} |t^k e^{-\beta t}| \le c,$$

где c – константа. Поэтому из (5.18) следует оценка

$$|y_{ij}(t)| \le c_1 e^{-\alpha t}, \quad \text{где} \quad 0 < \alpha < \min_{1 \le k \le p} |\mathrm{Re}\lambda_k|. \tag{5.19}$$

Таким образом, функции $y_{ij}(t)$ ограничены по модулю при $0 \le t < \infty$. Положим

$$M = \max_{1 \le i,j \le n,\ t \ge 0} |y_{ij}(t)|,$$

тогда из (5.17) получаем

$$\|\mathbf{y}(t)\| \le Mn^2 d \|\mathbf{y}(0)\|. \tag{5.20}$$

Следовательно, полагая $\delta(\epsilon) = \epsilon/(Mn^2 d)$, имеем $\|\mathbf{y}(t)\| \le \epsilon$ если $\|\mathbf{y}(0)\| \le$ $\le \delta(\epsilon)$, т. е. в соответствии с определением устойчивости по Ляпунову мы получаем, что нулевое решение уравнения (5.14) устойчиво.

Из формулы (5.19) также следует, что $|y_{ij}(t)| \to 0$ при $t \to \infty$, и поэтому из (5.17) получаем, что $\|\mathbf{y}(t)\| \to 0$ при $t \to \infty$, т. е. нулевое решение также и асимптотически устойчиво при $\mathrm{Re}\lambda_k < 0,\ k = 1, \ldots, p$.

Пусть теперь вещественная часть некоторых корней равна нулю, и для каждого такого корня λ размерность пространства собственных векторов равна k_λ, где k_λ – кратность корня λ. Согласно п. 4.2.2, это означает, что для всех векторов $\mathbf{y}_\lambda$, полученных по формуле (4.36), верно соотношение $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})^k \mathbf{y}_\lambda = \mathbf{0},\ k = 1, \ldots, k_\lambda$. Следовательно, из формулы (4.37) получаем, что функции $y_{ij}(t)$ в (5.18), соответствующие этим корням, имеют вид

$$y_{ij}(t) = c_{ij}^1 \cos(\beta_{ij} t) + c_{ij}^2 \sin(\beta_{ij} t), \tag{5.21}$$

где $c_{ij}^1,\ c_{ij}^2$ – фиксированные константы. Следовательно, и в этом случае выполняется неравенство (5.20), т. е. нулевое решение устойчиво. С другой стороны, функция $y_{ij}(t)$ в (5.21) не стремится к нулю при $t \to \infty$, и поэтому нулевое решение уравнения (5.14) не будет асимптотически устойчивым.

Теорема доказана.

Теорема 5.2. *Пусть среди корней характеристического уравнения матрицы* $\mathbf{A}$ *есть такой корень* λ, *что* $Re\lambda > 0$. *Тогда нулевое решение уравнения (5.14) неустойчиво.*

Доказательство. Одним из решений (5.14) будет $\mathbf{y}(t) = ce^{\lambda t}\mathbf{y}_\lambda$, где $\mathbf{y}_\lambda$ – ненулевой собственный вектор матрицы $\mathbf{A}$, соответствующий собственному значению λ, т. е. $\mathbf{y}_\lambda$ – решение векторного уравнения $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})\mathbf{y}_\lambda = \mathbf{0}$. Пусть $\lambda = \alpha + i\beta$, тогда по условию теоремы $\alpha > 0$. Теперь для определенности считаем, что $\mathrm{Re}\mathbf{y}_\lambda \neq \mathbf{0}$. Тогда одним из вещественных решений уравнения (5.14) будет

$$\mathbf{y}_1(t) = \mathrm{Re}\mathbf{y}(t) = ce^{\alpha t}(\mathrm{Re}\mathbf{y}_\lambda \cos\beta t - \mathrm{Im}\mathbf{y}_\lambda \sin\beta t).$$

Если $\beta = 0$, то $\mathbf{y}_1(t) = ce^{\alpha t}\mathrm{Re}\mathbf{y}_\lambda$, и, следовательно,

$$\|\mathbf{y}_1(t)\| = ce^{\alpha t}\|\mathrm{Re}\mathbf{y}_\lambda\| = ce^{\alpha t}\|\mathbf{y}_1(0)\| \to \infty \quad \text{при} \quad t \to \infty.$$

Отсюда ясно, что нулевое решение неустойчиво при $\beta = 0$.

Пусть $\beta \neq 0$. Зададим последовательность точек $t_k = 2k\pi/\beta$, для которых имеем $\mathbf{y}_1(t_k) = ce^{\alpha t_k}\mathrm{Re}\mathbf{y}_\lambda$. Следовательно, при $k \to \infty$ выражение $\|\mathbf{y}_1(t_k)\| = ce^{\alpha t_k}\|\mathbf{y}_1(0)\|$ также стремится к бесконечности, т. е. мы не сможем выполнить условие устойчивости нулевого решения и при $\beta \neq 0$.

Теорема доказана. Аналогично неустойчивость доказывается, если $\mathrm{Im}\mathbf{y}(t) \neq \mathbf{0}$.

Пример 5.3. При каких значениях константы a нулевая точка покоя системы уравнений

$$\begin{aligned} y_1' &= ay_1 + y_3, \\ y_2' &= ay_2 + y_3, \\ y_3' &= y_1 + 3y_2 + ay_3 \end{aligned}$$

устойчива и асимптотически устойчива? Для этой системы характеристическим уравнением будет $(a-\lambda)^3 - 4(a-\lambda) = 0$. Отсюда $\lambda_1 = a$, $\lambda_2 = a - 2$, $\lambda_3 = a + 2$. Из теоремы 5.1 следует, что при $a < -2$ нулевое решение асимптотически устойчиво, а при $a \leq -2$ устойчиво. При $a > -2$ согласно теореме 5.2 нулевая точка покоя неустойчива.

5.3. Нелинейные системы

В данном параграфе рассматриваются некоторые методы анализа устойчивости нелинейных систем

$$\frac{dy_i}{dt} = f_i(t, y_1, \ldots, y_n), \quad i = 1, \ldots, n, \tag{5.22}$$

или, в векторной форме,

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{F}(t, \mathbf{y}), \quad \mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)^T, \quad \mathbf{F} = (f_1, \ldots, f_n)^T. \tag{5.23}$$

5.3.1. Анализ с помощью функции Ляпунова

Функцией Ляпунова системы (5.22) называется скалярная дифференцируемая функция $v(y_1, \ldots, y_n) = v(\mathbf{y})$, $\mathbf{y} \in R^n$, удовлетворяющая условиям:

1. $v(\mathbf{y}) > 0$ при $\mathbf{y} \neq 0$ и $v(\mathbf{0}) = 0$,

2. $\displaystyle \frac{dv}{dt}(\mathbf{y}) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial y_j}(\mathbf{y}) f_j(t, \mathbf{y}) \leq 0$ при $t \geq 0$.

Теорема 5.3. (**теорема Ляпунова**) *Пусть нулевая точка покоя* $\mathbf{y}(t) \equiv \mathbf{0}$ *является решением системы (5.22). Тогда, если существует функция Ляпунова этой системы, такая точка покоя устойчива.*

Если для функции Ляпунова справедливо дополнительное условие, что при некотором $\epsilon_0 > 0$ *для всякого* ϵ, $\epsilon_0 > \epsilon > 0$ *существует такое* $\beta(\epsilon) > 0$, *что при* $\epsilon_0 \geq \|\mathbf{y}\| \geq \epsilon$

3. $\displaystyle \frac{d}{dt} v(\mathbf{y}) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial y_j}(\mathbf{y}) f_j(t, \mathbf{y}) \leq -\beta(\epsilon) < 0,$

тогда нулевая точка покоя асимптотически устойчива.

Доказательство. Обозначим через $B^n(a)$, $a > 0$, открытый шар радиуса a в фазовом пространстве R^n, т. е. множество точек $\mathbf{y}$, для которых $\|\mathbf{y}\| < a$. Очевидно, что $\mathbf{0} \in B^n(a)$. Граница множества $B^n(a)$ является $(n-1)$-мерной сферой в фазовом пространстве. Обозначим ее через $S^{n-1}(a)$. Таким образом, если $\mathbf{y} \in S^{n-1}$, то $\|\mathbf{y}\| = a$. Так как $S^{n-1}(a)$ – ограниченное и замкнутое множество, то оно является компактом.

Пусть теперь $\epsilon > 0$. Множество точек в R, являющихся образом отображения $\varphi(\mathbf{y})$ при $\mathbf{y} \in S^{n-1}(a)$, обозначим через $\varphi(S^{n-1}(a))$. Так как $S^{n-1}(\epsilon)$ – компакт, то $\varphi(S^{n-1}(\epsilon))$ также компакт в R. Очевидно, что 0 не принадлежит $\varphi(S^{n-1}(\epsilon))$, поэтому существует такое $c_0 > 0$, что $\varphi(\mathbf{y}) > c_0$ для всех точек $\mathbf{y} \in S^{n-1}(\epsilon)$. Обозначим через U множество точек $\mathbf{y}$ из фазового пространства, для которых $\varphi(\mathbf{y}) < c_0$. Множество U – открытое и содержит точку $\mathbf{0}$ в фазовом пространстве R^n. Поэтому существует $\delta > 0$ такое, что $B^n(\delta) \subset U$. Так как $\varphi(B^n(\delta)) < c_0$, то $\delta < \epsilon$. Пусть $\mathbf{y}_0 \in B^n(\delta)$ и $\mathbf{y}(t)$ – решения задачи (5.23), для которой $\mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0$. Имеем:

$$\frac{d}{dt}\varphi[\mathbf{y}(t)] = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial\varphi}{\partial y_i}\frac{dy_i}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial\varphi}{\partial y_i} f_i(t,\mathbf{y}) \le 0, \qquad \varphi(\mathbf{y}_0) < c_0,$$

согласно свойству 2 и условию, что $\mathbf{y}(t)$ – решение системы (5.22). Поэтому $\varphi(\mathbf{y}(t)) < c_0$, и, значит, $\mathbf{y}(t)$ не принадлежит $S^{n-1}(\epsilon)$ ни при каком $t \in [0,\infty)$, следовательно, $\|\mathbf{y}(t)\| < \epsilon$, $t \in [0,\infty)$, т. е. траектория вектор-функции $\mathbf{y}_1(t)$ не выходит за пределы ϵ-окрестности точки покоя $\mathbf{0}$. Значит, выполняется условие устойчивости нулевого решения. Таким образом, первая часть теоремы доказана.

Переходим к доказательству асимптотической устойчивости нулевой точки покоя, если выполнено условие 3. Так как нулевая точка покоя устойчива, то для всякого $\epsilon > 0$ можно подобрать такое $\delta(\epsilon) > 0$, что любая траектория, начинающаяся в $\delta(\epsilon)$-окрестности точки покоя $\mathbf{0}$, не выходит за пределы ϵ-окрестности этой точки. Пусть $\epsilon < \epsilon_0/2$, где ϵ_0 – константа из условия 3 на функцию Ляпунова. Согласно условию 2 функция $v(\mathbf{y}(t))$, где $\mathbf{y}(t)$ – решение системы (5.22) с начальным условием в $\delta(\epsilon)$-окрестности точки покоя $\mathbf{0}$, монотонно убывает. Поэтому она имеет предел $\alpha = \lim_{t\to\infty} v(\mathbf{y}(t))$. Если $\alpha = 0$ для всякой такой вектор-функции $\mathbf{y}(t)$, то из условия 1 следует, что $\mathbf{y}(t) \to \mathbf{0}$ при $t \to \infty$, т. е. $\mathbf{0}$ – асимптотически устойчивая точка покоя. Допустим, что для некоторой траектории $\mathbf{y}(t)$ системы (5.23), начинающейся в $\delta(\epsilon)$-окрестности точки покоя $\mathbf{0}$, выполняется соотношение $\lim_{t\to\infty} v(\mathbf{y}(t)) = \alpha \ne 0$. Тогда $v(\mathbf{y}(t)) \ge \alpha$ при $t \ge 0$, так как функция $v(\mathbf{y}(t))$ – монотонно убывающая. Таким образом, траектория этой вектор-функции $\mathbf{y}(t)$ находится вне некоторой δ_1-окрестности точки $\mathbf{0}$. Следовательно, из условия 3 мы имеем, что вдоль этой траектории $dv/dt \le -\beta < 0$. Интегрирование этого неравенства дает $v(t) - v(t_0) \le -\beta(t - t_0)$, и, значит, $v(t) \le -\beta(t - t_0) + v(t_0) < 0$ при достаточно большом t, что противоречит свойству 1 функции Ляпунова. Таким образом, $\lim_{t\to\infty}\mathbf{y}(t)=\mathbf{0}$, т. е. точка покоя $\mathbf{0}$ асимптотически устойчива.

Теорема доказана.

Замечание 5.1. Отметим, что при доказательстве теоремы 5.3 мы использовали свойства 1, 2 и 3 локально, т. е. при $\|\mathbf{y}\|\le c$. Поэтому эта теорема будет справедлива, если свойства 1, 2 и 3 функции Ляпунова выполняются при $\|\mathbf{y}\|\le c$ для некоторого $c>0$.

Пример 5.4. Исследовать на устойчивость нулевое решение системы уравнений

$$y_1' = -y_1^5 + 2y_2^3,$$
$$y_2' = -y_1 - y_2^3 + y_2^5.$$

Покажем, что функция $v(y_1,y_2)=y_1^2+y_2^4$ является функцией Ляпунова для этой системы. Очевидно, что эта функция удовлетворяет первому условию. Далее имеем:

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{2}\frac{\partial v}{\partial y_j}(\mathbf{y})f_j(\mathbf{y}) &= 2y_1(-y_1^5+2y_2^3)+4y_2^3(-y_1-y_2^3+y_2^5)\\ &= -2y_1^6-4y_2^6+4y_2^8\le 0 \quad \text{при} \quad \|\mathbf{y}\|\le c.\end{aligned}$$

Таким образом, функция $v(y_1,y_2)$ удовлетворяет локально и второму условию функции Ляпунова. Следовательно, нулевое решение данной системы устойчиво.

5.3.2. Анализ с помощью первого приближения

Если нулевая точка покоя является решением уравнения (5.23), то, пользуясь разложением в ряд Тейлора вектор-функции $\mathbf{F}(t,\mathbf{y})$ в окрестности этой точки, можно записать это уравнение в виде

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt}=\mathbf{A}(t)\mathbf{y}+\mathbf{R}(t,\mathbf{y}), \tag{5.24}$$

где $\mathbf{A}(t)=\{a_{ij}(t)\},\ i,j=1,\dots,n,\ \mathbf{R}=(R_1,\dots,R_n)^T$,

$$a_{ij}(t)=\frac{\partial f_i}{\partial y_j}(t,\mathbf{0}),\ R_i(t,\mathbf{y})=\frac{1}{2}\sum_{j,l=1}^{n}y_jy_l\frac{\partial^2 f_i}{\partial y_j\partial y_l}(t,\theta\mathbf{y}),\ 0\le\theta\le 1.$$

Из разложения в ряд Тейлора следует, что

$$\frac{\|\mathbf{R}(t,\mathbf{y})\|}{\|\mathbf{y}\|}\to 0, \quad \text{при} \quad \mathbf{y}\to\mathbf{0}.$$

Поэтому исследование устойчивости нулевого решения системы (5.23) можно иногда проводить с помощью линейной системы

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{A}(t)\mathbf{y}, \tag{5.25}$$

получаемой из (5.24) отбрасыванием слагаемого $\mathbf{R}(t, \mathbf{y})$. Выражение $\mathbf{A}(t)\mathbf{y}$ является первым приближением вектор-функции $\mathbf{F}(t, \mathbf{y})$ в разложении Тейлора, поэтому (5.25) называется **системой уравнений первого приближения** для системы (5.23).

Теорема 5.4. *Пусть правая часть системы (5.23) не зависит от t и пусть эта система имеет нулевое решение $\mathbf{y} = \mathbf{0}$. Тогда, если действительная часть всех собственных значений матрицы $\mathbf{A}$ в (5.25) меньше нуля, то тривиальное решение системы (5.23) асимптотически устойчиво.*

Доказательство. Согласно условиям теоремы уравнения (5.23) и (5.25) имеют соответственно вид

$$\frac{dy_i}{dt} = f_i(y_1, \ldots, y_n) = f_i(\mathbf{y}), \quad i = 1, \ldots, n, \tag{5.26}$$

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{y}, \ \mathbf{A} = \{a_{ij}\}, \ a_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial y_j}(\mathbf{0}), \quad i, j = 1, \ldots, n. \tag{5.27}$$

Обозначим через $\mathbf{x}(t, \mathbf{y})$ вещественное решение уравнения (5.27) с начальным значением $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)^T$ в точке $t = 0$. Тогда имеем

$$\mathbf{x}(t, \mathbf{y}) = \sum_{j=1}^{n} y_j \mathbf{x}_j(t), \tag{5.28}$$

где $\mathbf{x}_j(t)$ – вещественное решение уравнения (5.27) с начальным значением $\mathbf{x}_j(0) = \mathbf{e}_j = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{j-1}, 1, 0, \ldots, 0)$. Далее, если $G(\mathbf{y})$ – какая-либо дифференцируемая функция, то

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} G(\mathbf{x}(t, \mathbf{y}))\Big|_{t=0} &= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial G}{\partial y_j}(\mathbf{x}(0, \mathbf{y})) \frac{dx_j}{dt}(0, \mathbf{y}) = \\ &= \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial G}{\partial y_j}(\mathbf{y}) a_{jk} y_k, \end{aligned} \tag{5.29}$$

где $x_j(0, \mathbf{y})$ – j-я компонента вектор-функции $\mathbf{x}(0, \mathbf{y})$.

Положим
$$v(\mathbf{y}) = \int_0^\infty (\mathbf{x}(\tau, \mathbf{y}))^2 d\tau, \tag{5.30}$$
где $(\mathbf{x})^2$ – скалярное произведение вектора $\mathbf{x}$ на самого себя, т. е.
$$(\mathbf{x})^2 = \mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = \sum_{j=1}^{n} (x_j)^2.$$
Из (5.28) и (5.30) получаем
$$v(\mathbf{y}) = \sum_{i,j=1}^{n} y_i y_j \int_0^\infty (\mathbf{x}_i(\tau) \cdot \mathbf{x}_j(\tau)) d\tau. \tag{5.31}$$
Так как действительная часть всех корней характеристического уравнения матрицы $\mathbf{A}$ отрицательна, то из (5.19) следует, что существует такое $\alpha > 0$, что $|\mathbf{x}_i(\tau) \cdot \mathbf{x}_j(\tau)| \leq ce^{-\alpha\tau}$. В частности, если $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ – все корни характеристического многочлена, то в качестве α может быть любое положительное число меньше, чем $\min_{1 \leq k \leq p} |\mathrm{Re}\lambda_k|/2$. Таким образом, очевидно, что интеграл в (5.31) сходится при $\tau \to \infty$, и, значит, функция $v(\mathbf{y})$ принимает конечные значения для всех $\mathbf{y} \in R^n$.

Выражение (5.31) является квадратичной формой, а так как при $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$ подынтегральное выражение (5.30) строго положительно, и, следовательно, $v(\mathbf{y}) > 0$, то эта форма положительно определена. Поэтому существуют такие положительные константы c_1 и c_2, что
$$c_1(\mathbf{y})^2 \leq v(\mathbf{y}) \leq c_2(\mathbf{y})^2. \tag{5.32}$$

Теперь заметим, что $\mathbf{x}(\tau, \mathbf{x}(t, \mathbf{y})) = \mathbf{x}(\tau + t, \mathbf{y})$. Следовательно, из (5.30) имеем $v(\mathbf{x}(\tau, \mathbf{y})) = \int_0^\infty (\mathbf{x}(\tau, \mathbf{x}(t, \mathbf{y})))^2 d\tau = \int_0^\infty (\mathbf{x}(\tau + t, \mathbf{y}))^2 d\tau = = \int_t^\infty (\mathbf{x}(\tau, \mathbf{y}))^2 d\tau$. Отсюда, а также учитывая (5.29), получаем:
$$\sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial y_j}(\mathbf{y}) a_{jk} yk = \frac{d}{dt} \int_t^\infty (\mathbf{x}(\tau, \mathbf{y}))^2 d\tau \Big|_{t=0} = -(\mathbf{y})^2. \tag{5.33}$$

Рассмотрим теперь выражение $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial y_j}(\mathbf{y}) f_j(\mathbf{y})$, где $f_j(\mathbf{y}),\ j = 1, \ldots, n$ – функции из (5.26). Так как $\mathbf{0}$ – решение системы (5.26), то
$$f_i(\mathbf{y}) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} y_k + R_i, \qquad i = 1, \ldots, n,$$

где

$$R_i(\mathbf{y}) = \frac{1}{2}\sum_{j,l=1}^{n} y_j y_l \frac{\partial^2 f_i}{\partial y_j \partial y_l}(\theta\mathbf{y}),\ 0 \le \theta \le 1.$$

Следовательно, учитывая (5.33), имеем:

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial v}{\partial y_j}(\mathbf{y})f_j(\mathbf{y}) &= \sum_{j,k=1}^{n}\frac{\partial v}{\partial y_j}(\mathbf{y})a_{jk}y_k + \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial v}{\partial y_j}(\mathbf{y})R_j = \\ &= -(\mathbf{y})^2 + \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial v}{\partial y_j}(\mathbf{y})R_j.\end{aligned} \tag{5.34}$$

Из (5.31) с очевидностью следует, что

$$\frac{\partial v}{\partial y_j}(\mathbf{y}) = \sum_{k=1}^{n} b_k y_k, \quad \text{где} \quad b_k - \text{константа}.$$

Поэтому $\left| \dfrac{\partial v}{\partial y_j}(\mathbf{y}) \right| \le l\sqrt{\mathbf{y}\cdot\mathbf{y}},\ l > 0$. Кроме того, $|R_j(\mathbf{y})| \le o(\mathbf{y})\|\mathbf{y}\|$. Следовательно, учитывая (5.34), получаем

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial v}{\partial y_j}f_j(\mathbf{y}) \le -\mathbf{y}\cdot\mathbf{y} + \alpha(\mathbf{y}\cdot\mathbf{y})$$

при $\|\mathbf{y}\| \le c$ для некоторых $c > 0$ и $1 > \alpha > 0$. Значит, существует такое $d_1 > 0$, что

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial v}{\partial y_j}f_j(\mathbf{y}) \le -d_1(\mathbf{y})^2 \quad \text{при} \quad \|\mathbf{y}\| \le . \tag{5.35}$$

А так как $v(\mathbf{y}) = 0$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{y} = \mathbf{0}$, функция $v(\mathbf{y})$ является локальной функцией Ляпунова, удовлетворяющей локально условиям 1, 2 и 3 теоремы 5.3. Таким образом, из замечания 5.1 следует, что нулевая точка решения уравнения (5.26) является асимптотически устойчивой точкой покоя.

Теорема доказана.

Замечание 5.2. Пусть $\mathbf{y}(t)$ – траектория, являющаяся решением системы (5.24). Положим $p(t) = v(\mathbf{y}(t)),\ t \ge 0$. Из (5.32) и (5.35) заключаем, что при $\|\mathbf{y}(0)\| \le c$ для достаточно малого c функция $p(t)$ – монотонно убывающая, т. е. $p'(t) \le 0,\ t \le 0$. Поэтому $0 \le v(\mathbf{y}(t)) \le c,\ t \ge 0$, и из (5.32) следует оценка

$$0 \le p'(t) \le -c_3 p(t), \qquad t \ge 0$$

для некоторого $c_3 > 0$. Интегрируя это неравенство, мы имеем:

$$0 \le p(t) = v(\mathbf{y}(t)) \le p_0 e^{-c_3 t} = v(\mathbf{y}(0)) e^{-c_3 t}, \qquad t \ge 0.$$

Таким образом, из (5.32) следует, что

$$\|\mathbf{y}(t)\| \le c_4 e^{-\frac{1}{2} c_3 t} \quad \text{для некоторого} \quad c_4 > 0.$$

Замечание 5.3. Теорема 5.4 справедлива и для неавтономной системы (5.23), если только верна оценка

$$\|\mathbf{R}(t, \mathbf{y})\| \le \alpha(\mathbf{y}) \|\mathbf{y}\| \text{ при } \|\mathbf{y}\| \le c, \ \alpha(\mathbf{y}) \to 0 \text{ при } \mathbf{y} \to \mathbf{0},$$

где $\mathbf{R}(t, \mathbf{y})$ – вектор-функция в (5.24). Доказательство в этом случае проводится аналогично доказательству теоремы 5.4.

Пример 5.5. Исследовать на устойчивость нулевое решение нелинейной системы уравнений

$$\begin{aligned} y_1' &= -y_1 + y_2 + y_1^2 + y_1^3, \\ y_2' &= 2y_1 - 5y_2 + y_2^3. \end{aligned}$$

Системой уравнений первого приближения будет

$$\begin{aligned} y_1' &= -y_1 + y_2, \\ y_2' &= 2y_1 - 5y_2. \end{aligned}$$

Следовательно, $\lambda_{1,2} = -3 \pm \sqrt{6} < 0$, и, значит, нулевое решение нелинейной системы будет асимптотически устойчивым.

Глава 6

Вариационные задачи

6.1. Функционалы и функциональные пространства

При описании многих явлений физики, экономики, механики и т. д. с помощью математических моделей часто используется такое важное понятие, как функционал. **Функционалом** называется преобразование, отображающее некоторое выбранное множество функций (скалярных или векторных) в множество вещественных чисел. Например, если этим множеством являются все непрерывно дифференцируемые кривые, соединяющие точки A и B на плоскости xy, то отображение, ставящее кривой в соответствие ее длину, будет функционалом. Также на множестве скалярных ограниченных функций $f(\mathbf{x}) : D \to R$, заданных в области D, функционалом является определенный интеграл по этой области.

Множество, элементами которого являются функции, называется **функциональным пространством**. Таким образом, функционал отображает некоторое подмножество в функциональном пространстве в вещественную прямую. Для функционалов, так же как и для обычных функций, отображающих некоторую область $D \subset R^n$ в R, важным является понятие непрерывности. Для функций непрерывность формулируется в терминах расстояний между точками в R^n и R, аналогично и для функциональных пространств вводится понятие расстояния между функциями, для чего используются такие понятия, как метрика и норма.

6.1.1. Метрические пространства

Метрическим пространством называется множество M произвольной природы вместе с вещественной функцией $\rho : M \times M \to R$,

удовлетворяющей для любых элементов $x, y, z \in M$ следующим условиям:
1) $\rho(x, y) \geq 0$;
2) $\rho(x, y) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = y$;
3) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$;
4) $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(y, z)$ (неравенство треугольников).

Функция $\rho(x, y)$ называется **метрикой** пространства M, а значение этой функции для заданных точек x и y в M называется **расстоянием** между этими точками.

Например, пусть M – функциональное пространство, образованное множеством ограниченных скалярных функций, заданных в области $D \subset R^n$. Тогда метрикой в M будет отображение

$$\rho(f_1, f_2) = \sup_{\mathbf{x} \in D} |f_1(\mathbf{x}) - f_2(\mathbf{x})|, \tag{6.1}$$

где $f_1(\mathbf{x})$ и $f_2(\mathbf{x})$ – ограниченные функции.

6.1.2. Линейные нормированные пространства

Линейным пространством называется множество M произвольной природы, для элементов которого определены операции их сложения "+" и умножения на число, при этом удовлетворяются следующие свойства:
1) $x + y = y + x$;
2) $(x + y) + z = x + (y + z)$;
3) существует нулевой элемент $0 \in M$ такой, что $x + 0 = x$ для любого $x \in M$;
4) для каждого $x \in M$ существует такой элемент $-x$, что $x + (-x) = 0$;
5) $1x = x$;
6) $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$;
7) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$;
8) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$.

Линейное пространство M называется **нормированным**, если каждому элементу $x \in M$ поставлено в соответствие число $||x||$ – **норма** этого элемента, так что
1) $||x|| = 0$ тогда и только тогда, когда $x = 0$ в M;
2) $||\alpha x|| = |\alpha| ||x||$;
3) $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$.

Если M – нормированное пространство, то оно превращается в метрическое пространство путем введения метрики по формуле

$$\rho(x, y) = \|x - y\|. \tag{6.2}$$

Все свойства метрического пространства легко следуют из свойств для линейного и нормированного пространства.

Важным в анализе является функциональное пространство $C(D)$, состоящее из всех непрерывных ограниченных вектор-функций $\mathbf{f}(\mathbf{x})$, заданных в области $D \subset R^n$. Операция сложения элементов этого пространства и умножения на числа в качестве обычного сложения функций и умножения их на числа превращает $C(D)$ в линейное пространство. А введение нормы по формуле

$$\|\mathbf{f}\| = \sup_{i, \mathbf{x} \in D} |f_i(\mathbf{x})|, \tag{6.3}$$

где $f_i(\mathbf{x})$ – i-я компонента вектор-функции $\mathbf{f}(\mathbf{x})$, делает его нормированным и соответственно метрическим пространством с метрикой, определенной выражением (6.2).

Также рассматривается функциональное пространство $C^n[a, b]$, состоящее из всех непрерывных скалярных функций на отрезке $[a, b]$, имеющих непрерывные производные до порядка k. Норма функции $f(x)$ определяется по формуле

$$\|f\| = \sum_{j=0}^{k} \max_{x \in [a,b]} |f^{(j)}(x)|, \tag{6.4}$$

где $f^{(0)}(x) = f(x)$. Норма (6.4) легко обобщается также и на векторные функции, заданные в области $D \subset R^n$.

6.1.3. Непрерывные функционалы

Если в функциональном пространстве введена метрика, то для функционалов легко формулируется понятие непрерывности: функционал F, отображающий метрическое функциональное пространство M в R, называется непрерывным в точке $y_0 \in M$, если для всякого $\epsilon > 0$ существует такое $\delta(\epsilon) > 0$, что $|F(y) - F(y_0)| \leq \epsilon$, как только $\|y - y_0\| \leq \delta(\epsilon)$.

Аналогично определяется непрерывность функционала в точках произвольного множества $G \subset M$.

Отметим, что непрерывный функционал, заданный на функциональном пространстве с одной метрикой, может не быть непрерывным на том же самом пространстве, но с другой метрикой. Рассмотрим, например, функционал на пространстве $C^1[a,b]$ гладких кривых $y(x)$, $x \in [a,b]$, ставящий в соответствие кривой ее длину. Так как каждой кривой l можно указать сколь угодно близкую в норме C кривую, длина которой больше длины l в несколько раз, например в виде синусоиды малой амплитуды, пересекающей эту кривую достаточное число раз, то этот функционал не будет непрерывным в норме $C[a,b]$, однако в норме $C^1[a,b]$ он непрерывен.

6.1.4. Задачи вариационного исчисления

В данной главе рассматриваются некоторые функционалы, исследуемые в теории вариационного исчисления. Эти функционалы описываются через определенные интегралы в виде

$$I(\mathbf{y}) = \int_a^b F(x, \mathbf{y}(x), \mathbf{y}'(x), \ldots, \mathbf{y}^{(k)}(x))dx, \tag{6.5}$$

где $\mathbf{y}(x)$ – вектор-функция размерности n, определенная на отрезке $[a,b]$, $F()$ – фиксированная скалярная функция, отображающая точки области $G \subset R^{1+n(k+1)}$ в R. Множество вектор-функций $\mathbf{y}(x)$, на котором задан функционал I, называется **допустимым**. Это множество является подмножеством функционального пространства, состоящего из всех непрерывных вектор-функций, заданных на отрезке $[a,b]$, имеющих непрерывные производные до порядка k и для которых интеграл (6.5) существует. Предполагается, что на функциональном пространстве задана какая-либо метрика, относительно которой функционал (6.5) является непрерывным.

Основной задачей вариационного исчисления является исследование функционалов вида (6.5) на экстремум, т. е. нахождение такой функции $\mathbf{y}_0(x)$, на которой функционал достигает наибольшего или наименьшего значения. Такая функция называется **критической**, или **стационарной** точкой функционала.

6.2. Задачи на безусловный экстремум

6.2.1. Уравнение Эйлера для функционалов, зависящих от скалярных функций

Рассмотрим простейший функционал вида (6.5)

$$I(y) = \int_a^b F(x, y, y')dx, \tag{6.6}$$

где $F(x, y, z)$ – заданная функция, имеющая непрерывные частные производные до второго порядка. Функционал (6.6) задан на пространстве скалярных дважды непрерывно дифференцируемых функций, определенных на отрезке $[a, b]$. Очевидно, что этот функционал будет непрерывен в $C^1[a, b]$, где C^1 – норма (6.4) для $k = 1$.

Ставится задача найти критическую точку функционала (6.6), т. е. найти такую функцию $y_0(x)$, что число

$$I(y_0) = \int_a^b F(x, y_0(x), y_0'(x))dx$$

является либо максимальным, либо минимальным для всех дважды непрерывно дифференцируемых функций на $[a, b]$. Такая задача называется задачей на **безусловный** (**абсолютный**) экстремум, так как рассматривается все пространство дважды непрерывно дифференцируемых функций на отрезке $[a, b]$.

Теорема 6.1. *Критическая точка функционала (6.6) удовлетворяет уравнению (Эйлера)*

$$F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} = 0, \tag{6.7}$$

где F_y и $F_{y'}$ – частные производные функции F по y и по y' соответственно, а выражение $\frac{d}{dx}F_{y'}$ означает производную по x сложной функции $F_{y'}[x, y(x), y'(x)]$.

Доказательство. Пусть $y_0(x)$ – критическая точка. Возьмем произвольную непрерывно дифференцируемую функцию $\phi(x) : [a, b] \to R$, удовлетворяющую условию $\phi(a) = \phi(b) = 0$. Рассмотрим функцию

$$f(\alpha) = \int_a^b F(x, y_0(x) + \alpha\phi(x), y_0'(x) + \alpha\phi'(x))dx. \tag{6.8}$$

Так как $y_0(x)$ – экстремальная функция для функционала (6.6), то точка $\alpha = 0$ является экстремальной для функции $f(\alpha)$. Следовательно,

$$f'(0) = 0. \tag{6.9}$$

Из (6.8) имеем:

$$\begin{aligned} f'(0) &= \int_a^b F_y(x, y_0(x), y_0'(x))\phi(x)dx + \\ &+ \int_a^b F_{y'}(x, y_0(x), y_0'(x))\phi'(x)dx. \end{aligned} \tag{6.10}$$

Интегрирование второго слагаемого в этом уравнении по частям дает

$$\int_a^b F_{y'}(x, y_0(x), y_0'(x))\phi'(x)dx = F_{y'}(x, y_0(x), y_0'(x))\phi(x)\Big|_a^b -$$

$$- \int_a^b \frac{d}{dx}(F_{y'}(x, y_0(x), y_0'(x)))\phi(x)dx =$$

$$= - \int_a^b \frac{d}{dx}(F_{y'}(x, y_0(x), y_0'(x)))\phi(x)dx,$$

так как $\phi(a) = \phi(b) = 0$. Поэтому из (6.9) и (6.10) следует

$$\int_a^b [F_y(x, y_0(x), y_0'(x)) - \frac{d}{dx}F_{y'}(x, y_0(x), y_0'(x))]\phi(x)dx = 0. \tag{6.11}$$

Мы видим, что интеграл (6.11) равен нулю для произвольной гладкой функции $\phi(x)$, удовлетворяющей ограничению $\phi(a) = \phi(b) = 0$. Покажем, что в этом случае функция в квадратных скобках равна нулю для всех $x \in [a, b]$. Так как эта функция непрерывна, то достаточно доказать, что она равна нулю во всех внутренних точках отрезка $[a, b]$. Пусть x_0 – произвольная внутренняя точка $[a, b]$. Предположим, что функция в квадратных скобках в (6.11) не равна нулю в этой точке, и для определенности допустим, что она больше нуля. Тогда из условия непрерывности следует, что она больше нуля при $|x - x_0| \leq \epsilon$ для некоторого $\epsilon > 0$. При этом ϵ выбираем таким, чтобы $[x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon] \subset [a, b]$. Возьмем в качестве $\phi(x)$ функцию

$$\phi(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{(x-x_0)^2-\epsilon}}, & |x - x_0| < \epsilon \\ 0 & |x - x_0| \geq \epsilon. \end{cases}$$

Функция $\phi(x)$ бесконечно дифференцируема и строго положительна в ϵ-окрестности точки x_0. Тогда очевидно, что для этой функции $\phi(x)$ интеграл в (6.11) будет больше нуля, что противоречит равенству (6.11). Таким образом, имеем:

$$F_y(x, y_0(x), y_0'(x)) - \frac{d}{dx} F_{y'}(x, y_0(x), y_0'(x)) \equiv 0, \quad x \in [a, b],$$

т. е. экстремальная функция $y_0(x)$ удовлетворяет уравнению (6.7).

Теорема доказана.

Раскрывая производную d/dx в (6.7), получаем

$$F_{y'y'} y'' + F_{y'y} y' + F_{xy'} - F_y = 0, \tag{6.12}$$

т. е. уравнение Эйлера является обыкновенным нелинейным уравнением второго порядка. Таким образом, для нахождения экстремальной функции для функционала (6.6) необходимо решить уравнение (6.12).

Если ставится задача нахождения экстремальной функции для функционала (6.6) среди всех дважды непрерывно дифференцируемых функций на $[a, b]$, удовлетворяющих в граничных точках условиям $y(a) = A$, $y(b) = B$, то в этом случае нужно найти решение уравнения (6.12) с этими граничными условиями.

Уравнение Эйлера может быть сведено к уравнению первого порядка, если подынтегральная F не зависит от y либо от x. В первом случае $F_y \equiv 0$, и, значит, уравнение (6.7) сводится к следующему уравнению первого порядка $F_{y'} = c$. Если F не зависит от x, то $F_{xy'} = 0$ в (6.12) и, следовательно,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(y' F_{y'} - F) &= y'' F_{y'} + (y')^2 F_{yy'} + y' y'' F_{y'y'} - y' F_y - y'' F_{y'} \\ &= y'(y'' F_{y'y'} + y' F_{y'y} - F_y) = 0, \end{aligned}$$

т. е. (6.12) сводится к уравнению первого порядка

$$y' F_{y'} - F = c. \tag{6.13}$$

Уравнения (6.7) и соответственно (6.12) дают необходимое, но не обязательно достаточное условие экстремума. Так же как и для обычных функций, необходимое условие экстремума $y'(x_0) = 0$ не является достаточным. По аналогии с дифференциальным анализом функция $y_0(x)$, удовлетворяющая условию (6.7) или (6.12), будет давать максимум функционалу (6.6), если для нее выполняется условие **Лежандра** $F_{y'y'} < 0$, и минимум, если $F_{y'y'} > 0$.

Пример 6.1. Среди кривых $y(x)$, удовлетворяющих граничным условиям $y(a) = A,\ y(b) = B$, найти такую кривую, которая при вращении образует поверхность наименьшей площади. Площадь поверхности вращения кривой $y(x)$ выражается формулой

$$S(y) = 2\pi \int_a^b y\sqrt{1+y'^2}dx, \tag{6.14}$$

т. е. является функционалом вида (6.6). Экстремальная кривая $y(x)$ является решением уравнения Эйлера (6.12). Отметим, что если подынтегральная функция в (6.6) не зависит от x, то решением уравнения (6.12) будет решение уравнения (6.13), являющегося первым интегралом уравнения (6.12). Таким образом, из (6.14) получаем

$$y\sqrt{1+y'^2} - y\frac{y'^2}{\sqrt{1+y'^2}} = c.$$

Отсюда $y = c\sqrt{1+y'^2}$, $y' = \sqrt{\dfrac{y^2-c^2}{c^2}}$, следовательно, $\dfrac{1}{c}\displaystyle\int dx =$ $= \displaystyle\int \frac{dy}{\sqrt{y^2-c^2}}$. Поэтому $\dfrac{x+c_1}{c} = \ln(y+\sqrt{y^2-c^2})$ и $y(x) = c\,\mathrm{ch}\Big(\dfrac{x+c_1}{c}\Big)$. Эта кривая $y(x)$ называется цепной линией. Краевые условия $y(a) = A$, $y(b) = B$ удовлетворяются путем выбора констант c и c_1. Отметим, что выписанная экстремальная кривая $y(x)$ может удовлетворять краевым условиям только при определенных значениях A и B.

6.2.2. Система уравнений Эйлера для функционалов, зависящих от векторных функций

Аналогично уравнению (6.7) находится векторное уравнение, которому должна удовлетворять экстремальная вектор-функция $\mathbf{y}_0(x)$ для функционала

$$I(\mathbf{y}) = \int_a^b F(x, \mathbf{y}, \mathbf{y}')dx, \qquad \mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n), \tag{6.15}$$

определенного на пространстве дважды непрерывно дифференцируемых вектор-функций $\mathbf{y}(x)$, заданных на отрезке $[a, b]$. Подынтегральная функция $F(x, \mathbf{y}, \mathbf{y}')$ в (6.15) является скалярной, дважды непрерывно дифференцируемой функцией по всем своим аргументам.

Для получения этого векторного уравнения нужно взять в качестве аналога функции $\phi(x)$, используемой при доказательстве теоремы 6.1, функцию $\boldsymbol{\phi} = \phi(x)\mathbf{e}_i$, где $\phi(x)$ – скалярная, непрерывно дифференцируемая функция, удовлетворяющая условиям $\phi(a) = \phi(b) = 0$, а $\mathbf{e}_i$ – стандартный базисный вектор, у которого i-я координата равна единице, все остальные – нули. Используя эту вектор-функцию $\boldsymbol{\phi}$, так же как и при доказательстве теоремы 6.1, получаем уравнение Эйлера (6.7) для i-й компоненты экстремальной вектор-функции $\mathbf{y}_0(x)$. Объединяя эти уравнения для всех i, мы находим, что экстремальная вектор-функция $\mathbf{y}_0(x)$ удовлетворяет векторному уравнению Эйлера

$$\mathbf{F}_{\mathbf{y}} - \frac{d}{dx}\mathbf{F}_{\mathbf{y}'} = \mathbf{0}, \tag{6.16}$$

где $\mathbf{F}_{\mathbf{y}} = (F_{y_1}, \ldots, F_{y_n})$, $\mathbf{F}_{\mathbf{y}'} = (F_{y'_1}, \ldots, F_{y'_n})$, или, в покомпонентной записи,

$$F_{y_i} - \frac{d}{dx}F_{y'_i} = 0, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{6.17}$$

6.3. Задачи на условный экстремум

Вариационной задачей на **условный экстремум** называют задачу нахождения экстремума функционала на множестве функций, удовлетворяющих некоторым соотношениям (связям).

6.3.1. Голономные связи

Мы будем рассматривать функционал (6.15), заданный на пространстве дважды непрерывно дифференцируемых вектор-функций $\mathbf{y}(x) = (y_1(x), \ldots, y_n(x))$ на отрезке $[a, b]$ со связями

$$\phi_i(x, \mathbf{y}) = 0, \quad i = 1, \ldots, m, \quad m < n. \tag{6.18}$$

В механике эти связи называются **голономными**. Они определяют некоторую гиперповерхность в R^{n+1}, в частности, гиперповерхность имеет размерность $n - m + 1$, если эти связи линейно независимы.

Ставится задача нахождения вектор-функции $\mathbf{y}_0(x)$, дающей экстремальное значение функционалу (6.15) на множестве дважды непрерывно дифференцируемых вектор-функций $\mathbf{y}(x)$, удовлетворяющих связям

(6.18). Эта задача, по аналогии с задачей нахождения условного экстремума для функций, решается путем введения нового функционала с множителями Лагранжа:

$$I_1(\mathbf{z}) = \int_a^b (F(x, \mathbf{y}, \mathbf{y}') + \sum_{j=1}^m \lambda_j(x)\phi_j(x, \mathbf{y}))dx, \tag{6.19}$$

где $\mathbf{z} = (\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{y})$, $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$, $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)$. Функционал (6.19) исследуется на безусловный экстремум на пространстве вектор-функции $\mathbf{z}(x)$, т. е. решается система уравнений Эйлера, имеющая для этого функционала вид

$$F_{y_i} + \sum_{j=1}^m \lambda_j(x)\frac{\partial \phi_j}{\partial y_i} - \frac{d}{dx}F_{y_i'} = 0, \qquad i = 1, \ldots, n,$$

$$\phi_j(x, \mathbf{y}) = 0, \qquad j = 1, \ldots, m. \tag{6.20}$$

Число уравнений в этой системе равно числу неизвестных функций $\lambda_1(x), \ldots, \lambda_m(x)$, $y_1(x), \ldots, y_n(x)$, являющихся компонентами искомой вектор-функции $\mathbf{z}(x)$.

Очевидно, что $I_1(\mathbf{z}) = I(\mathbf{y})$, если $\mathbf{z}(x)$ – вектор-функция, у которой компонента $\mathbf{y}(x) = y_1(x), \ldots, y_n(x)$ удовлетворяет уравнениям (6.18). Поэтому, если функции $\lambda_1(x), \ldots, \lambda_m(x)$ и $\mathbf{y}_0(x)$, найденные из уравнения (6.20), доставляют безусловный экстремум для функционала (6.19), то эти функции доставляют условный экстремум функционалу (6.15). Покажем обратное, а именно, что при специальном выборе функций $\lambda_1(x), \ldots, \lambda_m(x)$ экстремальная функция для функционала (6.15) с ограничениями (6.18) удовлетворяет уравнениям (6.20).

Теорема 6.2. *Пусть детерминант матрицы* $\{\partial\phi_i/\partial y_j\}$, $i, j = 1, \ldots, m$ *отличен от нуля, тогда компоненты экстремальной функции* $\mathbf{y}_0(x)$ *для функционала (6.15) с ограничениями (6.18) удовлетворяют уравнениям (6.20) при соответствующем выборе множителей* $\lambda_i(x), i = 1, \ldots, m$.

Доказательство. Так как $\det\{\partial\phi_i/\partial y_j\} \neq 0$, $i, j = 1, \ldots, m$, то только $n - m$ функций $y_{m+1}(x), \ldots, y_n(x)$ являются независимыми, а первые m функций $y_1(x), \ldots, y_m(x)$ выражаются через них в виде

$$y_i(x) = \psi_i(x, y_{m+1}(x), \ldots, y_n(x)), \qquad i = 1, \ldots, m.$$

Пусть $\mathbf{y}_0(x) = (y_{01}(x), \dots, y_{0n}(x))$ – экстремальная вектор-функция для функционала (6.15) со связями (6.18). Тогда имеем:

$$\mathbf{y}_0(x) = (\psi_1(x, y_{0m+1}(x), \dots, y_{0n}(x)), \dots, \psi_m(x, y_{0m+1}(x), \dots, y_{0n}(x)),$$

$$, y_{0m+1}(x), \dots, y_{0n}(x)). \qquad (6.21)$$

Пусть $\varphi(x)$ – непрерывно дифференцируемая скалярная функция, удовлетворяющая условиям $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$. Положим для некоторого фиксированного k

$$y_{\alpha m+k}(x) = y_{0m+k}(x) + \alpha\varphi(x), \qquad k = 1, \dots, n-m,$$

где α – вещественный параметр. Обозначим через $\mathbf{y}_\alpha(x)$ вектор-функцию, полученную из (6.21) заменой $y_{0m+k}(x)$ на $y_{\alpha m+k}(x)$. Очевидно, что $y_{0m+k}(x) = y_{\alpha m+k}(x)$ при $\alpha = 0$. Кроме того, вектор-функция $\mathbf{y}_\alpha(x)$ удовлетворяет ограничениям (6.18), т. е.

$$\phi_i(x, \mathbf{y}_\alpha(x)) \equiv 0, \qquad x \in [a, b], \qquad i = 1, \dots, m. \qquad (6.22)$$

Далее имеем

$$\frac{\partial}{\partial\alpha} y'_{\alpha i}\Big|_{\alpha=0} = \frac{d}{dx}\Big(\frac{\partial\psi_i}{\partial y_{m+k}}(x, y_{0m+1}(x), \dots, y_{0n}(x))\varphi(x)\Big). \qquad (6.23)$$

Теперь рассмотрим функцию

$$f(\alpha) = \int_a^b (F(x, \mathbf{y}_\alpha(x), \mathbf{y}'_\alpha(x)) + \sum_{j=1}^m \lambda_j(x)\phi_j(x, \mathbf{y}_\alpha(x)))dx, \qquad (6.24)$$

где $\lambda_j(x)$ – пока произвольные функции. В силу (6.22) имеем

$$f(\alpha) = \int_a^b F(x, \mathbf{y}_\alpha(x), \mathbf{y}'_\alpha(x))dx.$$

А так как $\mathbf{y}_\alpha(x) = \mathbf{y}_0(x)$ при $\alpha = 0$, где $\mathbf{y}_0(x)$ – экстремальная функция для функционала (6.15) со связями (6.18), то точка $\alpha = 0$ является экстремальной для функции $f(\alpha)$, т. е. $f'(0) = 0$. Из (6.24) получаем, используя (6.23):

$$
\begin{aligned}
f'(0) \;&=\; \int_a^b \Big(\sum_{i=1}^m \Big(F_{y_i} + \sum_{j=1}^m \lambda_j(x)\frac{\partial \phi_j}{\partial y_i}\Big)\frac{\partial \psi_i}{\partial y_{m+k}}\varphi(x)\Big)dx + \\
&+ \int_a^b \Big(\sum_{i=1}^m F_{y_i'}\Big(\frac{\partial \psi_i}{\partial y_{m+k}}\varphi(x)\Big)'\Big)dx + \\
&+ \int_a^b \Big(\Big(F_{y_{m+k}} + \sum_{j=1}^m \lambda_j(x)\frac{\partial \phi_j}{\partial y_{m+k}}\Big)\varphi(x) + F_{y'_{m+k}}\varphi'(x)\Big)dx = \\
&= \int_a^b \Big(\sum_{i=1}^m \Big(F_{y_i} + \sum_{j=1}^m \lambda_j(x)\frac{\partial \phi_j}{\partial y_i} - \frac{d}{dx}F_{y_i'}\Big)\frac{\partial \psi_i}{\partial y_{m+k}}\varphi(x)\Big)dx + \\
&+ \int_a^b \Big(F_{y_{m+k}} + \sum_{j=1}^m \lambda_j(x)\frac{\partial \phi_j}{\partial y_{m+k}} - \frac{d}{dx}F_{y'_{m+k}}\Big)\varphi(x)dx = 0.
\end{aligned}
\tag{6.25}
$$

В этой формуле

$$
\begin{aligned}
&F_{y_i} = F_{y_i}(x, \mathbf{y}_0(x), \mathbf{y}_0'(x)), \quad i = 1, \ldots, n, \\
&F_{y_i'} = F_{y_i'}(x, \mathbf{y}_0(x), \mathbf{y}_0'(x)), \quad i = 1, \ldots, n, \\
&\frac{\partial \phi_i}{\partial y_j} = \frac{\partial \phi_i}{\partial y_j}(x, \mathbf{y}_0(x)), \quad i = 1, \ldots, m, \quad j = 1, \ldots, n, \\
&\frac{\partial \psi_i}{\partial y_{m+k}} = \frac{\partial \psi_i}{\partial y_{m+k}}(x, y_{0m+1}(x), \ldots, y_{0n}(x)), \; i = 1, \ldots, m, \\
&k = 1, \ldots, n-m.
\end{aligned}
$$

Теперь рассмотрим систему обычных линейных уравнений относительно $\lambda_1(x), \ldots, \lambda_m(x)$:

$$
\sum_{j=1}^m \lambda_j \frac{\partial \phi_j}{\partial y_i}(x, \mathbf{y}_0(x)) = \frac{d}{dx}F_{y_i'}(x, \mathbf{y}_0(x)) - F_{y_i}(x, \mathbf{y}_0(x)), \tag{6.26}
$$

где $i = 1, \ldots, m$. Так как $\det\{\partial\phi_j/\partial y_i\},\ i, j = 1, \ldots, m$ не равен нулю, система (6.26) разрешима, т. е. существуют такие функции $\lambda_1(x), \ldots, \lambda_m(x)$, что уравнение (6.26) превращается в тождество. Для определенных таким образом функций $\lambda_1(x), \dots, \lambda_m(x)$ первые m уравнений системы (6.20) при $\mathbf{y}(x) = \mathbf{y}_0(x)$ обращаются в тождество, и, следовательно, равенство (6.25) имеет вид

$$f'(0) = \int_a^b \Big(F_{y_{m+k}}(x, \mathbf{y}_0(x), \mathbf{y}_0'(x)) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j(x) \frac{\partial \phi_j}{\partial y_{m+k}}(x, \mathbf{y}_0(x))$$

$$- \frac{d}{dx} F_{y'_{m+k}}(x, \mathbf{y}_0(x), \mathbf{y}_0'(x)) \Big) \varphi(x) dx = 0. \qquad (6.27)$$

Так как $\varphi(x)$ – произвольная непрерывно дифференцируемая скалярная функция с ограничениями $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$, как и при доказательстве теоремы 6.1, из (6.27) мы заключаем, что

$$\begin{gathered} F_{y_{m+k}}(x, \mathbf{y}_0(x), \mathbf{y}_0'(x)) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j(x) \frac{\partial \phi_j}{\partial y_{m+k}}(x, \mathbf{y}_0(x)) - \\ - \frac{d}{dx} F_{y'_{m+k}}(x, \mathbf{y}_0(x), \mathbf{y}_0'(x)) \equiv 0, \qquad x \in [a, b]. \end{gathered} \qquad (6.28)$$

Тождество (6.28) справедливо для $k = 1, \dots, n - m$. Таким образом, объединяя тождества (6.23), (6.26) и (6.28), мы получаем, что экстремальная вектор-функция $\mathbf{y}_0(x)$ и скалярные функции $\lambda_1(x), \dots, \lambda_m(x)$, полученные из (6.26), удовлетворяют системе уравнений (6.20), которая является системой уравнений Эйлера для функционала (6.19).

Теорема доказана.

Заметим, что теорема (6.2) легко переформулируется для случая, когда не равен нулю определитель матрицы $\{\partial \phi_i / \partial y_{j_k}\}$, $i, k = 1, \dots, m$ где $y_{j_1}, \dots, y_{j_m}$ – m произвольных координат фазового пространства R^n. Для этого нужно просто изменить нумерацию координат.

6.3.2. Неголономные связи

Неголономными связями называют соотношения вида

$$\phi_i(x, \mathbf{y}, \mathbf{y}') = 0, \qquad i = 1, \dots, m, \qquad m < n, \qquad (6.29)$$

где $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$.

Задача нахождения условного экстремума для функционала (6.15) на пространстве дважды непрерывно дифференцируемых вектор-функций на отрезке $[a,b]$, удовлетворяющих неголономным связям (6.29), решается аналогично случаю голономных связей. Для этого определяется функционал

$$I_1(\mathbf{z}) = \int_a^b (F(x,\mathbf{y},\mathbf{y}') + \sum_{j=1}^m \lambda_j(x)\phi_j(x,\mathbf{y},\mathbf{y}'))dx, \qquad (6.30)$$

где $\mathbf{z} = (\mathbf{y}, \lambda_1, \ldots, \lambda_m)$, и ищется безусловный экстремум этого функционала. В частности, решается система уравнений Эйлера

$$F_{y_i} + \sum_{j=1}^m \lambda_j(x)\frac{\partial \phi_j}{\partial y_i} - \frac{d}{dx}\Big(F_{y_i'} + \sum_{j=1}^m \lambda_j(x)\frac{\partial \phi_j}{\partial y_i}\Big) = 0,\ i = 1,\ldots,n,$$

$$\phi_j(x,\mathbf{y},\mathbf{y},') = 0, \quad j = 1,\ldots,m. \qquad (6.31)$$

Теорема 6.3. *Пусть определитель матрицы* $\{\partial\phi_i/\partial y_j'\}$, $i,j = 1,\ldots,m$ *отличен от нуля, тогда существуют такие функции* $\lambda_i(x)$, $i = 1,\ldots,m$, *что экстремальная вектор-функция* $\mathbf{y}_0(x)$ *для функционала (6.15) с неголономными связями (6.29) удовлетворяет системе уравнений Эйлера (6.31) для функционала (6.30)*

Доказательство теоремы 6.3 в основном аналогично доказательству теоремы 6.2. Только вместо уравнения (6.26) для определения функций $\lambda_1(x),\ldots,\lambda_m(x)$ нужно решить систему линейных дифференциальных уравнений относительно этих функций:

$$\frac{d}{dx}\Big(\sum_{j=1}^m \lambda_j(x)\frac{\partial \phi_j'}{\partial y_i}(x,\mathbf{y}_0(x),\mathbf{y}_0'(x))\Big) - \sum_{j=1}^m \lambda_j(x)\frac{\partial \phi_j}{\partial y_i}(x,\mathbf{y}_0(x),\mathbf{y}_0'(x))$$
$$= F_{y_i}(x,\mathbf{y}_0(x),\mathbf{y}_0'(x)) - \frac{d}{dx}F_{y_i'}(x,\mathbf{y}_0(x),\mathbf{y}_0'(x)),$$
$$i = 1,\ldots,m.$$

Пример 6.2. Пусть нужно найти условие на функцию $y(x)$, являющуюся экстремальной для функционала, зависящего от второй производной искомой функции:

$$I(y) = \int_a^b F(x,y,y',y'')dx.$$

Положим $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$ и определим новый функционал, используя подынтегральную функцию F в функционале $I(y)$:

$$I_1(\mathbf{y}) = \int_a^b F(x,y_1,y_1',y_2')dx$$

с неголономной связью $\phi(x, \mathbf{y}, \mathbf{y}') \equiv y_1' - y_2 = 0$. Очевидно, что если вектор-функция $\mathbf{y}(x) = (y_1(x), y_2(x))$ экстремальна для функционала $I_1(\mathbf{y})$ с неголономной связью $y_1' - y_2 = 0$, то ее первая компонента $y_1(x)$ будет экстремальной для функционала $I(y)$. Выпишем систему уравнений Эйлера (6.31) для функционала $I_1(\mathbf{y})$:

$$\begin{aligned}
&F_{y_1} - \frac{d}{dx}(F_{y_1'} + \lambda) = 0, \\
&-\lambda - \frac{d}{dx}F_{y_2'} = 0, \\
&y_1' - y_2 = 0.
\end{aligned}$$

Следовательно, уравнение Эйлера для функционала $I(y)$ имеет вид

$$F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} + \frac{d^2}{dx^2}F_{y''} = 0.$$

Аналогично выводится следующее общее уравнение

$$F_y + \sum_{i=1}^{k}(-1)^i \frac{d^i}{dx^i}F_{y^{(i)}} = 0,$$

которому удовлетворяет экстремальная функция $y(x)$ для функционала

$$I(y) = \int_a^b F(x, y, y', \ldots, y^{(k)})dx.$$

6.3.3. Изопараметрическая задача

Изопараметрической задачей называется задача нахождения условного экстремума для функционала (6.15) с ограничениями:

$$\int_a^b F_i(x, \mathbf{y}, \mathbf{y}')dx = l_i, \qquad i = 1, \ldots, m. \tag{6.32}$$

Например, изопараметрической является задача нахождения замкнутой кривой заданной длины, ограничивающей максимальную площадь, или, наоборот, кривой минимальной длины, ограничивающей заданную площадь.

Изопараметрическая задача сводится к задаче на условный экстремум с неголономными связями. Для этого вводятся новые функции

$$p_i(x) = \int_a^x F_i dx, \qquad i = 1, \ldots, m.$$

Тогда $p_i(a) = 0$, а согласно (6.32) $p_i(b) = l_i$. Очевидно, что $p_i' = F_i$, т. е. получаем следующие неголономные связи:

$$\phi_i(x, \mathbf{p}, \mathbf{y}, \mathbf{p}', \mathbf{y}') \equiv p_i'(x) - F_i(x, \mathbf{y}, \mathbf{y}') = 0, \quad i = 1, \ldots, m, \tag{6.33}$$

где $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_m)$.

Таким образом, полагая $F_1(\mathbf{z}) = \int_a^b F(x, \mathbf{y}, \mathbf{y}')dx$, где $\mathbf{z} = (\mathbf{p}, \mathbf{y})$, а $\int_a^b F(x, \mathbf{y}, \mathbf{y}')dx$ – функционал (6.15), получаем задачу на условный экстремум для функционала $F_1(\mathbf{z})$ с неголономными связями (6.33). Для нахождения экстремальной вектор-функции $\mathbf{z}_0(x)$ нужно, согласно теореме (6.3), исследовать на безусловный экстремум функционал

$$F_1(\mathbf{z}, \boldsymbol{\lambda}) = \int_a^b [F(x, \mathbf{y}, \mathbf{y}') + \sum_{i=1}^m \lambda_i(x)(p_i' - F_i(x, \mathbf{y}, \mathbf{y}'))]dx, \tag{6.34}$$

где $\boldsymbol{\lambda} = \lambda_1, \ldots, \lambda_m$. Система уравнений Эйлера для этого функционала имеет вид

$$F_{y_i} - \sum_{j=1}^m \lambda_j(x)\frac{\partial F_j}{\partial y_i} - \frac{d}{dx}\Big(F_{y_i'} - \sum_{j=1}^m \lambda_j(x)\frac{\partial F_j}{\partial y_i'}\Big) = 0, \; i = 1, \ldots, n,$$

$$p_j' - F_j = 0, \; j = 1, \ldots, m,$$

$$\frac{d}{dx}\lambda_k(x) = 0, \; k = 1, \ldots, m. \tag{6.35}$$

Последние m уравнений показывают, что функции $\lambda_k(x)$ для данной задачи являются константами.

Таким образом, для нахождения экстремальной вектор-функции $\mathbf{y}_0(x)$ для функционала (6.15) с изопараметрическими связями (6.32) мы должны решить систему уравнений (6.35).

6.4. Задача об оптимальном управлении

В задаче об оптимальном управлении рассматриваются начальная задача для системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

$$\begin{aligned} &\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{y}, \mathbf{u}(t)), \\ &\mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0, \end{aligned} \tag{6.36}$$

где $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)$, $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_m)$, $\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_n)$, и функционал

$$I(\mathbf{u}) = \int_{t_0}^{t_1} f_0(\mathbf{y}(t), \mathbf{u}(t))dt, \tag{6.37}$$

где $\mathbf{y}(t)$ – решение (6.36), а $f_0(\mathbf{y}, \mathbf{u})$ – заданная функция. В системе обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка (6.36) вектор-функция $\mathbf{u}(t)$ называется **управляющей**, или **управлением**. Множеством допустимых управлений $\mathbf{u}(t)$ считаются все кусочно непрерывные ограниченные функции с конечным числом разрывов первого рода и со значениями в некоторой области $U \subset R^m$. Область U называется **допустимой**. Говорят, что управление $\mathbf{u}(t)$ переводит точку $\mathbf{y}_0$ в $\mathbf{y}_1$ в момент времени $t = t_1$, если для решения $\mathbf{y}(t)$ системы (6.36) с данным управлением выполняется условие $\mathbf{y}(t_1) = \mathbf{y}_1$.

6.4.1. Формулировка задачи оптимального управления

Основная задача оптимального управления формулируется следующим образом. В фазовом пространстве R^n системы (6.36) даны две точки $\mathbf{y}_0$ и $\mathbf{y}_1$. Среди всех управляющих вектор-функций $\mathbf{u}(t)$, переводящих точку $\mathbf{y}_0$ в $\mathbf{y}_1$ в момент времени $t = t_1$, найти такую m-мерную вектор-функцию $\mathbf{u}_0(t)$, для которой функционал (6.37) принимает наименьшее значение. Эта управляющая вектор-функция $\mathbf{u}_0(t)$ называется **оптимальной**, или **оптимальным управлением**. А соответствующая фазовая траектория $\mathbf{y}(t)$, являющаяся решением начальной задачи (6.36) с $\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}_0(t)$ и удовлетворяющая условию $\mathbf{y}(t_1) = \mathbf{y}_1$, называется **оптимальной траекторией** из точки $\mathbf{y}_0$ в точку $\mathbf{y}_1$.

Задачу оптимального управления можно также интерпретировать как задачу нахождения экстремальной функции $\mathbf{z}(t) = (\mathbf{y}(t), \mathbf{u}(t))$ для функционала (6.37) с неголономными связями (6.36).

6.4.2. Эквивалентная формулировка

Добавим к фазовым координатам $y_1, \ldots, y_n$ в (6.36) еще одну координату y_0, для которой записывается начальная задача в виде

$$\begin{aligned} &\frac{dy_0}{dt} = f_0(\mathbf{y}, \mathbf{u}(t)), \\ &y_0(t_0) = 0, \end{aligned} \tag{6.38}$$

где f_0 – подынтегральная функция в (6.37). Вводя обозначение

$$\mathbf{x} = (y_0, y_1, \ldots, y_n) = (y_0, \mathbf{y}),$$

обе начальные задачи (6.36) и (6.38) можно записать в векторной форме следующим образом:

$$\begin{aligned} &\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{u}(t)), \qquad \mathbf{F} = (f_0, \mathbf{f}), \\ &\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \qquad \mathbf{x}_0 = (0, \mathbf{y}_0). \end{aligned} \tag{6.39}$$

Пусть $\mathbf{u}(t)$ – допустимое управление, переводящее точку $\mathbf{y}_0$ в $\mathbf{y}_1$, а $\mathbf{y}(t)$ – соответствующее решение начальной задачи (6.36). Тогда

$$y_0(t) = \int_{t_0}^{t} f_0(\mathbf{y}(t), \mathbf{u}(t))dt,$$

и, следовательно,

$$y_0(t_0) = 0, \quad y_0(t_1) = \int_{t_0}^{t_1} f_0(\mathbf{y}(t), \mathbf{u}(t))dt = I,$$

где I – значение интеграла (6.37), для которого ищется оптимальное управление. Значит, вектор-функция $\mathbf{x}(t)$, являющаяся решением начальной задачи (6.39) для управления $\mathbf{u}(t)$, переводящего точку $\mathbf{y}_0$ в $\mathbf{y}_1$, удовлетворяет условию $\mathbf{x}(t_1) = (I, \mathbf{y}_1)$. С учетом этого задача оптимального управления имеет следующую формулировку. В фазовом пространстве R^{n+1} системы (6.39) заданы точки $\mathbf{x}_0 = (0, \mathbf{y}_0)$, $\mathbf{x}_1 = (0, \mathbf{y}_1)$ и прямая P, параллельная оси y_0 и проходящая через точку $(0, \mathbf{y}_1)$. Среди всех допустимых управлений $\mathbf{u}(t)$, переводящих точку $\mathbf{x}_0$ в точку $(I, \mathbf{y}_1)$ прямой P, найти такое управление $\mathbf{u}_0(t)$, для которого первая координата I принимает наименьшее значение. Такие управление $\mathbf{u}(t)$ и траектория $\mathbf{x}(t)$ в фазовом пространстве R^{n+1} называются оптимальными в этой формулировке.

6.4.3. Принцип максимума Понтрягина

Для формулировки теоремы, дающей необходимые условия для нахождения оптимальных управлений и траекторий, выпишем уравнения для новых скалярных функций $\psi_0, \ldots, \psi_n$:

$$\frac{d\psi_i}{dt} = -\sum_{j=0}^{n} \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(\mathbf{y}(t), \mathbf{u}(t))\psi_j, \qquad i = 0, 1, \ldots, n, \tag{6.40}$$

где $f_j,\ j = 0, 1, \ldots, n$ – j-я компонента вектор-функции $\mathbf{F}$ в (6.39). Система (6.40) линейная и однородная, поэтому имеет единственное решение на отрезке $[t_0, t_1]$, проходящее в начальный момент t_0 через точку $\boldsymbol{\psi}_0 = (\psi_0, \ldots, \psi_n)$. Теперь определим функцию $H(\boldsymbol{\psi}, \mathbf{y}, \mathbf{u})$:

$$H(\boldsymbol{\psi}, \mathbf{y}, \mathbf{u}) = \sum_{k=0}^{n} \psi_k f_k(\mathbf{y}, \mathbf{u}),$$

где $\boldsymbol{\psi} = (\psi_0, \psi_1, \ldots, \psi_n)$. Тогда системы уравнений (6.39) и (6.40) записываются с помощью этой функции H следующим образом:

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \psi_i}, \qquad i = 0, 1, \ldots, n, \tag{6.41}$$

$$\frac{d\psi_j}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_j}, \qquad j = 0, 1, \ldots, n. \tag{6.42}$$

При фиксированных значениях $\boldsymbol{\psi}$ и $\mathbf{y}$ функция H зависит от $\mathbf{u}$. Пусть

$$\mu(\boldsymbol{\psi}, \mathbf{y}) = \sup_{\mathbf{u} \in U} H(\boldsymbol{\psi}, \mathbf{y}, \mathbf{u}).$$

Если точная верхняя грань функции H достигается в некоторой точке области управления $U \subset R^m$, то

$$\mu(\boldsymbol{\psi}, \mathbf{y}) = \max_{\mathbf{u} \in U} H(\boldsymbol{\psi}, \mathbf{y}, \mathbf{u}).$$

Теорема 6.4. *Пусть* $\mathbf{u}(t),\ t \in [t_0, t_1]$ – *такое допустимое управление, что соответствующая ему траектория* $\mathbf{x}(t)$, *начинающаяся в точке* $\mathbf{x}_0$, *проходит в момент* t_1 *через точку* $(I, \mathbf{y}_1)$. *Тогда для оптимальности управления* $\mathbf{u}(t)$ *и траектории* $\mathbf{x}(t)$ *необходимо существование такой непрерывной вектор-функции* $\boldsymbol{\psi}(t) = (\psi_0(t), \ldots, \psi_n(t))$, $\boldsymbol{\psi}(t) \neq \mathbf{0}$, *являющейся решением (6.42) с этими* $\mathbf{u}(t)$ *и* $\mathbf{x}(t)$, *что:*

1) при любом $t \in [t_0, t_1]$ функция $H(\boldsymbol{\psi}(t), \mathbf{y}(t), \mathbf{u})$ переменной $\mathbf{u}$ достигает в точке $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t)$ максимума:

$$H(\boldsymbol{\psi}(t), \mathbf{y}(t), \mathbf{u}(t)) = \mu(\boldsymbol{\psi}(t), \mathbf{y}(t)); \tag{6.43}$$

2) при $t = t_1$ выполнены соотношения

$$\psi_0(t_1) \le 0, \qquad \mu(\boldsymbol{\psi}(t_1), \mathbf{y}(t_1)) = 0. \tag{6.44}$$

Оказывается далее, что $\mu(\boldsymbol{\psi}(t), \mathbf{y}(t)) = const$, $t \in [t_0, t_1]$, поэтому условие (6.44) достаточно установить в одной точке отрезка $[t_0, t_1]$.

6.4.4. Задача об оптимальном быстродействии

Важным частным случаем задачи об оптимальном управлении является задача, в которой функция $f_0(\mathbf{y}(t), \mathbf{u}(t))$ из (6.37) равна единице. Тогда $I = t_1 - t_0$, и поэтому оптимальность управления $\mathbf{u}_0(t)$ означает минимальность времени перехода из точки $\mathbf{y}_0$ в $\mathbf{y}_1$. Такая задача называется **задачей об оптимальном быстродействии**.

Так как для задачи об оптимальном быстродействии $f_0(\mathbf{y}, \mathbf{u}) = 1$, функция H имеет вид

$$H(\boldsymbol{\psi}, \mathbf{y}, \mathbf{u}) = \psi_0 + \sum_{k=1}^{n} \psi_k f_k(\mathbf{y}, \mathbf{u}). \tag{6.45}$$

Введем обозначения

$$\boldsymbol{\psi}_1 = (\psi_1, \ldots, \psi_n), \quad H_1(\boldsymbol{\psi}_1, \mathbf{y}, \mathbf{u}) = \sum_{k=1}^{n} \psi_k f_k(\mathbf{y}, \mathbf{u}).$$

Тогда уравнения (6.41) и (6.42) (без $i, j = 0$) записываются в виде

$$\frac{dy_i}{dt} = \frac{\partial H_1}{\partial \psi_i}, \qquad i = 1, \ldots, n, \tag{6.46}$$

$$\frac{d\psi_j}{dt} = -\frac{\partial H_1}{\partial y_j}, \qquad j = 1, \ldots, n. \tag{6.47}$$

Положим $M(\boldsymbol{\psi}_1, \mathbf{y}) = \sup_{\mathbf{u} \in U} H_1(\boldsymbol{\psi}_1, \mathbf{y}, \mathbf{u})$, тогда из (6.45) следует, что $M(\boldsymbol{\psi}_1, \mathbf{y}) = \mu(\boldsymbol{\psi}, \mathbf{y}) - \psi_0$. Поэтому условия (6.43) и (6.44) переходят в

$$H_1(\boldsymbol{\psi}_1(t), \mathbf{y}(t), \mathbf{u}(t)) = M(\boldsymbol{\psi}_1(t), \mathbf{y}(t)) = -\psi_0 \ge 0.$$

Следовательно, в этом случае теорема 6.4 интерпретируется следующим образом.

Теорема 6.5. *Пусть* $\mathbf{u}(t),\ t \in [t_0, t_1]$ *– допустимое управление, а* $\mathbf{y}(t)$ *– соответствующая траектория, переводящая фазовую точку из положения* $\mathbf{y}_0$ *в* $\mathbf{y}_1$. *Для оптимальности (по быстродействию) управления* $\mathbf{u}(t)$ *и траектории* $\mathbf{y}(t)$ *необходимо существование такой ненулевой непрерывной вектор-функции* $\boldsymbol{\psi}_1(t)$, *компоненты которой являются решением системы уравнений (6.47), что:*

1) при любом $t \in [t_0, t_1]$ *функция* $H(\boldsymbol{\psi}_1(t), \mathbf{y}(t), \mathbf{u})$ *аргумента* $\mathbf{u} \in U$ *достигает в точке* $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t)$ *максимума:*

$$H_1(\boldsymbol{\psi}_1(t), \mathbf{y}(t), \mathbf{u}(t)) = M(\boldsymbol{\psi}_1(t), \mathbf{y}(t)); \tag{6.48}$$

2) в конечный момент времени $t = t_1$ *выполнено соотношение*

$$M(\boldsymbol{\psi}_1(t_1), \mathbf{y}(t_1)) \geq 0. \tag{6.49}$$

Оказывается далее, что в этом случае функция $M(\boldsymbol{\psi}_1(t), \mathbf{y}(t))$ *переменного* t *постоянна, поэтому неравенство (6.49) достаточно установить в одной точке отрезка* $[t_0, t_1]$.

Список литературы

1. *Белолипецкий В. М., Шокин Ю. И.* Математические моделирование в задачах охраны окружающей среды. Новосибирск: ИНФОЛИО-пресс, 1997.
2. *Боярчук А. К., Головач Г. П.* Справочное пособие по высшей математике. Дифференциальные уравнения в примерах и задачах. М.: УРСС, 1998. Т. 5.
3. *Гельфанд И. М., Фомин С. В.* Вариационное исчисление. М.: ФМ, 1961.
4. *Годунов С. К.* Обыкновенные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами. Новосибирск: НГУ, 1994. Т. 1. Краевые задачи. 264 с.
5. *Дементьева Н. В., Лисейкин В. Д., Чуркин В. А.* Линейные системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Построение фундаментальной матрицы решений однородной системы с использованием корневого базиса. Новосибирск: НГУ, 2008.
6. *Лисейкин В. Д.* Курс обыкновенных дифференциальных уравнений. Новосибирск: НГУ, 2002.
7. *Матвеев Н. М.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. СПб.: Специальная литература, 1996.
8. *Понтрягин Л. С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1982.
9. *Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: ФМ, 1961.
10. *Фадеев С. И., Овчинникова Т. Э.* Введение в теорию разностных и дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Новосибирск: НГУ, 2001. (Ч. 1–2).
11. *Филиппов А. Ф.* Сборник задач по дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1973.
12. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1970.
13. *Эльсгольц Л. Э.* Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М.: Наука, 1969.