ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ НОВОСИБИРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ
ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ЭКОНОМИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

В. Д. Лисейкин

РЕШЕНИЕ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Учебное пособие

Новосибирск
2016

ББК В161.61 я 73-1
УДК 517.9, 519.3
Л631

Лисейкин В. Д. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами: Учеб. пособие / Новосиб. гос. ун-т. Новосибирск, 2016. 59 с.

Учебное пособие соответствует программе курса по обыкновенным дифференциальным уравнениям для студентов вузов и университетов.

В пособии приведены более простые формулы решений уравнений n-го порядка с помощью их расщепления на уравнения первого порядка. Приведен единый алгоритм решения систем первого порядка с постоянными коэффициентами и произвольными корнями без привлечения довольно трудной для усвоения техники присоединенных векторов. Эффективность алгоритмов демонстрируется на примерах решений многочисленных уравнений.

Предназначено для студентов и преподавателей университетов и вузов.

This handbook corresponds to the curricula of ordinary differential equations for the students of high schools and universities.

The handbook contains simple formulas of solutions of the equations of order n and the systems of the first order. In particular, there is presented a uniform algorithm for the solution of the systems with constant coefficients and arbitrary roots. The efficiency of the formulas and the algorithm is demonstrated by the solution of equations.

The book is aimed at the students and teachers of universities and high schools.

Рецензент
д-р физ.-мат. наук, проф. С. И. Фадеев

ISBN

Оглавление

Предисловие

В данном пособии изложены новые подходы, которые, по мнению автора, могут существенно усовершенствовать часть курса по обыкновенным дифференциальным уравнениям с постоянными коэффициентами и упростить процесс обучения студентов.

В главе 1 подробно изложены методы решения линейных уравнений n-го порядка с постоянными коэффициентами. С помощью представления оператора n-го порядка в виде композиции операторов первого порядка выписана в квадратурах формула решения неоднородных линейных уравнений с постоянными коэффициентами. Также приведено детальное объяснение формулы решения уравнения в методе неопределенных коэффициентов. Получены новые формулы нахождения решений уравнений с разными характеристическими корнями.

В главе 2 дано краткое введение в методы решения линейных систем уравнений первого порядка. В этой главе проводится детальное доказательство теоремы о корневом базисе, что является важным моментом для более глубокого осмысления студентами формул, описывающих решения систем линейных уравнений с постоянными коэффициентами.

Эффективность приведенных формул демонстрируется решениями некоторых примеров и задач. Пронумерованные задачи взяты из книги [5] (Филиппов А. Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям).

Глава 1

Линейные уравнения высокого порядка

В данной главе сравниваются два метода решений обыкновенных дифференциальных линейных уравнений n-го порядка с постоянными коэффициентами $a_j, j = 1, \ldots, n$:

$$L[y] \equiv y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x), \tag{1.1}$$

а именно: классический (метод вариаций) и новый (метод композиций).

1.1. Представление линейного оператора в виде произведения операторов первого порядка

Будем рассматривать линейные операторы с постоянными коэффициентами

$$L[y] \equiv y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y, \tag{1.2}$$

заданные на множестве достаточно гладких функций $y(x)$. Здесь $y^{(k)}$, $k = 1, \ldots, n$, означает k-ю производную функции $y(x)$. Введем операцию произведения операторов по формуле

$$L_1 \cdot L_2[y] = L_1[L_2[y]],$$

где знак $\ll \cdot \gg$ означает операцию композиции (произведение) операторов, а L_1 и L_2 – произвольные линейные операторы с постоянными коэффициентами:

$$L_1[y] \equiv y^{(k)} + b_1 y^{(k-1)} + \ldots + b_k y,$$

$$L_2[y] \equiv y^{(m)} + c_1 y^{(m-1)} + \ldots + c_m y.$$

Так, при $k = 2$ и $m = 3$ имеем

$$L_1 \cdot L_2[y] = L_1[y''' + c_1 y'' + c_2 y' + c_3 y] = (y''' + c_1 y'' + c_2 y' + c_3 y)'' +$$

$$+ b_1 (y''' + c_1 y'' + c_2 y' + c_3 y)' + b_2 (y''' + c_1 y'' + c_2 y' + c_3 y) =$$

$$= y^{(5)} + (c_1 + b_1) y^{(4)} + (c_2 + b_1 c_1 + b_2) y''' + (c_3 + b_1 c_2 + b_2 c_1) y'' +$$

$$+ (b_1 c_3 + b_2 c_2) y' + b_2 c_1 y.$$

Линейные операторы с постоянными коэффициентами обладают важным свойством коммутативности, а именно

$$L_1 \cdot L_2[y] \equiv L_2 \cdot L_1[y], \text{ т. е. } L_1[L_2[y]] = L_2[L_1[y]].$$

Отметим, что линейные операторы с непостоянными коэффициентами в общем случае не коммутируют.

Известно, что частное решение однородного уравнения

$$L[y] = 0, \tag{1.3}$$

т. е. уравнения (1.1) при $f(x) = 0$ можно найти в виде показательной функции $y(x) = e^{\lambda x}$ для некоторого λ. Действительно, подставляя значения $y(x) = e^{\lambda x}$ и $y^{(j)}(x) = \lambda^j e^{\lambda x}$, $j = 1, \ldots, n$, в (1.2), мы получаем

$$L[e^{\lambda x}](x) = e^{\lambda x}(\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n).$$

Таким образом, функция $y(x) = e^{\lambda x}$ будет решением уравнения $L[y] = 0$ для оператора (1.2), если λ является корнем уравнения

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0. \tag{1.4}$$

Отметим, что для комплексного корня λ решение $y(x) = e^{\lambda x}$ будет также комплексным. А именно: если $\lambda = \alpha + i\beta$, то

$$y(x) = e^{\lambda x} = e^{\alpha x}(\cos \beta x + i \sin \beta x).$$

Это комплексное решение порождает два вещественных решения уравнения $L(y) = 0$:

$$y_1(x) = e^{\alpha x} \cos \beta x \quad \text{и} \quad y_2(x) = e^{\alpha x} \sin \beta x.$$

Уравнение (1.4) называется **характеристическим уравнением**, его левая часть – **характеристическим многочленом**, а его корни – **характеристическими корнями**. Характеристические корни могут быть вещественными, комплексными, а также кратными, и в зависимости от этого определяется фундаментальная система решений однородного дифференциального уравнения (1.3) для оператора (1.2). Заметим, что характеристический многочлен алгебраического уравнения (1.4) записывается также в виде произведения многочленов первой степени $\lambda - \lambda_j$:

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n = (\lambda - \lambda_1)^{k_1} \cdot \ldots \cdot (\lambda - \lambda_p)^{k_p}, \qquad (1.5)$$

где $\lambda_j, j = 1, \ldots, p$ – корни характеристического многочлена, а $k_j, j = 1, \ldots, p$ – кратность корня λ_j. При этом выполняется соотношение $\sum\limits_{j=1}^{p} k_j = n$. Оказывается, что оператор L в (1.2) можно записать аналогично (1.5), в виде произведения простых операторов, а именно:

$$L[y] \equiv (D - \lambda_1 E)^{k_1} \cdot (D - \lambda_2 E)^{k_2} \cdot \ldots \cdot (D - \lambda_p E)^{k_p}[y], \qquad (1.6)$$

где D – оператор первой производной: $D[f](x) = f'(x)$, E – тождественный оператор: $E[f](x) = f(x)$, знак $\ll \cdot \gg$ означает операцию композиции (произведение) операторов, например, для двух операторов $D-\lambda_1 E$ и $D - \lambda_2 E$. Имеем

$$(D-\lambda_1 E)\cdot(D-\lambda_2 E)[y] = (D-\lambda_1 E)[(D-\lambda_2 E)[y]] = y''-(\lambda_1+\lambda_2)y'+\lambda_1\lambda_2 y.$$

Степень k_j в (1.6) означает k_j-кратное произведение оператора $(D - \lambda_j E)$, например

$$(D - \lambda_j E)^2[y] = (D - \lambda_j E) \cdot (D - \lambda_j E)[y] = y'' - 2\lambda_j y' + (\lambda_j)^2 y.$$

Отметим, что некоторые или все λ_j в выражении (1.6) могут быть комплексными.

Если оператор (1.2) имеет вид $L[y] = y^{(n)}$, то корнем характеристического многочлена для этого оператора будет 0 кратности n и, значит, формула (1.6) в этом случае очевидна и имеет вид $L[y] = D^n[y]$.

Докажем формулу (1.6) по индукции. При $n = 1$ оператором (1.2) будет $L[y] = y' + a_1 y$ и, значит, характеристическим многочленом будет многочлен первой степени $\lambda + a_1$, корнем которого является $\lambda_1 = -a_1$.

Поэтому $L[y] = (D - \lambda_1 E)[y] = (D + a_1 E)[y]$. Таким образом, для $n = 1$ формула (1.6) верна. Предположим, что (1.6) справедливо до $n = k-1$ и рассмотрим произвольный линейный дифференциальный оператор k-го порядка с постоянными коэффициентами:

$$\begin{aligned} L_k[y] &= y^{(k)} + a_1 y^{(k-1)} + \ldots + a_k y = \\ &= D^k[y] + a_1 D^{k-1}[y] + \cdots + a_{k-1} D[y] + a_k E[y]. \end{aligned}$$

Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$, $m \le k$, – все корни характеристического уравнения для этого оператора, при этом пусть корень λ_j, $j = 1, \ldots, m$, имеет кратность k_j, $j = 1, \ldots, m$. Тогда для корня λ_1

$$\lambda_1^k + a_1 \lambda_1^{k-1} + \ldots + a_{k-1}\lambda_1 + a_k = 0,$$

и значит, для произвольной функции $y(x)$ имеем

$$a_k E[y] = -\lambda_1^k E[y] - a_1 \lambda_1^{k-1} E[y] - \ldots - a_{k-1}\lambda_1 E[y],$$

следовательно

$$L_k[y] = (D^k - \lambda_1^k E)[y] + a_1 (D^{k-1} - \lambda_1^{k-1} E)[y] + \ldots + a_{k-1}(D - \lambda_1 E)[y]. \quad (1.7)$$

Для произвольного натурального m имеем

$$D^m - \lambda_1^m E = (D - \lambda_1 E) \cdot (D^{m-1} + \lambda_1 D^{m-2} + \ldots + \lambda_1^{m-2} D + \lambda_1^{m-1} E) \quad (1.8)$$

и

$$\lambda^m - \lambda_1^m = (\lambda - \lambda_1)(\lambda^{m-1} + \lambda_1 \lambda^{m-2} + \ldots + \lambda_1^{m-2}\lambda + \lambda_1^{m-1}), \quad (1.9)$$

при этом многочлен $\lambda^{m-1} + \lambda_1 \lambda^{m-2} + \ldots + \lambda_1^{m-2}\lambda + \lambda_1^{m-1}$ в (1.9) является характеристическим многочленом оператора $D^{m-1} + \lambda_1 D^{m-2} + \ldots + \lambda_1^{m-2} D + \lambda_1^{m-1} E$ в (1.8). Используя (1.8) в (1.7), имеем

$$L_k[y] = (D - \lambda_1 E) \cdot L_{k-1}[y],$$

аналогично

$$\lambda^k + a_1 \lambda^{k-1} + \ldots + a_{k-1}\lambda + a_k = (\lambda - \lambda_1) P_{k-1}(\lambda),$$

при этом, в соответствии с (1.8) и (1.9), многочлен $P_{k-1}(\lambda)$ является характеристическим многочленом оператора $L_{k-1}[y]$. Так как

$$P_{k-1}(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{k_1 - 1} (\lambda - \lambda_2)^{k_2} \ldots (\lambda - \lambda_m)^{k_m},$$

то по предположению индукции

$$L_{k-1}[y] = (D - \lambda_1 E)^{k_1 - 1} \cdot (D - \lambda_2 E)^{k_2} \cdot \ldots \cdot (D - \lambda_m E)^{k_m}[y]$$

и, следовательно,

$$L_k[y] = (D - \lambda_1 E)^{k_1} \cdot (D - \lambda_2 E)^{k_2} \cdot \ldots \cdot (D - \lambda_m E)^{k_m}[y],$$

значит, формула (1.6) верна.

Таким образом, согласно формуле (1.6) однородное уравнение $L[y] = 0$ для оператора (1.2) записывается с помощью произведения операторов первого порядка $D - \lambda_i E$ в виде

$$(D - \lambda_1 E)^{k_1} \cdot (D - \lambda_2 E)^{k_2} \cdot \ldots \cdot (D - \lambda_p E)^{k_p}[y] = 0. \qquad (1.10)$$

Пример. Представить оператор

$$L[y] = y^{(4)} - 5y'' + 4y$$

в виде произведения операторов первого и второго порядков.

Характеристическим многочленом этого оператора будет

$$\lambda^4 - 5\lambda^2 + 4,$$

а его корнями – $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 2$, $\lambda_4 = -2$. Поэтому данный оператор имеет вид

$$\begin{aligned} L[y] &= (D - E) \cdot (D + E) \cdot (D - 2E) \cdot (D + 2E)[y] = \\ &= (D - E)[(D + E)[(D - 2E)[(D + 2E)[y]]]] = \\ &= (D^2 - E)[(D^2 - 4E)[y]]. \end{aligned}$$

1.2. Нахождение фундаментальной системы решений

Фундаментальной системой решений однородного уравнения (1.10) и, соответственно, (1.3) являются n линейно независимых решений этого уравнения.

Так как операция композиции линейных операторов $(D - \lambda_j E)$ коммутативна, а также учитывая, что $(D - \lambda E)[0] = 0$ для произвольного λ, получаем, что решениями однородного уравнения (1.10), а значит, и (1.3) будут все решения более простых уравнений вида

$$(D - \lambda_j E)^{k_j}[y] = 0, \qquad 1 \leq j \leq p, \tag{1.11}$$

в частности, таким решением для данного уравнения будет функция $ce^{\lambda_j x}$.

Для нахождения решений уравнения (1.11) введем для произвольного λ – вещественного или комплексного – многозначный оператор B_λ, определяемый через многозначный оператор интегрирования $\int$: $\int[f] = \int f(x)\mathrm{d}x$ по формуле

$$B_\lambda[g](x) = e^{\lambda x} \int e^{-\lambda x} g(x)\mathrm{d}x, \tag{1.12}$$

в частности $B_0[g](x) = \int g(x)\mathrm{d}x$. Оператор B_λ определен на множестве непрерывных функций $g(x)$, а поскольку интеграл – это многозначный оператор, то значениями оператора (1.12) для произвольной функции $g(x)$ будет множество гладких функций вида $g_1(x) + ce^{\lambda x}$, где $B_\lambda[g](x) = g_1(x)$, $c \in R$, в частности $B_\lambda[0](x) = ce^{\lambda x}$.

Обозначим через $(B_\lambda)^k$ оператор, являющийся k-кратным произведением B_λ, а через $\int^k$ – оператор k-кратного интегрирования, который будем записывать $\int^k (\ )\mathrm{d}x^k$, т. е.

$$\int^k z(x)\mathrm{d}x^k = \underbrace{\int \Big(\dots \Big(\int}_{k} z(x) \underbrace{\mathrm{d}x \Big) \dots \Big) \mathrm{d}x}_{k}.$$

Так, для $k = 2$

$$\begin{aligned}
&(B_\lambda)^2[g](x) = B_\lambda \cdot B_\lambda[g](x) = B_\lambda[B_\lambda[g]](x) = \\
&= e^{\lambda x} \int e^{-\lambda x} \Big(e^{\lambda x} \int e^{-\lambda x} g(x)\mathrm{d}x \Big)\mathrm{d}x = \\
&= e^{\lambda x} \int \Big(\int e^{-\lambda x} g(x)\mathrm{d}x \Big)\mathrm{d}x = e^{\lambda x} \int^2 e^{-\lambda x} g(x)\mathrm{d}x^2.
\end{aligned}$$

Аналогично для произвольного натурального k

$$(B_\lambda)^k[g](x) = e^{\lambda x}\int^k e^{-\lambda x}g(x)\mathrm{d}x^k = e^{\lambda x}\underbrace{\int\Big(\ldots\Big(\int}_{k} e^{-\lambda x}g(x)\underbrace{\mathrm{d}x\Big)\ldots\Big)\mathrm{d}x}_{k}\,. \tag{1.13}$$

Так как

$$\begin{aligned}(D-\lambda E)\cdot B_\lambda[g](x) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big(e^{\lambda x}\int e^{-\lambda x}g(x)\mathrm{d}x\Big) - \lambda e^{\lambda x}\int e^{-\lambda x}g(x)\mathrm{d}x = \\ &= g(x) = E[g](x),\end{aligned}$$

то легко получаем, что и

$$(D-\lambda E)^k\cdot(B_\lambda)^k[g](x) = g(x) = E[g](x) \tag{1.14}$$

при любом натуральном $k \geq 1$. Таким образом, произведение операторов $(B_\lambda)^k$ и $(D-\lambda E)^k$ является тождественным оператором E. Поэтому

$$(D-\lambda E)^k\cdot(B_\lambda)^k[0] = 0$$

и, значит, решением однородного уравнения (1.11) будет функция

$$(B_{\lambda_j})^{k_j}[0] = e^{\lambda_j x}\int^{k_j} 0\mathrm{d}x^{k_j} = (c_1 + c_2 x + \cdot + c_{k_j}x^{k_j-1})e^{\lambda_j x},$$

где $c_1,\ c_2,\ \ldots, c_{k_j}$ – произвольные константы. Эта функция определяет следующие k_j простых линейно независимых решений однородного уравнения (1.11) при $p = k_j$:

$$y_1(x) = e^{\lambda_j x},\ y_2(x) = xe^{\lambda_j x},\ \ldots,\ y_{k_j}(x) = x^{k_j-1}e^{\lambda_j x}, \tag{1.15}$$

так как функции $1, x, \ldots, x^{k_j-1}$ линейно независимы. Отметим, что данный вывод решений для случая кратного корня является более простым по сравнению с классическим подходом.

Если характеристический корень λ_j комплексный: $\lambda_j = \alpha + i\beta$, и порядка k_j, то функции (1.15) будут комплексными решениями однородного уравнения (1.11). Отметим, что вместе с λ_j тогда существует также и сопряженный корень $\overline{\lambda}_j = \alpha - i\beta$ степени k_j и, следовательно, левая часть уравнения (1.10) будет включать операторы $(D-\lambda_j E)^{k_j}$ и $(D-\overline{\lambda}_j E)^{k_j}$. Так как функции $y_i(x),\ i = 1,\ \ldots,\ k_j$, в (1.15) будут решениями уравнения $(D-\lambda_j E)^{k_j}=0$, то функции $\overline{y}_i(x)$, $i=1,\ \dots,\ k_j$, будут решениями уравнения $(D-\overline{\lambda}_j E)^{k_j}=0$. Поэтому получаем, что фундаментальной системой композиции этих двух операторов будут функции $y_{m1}(x)$ и $y_{m2}(x)$, $m=1,\dots,k_j$,

$$
\begin{aligned}
y_{m1}(x) &= \frac{y_m(x)+\overline{y}_m(x)}{2} = \frac{x^{m-1}(e^{\lambda_j x}+e^{\overline{\lambda}_j x})}{2},\\
y_{m2}(x) &= \frac{y_m(x)-\overline{y}_m(x)}{2i} = \frac{x^{m-1}(e^{\lambda_j x}-e^{\overline{\lambda}_j x})}{2i},
\end{aligned}
\tag{1.16}
$$

которые расписываются в следующей форме:

$$
\begin{aligned}
y_{m1}(x) &= x^{m-1}e^{\alpha x}\cos(\beta x), \quad m=1,\dots,k_j,\\
y_{m2}(x) &= x^{m-1}e^{\alpha x}\sin(\beta x), \quad m=1,\dots,k_j.
\end{aligned}
$$

Таким образом, в соответствии с представлением решений уравнения (1.11) в форме (1.15) и (1.16) мы получаем n частных решений однородного уравнения (1.10) и, значит, уравнения (1.3), а также (1.1) при $f(x)=0$:

$$
x^{m-1}e^{\lambda_j x}, \quad m=1,\dots,k_j \tag{1.17}
$$

для вещественных корней λ_j степени k_j и

$$
\begin{aligned}
x^{m-1}e^{\alpha_l x}\cos(\beta_l x) &= \frac{1}{2}x^{m-1}(e^{\lambda_l x}+e^{\overline{\lambda}_l x}), \quad m=1,\dots,k_l,\\
x^{m-1}e^{\alpha_l x}\sin(\beta_l x) &= \frac{1}{2i}x^{m-1}(e^{\lambda_l x}-e^{\overline{\lambda}_l x}), \quad m=1,\dots,k_l,
\end{aligned}
\tag{1.18}
$$

где $\alpha_l=(\lambda_l+\overline{\lambda}_l)/2$, $\beta_l=(\lambda_l-\overline{\lambda}_l)/2i$ для каждой пары комплексных корней λ_l и $\overline{\lambda}_l$ степени k_l. Эти n функций линейно независимы и, следовательно, образуют фундаментальную систему решений однородного уравнения (1.3), поэтому все решения этого уравнения описываются формулой

$$
y_{\text{од}}(x)=\sum_{i=1}^{n} c_i y_i(x), \tag{1.19}
$$

где $y_i(x)$ – функции (1.17) и (1.18).

Задача № 524. Решить уравнение

$$y^{(5)} - 6y^{(4)} + 9y''' = 0.$$

Характеристическим уравнением будет

$$\lambda^3(\lambda^2 - 6\lambda + 9) = \lambda^3(\lambda - 3)^2 = 0,$$

а корнями будут $\lambda_1 = 0$ – кратности 3 и $\lambda_2 = 3$ – кратности 2. Поэтому фундаментальная система имеет вид

$$y_1(x) = 1, \quad y_2(x) = x, \quad y_3(x) = x^2, \quad y_4(x) = e^{3x}, \quad y_5(x) = xe^{3x},$$

а все решения выписываются формулой

$$y_{\text{ОД}}(x) = c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + c_4 e^{3x} + c_5 x e^{3x}.$$

Задача № 526. Решить уравнение

$$y^{(4)} + 2y'' + y = 0.$$

Характеристическим уравнением будет

$$\lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 = (\lambda^2 + 1)^2 = 0,$$

а корнями будут $\lambda_1 = i$ – кратности 2 и $\lambda_2 = -i$ – кратности 2. Поэтому фундаментальная система имеет вид

$$y_1(x) = \sin x, \quad y_2(x) = \cos x, \quad y_3(x) = x\sin x, \quad y_4(x) = x\cos x,$$

а все решения выписываются формулой

$$y_{\text{ОД}}(x) = c_1 \sin x + c_2 \cos x + c_3 x \sin x + c_4 x \cos x.$$

Задача № 529. Решить уравнение

$$y^{(5)} - 10y''' + 9y' = 0.$$

Характеристическим уравнением будет

$$\lambda^5 - 10\lambda^3 + 9\lambda = 0,$$

а корнями будут $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = -1$, $\lambda_4 = 3$, $\lambda_5 = -3$. Поэтому фундаментальная система имеет вид

$$y_1(x) = 1, \quad y_2(x) = e^x, \quad y_3(x) = e^{-x}, \quad y_4(x) = e^{3x}, \quad y_5(x) = e^{-3x},$$

а все решения выписываются формулой

$$y_{\text{ОД}}(x) = c_1 + c_2 e^x + c_3 e^{-x} + c_4 e^{3x} + c_5 e^{-3x}.$$

1.3. Решение неоднородного уравнения

После того как найдена фундаментальная система решений однородного линейного уравнения (1.3): $y_1(x), \ldots, y_n(x)$, для получения всех решений неоднородного линейного уравнения (1.1) нужно найти одно его частное решение $y_{\text{Ч}}(x)$, тогда функция

$$y(x) = y_{\text{Ч}}(x) + \sum_{i=1}^{n} c_i y_i(x),$$

где c_i – произвольные константы, и определяет все решения неоднородного уравнения (1.1).

1.3.1. Метод вариаций

Согласно классическому методу вариаций частное решение уравнения (1.1) находится в виде

$$y_{\text{Ч}}(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i(x) y_i(x), \tag{1.20}$$

где $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ – фундаментальная система решений однородного линейного уравнения (1.3), т. е. $L[y_i] = 0$, $i = 1, \ldots, n$. Функции $c_i(x)$ определяются интегрированием соответствующих функций, обозначаемых $c_i'(x)$, которые находятся решением системы из n алгебраических уравнений

$$
\begin{cases}
c_1' y_1(x) & + \quad \ldots \quad + \quad c_n' y_n(x) & = 0, \\
c_1' y_1'(x) & + \quad \ldots \quad + \quad c_n' y_n'(x) & = 0, \\
\vdots & & \\
c_1' y_1^{(n-2)}(x) & + \quad \ldots \quad + \quad c_n' y_n^{(n-2)}(x) & = 0, \\
c_1' y_1^{(n-1)}(x) & + \quad \ldots \quad + \quad c_n' y_n^{(n-1)}(x) & = f(x).
\end{cases}
\tag{1.21}
$$

Таким образом, для получения решения уравнения (1.1) методом вариаций нужно найти фундаментальную систему решений однородного уравнения (1.3), затем решить систему из n алгебраических уравнений (1.21) и после этого проинтегрировать каждую функцию $c_i'(x)$, $i = 1, \ldots, n$, т. е. произвести n интегрирований. Однако для решения уравнения $y^{(n)}(x) = f(x)$ не нужно решать систему из n алгебраических уравнений, а требуется произвести только n интегрирований. Оказывается, такой алгоритм, не включающий решение системы из n алгебраических уравнений, может быть сформулирован и для произвольных уравнений (1.1).

1.3.2. Метод композиции

В методе композиции используется тот факт, что линейный оператор с постоянными коэффициентами в (1.1) может быть представлен композицией (произведением) элементарных линейных операторов $(D - \lambda_j E)$, $j = 1, \ldots, p$, в форме (1.6), и, значит, уравнение (1.1) преобразуется к виду

$$L[y] \equiv (D - \lambda_1 E)^{k_1} \cdot \ldots \cdot (D - \lambda_p E)^{k_p}[y] = f(x), \tag{1.22}$$

где λ_j – все корни характеристического многочлена оператора L, а k_j, $j = 1, \ldots, p$, – степень корня λ_j. Частное решение уравнения (1.22) легко выписывается в квадратурах с помощью операторов B_{λ_j}, $j = 1, \ldots, p$, определенных формулой (1.12) для произвольного λ, и их произведений (1.13):

$$
\begin{aligned}
(B_\lambda)^k[z](x) &= e^{\lambda x} \int^k e^{-\lambda x} z(x)\mathrm{d}x^k = \\
&= e^{\lambda x} \underbrace{\int \Big(\ldots \Big(\int}_{k} e^{-\lambda x} z(x) \underbrace{\mathrm{d}x \Big) \ldots \Big) \mathrm{d}x}_{k}.
\end{aligned}
$$

Согласно формуле (1.14) произведение операторов $(B_{\lambda_j})^{k_j}$ и $(D - \lambda_j E)^{k_j}$ является тождественным оператором, т. е.

$$(D - \lambda_j E)^{k_j} \cdot (B_{\lambda_j})^{k_j}[y](x) = y(x) = E[y](x),$$

поэтому, действуя оператором $L[y]$ в (1.22) на функцию

$$y(x) = (B_{\lambda_p})^{k_p} \cdot \ldots \cdot (B_{\lambda_1})^{k_1}[f](x), \tag{1.23}$$

имеем

$$L[y](x) = (D-\lambda_1 E)^{k_1} \cdot \ldots \cdot (D-\lambda_p E)^{k_p} \cdot (B_{\lambda_p})^{k_p} \cdot \ldots \cdot (B_{\lambda_1})^{k_1}[f](x) = f(x), \tag{1.24}$$

т. е. функция (1.23) является решением уравнения (1.22). В частности, если характеристический корень один: $\lambda_i = \lambda$, $i = 1, \ldots, n$, и, значит, его кратность равна n, тогда

$$y(x) = (B_\lambda)^n[f](x) = e^{\lambda x} \int^n e^{-\lambda x} f(x) \mathrm{d}x^n.$$

Так как операторы $(D - \lambda_i E)^{k_i}$ и $(D - \lambda_j E)^{k_j}$ перестановочны, то формула (1.23) решения уравнения (1.22) справедлива при произвольном упорядочивании характеристических корней $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$. Однако отметим, что разность любых двух таких решений будет решением однородного уравнения.

Таким образом, из (1.23) получаем рекуррентную формулу для нахождения решения $y(x)$:

$$\begin{aligned}
&z_1(x) = (B_{\lambda_1})^{k_1}[f](x) = e^{\lambda_1 x} \int^{k_1} e^{-\lambda_1 x} f(x) \mathrm{d}x^{k_1},\\
&z_2(x) = (B_{\lambda_2})^{k_2}[z_1](x) = e^{\lambda_2 x} \int^{k_2} e^{-\lambda_2 x} z_1(x) \mathrm{d}x^{k_2},\\
&\vdots\\
&z_{p-1}(x) = (B_{\lambda_{p-1}})^{k_{p-1}}[z_{p-2}](x) = e^{\lambda_{p-1} x} \int^{(k_{p-1})} e^{-\lambda_{p-1} x} z_{p-2}(x) \mathrm{d}x^{k_{p-1}},\\
&y(x) = (B_{\lambda_p})^{k_p}[z_{p-1}](x) = e^{\lambda_p x} \int^{k_p} e^{-\lambda_p x} z_{p-1}(x) \mathrm{d}x^{k_p},
\end{aligned}$$

т. е.

$$y(x) = e^{\lambda_p x} \int^{k_p} \Big(e^{(\lambda_{p-1}-\lambda_p)x} \dots \\ \dots \int^{k_2} \Big(e^{(\lambda_1-\lambda_2)x} \int^{k_1} e^{-\lambda_1 x} f(x) \mathrm{d}x^{k_1} \Big) \mathrm{d}x^{k_2} \dots \Big) \mathrm{d}x^{k_p}. \tag{1.25}$$

Отметим, что при интегрировании (1.25) появляются n констант c_i, $i = 1, \dots, n$, и, значит, мы получаем все решения неоднородного уравнения (1.22), т. е. частное решение плюс все решения однородного уравнения. Однако все решения однородного уравнения легко выписываются с помощью формул (1.17)–(1.19). Поэтому при вычислении каждого интеграла в (1.25) для упрощения интегрирования лучше не включать дополнительные константы c_i, т. е. полагать их равными нулю, а затем к полученному частному решению добавить все решения однородного уравнения.

Частным случаем формул (1.23) и (1.25) будет решение уравнения $y^{(n)} = f(x)$, для которого $y(x) = \int^n f(x)\mathrm{d}x^n$. Для этого уравнения $\lambda = 0$ – n-кратный корень и, значит, $y(x) = (B_0)^n[f] = \int^n f(x)\mathrm{d}x^n$. Таким образом, формула (1.23), а значит и (1.25), являются обобщением этой простой формулы для уравнения $y^{(n)} = f(x)$ на произвольные неоднородные линейные уравнения с постоянными коэффициентами. Использование этих формул позволяет получать решение неоднородного уравнения (1.22), а значит, и (1.1) с помощью только n интегрирований без решения громоздкой системы алгебраических уравнений, т. е. существенно упростить процесс нахождения решения по сравнению с процессом нахождения решения методом вариаций.

Заметим, что решение (1.23) может быть комплексным, если существуют комплексные характеристические корни, т. е. в этом случае $y(x) = y_1(x) + iy_2(x)$. Так как функция $f(x)$ в (1.22) вещественная, то функция $y_2(x)$ удовлетворяет уравнению $L[y_2] = 0$. Поэтому вещественным частным решением уравнения (1.22) будет

$$y_{\text{ч}}(x) = y_1(x) + cy_2(x).$$

Распишем формулу (1.25) для всевозможных сдучаев при $n = 2$ и 3.

Уравнение второго порядка

Если в (1.1) $n = 2$, то возможны два случая: корни λ_1 и λ_2 – разные; корни одинаковые $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$.

В первом случае из (1.25) получаем следующую формулу для решения $y(x)$:

$$y(x) = B_{\lambda_2} \cdot B_{\lambda_1}[f](x) = e^{\lambda_2 x} \int \Big(e^{(\lambda_1 - \lambda_2)x} \int e^{-\lambda_1 x} f(x) \mathrm{d}x \Big) \mathrm{d}x \qquad (1.26)$$

или, меняя порядок λ_1 и λ_2,

$$y(x) = B_{\lambda_1} \cdot B_{\lambda_2}[f](x) = e^{\lambda_1 x} \int \Big(e^{(\lambda_2 - \lambda_1)x} \int e^{-\lambda_2 x} f(x) \mathrm{d}x \Big) \mathrm{d}x.$$

Напомним, что при замене порядка нумерации корней первое решение может отличаться от второго на функцию, являющуюся решением однородного уравнения.

В качестве примера для этого метода нахождения решения рассмотрим уравнение

$$y'' + y = e^x. \qquad (1.27)$$

Характеристическими корнями однородного уравнения будут $\lambda_1 = i$ и $\lambda_2 = -i$, и, значит, согласно (1.26), частное решение этого уравнения выражается формулой

$$\begin{aligned} y_{\text{ч}}(x) &= e^{-ix} \int \Big(e^{2ix} \int e^{(1-i)x} \mathrm{d}x \Big) \mathrm{d}x = \\ &= e^{-ix} \int \frac{e^{2ix}}{1-i} e^{(1-i)x} \mathrm{d}x = \\ &= e^{-ix} \int \frac{1}{1-i} e^{(1+i)x} \mathrm{d}x = \frac{1}{2} e^x. \end{aligned}$$

Отсюда, учитывая, что все решения однородного уравнения выписываются по формуле $y_{\text{од}} = c_1 \sin x + c_2 \cos x$, получаем, что вещественным решением рассмотренного уравнения будет функция

$$y(x) = \frac{1}{2} e^x + c_1 \sin x + c_2 \cos x.$$

Во втором случае, т. е. если $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, из (1.26) имеем

$$y(x) = (B_\lambda)^2 [f](x) = e^{\lambda x} \int \Big(\int e^{-\lambda x} f(x) \mathrm{d}x \Big) \mathrm{d}x. \qquad (1.28)$$

Задача № 575. Решить уравнение

$$y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x}.$$

Характеристический корень для этого уравнения кратный $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, и, значит, из (1.28)

$$\begin{aligned} y(x) &= e^x \int \Big(\int e^{-x} \frac{e^x}{x} \mathrm{d}x \Big) \mathrm{d}x = e^x \int \Big(\int \frac{\mathrm{d}x}{x} \Big) \mathrm{d}x = \\ &= e^x \int (\ln \mid x \mid + c_1) \mathrm{d}x = e^x (x \ln \mid x \mid - x) + c_1 x e^x + c_2 e^x. \end{aligned}$$

Задача № 579. Решить уравнение

$$y'' + 2y' + y = 3e^{-x}\sqrt{x+1}.$$

Характеристический корень для этого уравнения кратный $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$, и, значит, из (1.28)

$$\begin{aligned} y(x) &= 3e^{-x} \int \Big(\int e^x e^{-x} \sqrt{x+1} \mathrm{d}x \Big) \mathrm{d}x = e^{-x} \int \Big(\int \sqrt{x+1} \mathrm{d}x \Big) \mathrm{d}x = \\ &= \frac{4}{5} e^{-x} (x+1)^{5/2} + c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x}. \end{aligned}$$

Уравнение третьего порядка

Для $n = 3$ в (1.1) имеем три качественно различные возможности:
1) корни λ_1, λ_2 и λ_3 разные;
2) только два корня одинаковые, например $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda,\ \lambda_1 \neq \lambda$;
3) три корня одинаковые: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda$.
В первом случае из формул (1.23) и (1.25)

$$\begin{aligned} y(x) &= B_{\lambda_3} \cdot B_{\lambda_2} \cdot B_{\lambda_1}[f](x) = \\ &= e^{\lambda_3 x} \int \Big[e^{(\lambda_2 - \lambda_3)x} \int \Big(e^{(\lambda_1 - \lambda_2)x} \int e^{-\lambda_1 x} f(x) \mathrm{d}x \Big) \mathrm{d}x \Big] \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Меняя нумерацию корней, можно получить таким образом несколько частных решений уравнения (1.1) для $n = 3$. Например,

$$y(x) = e^{\lambda_1 x} \int \Big[e^{(\lambda_2 - \lambda_1)x} \int \Big(e^{(\lambda_3 - \lambda_2)x} \int e^{-\lambda_3 x} f(x) \mathrm{d}x \Big) \mathrm{d}x \Big] \mathrm{d}x. \qquad (1.29)$$

Очевидно, что разность любых двух решений будет решением однородного уравнения.

Во втором случае, т. е. когда $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda \neq \lambda_1$, из (1.29) следует

$$y(x) = (B_\lambda)^2 \cdot B_{\lambda_1}[f](x) = e^{\lambda x} \int \Big[\int \Big(e^{(\lambda_1 - \lambda)x} \int e^{-\lambda_1 x} f(x) \mathrm{d}x \Big) \mathrm{d}x \Big] \mathrm{d}x \tag{1.30}$$

или, считая $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda,\ \lambda_3 \neq \lambda$,

$$y(x) = B_{\lambda_3} \cdot (B_\lambda)^2[f](x) = e^{\lambda_3 x} \int \Big[e^{(\lambda - \lambda_3)x} \int \Big(\int e^{-\lambda x} f(x) \mathrm{d}x \Big) \mathrm{d}x \Big] \mathrm{d}x. \tag{1.31}$$

Задача № 587. Найти решение уравнения

$$y''' - 3y' - 2y = 9e^{2x},$$

удовлетворяющее условиям

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = -3, \quad y''(0) = 3.$$

Характеристическим уравнением будет

$$\lambda^3 - 3\lambda - 2 = 0,$$

а его корнями являются $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 2$. Из формулы (1.31) найдем частное решение

$$y_{\text{ч}}(x) = 9e^{2x} \int e^{-3x} \Big(\int \Big(\int e^x e^{2x} \mathrm{d}x \Big) \mathrm{d}x \Big) \mathrm{d}x = xe^{2x},$$

следовательно общее решение имеет вид

$$y_{\text{об}}(x) = y_{\text{ч}}(x) + y_{\text{од}}(x) = xe^{2x} + c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x} + c_3 e^{2x}.$$

Из условия $y(0) = 0$ получаем $c_1 + c_3 = 0$, т. е. $c_3 = -c_1$, поэтому

$$y(x) = xe^{2x} + c_1(e^{-x} - e^{2x}) + c_2 x e^{-x}$$

и, значит,

$$y'(x) = 2xe^{2x} + (1 - 2c_1)e^{2x} + (c_2 - c_1)e^{-x} - c_2 x e^{-x},$$

$$y''(x) = 4xe^{2x} + (4 - 4c_1)e^{2x} + (c_1 - 2c_2)e^{-x} + c_2xe^{-x}.$$

Из условий $y'(0) = 3$ и $y''(0) = 3$ следует

$$c_2 - 3c_1 = -4$$
$$-3c_1 - 2c_2 = -1,$$

отсюда получаем $c_1 = 1$, $c_2 = -1$, $c_3 = -1$, и, значит, решением, удовлетворяющим условиям, является

$$y(x) = xe^{2x} + e^{-x} - xe^{-x} - e^{2x} = (x-1)(e^{-x} - e^{-2x}).$$

В третьем случае, т. е. когда $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda$, частное решение, согласно (1.29), имеет вид

$$y(x) = (B_\lambda)^3[f](x) = e^{\lambda x}\int\Big[\int\Big(\int e^{-\lambda x}f(x)\mathrm{d}x\Big)\mathrm{d}x\Big]\mathrm{d}x. \tag{1.32}$$

В качестве примера применения формулы (1.32) найдем решение уравнения

$$y''' - 3y'' + 3y' - 1 = \Big(\sum_{k=0}^{m} a_k x^k\Big)e^x.$$

Для этого примера единица является характеристическим корнем кратности 3, т. е. $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$. Следовательно, из (1.32) получаем общее решение

$$y_{\text{об}}(x) = (B_1)^3[e^x](x) = e^x\int\Big(\int\Big(\int e^{-x}e^x\Big(\sum_{k=0}^{m} a_k x^k\Big)\mathrm{d}x\Big)\mathrm{d}x\Big)\mathrm{d}x =$$
$$= \Big(c_1 + c_2x + c_3x^2 + \sum_{k=0}^{m}\frac{a_k x^{k+3}}{(k+1)(k+2)(k+3)}\Big)e^x.$$

1.4. Метод неопределенных коэффициентов

С помощью формулы (1.23) легко получается доказательство алгоритма нахождения решений неоднородных уравнений методом неопределенных коэффициентов.

Метод неопределенных коэффициентов является эффективным для уравнений вида

$$L[y] \equiv y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \ldots + a_ny = e^{\lambda x}P(x), \tag{1.33}$$

где $a_i,\ i = 1, \ldots, n,$ – вещественные числа, а $P(x)$ – многочлен степени m, при этом λ и коэффициенты многочлена $P(x)$ могут быть комплексными.

Вначале заметим, что если λ не совпадает ни с одним корнем λ_i характеристического многочлена оператора L в (1.33), т. е. $\lambda - \lambda_i \neq 0$, то

$$B_{\lambda_i}[e^{\lambda x}P(x)](x) = e^{\lambda_i x}\int e^{(\lambda-\lambda_i)x}P(x)dx = e^{\lambda_i x}P_1(x), \qquad (1.34)$$

где $P_1(x)$ – многочлен того же порядка, что и $P(x)$. При этом многочлен $P_1(x)$ выписывается явно формулой

$$P_1(x) = \sum_0^m (-1)^i(\lambda - \lambda_i)^{-i-1}P^{(i)}(x), \qquad (1.35)$$

где $P^{(i)}(x)$ означает i-ю производную $P(x)$, при этом считается, что $P^{(0)}(x) = P(x)$. Таким образом, в случае, когда $\lambda \neq \lambda_i$, из формул (1.23) и (1.34) следует, что решением уравнения (1.33) будет функция $y(x) = P_2(x)e^{\lambda x}$, где $P_2(x)$ – многочлен того же порядка, что и $P(x)$ в (1.33).

Пусть λ совпадает с каким-либо корнем порядка s характеристического многочлена оператора L в (1.33). Так как

$$(B_\lambda)^s[e^{\lambda x}P(x)](x) = e^{\lambda x}\int^s P(x)\mathrm{d}x^s = e^{\lambda x}P_3(x),$$

где $P_3(x)$ – многочлен порядка $s + m$, то, учитывая, что согласно (1.34) для других корней характеристического многочлена порядок многочлена перед $e^{\lambda x}$ не будет увеличиваться, получаем, что в случае, когда λ – s-кратный корень характеристического многочлена для оператора L в (1.33), решение этого уравнения имеет вид $y(x) = e^{\lambda x}P_4(x)$, где $P_4(x)$ – многочлен порядка $s + m$. Теперь, замечая, что функция $e^{\lambda x}P_3(x)$, где $P_3(x)$ – многочлен порядка $s - 1$, является решением однородного уравнения для оператора L в (1.33), получаем, что решением этого уравнения будет более простая функция

$$y(x) = e^{\lambda x}P_5(x), \qquad (1.36)$$

где

$$P_5(x) = x^s(b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_{m-1}x + b_m).$$

Таким образом, решение уравнения (1.33) ищется в виде (1.36), при этом в многочлене $P_5(x)$ полагается $s = 0$, если λ не является корнем характеристического многочлена, а если λ является корнем характеристического многочлена, то s – порядок этого корня, b_i, $i = 0, \ldots, m$, – константы, в общем случае комплексные. Подставляя значение функции $y(x)$ из (1.36) в уравнение (1.33), мы получаем слева выражение вида $(c_0x^m + c_1x^{m-1} + \ldots + c_{m-1}x + c_m)e^{\lambda x}$, где коэффициенты c_j, $j = 0, \ldots, m$, являются линейной комбинацией искомых коэффициентов b_j, $j = 0, \ldots, m$, из (1.36). Приравнивая каждый коэффициент c_j, $j = 0, \ldots, m$, соответственно коэффициенту перед x^j в многочлене $P(x)$, мы получаем систему уравнений для b_j, $j = 0, \ldots, m$. Вычислив значения b_j, удовлетворяющие этой системе, мы находим многочлен $P_5(x)$ и, соответственно, решение $y(x)$ по формуле (1.36), удовлетворяющее уравнению (1.33). Если $P(x)$ и λ в (1.33) вещественные, то, учитывая, что мнимая часть решения неоднородного уравнения является решением однородного уравнения, получаем, что коэффициенты b_i, $i = 0, \ldots, m$, в (1.36) можно взять вещественными, т. е. $P_5(x)$ – вещественный многочлен.

Аналогичный способ применяется для нахождения решений неоднородного уравнения (1.1), если его правая часть имеет вид

$$f(x) = P_1(x)e^{\alpha x}\cos\beta x + P_2(x)e^{\alpha x}\sin\beta x, \tag{1.37}$$

где $P_1(x)$ и $P_2(x)$ – вещественные многочлены. Такая правая часть представляется в виде суммы двух комплексных функций вида (1.36), а именно

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x),$$

где

$$f_1(x) = \frac{1}{2}[P_1(x) - iP_2(x)]e^{\lambda x},$$

$$f_2(x) = \overline{f}_1(x) = \frac{1}{2}[P_1(x) + iP_2(x)]e^{\overline{\lambda} x}.$$

Поэтому решением уравнения (1.1) для $f(x)$, заданного формулой (1.37), будет сумма решений уравнения (1.33) с комплексной правой частью $P(x)e^{\lambda x}$ и $\overline{P}(x)e^{\overline{\lambda} x}$, где $P(x) = 1/2(P_1(x) - iP_2(x))$. Так как $P(x)e^{\lambda x}$ и $\overline{P}(x)e^{\overline{\lambda} x}$ – взаимно сопряженные комплексные функции, то функция $y(x) = y_1(x) + iy_2(x)$, являющаяся решением уравнения (1.33) для $P(x)e^{\lambda x}$, определяет решение уравнения (1.33) с правой частью

$\overline{P}(x)e^{\overline{\lambda}x}$ в сопряженном виде, а именно $y(x) = y_1(x) - iy_2(x)$. Поэтому решением уравнения (1.1) и, соответственно, (1.24) с правой частью в форме (1.37) будет вещественная часть решения уравнения (1.33) для $(P_1(x) - iP_2(x))e^{\lambda x}$, где $\lambda = \alpha + i\beta$, т. е. согласно формуле (1.36) решение имеет вид $y(x) = \mathrm{Re} P_5(x)e^{\lambda x}$, а именно

$$y(x) = x^s(P_3(x)e^{\alpha x}\cos(\beta x) + P_4(x)e^{\alpha x}\sin(\beta x)). \tag{1.38}$$

В этой формуле $P_3(x)$ и $P_4(x)$ – вещественные многочлены, степень каждого из которых равна максимальной степени многочленов $P_1(x)$ и $P_2(x)$. В частности, если $P_1(x) \equiv 0$, то степень многочленов $P_3(x)$ и $P_4(x)$ равна степени многочлена $P_2(x)$. Показатель степени s в (1.38) равен нулю, если комплексное число $\lambda = \alpha + i\beta$ не является корнем характеристического уравнения, а если $\lambda = \alpha + i\beta$ – корень этого уравнения, то s равно его кратности.

Задача № 545. Найти решение уравнения

$$y'' - 2y' + y = 6xe^x. \tag{1.39}$$

Так как единица – двукратный вещественный корень характеристического многочлена, а правая часть уравнения имеет вид $6xe^x$, то решение этого уравнения, согласно формуле (1.36), ищется в виде

$$y(x) = x^2(b_0x + b_1)e^x.$$

Имеем

$$y'(x) = [b_0x^3 + (b_1 + 3b_0)x^2 + 2b_1x]e^x,$$

$$y''(x) = [b_0x^3 + (b_1 + 6b_0)x^2 + (4b_1 + 6b_0)x + 2b_1]e^x.$$

Подставляя эти значения $y(x)$, $y'(x)$ и $y''(x)$ в (1.39), получаем следующее уравнение для определения коэффициентов b_0 и b_1:

$$b_0x^3 + (b_1 + 6b_0)x^2 + (4b_1 + 6b_0)x + 2b_1 - 2b_0x^3 -$$

$$-2(b_1 + 3b_0)x^2 - 4b_1x + b_0x^3 + b_1x^2 = 6x.$$

Отсюда, приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, имеем

$$4b_1 + 6b_0 - 4b_1 = 6, \qquad 2b_1 = 0,$$

поэтому $b_1 = 0$, $b_0 = 1$. Таким образом, частным решением неоднородного уравнения (1.39) будет функция $y_ч(x) = x^3e^x$.

Отметим, что из формулы (1.23) мы получаем сразу общее решение уравнения (1.39):

$$y_{\text{об}}(x) = (B_1)^2[6xe^x] = e^x \int^2 6x\mathrm{d}x^2 = e^x \int \Big(\int 6x\mathrm{d}x\Big)\mathrm{d}x = (x^3+c_1x+c_2)e^x.$$

Задача № 538. Решить уравнение

$$y'' + y = 4\sin x. \tag{1.40}$$

Характеристическими корнями для характеристического многочлена этого уравнения будут $\lambda_1 = i$ и $\lambda_2 = -i$. Так как $\sin x = (e^{ix} - e^{-ix})/(2i)$, то в формуле (1.38) $s = 1$, т. е. решение уравнения (1.40) ищется в виде $y(x) = x(c_1 \sin x + c_2 \cos x)$. Имеем

$$y'(x) = x(c_1 \cos x - c_2 \sin x) + (c_1 \sin x + c_2 \cos x),$$

$$y''(x) = -y(x) + 2(c_1 \cos x - c_2 \sin x).$$

Подставляя выражение для $y(x)$ и $y''(x)$ в уравнение, получаем

$$2c_1 \cos x - 2c_2 \sin x = 4 \sin x.$$

Отсюда $c_1 = 0$, а $c_2 = -2$. Таким образом, частным решением неоднородного уравнения (1.40) будет функция $y_{\text{ч}}(x) = -2x\cos x$. Соответственно, общим решением будет

$$y_{\text{об}}(x) = c_1 \sin x + c_2 \cos x - 2x \cos x.$$

1.5. Новые формулы для решений неоднородного уравнения

В данном разделе показано, что решение неоднородного линейного уравнения n-го порядка является линейной комбинацией решений неоднородного уравнения первого порядка в том случае, если все корни характеристического многочлена – разные.

1.5.1. Уравнение второго порядка

Разные корни

Рассмотрим уравнение

$$L[y] \equiv y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x). \tag{1.41}$$

Если λ_1 и λ_2 – корни характеристического многочлена этого уравнения, т. е. $\lambda_1 + \lambda_2 = -a_1$, $\lambda_1\lambda_2 = a_2$ и $\lambda_1 \neq \lambda_2$, то оператор L является произведением двух операторов $L_{\lambda_i}[y] = y' - \lambda_i y$, $i = 1, 2$, в частности

$$L[y] = L_{\lambda_1} \cdot L_{\lambda_2}[y] = L_{\lambda_1}[L_{\lambda_2}[y]].$$

Согласно (1.26) решением неоднородного уравнения (1.41) будет функция

$$y(x) = B_{\lambda_2} \cdot B_{\lambda_1}[f](x) = e^{\lambda_2 x} \int \Big(e^{(\lambda_1 - \lambda_2)x} \int e^{-\lambda_1 x} f(x) \mathrm{d}x \Big) \mathrm{d}x. \tag{1.42}$$

Отсюда, интегрируя по частям, получаем

$$\begin{aligned} y(x) &= \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{\lambda_1 x} \int e^{-\lambda_1 x} f(x) \mathrm{d}x - \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{\lambda_2 x} \int e^{-\lambda_2 x} f(x) \mathrm{d}x = \\ &= \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} (y_{\lambda_1}(x) - y_{\lambda_2}(x)), \end{aligned} \tag{1.43}$$

где

$$y_{\lambda_i}(x) = e^{\lambda_i x} \int e^{-\lambda_i x} f(x) \mathrm{d}x, \quad i = 1, 2,$$

т. е. $y_{\lambda_i}(x)$ является решением неоднородного уравнения первого порядка $y' - \lambda_i y = f(x)$. Следовательно, если $\lambda_1 \neq \lambda_2$, то, согласно (1.43), решение неоднородного уравнения второго порядка (1.41) выражается в виде линейной комбинации решений двух неоднородных уравнений первого порядка с той же правой частью $f(x)$.

Задача № 533. Решить уравнение

$$y'' - 2y' - 3y = e^{4x}.$$

Характеристическим многочленом этого уравнения будет $\lambda^2 - 2\lambda - 3$, а его корнями будут $\lambda_1 = 3$ и $\lambda_2 = -1$, поэтому

$$y_{\lambda_1}(x) = e^{3x} \int e^{-3x} e^{4x} \mathrm{d}x = e^{4x} + c_1 e^{3x},$$

$$y_{\lambda_2}(x) = e^{-x}\int e^x e^{4x}\mathrm{d}x = \frac{1}{5}e^{4x} + c_2 e^{-x}.$$

Согласно формуле (1.43) общее решение этого уравнения имеет вид

$$y_{\text{об}}(x) = \frac{1}{4}\Big(e^{4x} - \frac{1}{5}e^{4x} + c_1 e^{3x} - c_2 e^{-x}\Big) = \frac{1}{5}e^{4x} + d_1 e^{3x} + d_2 e^{-x}.$$

Комплексные корни

Используя формулу (1.43), найдем решение задачи (1.41) для случая, когда корни λ_1 и λ_2 – комплексные, т. е.

$$\lambda_1 = \alpha + i\beta, \quad \lambda_2 = \overline{\lambda}_1 = \alpha - i\beta, \quad \beta \neq 0.$$

Согласно верхней части формулы (1.43) получаем решение в следующем виде:

$$y(x) = \frac{1}{2i\beta}\Big\{e^{(\alpha+i\beta)x}\int e^{-(\alpha+i\beta)x}f(x)\mathrm{d}x - e^{(\alpha-i\beta)x}\int e^{-(\alpha-i\beta)x}f(x)\mathrm{d}x\Big\}. \tag{1.44}$$

Так как функции

$$e^{(\alpha-i\beta)x}\int e^{-(\alpha-i\beta)x}f(x)\mathrm{d}x \quad \text{и} \quad e^{(\alpha+i\beta)x}\int e^{-(\alpha-i\beta)x}f(x)\mathrm{d}x$$

взаимно сопряженные, то вещественная часть в фигурной скобке формулы (1.44) равна нулю, а мнимые складываются и, значит,

$$y(x) = \frac{1}{\beta}\mathrm{Im}\Big[e^{(\alpha+i\beta)x}\int e^{-(\alpha+i\beta)x}f(x)\mathrm{d}x\Big], \tag{1.45}$$

т. е. решение для случая комплексных корней λ и $\bar{\lambda}$ можно получить с помощью одного интегрирования комплексной функции. Таким образом, при наличии комплексного характеристического корня $\lambda = \alpha + i\beta$ число интегрирований для получения частного решения неоднородного уравнения (1.22) может быть меньше n. Для этого в формуле (1.23) нужно объединить операторы $(B_\lambda)^{k_\lambda}$ и $(B_{\overline{\lambda}})^{k_\lambda}$ для каждого комплексного λ, где k_λ – кратность корня λ, а значит, и $\overline{\lambda}$, т. е. вместо этих двух операторов ввести один оператор $(B_\lambda \cdot B_{\overline{\lambda}})^{k_\lambda}$. Так, для примера (1.27) получаем частное решение $y_{\text{ч}}(x)$ по формуле

$$\begin{aligned} y_{\text{ч}}(x) &= B_i \cdot B_{-i}[e(x)] = \mathrm{Im}\Big(e^{ix}\int e^{-ix}e^x\mathrm{d}x\Big) = \\ &= \mathrm{Im}\frac{e^x}{1-i} = \frac{e^x}{2}. \end{aligned}$$

Учитывая, что

$$e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x), \quad e^{-(\alpha+i\beta)x} = e^{-\alpha x}(\cos\beta x - i\sin\beta x),$$

получаем из (1.45) еще одну формулу в квадратурах для вещественного решения уравнения (1.41) для случая, когда корни комплексные

$$\begin{aligned}
y(x) &= \frac{1}{\beta}\mathrm{Im}\Big[e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x)\int e^{-\alpha x}(\cos\beta x - i\sin\beta x)f(x)\mathrm{d}x\Big] = \\
&= \frac{1}{\beta}\Big[-e^{\alpha x}\cos\beta x\int e^{-\alpha x}\sin\beta x f(x)\mathrm{d}x + \\
&\quad + e^{\alpha x}\sin\beta x\textstyle\int e^{-\alpha x}\cos\beta x f(x)\mathrm{d}x\Big] = \\
&= \frac{e^{\alpha x}}{\beta}\Big[\sin\beta x\int e^{-\alpha x}\cos\beta x f(x)\mathrm{d}x - \cos\beta x\int e^{-\alpha x}\sin\beta x f(x)\mathrm{d}x\Big].
\end{aligned} \tag{1.46}$$

Эта формула, в отличие от (1.45), требует два интегрирования. Однако для случая частного решения $y_{\text{ч}}(x)$ с условием $y_{\text{ч}}(x_0) = 0$ данную формулу можно преобразовать к более компактному виду, а именно, из (1.46) имеем

$$\begin{aligned}
y_{\text{ч}}(x) = \frac{e^{\alpha x}}{\beta}\Big(\sin\beta x\int_{x_0}^{x} e^{-\alpha t}\cos\beta t f(t)\mathrm{d}t - \cos\beta x\int_{x_0}^{x} e^{-\alpha t}\sin\beta t f(t)\mathrm{d}t\Big) = \\
= \frac{1}{\beta}\int_{x_0}^{x} e^{\alpha(x-t)}\sin\beta(x-t)f(t)\mathrm{d}t.
\end{aligned} \tag{1.47}$$

Следовательно, общее решение можно записать в виде

$$\begin{aligned}
y_{\text{об}}(x) &= y_{\text{ч}}(x) + y_{\text{од}}(x) = \\
&= \frac{1}{\beta}\int_{x_0}^{x} e^{\alpha(x-t)}\sin\beta(x-t)f(t)\mathrm{d}t + c_1 e^{\alpha x}\sin\beta x + c_2 e^{\alpha x}\cos\beta x.
\end{aligned} \tag{1.48}$$

Задача № 611. Решить уравнение

$$y'' + y = f(x).$$

Для данного уравнения характеристическими корнями будут $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = -i$, т. е. в формуле (1.48) $\alpha = 0$, $\beta = 1$, и, значит, общее решение уравнения имеет вид

$$y_{\text{об}}(x) = \int_{x_0}^{x} \sin(x-t)f(t)\mathrm{d}t + c_1 \sin x + c_2 \cos x. \tag{1.49}$$

Задача № 577. Решить уравнение

$$y'' + y = \frac{1}{\sin x}.$$

Из (1.49) получаем следующую формулу для решения этого уравнения:

$$\begin{aligned} y_{\text{об}}(x) &= \int_{x_0}^{x} \frac{\sin(x-t)}{\sin t}\mathrm{d}t + c_1 \sin x + c_2 \cos x = \\ &= \int_{x_0}^{x} \Big(\frac{\sin x \cos t}{\sin t} - \frac{\sin t \cos x}{\sin t}\Big)\mathrm{d}t + c_1 \sin x + c_2 \cos x = \\ &= \sin x \ln |\sin x| - x\cos x + c_1 \sin x + c_2 \cos x. \end{aligned}$$

Кратные корни

Если λ_1 стремится к $\lambda_2 = \lambda$, то из формулы (1.43) получаем

$$\lim_{(\lambda_1-\lambda)\to 0} \frac{y_{\lambda_1} - y_\lambda}{\lambda_1 - \lambda} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda} y(\lambda, x),$$

где

$$y(\lambda, x) = y_\lambda(x) = e^{\lambda x} \int e^{-\lambda x} f(x)\mathrm{d}x.$$

Отсюда если $f(x) \neq e^{\lambda x} g(x)$, где λ – кратный корень, имеем

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda} y(\lambda, x) = x e^{\lambda x} \int e^{-\lambda x} f(x)\mathrm{d}x - e^{\lambda x} \int x e^{-\lambda x} f(x)\mathrm{d}x. \tag{1.50}$$

Правая часть этой формулы является решением уравнения второго порядка с кратным характеристическим корнем λ. В этом случае, согласно (1.28), решение имеет вид

$$y_\lambda(x) = e^{\lambda x} \int \Big(\int e^{-\lambda x} f(x)\mathrm{d}x\Big)\mathrm{d}x.$$

Интегрируя правую часть этого выражения по частям, получаем

$$y_\lambda(x) = x e^{\lambda x} \int e^{-\lambda x} f(x)\mathrm{d}x - e^{\lambda x} \int x e^{-\lambda x} f(x)\mathrm{d}x, \tag{1.51}$$

т. е. формулу (1.50). Значит, частное решение уравнения с кратными корнями можно получить дифференцированием по λ функции $y(\lambda, x) = y_\lambda(x)$, являющейся решением уравнения $y' - \lambda y = f(x)$, т. е.

$$y_{\text{ч}}(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda} y(\lambda,\ x) \tag{1.52}$$

в том случае, если $f(x) \neq e^{\lambda x} g(x)$, где λ – кратный корень.

Задача № 547. Решить уравнение

$$y'' + 4y' + 4y = xe^{2x}.$$

Для этого уравнения характеристический корень кратный: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, $\lambda = -2$. Имеем

$$y_\lambda(x) = e^{\lambda x} \int e^{-\lambda x} x e^{2x} \mathrm{d}x = e^{\lambda x}\Big(\frac{x}{2-\lambda} e^{(2-\lambda)x} - \frac{1}{(2-\lambda)^2} e^{(2-\lambda)x}\Big) + c_1 =$$

$$= e^{2x}\Big(\frac{x}{2-\lambda} - \frac{1}{(2-\lambda)^2}\Big) + c_1 e^{\lambda x},$$

и, значит, согласно формуле (1.52),

$$y_{\text{ч}}(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda} y_\lambda(x) = e^{2x}\Big(\frac{x}{(2-\lambda)^2} - \frac{2}{(2-\lambda)^3}\Big) + c_1 x e^{\lambda x}.$$

Отсюда, полагая $\lambda = -2$, имеем

$$y_{\text{ч}}(x) = \frac{e^{2x}}{32}(2x - 1) + c_1 x e^{-2x}$$

и

$$y_{\text{об}}(x) = \frac{e^{2x}}{32}(2x - 1) + c_1 x e^{-2x} + c_2 e^{-2x}.$$

По аналогии с (1.48) получаем из (1.51) еще одну формулу частного решения уравнения второго порядка с кратным корнем $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$:

$$y_{\text{ч}}(x) = \int_{x_0}^{x} (x - t) e^{\lambda(x-t)} f(t) \mathrm{d}t, \tag{1.53}$$

и, следовательно, общее решение имеет вид

$$y_{\text{об}}(x) = y_{\text{ч}}(x) + y_{\text{од}}(x) = \int_{x_0}^{x} (x - t) e^{\lambda(x-t)} f(t) \mathrm{d}t + c_1 e^{\lambda x} + c_2 x e^{\lambda x}.$$

1.5.2. Уравнение третьего порядка

В данном пункте рассматривается решение уравнений 3-го порядка:

$$L[y] \equiv y''' + a_1 y'' + a_2 y' + a_3 y = f(x). \qquad (1.54)$$

Разные вещественные корни

Если λ_1, λ_2 и λ_3 – разные корни характеристического многочлена этого уравнения, то согласно (1.29) решением неоднородного уравнения (1.54) будет функция

$$y(x) = e^{\lambda_1 x}\int\Big[e^{(\lambda_2-\lambda_1)x}\int\Big(e^{(\lambda_3-\lambda_2)x}\int e^{-\lambda_3 x}f(x)\mathrm{d}x\Big)\mathrm{d}x\Big]\mathrm{d}x. \qquad (1.55)$$

Интегрируя правую часть этой формулы по частям, получаем

$$\begin{aligned} y(x) &= \frac{1}{\lambda_2-\lambda_1}\Big\{e^{\lambda_2 x}\int\Big[e^{(\lambda_3-\lambda_2)x}\int e^{-\lambda_3 x}f(x)\mathrm{d}x\Big]\mathrm{d}x- \\ &\quad -e^{\lambda_1 x}\int\Big[e^{(\lambda_3-\lambda_1)x}\int e^{-\lambda_3 x}f(x)\mathrm{d}x\Big]\mathrm{d}x\Big\}. \end{aligned} \qquad (1.56)$$

Согласно формуле (1.43)

$$e^{\lambda_2 x}\int\Big[e^{(\lambda_3-\lambda_2)x}\int e^{-\lambda_3 x}f(x)\mathrm{d}x\Big]\mathrm{d}x = \frac{1}{\lambda_3-\lambda_2}\Big(y_{\lambda_3}(x) - y_{\lambda_2}(x)\Big),$$

$$e^{\lambda_1 x}\int\Big[e^{(\lambda_3-\lambda_1)x}\int e^{-\lambda_3 x}f(x)\mathrm{d}x\Big]\mathrm{d}x = \frac{1}{\lambda_3-\lambda_1}\Big(y_{\lambda_3}(x) - y_{\lambda_1}(x)\Big),$$

где $y_{\lambda_i}(x)$ – функция, являющаяся решением уравнения $y' - \lambda_i y = f(x)$, т. е.

$$y_{\lambda_i}(x) = e^{\lambda_i x}\int e^{-\lambda_i x}f(x)\mathrm{d}x, \quad i = 1, 2, 3.$$

Поэтому из (1.56) следует

$$\begin{aligned} y(x) &= \frac{1}{\lambda_2-\lambda_1}\Big[\frac{y_{\lambda_3}(x)-y_{\lambda_2}(x)}{\lambda_3-\lambda_2} - \frac{y_{\lambda_3}(x)-y_{\lambda_1}(x)}{\lambda_3-\lambda_1}\Big] = \\ &= \frac{1}{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_3)}y_{\lambda_1}(x) + \frac{1}{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_2-\lambda_3)}y_{\lambda_2}(x)+ \\ &\quad +\frac{1}{(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)}y_{\lambda_3}(x) \end{aligned} \qquad (1.57)$$

или в компактном виде

$$y(x) = \sum_{k=1}^{3} \frac{1}{\Pi_{i \neq k}(\lambda_k - \lambda_i)} y_{\lambda_k}(x), \quad i, k = 1, 2, 3. \tag{1.58}$$

Задача № 565. Найти решение уравнения

$$y''' - 4y'' + 3y' = x^2 + xe^{2x}.$$

Характеристическим многочленом для этого уравнения будет

$$\lambda^3 - 4\lambda^2 + 3\lambda = \lambda(\lambda^2 - 4\lambda + 3),$$

а его корнями являются $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = 1$. Так как корни разные, то решение уравнения можно найти по формуле (1.57), используя функции $y_{\lambda_i}(x)$, являющиеся решением уравнения

$$y' - \lambda_i y = x^2 + xe^{2x}, \quad i = 1, 2, 3,$$

т. е.

$$y_{\lambda_i}(x) = e^{\lambda_i x} \int e^{-\lambda_i x}(x^2 + xe^{2x})\mathrm{d}x, \quad i = 1, 2, 3.$$

Для вычисления $y_{\lambda_i}(x)$ используем известную формулу

$$\int e^{\lambda x} P(x)\mathrm{d}x = e^{\lambda x} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{\lambda^{k+1}} P^{(k)}(x),$$

где $P(x)$ – многочлен степени n, а $P^{(k)}(x)$ – k-я производная $P(x)$, при этом $P^{(0)}(x) = P(x)$. Имеем

$$\begin{aligned}
y_{\lambda_1}(x) &= \int (x^2 + xe^{2x})\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3} + e^{2x}\Big(\frac{x}{2} - \frac{1}{4}\Big), \\
y_{\lambda_2}(x) &= e^{3x} \int e^{-3x}(x^2 + xe^{2x})\mathrm{d}x = \\
&= e^{3x}\Big(e^{-3x}\Big(-\frac{x^2}{3} - \frac{2x}{9} - \frac{2}{27}\Big) - e^{-x}(x+1)\Big) = \\
&= -\frac{x^2}{3} - \frac{2x}{9} - \frac{2}{27} - e^{2x}(x+1), \\
y_{\lambda_3}(x) &= e^{x} \int (x^2 e^{-x} + xe^{x})\mathrm{d}x = e^{x}(e^{-x}(-x^2 - 2x - 2) + e^{x}(x-1)) = \\
&= -x^2 - 2x - 2 + e^{2x}(x-1).
\end{aligned}$$

Следовательно, из формулы (1.57) получаем

$$\begin{aligned} y_{\text{ч}}(x) &= \frac{1}{3}y_{\lambda_1}(x) + \frac{1}{6}y_{\lambda_2}(x) - \frac{1}{2}y_{\lambda_3}(x) = \\ &= \frac{1}{3}\Big(\frac{x^3}{3} + e^{2x}\Big(\frac{x}{2} - \frac{1}{4}\Big)\Big) + \\ &\quad + \frac{1}{6}\Big(-\frac{x^2}{3} - \frac{2x}{9} - \frac{2}{27} - e^{2x}(x+1)\Big) - \\ &\quad - \frac{1}{2}(-x^2 - 2x - 2 + e^{2x}(x-1)) = \\ &= \frac{1}{9}x^3 + \frac{4}{9}x^2 + \frac{26}{27}x + e^{2x}\Big(\frac{1}{4} - \frac{x}{2}\Big) + c \end{aligned}$$

и

$$y_{\text{об}}(x) = \frac{1}{9}x^3 + \frac{4}{9}x^2 + \frac{26}{27}x + e^{2x}\Big(\frac{1}{4} - \frac{x}{2}\Big) + c_1 + c_2e^x + c_3e^{3x}.$$

Комплексные корни

Задача № 556. Решить уравнение

$$y''' + y' = \sin x + x\cos x. \tag{1.59}$$

Характеристическим уравнением будет $\lambda^3 + \lambda = 0$, для которого корнями являются $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = i$, $\lambda_3 = -i$, поэтому, согласно формуле (1.23),

$$y(x) = B_{-i} \cdot B_i \cdot B_0[\sin x + x\cos x].$$

Так как

$$B_0[\sin x + x\cos x] = \int(\sin x + x\cos x)\mathrm{d}x = x\sin x,$$

то от уравнения (1.59) можно перейти к уравнению второго порядка

$$y'' + y = x\sin x,$$

частное решение которого записывается в виде

$$y_{\text{ч}}(x) = B_{-i} \cdot B_i[x\sin x],$$

и, значит, согласно формуле (1.45) частным решением уравнения (1.59) будет функция

$$\begin{aligned}
y_{\text{ч}}(x) &= \operatorname{Im}\Big[e^{ix}\int e^{-ix}x\sin x\mathrm{d}x\Big] = \operatorname{Im}\Big[e^{ix}\int xe^{-ix}\Big(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\Big)\mathrm{d}x\Big] = \\
&= \operatorname{Im}\Big[e^{ix}\int \frac{x}{2i}\mathrm{d}x - e^{ix}\int \frac{x}{2i}e^{-2ix}\mathrm{d}x\Big] = \\
&= \operatorname{Im}\Big[\frac{x^2}{4i}e^{ix} - \frac{1}{2i}\Big(-\frac{x}{2i}e^{-ix} + \frac{1}{4}e^{-ix}\Big)\Big] = \\
&= -\frac{x^2}{4}\cos x + \frac{x}{4}\sin x + \frac{1}{8}\cos x.
\end{aligned}$$

Решением однородного уравнения с характеристическими корнями $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = i$, $\lambda_3 = -i$ будет функция

$$y_{\text{од}}(x) = c_1 + c_2\sin x + c_3\cos x,$$

поэтому общим решением уравнения (1.59) будет функция

$$y_{\text{об}}(x) = y_{\text{ч}}(x) + y_{\text{од}}(x) = -\frac{x^2}{4}\cos x + \frac{x}{4}\sin x + c_1 + c_2\sin x + c_3\cos x.$$

1.5.3. Уравнения произвольного порядка

Формула (1.57) обобщается для уравнений n-го порядка ($n > 3$)

$$y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}y' + a_ny = f(x)$$

в том случае, когда корни $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ характеристического многочлена для этого уравнения разные, а именно, решение $y(x)$ выражается в виде линейной комбинации решений одномерных уравнений

$$y' - \lambda_iy = f(x), \quad i = 1, \ldots, n$$

с той же правой частью $f(x)$:

$$y(x) = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\Pi_{i\neq k}(\lambda_k - \lambda_i)}y_{\lambda_k}(x), \quad i, k = 1, \ldots, n, \tag{1.60}$$

где

$$y_{\lambda_k}(x) = e^{\lambda_kx}\int e^{-\lambda_kx}f(x)\mathrm{d}x, \quad k = 1, \ldots, n.$$

Доказательство проводится по индукции аналогично трехмерному случаю.

Для получения решения уравнения n-го порядка можно также использовать операцию расщепления этого уравнения на уравнения меньшего порядка.

Задача № 569. Решить уравнение

$$L[y] \equiv y^{(4)} + 5y'' + 4y = \sin x \cos 2x. \tag{1.61}$$

Характеристическими корнями для этого уравнения будут

$$\lambda_1 = i, \quad \lambda_2 = -i, \quad \lambda_3 = 2i, \quad \lambda_4 = -2i.$$

Заметим, что если λ комплексное число, то

$$y_{\overline{\lambda}} = e^{\overline{\lambda}x} \int e^{-\overline{\lambda}x} f(x) \mathrm{d}x = \overline{e^{\lambda x} \int e^{-\lambda x} f(x) \mathrm{d}x},$$

т. е. комплексные функции $y_\lambda(x)$ и $y_{\overline{\lambda}}(x)$ – взаимно сопряженные. Поэтому для получения решения уравнения (1.61) по формуле (1.60) для $n = 4$ достаточно найти только $y_{\lambda_1}(x)$ и $y_{\lambda_3}(x)$, так как $y_{\lambda_2}(x) = \overline{y}_{\lambda_1}(x)$, $y_{\lambda_4}(x) = \overline{y}_{\lambda_3}(x)$. Значит, согласно формуле (1.60) частное решение уравнения определяется формулой

$$\begin{aligned} y_{\text{ч}}(x) = {} & \frac{y_{\lambda_1}(x)}{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_3)(\lambda_1-\lambda_4)} + \frac{\overline{y}_{\lambda_1}(x)}{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_2-\lambda_3)(\lambda_2-\lambda_4)} + \\ & + \frac{y_{\lambda_3}(x)}{(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)(\lambda_3-\lambda_4)} + \frac{\overline{y}_{\lambda_3}(x)}{(\lambda_4-\lambda_1)(\lambda_4-\lambda_2)(\lambda_4-\lambda_3)} = \\ & = \frac{1}{6i}(y_{\lambda_1}(x) - \overline{y}_{\lambda_1}(x)) - \frac{1}{12i}(y_{\lambda_3}(x) - \overline{y}_{\lambda_3}(x)) = \\ & = \frac{1}{3}\mathrm{Im} y_{\lambda_1}(x) - \frac{1}{6}\mathrm{Im} y_{\lambda_3}(x). \end{aligned} \tag{1.62}$$

Имеем

$$\sin x \cos 2x = \frac{1}{4i}(e^{ix} - e^{-ix})(e^{2ix} + e^{-2ix}),$$

следовательно

$$\begin{aligned}
y_{\lambda_1}(x) &= \frac{e^{ix}}{4i}\int e^{-ix}(e^{ix}-e^{-ix})(e^{2ix}+e^{-2ix})\mathrm{d}x = \\
&= \frac{e^{ix}}{4i}\Big(\int (e^{2ix}+e^{-2ix})\mathrm{d}x - \int e^{-2ix}(e^{2ix}+e^{-2ix})\mathrm{d}x\Big) = \\
&= -\frac{e^{ix}}{8}(e^{2ix}-e^{-2ix}) - \frac{e^{ix}}{4i}\int (1+e^{-4ix})\mathrm{d}x = \\
&= -\frac{1}{8}e^{ix}(e^{2ix}-e^{-2ix}) - \frac{x}{4i}e^{ix} - \frac{1}{16}e^{-3ix} = \\
&= -\frac{1}{8}e^{3ix} - \frac{1}{16}e^{-3ix} - \frac{x}{4i}e^{ix} + \frac{1}{8}e^{-ix},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y_{\lambda_3}(x) &= \frac{e^{2ix}}{4i}\int e^{-2ix}(e^{ix}-e^{-ix})(e^{2ix}+e^{-2ix})\mathrm{d}x = \\
&= \frac{e^{2ix}}{4i}\int (e^{ix}-e^{-ix})\mathrm{d}x + \frac{e^{2ix}}{4i}\int \Big(e^{-3ix}-e^{-5ix})\mathrm{d}x = \\
&= -\frac{e^{2ix}}{4}(e^{ix}+e^{-ix}) + \frac{e^{2ix}}{4i}\Big(-\frac{1}{3i}e^{-3ix}+\frac{1}{5i}e^{-5ix}\Big) = \\
&= -\frac{1}{4}(e^{3ix}+e^{ix}) + \frac{1}{12}e^{-ix} - \frac{1}{20}e^{-3ix}.
\end{aligned}$$

Так как функции e^{ix} и e^{-ix} являются решениями однородного уравнения, то для нахождения частного решения по формуле (1.62) можно считать

$$\begin{aligned}
y_{\lambda_1}(x) &= -\frac{1}{8}e^{3ix} - \frac{1}{16}e^{-3ix} - \frac{x}{4i}e^{ix}, \\
y_{\lambda_3}(x) &= -\frac{1}{4}e^{3ix} - \frac{1}{20}e^{-3ix},
\end{aligned}$$

значит, из (1.62) имеем

$$y_{\text{ч}}(x) = \frac{1}{3}\mathrm{Im}y_{\lambda_1}(x) - \frac{1}{6}\mathrm{Im}y_{\lambda_3}(x) =$$

$$= \frac{1}{3}\Big(-\frac{1}{8}\sin 3x + \frac{1}{16}\sin 3x + \frac{x}{4}\cos x\Big) - \frac{1}{6}\Big(-\frac{1}{4}\sin 3x + \frac{1}{20}\sin 3x\Big) =$$

$$= \frac{1}{80}\sin 3x + \frac{1}{12}x\cos x.$$

Для общего решения получаем следующую формулу:

$$y_{\text{об}}(x) = \frac{1}{80}\sin 3x + \frac{1}{12}x\cos x + c_1 \sin x + c_2 \cos x + c_3 \sin 2x + c_4 \cos 2x.$$

Другой способ получения решения уравнения (1.61) состоит в расщеплении оператора L на два оператора второго порядка L_1 и L_2, где $L_1[y] = y'' + y$, $L_2[y] = y'' + 4y$, для которых уравнение переходит в

$$L[y] \equiv L_1 \cdot L_2[y] = \sin x \cos 2x.$$

Для оператора L_2 имеем уравнение

$$y'' + 4y = \sin x \cos 2x,$$

решением которого является функция $y_1(x)$, полученная по формуле (1.45) для $\alpha = 0$, $\beta = 2$.

Затем для второго оператора L_1 имеем уравнение

$$L_1[y] = y_1(x),$$

решение которого также находится по формуле (1.45). Полученная функция $y_{\text{ч}}(x)$ и будет частным решением уравнения (1.61).

Глава 2

Системы с постоянными коэффициентами

В данной главе представлен метод решения систем линейных уравнений

$$\mathbf{y}' - \mathbf{A}\mathbf{y} = \mathbf{f}(x), \tag{2.1}$$

где $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)^T$, $\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_n)^T$, $\mathbf{A} = \{a_{ij}\}, i, j = 1, \ldots, n,$ – матрица с постоянными коэффициентами.

2.1. Однородные системы

Рассмотрим однородное уравнение

$$\mathbf{y}' - \mathbf{A}\mathbf{y} = \mathbf{0}. \tag{2.2}$$

Будем искать решение уравнения (2.2) в виде

$$\mathbf{y}(x) = e^{\lambda x}\mathbf{y}_1, \tag{2.3}$$

где $\mathbf{y}_1$ – некоторый постоянный вектор, а λ – вещественное или комплексное число. Так как

$$\mathbf{y}'(x) = \lambda e^{\lambda x}\mathbf{y}_1 = \lambda \mathbf{y}(x)$$

и $e^{\lambda x} \neq 0$, то (2.2) преобразуется в векторное уравнение относительно λ и $\mathbf{y}_1$:

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})\mathbf{y}_1 = \mathbf{0}, \tag{2.4}$$

где $\mathbf{E}$ – единичная матрица. Таким образом, вектор-функция (2.3) является ненулевым решением (2.2), если λ – **собственное значение** матрицы $\mathbf{A}$, а $\mathbf{y}_1$ – ее **соответствующий собственный вектор**. Из теории матриц известно, что собственными значениями матрицы $\mathbf{A}$ являются корни **характеристического уравнения**

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = 0, \tag{2.5}$$

а собственные векторы находятся из уравнения (2.4) при заданных значениях корней уравнения (2.5). Множество собственных значений матрицы $\mathbf{A}$ называется **спектром** этой матрицы.

2.1.1. Разные корни

Если все корни $\lambda_j, j = 1, \ldots, n$, характеристического многочлена (2.5) разные, то решениями однородного уравнения (2.2) будут n вектор-функций

$$\mathbf{y}_j(x) = e^{\lambda_j x}\mathbf{y}_j, \tag{2.6}$$

где $\mathbf{y}_j$ – ненулевой собственный вектор матрицы $\mathbf{A}$, соответствующий собственному значению λ_j. Отметим, что если λ_j – комплексное число, то вектор $\mathbf{y}_j$ имеет, по крайней мере, одну комплексную компоненту. Из теории матриц известно, что собственные вектора $\mathbf{y}_j$, $j = 1, \ldots, n$, линейно независимы, поэтому и функции (2.6) линейно независимы, т. е. нет таких комплексных констант $d_1, \cdots, d_n$, по крайней мере, одна из которых не равна нулю, для которых $\sum_{j=1}^n d_j\mathbf{y}_j(x) \equiv 0$. Если λ_k – комплексный корень, т. е. $\lambda_k = \alpha + i\beta$, то $\overline{\lambda}_k = \alpha - i\beta$ также будет корнем характеристического многочлена (2.5). При этом если $\mathbf{y}_k(x)$ – комплексное решение (2.6) для корня λ_k, то сопряженная вектор-функция $\overline{\mathbf{y}}_k(x)$ будет решением (2.6) для корня $\overline{\lambda}_k$. Паре этих корней будут соответствовать два вещественных решения уравнения (2.2):

$$\mathrm{Re}\mathbf{y}_k(x) = \frac{\mathbf{y}_k(x) + \overline{\mathbf{y}}_k(x)}{2} \quad \text{и} \quad \mathrm{Im}\mathbf{y}_k(x) = \frac{\mathbf{y}_k(x) - \overline{\mathbf{y}}_k(x)}{2i}. \tag{2.7}$$

Таким образом, число вещественных решений уравнения (2.2), определенных формулой (2.6) для вещественных корней и формулой (2.7) для каждой пары сопряженных комплексных корней, равно n. Эти решения линейно независимы, иначе с учетом (2.7) были бы линейно зависимыми функции $\mathbf{y}_k(x)$, $k = 1, \ldots, n$, определенные формулой (2.6), и поэтому они образуют фундаментальную систему решений уравнения (2.2). Общее вещественное решение уравнения (2.2) имеет вид

$$\mathbf{y}(x) = \sum_{j=1}^n c_j\mathbf{y}_j(x), \tag{2.8}$$

где $\mathbf{y}_j(x)$ – вещественные решения (2.2) в форме (2.6) для вещественных, а в форме (2.7) – для комплексных собственных значений.

2.1.2. Кратные корни

Пусть теперь λ – корень произвольной кратности характеристического уравнения (2.5) матрицы $\mathbf{A}$. Вначале покажем, что если $\mathbf{y}_\lambda$ – ненулевое решение векторного уравнения

$$(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E})^p\mathbf{y}_\lambda=0, \quad p\geq 1, \tag{2.9}$$

то одно частное решение однородного дифференциального уравнения (2.2), соответствующее этому корню λ и вектору $\mathbf{y}_\lambda$, выписывается в явном виде, а именно

$$\mathbf{y}(x)=e^{\lambda x}(\mathbf{E}+\sum_{m=1}^{p-1}\frac{x^m}{m!}(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E})^m)\mathbf{y}_\lambda. \tag{2.10}$$

Докажем, что эта вектор-функция $\mathbf{y}(x)$ является решением уравнения (2.2), т. е.

$$\mathbf{y}'(x)\equiv\mathbf{A}\mathbf{y}(x), \quad x\in(-\infty,\infty). \tag{2.11}$$

Продифференцировав (2.10), получаем

$$\begin{gathered}
\mathbf{y}'(x)=\lambda\mathbf{y}(x)+e^{\lambda x}(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E}+\sum_{m=1}^{p-2}\frac{x^m}{m!}(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E})^{m+1})\mathbf{y}_\lambda=\\
=e^{\lambda x}(\mathbf{A}+\sum_{m=1}^{p-2}\frac{x^m}{m!}[(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E})^{m+1}+\lambda(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E})^m]+\\
+\frac{x^{p-1}}{(p-1)!}\lambda(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E})^{p-1})\mathbf{y}_\lambda=e^{\lambda x}(\mathbf{A}+\sum_{m=1}^{p-2}\frac{x^m}{m!}\mathbf{A}(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E})^m+\\
+\frac{x^{p-1}}{(p-1)!}\lambda(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E})^{p-1})\mathbf{y}_\lambda=e^{\lambda x}(\mathbf{A}+\sum_{m=1}^{p-1}\frac{x^m}{m!}\mathbf{A}(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E})^m-\\
-\frac{x^{p-1}}{(p-1)!}(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E})^p)\mathbf{y}_\lambda=\mathbf{A}\mathbf{y}(x)-e^{\lambda x}\frac{x^{p-1}}{(p-1)!}(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E})^p\mathbf{y}_\lambda=\mathbf{A}\mathbf{y}(x),
\end{gathered}$$

так как согласно (2.9) $(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E})^p\mathbf{y}_\lambda=0$. Следовательно, тождество (2.11) выполняется, а значит, функция $\mathbf{y}(x)$, определенная формулой (2.10), является решением уравнения (2.2). Если λ – комплексный корень, то решение (2.10) – комплексная функция, поэтому, согласно свойству однородных линейных систем, вещественными решениями (2.2) будут две линейно независимые вектор-функции $\mathrm{Re}\mathbf{y}(x)$ и $\mathrm{Im}\mathbf{y}(x)$.

Отметим, что формула (2.10) совпадает с формулой (2.6) для $p = 1$ (в этом случае $\mathbf{y}_\lambda$ – собственный вектор матрицы $\mathbf{A}$). Таким образом, формула (2.10) является обобщением формулы (2.6). Покажем, что она будет универсальной при нахождении всех решений $\mathbf{y}_\lambda(x)$ для произвольного корня λ характеристического многочлена (2.5) матрицы $\mathbf{A}$.

Для этого докажем лемму.

Лемма 3.1. *Пусть λ_0 – корень кратности k характеристического многочлена вещественной матрицы $\mathbf{M}$ произвольной размерности n. Тогда существует такой базис $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ с вещественными, если λ_0 – вещественное, и комплексными, если λ_0 – комплексное, компонентами, что в этом базисе матрица $\mathbf{M}$ переходит в матрицу $\tilde{\mathbf{M}}$, где*

$$\tilde{\mathbf{M}} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_1 & \mathbf{B}_2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}_3 \end{pmatrix}. \tag{2.12}$$

Здесь $\mathbf{B}_1$ – $(k \times k)$ матрица, в которой все элементы на главной диагонали равны λ_0, а ниже диагонали все элементы равны нулю, а $\mathbf{B}_3$ – нулевая матрица при $k = n$, а при $k < n$ $\mathbf{B}_3$ – $(n-k) \times (n-k)$ матрица, для которой $\det(\mathbf{B}_3 - \lambda_0 \mathbf{E}) \neq 0$.

Для доказательства леммы напомним, что в новом координатном базисе матрица $\tilde{\mathbf{M}}$ связана с матрицей $\mathbf{M}$ соотношением $\tilde{\mathbf{M}} = \mathbf{T}\mathbf{M}\mathbf{T}^{-1}$, где $\mathbf{T}$ – невырожденная матрица перехода от старого базиса к новому. Матрицы $\mathbf{M}$ и $\tilde{\mathbf{M}}$ называются подобными. Также отметим, что характеристические многочлены матриц $\mathbf{M}$ и $\tilde{\mathbf{M}}$ совпадают, так как

$$\det(\mathbf{M} - \lambda\mathbf{E}) = \det \mathbf{T}(\mathbf{M} - \lambda\mathbf{E})\mathbf{T}^{-1} = \det(\tilde{\mathbf{M}} - \lambda\mathbf{E}).$$

Будем доказывать лемму по индукции. Сначала докажем для $k = 1$, т. е. для простого корня. Затем, предположив, что лемма верна для матрицы произвольной размерности и произвольного корня кратности $k - 1$, докажем ее для корня кратности k.

Пусть λ_0 – простой корень уравнения $\det(\mathbf{M} - \lambda_0\mathbf{E}) = 0$, а $\mathbf{y}_1$ – ненулевой собственный вектор вещественной матрицы $\mathbf{M}$, т. е. $\mathbf{M}\mathbf{y}_1 = \lambda_0\mathbf{y}_1$. Отметим, что если λ_0 – вещественное число, то $\mathbf{y}_1$ – вектор с вещественными компонентами, а если λ_0 – комплексное число, то вектор $\mathbf{y}_1$ будет иметь комплексные компоненты. Введем новый базис, который содержит вектор $\mathbf{y}_1: \mathbf{y}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$. При этом векторы $\mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ – вещественные. В этом базисе матрица $\mathbf{M}$ переходит в матрицу $\mathbf{M}_1 = \mathbf{C}_1\mathbf{M}\mathbf{C}_1^{-1}$, имеющую вид матрицы (2.12):

$$\mathbf{M}_1 = \begin{pmatrix} \lambda_0 & d_2 & d_3 & \ldots & d_4 \\ 0 & & & & \\ 0 & & \mathbf{D}_1 & & \\ \vdots & & & & \\ 0 & & & & \end{pmatrix}, \tag{2.13}$$

где $\mathbf{D}_1$ – $(n-1) \times (n-1)$ матрица. При этом матрица $\mathbf{M}_1$ будет вещественной, если λ_0 – вещественное число. Очевидно, что

$$\det(\mathbf{M} - \lambda\mathbf{E}) = \det(\mathbf{M}_1 - \lambda\mathbf{E}) = (\lambda_0 - \lambda)\det(\mathbf{D}_1 - \lambda\mathbf{E}). \tag{2.14}$$

Следовательно,

$$\det(\mathbf{D}_1 - \lambda_0\mathbf{E}) \neq 0,$$

так как λ_0 – простой корень, т. е. лемма для простого корня верна.

Пусть λ_0 – корень кратности $k > 1$ характеристического многочлена какой-либо $m \times m$ вещественной матрицы $\mathbf{M}$. Аналогично доказательству леммы для $k = 1$ находится собственный вектор $\mathbf{y}_2$ матрицы $\mathbf{M}$, соответствующий λ_0, и новый базис $\mathbf{y}_2, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_m$, который будет вещественным, если λ_0 – вещественное число. В этом базисе матрица $\mathbf{M}$ также переходит в матрицу $\mathbf{M}_1$ вида (2.13). Но так как $k > 1$, то из (2.14) следует, что λ_0 является корнем кратности $k - 1$ характеристического многочлена $(m-1)\times(m-1)$ матрицы $\mathbf{D}_1$. По предположению индукции существует такой базис из $(m-1)$ векторов в $(m-1)$-мерном пространстве или, что то же самое, существует $(m-1)\times(m-1)$ матрица $\mathbf{T}_1$ (вещественная, если λ_0 – вещественное число), что матрица $\tilde{\mathbf{D}}_1 = \mathbf{T}_1\mathbf{D}_1\mathbf{T}_1^{-1}$ имеет вид матрицы (2.12) для $n = m - 1$. Теперь, окаймив матрицу $\mathbf{T}_1$ верхней строкой $(1, 0, 0, \ldots, 0)$ и левым столбцом $(1, 0, 0, \ldots, 0)^T$, получаем матрицу $\mathbf{T}$ (вещественную, если λ_0 – вещественное число) такую, что матрица $\mathbf{T}\mathbf{M}_1\mathbf{T}^{-1}$ имеет вид матрицы (2.12) для $m = n$.

Лемма доказана.

Из леммы вытекает следствие: если λ_0 – корень кратности k уравнения $\det(\mathbf{M} - \lambda_0\mathbf{E}) = 0$, то множество решений векторного уравнения $\det(\mathbf{M} - \lambda_0\mathbf{E})^k\mathbf{y} = 0$ является k-мерным вещественным пространством, если λ_0 – вещественное, и k-мерным комплексным пространством, если λ_0 – комплексное число. Такое пространство называется корневым.

Для доказательства следствия преобразуем матрицу $\mathbf{M}$ в матрицу (2.12). Согласно описанному алгоритму матрица $\tilde{\mathbf{M}}$ будет вещественной, если λ_0 – вещественное, и комплексной, если λ_0 – комплексное число. Очевидно, что размерности корневых пространств матриц $\mathbf{M}$ и $\tilde{\mathbf{M}}$ совпадают. Поэтому данное утверждение докажем для матрицы $\tilde{\mathbf{M}}$ вида (2.12). Легко видеть тогда, что матрица $(\tilde{\mathbf{M}} - \lambda_0\mathbf{E})^k$ имеет вид

$$(\tilde{\mathbf{M}} - \lambda_0\mathbf{E})^k = \begin{pmatrix} (\mathbf{B}_1 - \lambda_0\mathbf{E})^k & \mathbf{B}_4 \\ \mathbf{0} & (\mathbf{B}_3 - \lambda_0\mathbf{E})^k \end{pmatrix},$$

где $(\mathbf{B}_3 - \lambda_0\mathbf{E})^k$ – невырожденная матрица, так как $\det(\mathbf{B}_3 - \lambda_0\mathbf{E}) \neq 0$. Поскольку $\mathbf{B}_1$ – $(k \times k)$ матрица, у которой диагональные элементы равны λ_0, а поддиагональные – нули, то как диагональные, так и поддиагональные элементы b_{ij} $(k \times k)$ матрицы $(\mathbf{B}_1 - \lambda_0\mathbf{E})$ равны нулю, т. е. $b_{ij} = 0$, $j \geq i$, $i, j \leq k$, в частности $b_{i1} = 0$, $i = 1, \ldots k$. Теперь обозначим через c_{ij}, $i, j = 1, \ldots k$, элементы матрицы $(\mathbf{B}_1 - \lambda_0\mathbf{E})^2$. Имеем $c_{ij} = \sum_{l=1}^{k} b_{il}b_{lj}$. Так как $b_{lj} = 0$ при $l \geq j$, то $c_{i1} = 0$ и $c_{ij} = \sum_{l=1}^{j-1} b_{il}b_{lj}$, $j \geq 2$. Теперь, если $i+1 \geq j$, то в этой формуле $i \geq l$ и, значит, $b_{il} = 0$. Тогда $c_{ij} = 0$ при $i+1 \geq j$. В частности, $c_{ij} = 0$ при $j = 2$. Продолжая этот процесс, получаем, что для элементов v_{ij}, $i, j = 1, \ldots k$, матрицы $(\mathbf{B}_1 - \lambda_0\mathbf{E})^k$, $v_{ij} = 0$ для $i + k - 1 \geq j$, т. е. для всех $i, j = 1, \ldots k$. Таким образом, матрица $(\mathbf{B}_1 - \lambda_0\mathbf{E})^k$ – нулевая, а следовательно, матрица $(\tilde{\mathbf{M}} - \lambda_0\mathbf{E})^k$ имеет вид

$$(\tilde{\mathbf{M}} - \lambda_0\mathbf{E})^k = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{D}_3 \\ \mathbf{0} & (\mathbf{B}_3 - \lambda_0\mathbf{E})^k \end{pmatrix},$$

т. е. первые k столбцов этой матрицы нулевые, а поскольку $\det(\mathbf{B}_3 - \lambda_0\mathbf{E}) \neq 0$, то корневое пространство этой матрицы для $\lambda = \lambda_0$ имеет размерность k и его базис можно задать векторами $\mathbf{e}_i$, $i = 1, \ldots, k$, где $\mathbf{e}_i$ – n-мерный вектор, в котором i-я компонента равна 1, а все остальные компоненты – нулю.

Теперь, если матрица $\mathbf{B}_3$ в (2.12) ненулевая, то, значит, существует корень λ_1 уравнения $\det(\mathbf{B}_3 - \lambda\mathbf{E}) = 0$. Пусть k_1 – кратность этого корня. Тогда матрица $(\tilde{\mathbf{M}} - \lambda_1 \mathbf{E})^{k_1}$ имеет вид

$$(\tilde{\mathbf{M}} - \lambda_1 \mathbf{E})^{k_1} = \begin{pmatrix} (\mathbf{B}_1 - \lambda_1 \mathbf{E})^{k_1} & \mathbf{B}_2 \\ \mathbf{0} & (\mathbf{B}_3 - \lambda_1 \mathbf{E})^{k_1} \end{pmatrix}.$$

Корневое пространство этой матрицы для $\lambda = \lambda_1$ имеет размерность k_1. А так как у матрицы $(\mathbf{B}_1 - \lambda_1 \mathbf{E})$ на диагонали будут числа $\lambda_0 - \lambda_1 \neq 0$, а под диагональю элементы равны нулю, то выписанные независимые векторы $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k$ из корневого пространства для $\lambda = \lambda_0$ переходят под действием матрицы $(\tilde{\mathbf{M}} - \lambda_1 \mathbf{E})^{k_1}$ в ненулевые независимые вектора $(\lambda_0 - \lambda_1)^{k_1} \mathbf{e}_1, \ldots, (\lambda_0 - \lambda_1)^{k_1} \mathbf{e}_k$, т. е. они не попадут в корневое пространство для $\lambda = \lambda_1$. Если λ_0 и λ_1 произвольные, то из этого следует, что все корневые пространства пересекаются только в точке $\mathbf{0}$.

Замечание. Доказательства леммы и следствия о корневом разложении были предложены В. А. Чуркиным. Альтернативное доказательство следствия о корневом разложении, а также алгоритм нахождения корневого базиса приведены в учебном пособии [3].

2.1.3. Алгоритм нахождения фундаментальной системы и общего решения однородного уравнения

Используя формулы (2.9) и (2.10), мы можем найти фундаментальную систему решений и, соответственно, общее решение однородного уравнения (2.2).

Обозначим через $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ все разные корни характеристического уравнения (2.5). Пусть кратность корня λ_j равна k_j. Тогда справедлива следующая формула:

$$\sum_{j=1}^{p} k_j = n. \tag{2.15}$$

Обозначим через $S_{\lambda_j}, j = 1, \ldots, p,$ – корневое подпространство, состоящее из всех векторов, являющихся решением уравнения (2.9) для корня $\lambda = \lambda_j$ и $p = k_j$. Тогда, если корень λ_j вещественный, то пространство S_{λ_j} вещественно, а если λ_j – комплексный корень, то пространство S_{λ_j} комплексно. Нами показано, что размерность пространства S_{λ_j} равна k_j, а множество всех корневых пространств распадается в прямую сумму подпространств $S_{\lambda_j}, j = 1, \ldots, p$.

В каждом подпространстве S_{λ_j} мы выберем k_j линейно независимых векторов

$$\mathbf{y}^1_{\lambda_j}, \ldots, \mathbf{y}^{k_j}_{\lambda_j}, \quad j = 1, \ldots, p,$$

которые являются решениями уравнения (2.9) для $p = k_j$, и все эти векторы для $j = 1, \ldots, p$ будут линейно независимы. Каждому вектору $\mathbf{y}^m_{\lambda_j}$ соответствует вектор-функция $\mathbf{y}^m_{\lambda_j}(x)$, определенная формулой (2.10) и, следовательно, являющаяся решением уравнения (2.2). Так как из формулы (2.10) следует, что $\mathbf{y}^1_{\lambda_j}(0) = \mathbf{y}^1_{\lambda_j}, \ldots, \mathbf{y}^{k_j}_{\lambda_j}(0) = = \mathbf{y}^{k_j}_{\lambda_j}$, $j = 1, \ldots, p$, то вектор-функции $\mathbf{y}^1_{\lambda_j}(x), \ldots, \mathbf{y}^{k_j}_{\lambda_j}(x)$, $j = 1, \ldots, p$, также линейно независимы при произвольном $x \in (-\infty, \infty)$.

Теперь заметим, что если характеристическое уравнение имеет комплексный корень $\lambda_j = \alpha_j + i\beta_j$ кратности k_j, то существует также и сопряженный корень $\overline{\lambda}_j = \alpha_j - i\beta_j$ этого уравнения той же кратности k_j. Далее, если $\mathbf{y}_{\lambda_j}$ – комплексный вектор, являющийся решением уравнения (2.9) для $\lambda = \lambda_j$, то сопряженный вектор $\overline{\mathbf{y}}_{\lambda_j}$ будет решением того же уравнения (2.9) для сопряженного корня $\lambda = \overline{\lambda}_j$, т. е. уравнения

$$(\mathbf{A} - \overline{\lambda}_j \mathbf{E})^{k_j} \overline{\mathbf{y}}_{\lambda_j} = \mathbf{0}.$$

Следовательно, пространства S_{λ_j} и $S_{\overline{\lambda}_j}$ – взаимно сопряженные комплексные пространства размерности k_j. Поэтому если мы выберем базис из комплексных линейно независимых векторов $\mathbf{y}^1_{\lambda_j}, \ldots, \mathbf{y}^{k_j}_{\lambda_j}$ в S_{λ_j}, то сопряженные векторы $\overline{\mathbf{y}}^1_{\lambda_j}, \ldots, \overline{\mathbf{y}}^{k_j}_{\lambda_j}$ (их компонентами являются комплексные числа, сопряженные соответствующим компонентам векторов $\mathbf{y}^m_{\lambda_j}$) будут составлять базис пространства $S_{\overline{\lambda}_j}$. Пусть базис пространства всех корневых подпространств образован из линейно независимых векторов пространств S_λ для вещественных λ и серий взаимно сопряженных линейно независимых векторов пространств S_{λ_j} и $S_{\overline{\lambda}_j}$. Тогда вектор-функции

$$\mathbf{y}^1_{\lambda_j}(x), \ldots, \mathbf{y}^{k_j}_{\lambda_j}(x), \; j = 1, \ldots, p, \tag{2.16}$$

соответствующие выбранным базисным векторам и определенные формулой (2.10) и, следовательно, являющиеся решением уравнения (2.2), распадаются на два множества. Первое множество состоит из вещественных вектор-функций, каждая из которых соответствует некоторому вещественному корню. Второе множество состоит из взаимно сопряженных комплексных вектор-функций, образованных из всех пар взаимно сопряженных корней. Как вещественная, так и мнимая компоненты этих комплексных вектор-функций являются решением уравнения (2.2). Таким образом, для каждой пары взаимно сопряженных функций $\mathbf{y}^m_{\lambda_j}(x)$ и $\mathbf{y}^m_{\overline{\lambda}_j}(x) = \overline{\mathbf{y}}^m_{\lambda_j}(x)$ мы получаем только две линейно независимые вещественные вектор-функции $\mathbf{y}_1(x) = \mathrm{Re}\mathbf{y}^m_{\lambda_j}(x)$ и $\mathbf{y}_2(x) = \mathrm{Im}\mathbf{y}^m_{\lambda_j}(x)$, являющиеся решением уравнения (2.2). Очевидно, что

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_1(x) &= \frac{1}{2}(\mathbf{y}^m_{\lambda_j}(x) + \mathbf{y}^m_{\overline{\lambda}_j}(x)), \\ \mathbf{y}_2(x) &= \frac{1}{2i}(\mathbf{y}^m_{\lambda_j}(x) - \mathbf{y}^m_{\overline{\lambda}_j}(x)). \end{aligned} \tag{2.17}$$

Ясно, что число всех этих вещественных вектор-функций, соответствующих вещественным корням и всем парам сопряженных корней, равно n. Эти вектор-функции линейно независимы, так как в противном случае из (2.17) следовало бы, что функции (2.16) линейно зависимы. Таким образом, эти вещественные вектор-функции $\mathbf{y}_1(x), \ldots, \mathbf{y}_n(x)$ составляют фундаментальную систему решений однородного уравнения (2.2), и, следовательно, мы можем выписать общее решение этого уравнения с помощью формулы

$$\mathbf{y}_{\text{ОД}}(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i \mathbf{y}_i(x). \tag{2.18}$$

Теперь, основываясь на описанных рассуждениях, мы можем сформулировать алгоритм нахождения общего решения однородного уравнения (2.2).

Первый этап. Находятся все разные корни характеристического уравнения (2.5).

Второй этап. Из этих корней выбираются вещественные корни и по одному корню от каждой пары взаимно сопряженных комплексных корней. Пусть все эти выбранные вещественные и комплексные корни обозначаются $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$, а их кратности соответственно $k_1, \ldots, k_m$.

Третий этап. Для каждого выбранного корня λ_j кратности k_j находится базис корневого подпространства S_{λ_j}, т. е. из уравнения (2.9) при $\lambda = \lambda_j$ и $p = k_j$ находятся k_j линейно независимых векторов:

$$\mathbf{y}^1_{\lambda_j}, \ldots, \mathbf{y}^{k_j}_{\lambda_j}, \quad j = 1, \ldots, m.$$

Отметим, что эти вектора можно также находить последовательно. Вначале при $p = 1$ в уравнении (2.9), т. е. для пространства собственных векторов матрицы $\mathbf{A}$ для корня λ_j. Затем, если размерность пространства собственных векторов меньше k_j, то дополнительные независимые вектора корневого подпространства S_{λ_j} находятся из уравнения (2.9) для $p = 2$ и т. д., пока их число не станет равным k_j.

Четвертый этап. Для каждого вектора, полученного на третьем этапе, находится решение уравнения (2.2) по формуле (2.10).

Пятый этап. Из вещественных и комплексных решений, полученных на четвертом этапе, определяются n линейно независимых вещественных вектор-функций $\mathbf{y}_1(x), \ldots, \mathbf{y}_n(x)$, образующих фундаментальную систему решений уравнения (2.2). Этими функциями являются все решения, полученные на четвертом этапе для вещественных корней, а также мнимые и вещественные части всех полученных комплексных решений.

Шестой этап. Выписывается общее вещественное решение уравнения (2.2) с помощью формулы (2.18).

2.1.4. Примеры решений однородных линейных систем с постоянными коэффициентами

Пример 2.1. В качестве первого примера рассмотрим однородную систему из трех уравнений:

$$\begin{aligned} y_1' &= -2y_1 + y_2 - 2y_3, \\ y_2' &= y_1 - 2y_2 + 2y_3, \\ y_3' &= 3y_1 - 3y_2 + 5y_3. \end{aligned} \tag{2.19}$$

Отсюда

$$\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E} = \begin{pmatrix} -2-\lambda & 1 & -2 \\ 1 & -2-\lambda & 2 \\ 3 & -3 & 5-\lambda \end{pmatrix}, \qquad \lambda_1 = 3,\ \lambda_2 = \lambda_3 = -1.$$

Собственным вектором, соответствующим простому корню $\lambda_1 = 3$, будет $\mathbf{y}_1 = (-1, 1, 3)^T$. Для двукратного корня $\lambda = -1$ имеем

$$\mathbf{A} + \mathbf{E} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Так как ранг матрицы $\mathbf{A}+\mathbf{E}$ равен единице, то корневое пространство для $\lambda = -1$ совпадает с пространством собственных векторов матрицы $\mathbf{A}$ для $\lambda = -1$. Решением уравнения (2.9) для $\lambda = -1$ и $p = 1$, т. е. уравнения $(\mathbf{A}+\mathbf{E})\mathbf{y} = \mathbf{0}$, будут два независимых вектора $\mathbf{y}_2 = (1,1,0)^T$ и $\mathbf{y}_3 = (0,2,1)^T$. Поэтому согласно (2.10) получаем одно решение для $\lambda_1 = 3$ и $p = 1$:

$$\mathbf{y}_1(x) = e^{3x}\mathbf{y}_1.$$

Для кратного корня $\lambda = -1$ имеем из (2.10) для $p = 1$ два независимых решения:

$$\mathbf{y}_2(x) = e^{-x}\mathbf{y}_2,$$
$$\mathbf{y}_3(x) = e^{-x}\mathbf{y}_3.$$

Таким образом, общим решением системы (2.19) будет $\mathbf{y}(x) = c_1e^{3x}\mathbf{y}_1 + c_2e^{-x}\mathbf{y}_2 + c_3e^{-x}\mathbf{y}_3$ или в покомпонентном виде

$$\begin{aligned}
y_1(x) &= -c_1e^{3x} + c_2e^{-x}\ ,\\
y_2(x) &= c_1e^{3x} + (c_2 + 2c_3)e^{-x}\ ,\\
y_3(x) &= 3c_1e^{3x} + c_3e^{-x}\ .
\end{aligned}$$

Пример 2.2. Найдем решение однородной системы уравнений

$$\begin{aligned}
y_1' &= 2y_1 - y_2 + 2y_3,\\
y_2' &= y_1 + 2y_3,\\
y_3' &= y_1 - 2y_2 - y_3.
\end{aligned} \tag{2.20}$$

Имеем

$$\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 & 2\\ 1 & -\lambda & 2\\ 1 & -2 & -1-\lambda \end{pmatrix}, \qquad \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = i,\ \lambda_3 = -i.$$

Для нахождения решения достаточно использовать вещественный корень $\lambda_1 = 1$ и один комплексный корень $\lambda_2 = i$. Собственным вектором для $\lambda_1 = 1$ будет

$$\mathbf{y}_1 = (6,4,-1)^T,$$

а для $\lambda_2 = i$

$$\mathbf{y}_2 = (2,2,i-1)^T.$$

Поэтому фундаментальной системой решений уравнения (2.20) будут следующие вектор-функции:

$$\mathbf{y}_1(x) = e^x\mathbf{y}_1,\ \mathbf{y}_2(x) = \mathrm{Re}(e^{ix}\mathbf{y}_2),\ \mathbf{y}_3(x) = \mathrm{Im}(e^{ix}\mathbf{y}_2).$$

Общее решение уравнения (2.20) имеет вид

$$\mathbf{y}(x) = c_1\mathbf{y}_1(x) + c_2\mathbf{y}_2(x) + c_3\mathbf{y}_3(x)$$

или в покомпонентной записи:

$$y_1(x) = 6c_1e^x + 2c_2\cos x + 2c_3\sin x,$$

$$y_2(x) = 4c_1e^x + 2c_2\cos x + 2c_3\sin x,$$

$$y_3(x) = -c_1e^x - c_2(\cos x + \sin x) + c_3(\cos x - \sin x).$$

Пример 2.3. Решить однородную систему n-го порядка, у которой корень λ характеристического уравнения (2.5) один. В этом случае характеристический корень вещественный и его кратность равна n. Следовательно, размерность корневого пространства S_λ тоже равна n. Это возможно, только если $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})^n \equiv \mathbf{0}$. Поэтому в этом случае нет необходимости решать уравнение (2.9) ($(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})^n\mathbf{y}_\lambda = \mathbf{0}$), так как произвольный вектор $\mathbf{y} = (c_1, \ldots, c_n)^T$ будет решением этого уравнения. В качестве базиса пространства S_λ можно взять векторы $\mathbf{e}_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)^T$, $i = 1, \ldots, n$, у которого i-я компонента равна 1, а все остальные – нули. Тогда фундаментальной системой будут, согласно (2.10), функции $\mathbf{y}_i(x) : i = 1, \ldots, n$,

$$\mathbf{y}_i(x) = e^{\lambda x}(\mathbf{E} + \sum_{m=1}^{n-1}\frac{x^m}{m!}(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})^m)\mathbf{e}_i,$$

а общим решением такого дифференциального уравнения будет, согласно (2.18),

$$\mathbf{y}(x) = e^{\lambda x}(\mathbf{E} + \sum_{m=1}^{n-1}\frac{x^m}{m!}(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})^m)\mathbf{c},\ \mathbf{c} = (c_1, \ldots, c_n)^T. \tag{2.21}$$

2.2. Решение неоднородной системы

Если известна фундаментальная система решений однородного уравнения (2.2), то известно общее решение (2.18) этого уравнения и, значит, проблема нахождения общего решения неоднородного уравнения (2.1) сводится к нахождению одного его частного решения.

2.2.1. Метод вариации для нахождения частного решения

Оказывается, частное решение уравнения (2.1) может быть получено методом **вариации постоянного вектора c** $= (c_1, \ldots, c_n)$ в формуле (2.18), т. е. частное решение уравнения (2.1) ищется в виде (2.18), но с переменными коэффициентами $c_1(x), \ldots, c_n(x)$, которые затем вычисляются. Таким образом, полагаем, что

$$\mathbf{y}_{\text{ч}}(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j(x)\mathbf{y}_j(x), \tag{2.22}$$

где $\mathbf{y}_1(x), \ldots, \mathbf{y}_n(x)$ – фундаментальная система решений уравнения (2.2). Из (2.22) имеем

$$\mathbf{y}'_{\text{ч}}(x) = \sum_{j=1}^{n} c'_j(x)\mathbf{y}_j(x) + \sum_{j=1}^{n} c_j(x)\mathbf{y}'_j(x).$$

Подставляя эти выражения для $\mathbf{y}(x)$ и $\mathbf{y}'(x)$ в (2.1), получаем

$$\sum_{j=1}^{n} c'_j(x)\mathbf{y}_j(x) + \sum_{j=1}^{n} c_j(x)(\mathbf{y}'_j(x) - \mathbf{A}(x)\mathbf{y}_j(x)) = \sum_{j=1}^{n} c'_j(x)\mathbf{y}_j(x) = \mathbf{f}(x),$$

так как $\mathbf{y}'_j(x) - \mathbf{A}(x)\mathbf{y}_j(x) = 0,\ j = 1, \ldots, n$.

Отсюда следует система уравнений относительно $c_1(x), \ldots, c_n(x)$:

$$\sum_{j=1}^{n} c'_j(x)\mathbf{y}_j(x) = \mathbf{f}(x), \tag{2.23}$$

так как $L[\mathbf{y}_j](x) \equiv 0,\ j = 1, \ldots, n$. При использовании матрицы Вронского, j-м столбцом которой является функция $\mathbf{y}_j(x)$, уравнение (2.19) записывается в матричном виде следующим образом:

$$\mathbf{W}[\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n](x)\mathbf{c}'(x) = \mathbf{f}(x),$$

где $\mathbf{c}'(x) = (c'_1(x), \ldots, c'_n(x))^T$. Учитывая, что функции $\mathbf{y}_1(x), \ldots, \mathbf{y}_n(x)$ линейно независимы, а значит, матрица Вронского этих функций невырождена, мы получаем, что уравнение (2.19) разрешимо, и значит,

$$\mathbf{c}'(x) = \mathbf{W}^{-1}[\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n](x)\mathbf{f}(x). \tag{2.24}$$

Интегрируя это равенство, находим значения $c_j(x),\ j = 1, \ldots, n$. Вектор-функция $\mathbf{y}(x)$, определенная формулой (2.22) с найденными значениями $c_j(x)$, и будет частным решением неоднородного уравнения (2.1).

Так как из (2.20) следует, что

$$\mathbf{c}(x) = \int \mathbf{W}^{-1}[\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n](x)\mathbf{f}(x)dx,$$

то из (2.22) мы получаем явную формулу в квадратурах

$$\mathbf{y}_{\text{ч}}(x) = \mathbf{W}[\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n](x) \int \mathbf{W}^{-1}[\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n](x)\mathbf{f}(x)\mathrm{d}x \tag{2.25}$$

для частного решения уравнения (2.1).

В соответствии с формулой (2.25) мы заключаем, что общее решение неоднородного уравнения (2.1) выписывается в виде

$$\mathbf{y}(x) = \mathbf{W}[\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n](x)\Big(\mathbf{c} + \int \mathbf{W}^{-1}[\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n](x)\mathbf{f}(x)\mathrm{d}x\Big), \tag{2.26}$$

где $\mathbf{c} = (c_1, \ldots, c_n)$ – произвольный вектор.

Из (2.26) легко выписывается решение задачи Коши для уравнения (2.1) с начальным значением $\mathbf{y}_0$ в точке x_0:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(x) \quad = \quad & \mathbf{W}[\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n](x)\Big(\mathbf{W}^{-1}[\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n](x_0)\mathbf{y}_0 + \\ & + \int_{x_0}^{x} \mathbf{W}^{-1}[\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n](x)\mathbf{f}(x)\mathrm{d}x\Big). \end{aligned} \tag{2.27}$$

Алгоритм нахождения общего решения неоднородного линейного уравнения

Для нахождения общего решения неоднородного уравнения

$$\mathbf{y}' - \mathbf{A}\mathbf{y} = \mathbf{f}(x), \tag{2.28}$$

где $\mathbf{A}$ – матрица с постоянными коэффициентами, воспользуемся формулой (2.26). Эта формула включает матрицу Вронского и ее обратную матрицу. Столбцами матрицы Вронского в (2.26) являются вектор-функции, образующие фундаментальную систему решений уравнения (2.2). Поэтому для нахождения общего решения по формуле (2.26) мы должны сформировать фундаментальную систему решений уравнения

(2.2) с матрицей $\mathbf{A}$ в (2.28), т. е. выполнить первые пять описанных выше этапов получения общего решения однородного уравнения. Далее мы выполняем следующие этапы.

Шестой этап. Из фундаментальной системы решений $\mathbf{y}_1(x), \ldots, \mathbf{y}_n(x)$ уравнения (2.2), полученных на пятом этапе, выписываем матрицу Вронского $\mathbf{W}[\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n](x)$. Ее j-м столбцом является вектор-функция $\mathbf{y}_j(x)$.

Седьмой этап. Из уравнения $\mathbf{W}[\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n](x)\mathbf{b}(x) = \mathbf{f}(x)$, где $\mathbf{f}(x)$ – правая часть системы уравнений (2.28), вычисляется вектор-функция $\mathbf{b}(x) = (\mathbf{b}_1(x), \ldots, \mathbf{b}_n(x))^T$. Это можно сделать, например, предварительно вычислив обратную матрицу $\mathbf{W}^{-1}[\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n](x)$ матрицы Вронского. Тогда $\mathbf{b}(x) = \mathbf{W}^{-1}[\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n](x)\mathbf{f}(x)$.

Восьмой этап. Вычисляется интеграл $\int \mathbf{b}(x)\mathrm{d}x = \mathbf{r}(x)$.

Девятый этап. Находится частное решение уравнения (2.28) по формуле

$$\mathbf{y}_{\text{ч}}(x) = \mathbf{W}[\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n](x)\mathbf{r}(x).$$

Десятый этап. Выписывается общее решение неоднородного уравнения (2.28) по формуле (2.26):

$$\mathbf{y}(x) = \mathbf{W}[\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n](x)(\mathbf{c} + \mathbf{r}(x)).$$

Пример 2.4. В качестве примера рассмотрим неоднородную систему уравнений

$$\begin{aligned} y_1' &= y_1 - 2y_2 + \frac{e^{2x}}{x}, \\ y_2' &= \frac{1}{2}y_1 + 3y_2 + \frac{e^{2x}}{x-1}. \end{aligned} \tag{2.29}$$

Для нахождения решения системы (2.29) воспользуемся формулой (2.26). Согласно этой формуле мы должны получить матрицу Вронского, столбцами которой являются независимые решения однородной системы уравнений

$$\begin{aligned} y_1' &= y_1 - 2y_2\ , \\ y_2' &= \frac{1}{2}y_1 + 3y_2\ . \end{aligned} \tag{2.30}$$

Имеем

$$
\begin{aligned}
\mathbf{A} &= \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ \dfrac{1}{2} & 3 \end{pmatrix}, \\
\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E} &= \begin{pmatrix} 1-\lambda & -2 \\ \dfrac{1}{2} & 3-\lambda \end{pmatrix}, \qquad \lambda_1 = \lambda_2 = 2, \\
\mathbf{A} - 2\mathbf{E} &= \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ \dfrac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}, \\
(\mathbf{A} - 2\mathbf{E})^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Следовательно, решением уравнения (2.9) при $p = 2$ для однородной системы дифференциальных уравнений (2.30) будет произвольный вектор

$$\mathbf{y}_2 = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}.$$

Тогда общим решением однородной системы (2.30) будет, согласно (2.21),

$$
\begin{aligned}
\mathbf{y}_{\text{ОД}}(x) &= e^{2x}(\mathbf{E} + x(\mathbf{A} - 2\mathbf{E}))\mathbf{y}_2 = e^{2x} \begin{pmatrix} 1-x & -2x \\ \dfrac{1}{2}x & 1+x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \\
&= e^{2x} \begin{pmatrix} c_1(1-x) - 2c_2x \\ \dfrac{c_1}{2}x + c_2(1+x) \end{pmatrix} \qquad (2.31)
\end{aligned}
$$

или в покомпонентном виде

$$
\begin{aligned}
y_1(x) &= (c_1(1-x) - 2c_2x)e^{2x}, \\
y_2(x) &= \Big(\frac{c_1x}{2} + c_2(1+x)\Big)e^{2x}.
\end{aligned}
$$

Решение (2.31) соответствует первому слагаемому формулы (2.26).

В качестве фундаментальной системы решений уравнения (2.30) полагаем вектор-функции

$$\mathbf{y}_1(x) = \begin{pmatrix} 1-x \\ \dfrac{x}{2} \end{pmatrix} e^{2x} \quad \text{и} \quad \mathbf{y}_2(x) = \begin{pmatrix} -2x \\ 1+x \end{pmatrix} e^{2x},$$

которые получаются из общего решения (2.31) при $c_1 = 1$, $c_2 = 0$ и $c_2 = 1$, $c_1 = 0$ соответственно. Имеем

$$\mathbf{W}[\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2](x) = \begin{pmatrix} (1-x)e^{2x} & -2xe^{2x} \\ \dfrac{x}{2}e^{2x} & (1+x)e^{2x} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{W}^{-1}[\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2](x) = \begin{pmatrix} (1+x)e^{-2x} & 2xe^{-2x} \\ -\dfrac{x}{2}e^{-2x} & (1-x)e^{-2x} \end{pmatrix}.$$

Для нахождения частного решения уравнения (2.29) нужно, согласно формуле (2.26), вычислить интеграл

$$\int \mathbf{W}^{-1}[\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2](x)\mathbf{f}(x)\mathrm{d}x, \quad \mathbf{f}(x) = \Big(\frac{e^{2x}}{x}, \frac{e^{2x}}{x-1}\Big)^T.$$

Имеем

$$\int \mathbf{W}^{-1}[\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2](x)\mathbf{f}(x)\mathrm{d}x = \int \begin{pmatrix} \dfrac{1+x}{x} + \dfrac{2x}{x-1} \\ -\dfrac{3}{2} \end{pmatrix} \mathrm{d}x =$$

$$= \begin{pmatrix} 3x + \ln(|x|(x-1)^2) + c_1 \\ -\dfrac{3}{2}x + c_2 \end{pmatrix}.$$

Полагая в этой формуле $c_1 = c_2 = 0$ и используя формулу второго слагаемого в (2.26), получаем следующее выражение для частного решения уравнения (2.29):

$$\begin{aligned}\mathbf{y}_{\text{ч}}(x) &= \mathbf{W}[\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2](x) \begin{pmatrix} 3x + \ln(|x|(x-1)^2) \\ -\dfrac{3}{2}x \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} (1-x)\Big(\ln(|x|(x-1)^2)\Big) + 3x \\ \dfrac{x}{2}\Big(\ln(|x|(x-1)^2)\Big) - \dfrac{3}{2}x \end{pmatrix} e^{2x}.\end{aligned}$$

Общим решением уравнения (2.29) будет

$$\mathbf{y}_{\text{об}}(x) = \mathbf{y}_{\text{од}}(x) + \mathbf{y}_{\text{ч}}(x),$$

где $\mathbf{y}(x)$ – общее решение однородного уравнения (2.30), описанное формулой (2.31).

Библиографический список

1. *Боярчук А. К., Головач Г. П.* Справочное пособие по высшей математике. Дифференциальные уравнения в примерах и задачах. М. : УРСС, 1998. Т. 5. 384 с.
2. *Годунов С. К.* Обыкновенные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами. Новосибирск : НГУ, 1994. Т. 1. Краевые задачи. 264 с.
3. *Дементьева Н. В., Лисейкин В. Д., Чуркин В. А.* Линейные системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Построение фундаментальной матрицы решений однородной системы с использованием корневого базиса. Новосибирск : НГУ, 2008. 50 с.
4. *Лисейкин В. Д.* Обыкновенные дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. Новосибирск : НГУ, 2009. 146 с.
5. *Филиппов А. Ф.* Сборник задач по дифференциальным уравнениям. Ижевск : НИЦ Регулярная и хаотическая динамика, 2000. 176 с.