Программа вступительного экзамена в аспирантуру ФИЦ ИВТ по специальности 1.2.2 - математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

I. ВЕЩЕСТВЕННЫЙ И КОМПЛЕКСНЫЙ АНАЛИЗ

Математический анализ

1. Теория пределов. Теория рядов. основные теоремы о непрерывных функциях.
2. Основные теоремы дифференциального исчисления (теорема о средних значениях, теорема о неявных функциях, формула Тейлора).
3. Основные теоремы интегрального исчисления (теоремы о замене переменных, теоремы о повторных интегралах, формулы Грина, Остроградского, Стокса).

Основы функционального анализа

1. Конечномерные вещественные пространства (характеризация открытых, замкнутых и компактных множеств).
2. Определение и основные свойства интеграла Лебега.
3. Основные нормированные пространства. Полнота, сепарабельность, критерий компактности, сильная и слабая сходимость.
4. Гильбертовы пространства. Теорема Рисса-Фишера. Ряды и интегралы Фурье.
5. Элементы теории линейных операторов. Теорема Фредгольма для вполне непрерывных операторов.

Основы теории функций комплексного переменного

1. Условия Коши-Римана. Конформные отображения, осуществляемые элементарными функциями. Точки ветвления и римановы поверхности.
2. Комплексное интегрирование. Теорема Коши. Интеграл типа Коши.
3. Ряды Тейлора и Лорана. Изолированные особые точки аналитической функции. Теорема единственности аналитической функции. Принцип модуля и аргумента для аналитических функций. Элементы теории вычетов.

II. АЛГЕБРА

1. Теория определителей.
2. Векторные пространства. База и ранг системы векторов. Формулы преобразования координат.
3. Системы линейных уравнений. Теорема о ранге матриц. Теорема Кронекера-Капелли. Общее решение системы линейных уравнений (определение). Однородные системы (пространство решений, фундаментальная система решений).
4. Многочлены. Делимость многочленов (алгоритмы деления с остатком, наибольший общий делитель, алгоритм Евклида). Разложение на неприводимые множители. Теорема Безу, формула Тейлора, интерполяционный многочлен.
5. Линейные преобразования векторных пространств. Изоморфизм с алгеброй матриц. Образ, ядро, ранг, дефект линейного преобразования. Невырожденные преобразования. Инвариантность пространства.
6. Жорданова форма матриц.
7. Евклидовы и унитарные пространства. Процесс ортогонализации, изоморфизм евклидовых (унитарных) пространств, ортогональные и симметрические преобразования.
8. Квадратичные формы. Приведение квадратичной формы к каноническому виду. Закон инерции квадратичной формы. Положительно определенные формы.

III. ГЕОМЕТРИЯ

1. Векторное и смешанное произведение в 3-мерном евклидовом пространстве.
2. Линии и поверхности 2-го порядка. Алгебраические поверхности. Пересечение алгебраической поверхности с прямой, условие касания. Линия второго порядка. (Фокусы, асимптоты, оптические свойства).

Строение поверхностей 2-го порядка. Алгоритмы отыскания канонического уравнения и главных осей поверхности, заданной общим уравнением 2-ой степени.

IV. УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

1. Математические модели физических задач, приводящие к уравнениям математической физики. Основные уравнения математической физики.
2. Постановка задач для уравнений математической физики. Корректно и не корректно поставленные задачи.

Гиперболические уравнения

1. Приведение к каноническому виду гиперболического уравнения 2-го порядка с двумя независимыми переменными. Задача Коши и смешанная задача в квадрате для полученной системы уравнений. Теорема существования и единственности.
2. Одномерное волновое уравнение (струна). Постановка задачи и формулы для ее решения.
3. Получение решения неоднородного волнового уравнения методом толчков (интеграл Дюамеля).
4. Интеграл энергии. Теорема единственности решения задачи Коши и смешанной задачи.

Эллиптические уравнения

1. Фундаментальное решение уравнения Лапласа. Формула Грина.
2. Принцип максимума для эллиптических уравнений 2-го порядка. Единственность решения задачи Дирихле и задачи Неймана.
3. Краевые задачи для уравнения Лапласа в шаре и в полупространстве. Формула Грина.

Метод Фурье

1. Преобразование Фурье. Формула Фурье.
2. Решение с помощью преобразования Фурье задачи Коши с постоянными коэффициентами.
3. Применение метода Фурье к решению первой краевой задачи для уравнения теплопроводности.
4. Решение уравнения Лапласа в пространстве методом Фурье.

V. МЕТОДЫ ВЫЧИСЛЕНИЙ

1. Численные методы линейной алгебры. Вычисление наибольшего по модулю собственного значения матрицы. Прямые и итерационные методы. Способы ускорения сходимости. Градиентные методы. Методы ортогонализации.
2. Основные численные методы: метод конечных разностей и конечных объемов, метод конечных элементов. Аппроксимация, устойчивость и сходимость. Теорема о сходимости. Корректность постановок краевых задач при их численной аппроксимации.
3. Специальные численные алгоритмы: метод частиц в ячейках и метод статистических испытаний, метод граничных элементов. Их свойства и особенности применения.
4. Основные численные алгоритмы решения обыкновенных дифференциальных уравнений: методы Рунге-Кутта и Адамса, методы типа Розенброка, А-устойчивые методы.
5. Основные методы решения уравнений в частных производных. Понятие слабой аппроксимации и метод дробных шагов. Схемы расщепления для многомерных задач мат. физики. Метод предиктор-корректор. Полная и приближенная факторизация. Метод приближенной факторизации для многомерных задач.
6. Схемы повышенного порядка. Компактные разностные схемы повышенного порядка. Обобщение схем на многомерный случай.
7. Разностные схемы и схемы метода конечных объемов для гиперболических уравнений. Схема Годунова, принцип минимальных производных, TVD и ENO схемы, алгоритмы коррекции в задачах мат. физики. Явные и неявные схемы типа Рунге-Кутта для гиперболических уравнений.
8. Алгоритмы решения параболических уравнений. Методы расщепления и приближенной факторизации. Схемы повышенного порядка.
9. Метод линеаризации для решения нелинейных задач. Обобщение метода приближенной факторизации и схем расщепления на нелинейные многомерные уравнения.
10. Методы решения стационарных задач мат. физики. Эллиптические краевые задачи. Основные итерационные алгоритмы решения стационарных задач: простейший итерационный метод, метод верхней релаксации, градиентные итерационные методы.

VI. ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

1. Основные понятия моделирования. Основы теории подобия и верификации моделей. Технологическая цепочка моделирования. Основные этапы моделирования. Постановка задач и определение типа модели. Требования к моделям. Построение математической, алгоритмической, программной моделей и численного алгоритма. Обоснования корректности моделей.
2. Основные функции, выполняемые программным обеспечением (ПО) научных исследований. Требования, предъявляемые к ПО со стороны исследователей в период разработки программ. Операционные системы: назначение, выполняемые функции.
3. Прикладное программное обеспечение научных исследований. Формы представления комплексов прикладных программ: библиотека, пакет прикладных программ (ППП), диалоговая система.
4. Технология разработки комплексов прикладных программ. Структурное проектирование программ. Применение инструментальных средств разработки ППП и диалоговых систем.

ЛИТЕРАТУРА

1. Александров П.С. Лекции по аналитической геометрии. М.: Наука, 1968.
2. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Т.М. Численные методы. М.: Наука, 1987.
3. Бицадзе А.В. Основы теории аналитических функций комплексного переменного. М.: Наука, 1972.
4. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1976.
5. Говорухин В.Н., Цибулин В.Г. Введение в Maple. Математический пакет для всех. М.: Мир, 1997.
6. Гультяев А.К. Matlab 5.2 Имитационное моделирование в среде Windows. С.П.: Корона-принт, 1999.
7. Карамышев В.Б. Монотонные схемы и их приложения в газовой динамике. Учебное пособие. Новосибирск, изд-во НГУ, 1994.
8. Ковеня В.М. Методы вычислений (дополнительные главы). Учебное пособие, Новосибирск, изд-во НГУ, 1995.
9. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. М.: Наука, 1971.
10. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функции комплексного переменного. М.: ФМЛ, 1965.
11. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. М: Наука, 1980.
12. Никольский С.М. Курс математического анализа, т.1 и 2. М.: Наука, 1973.
13. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1982.
14. Самарский А.А. Теория разностных схем .М.: Наука, 1977.
15. Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений. М: Наука, 1978.
16. Фаддеев О.К., Фаддеева В.Н. Вычислительные методы линейной алгебры. М.: Физматгиз, 1963.
17. Фигурнов В.Э. IBM PC для всех. М.: Мир, 1997.
18. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления, т.1,2,3. М.-Л.: ФМЛ, 1969.
19. Флетчер К. Вычислительные методы в динамике жидкостей. М.: Мир, 1991, т. 1.
20. Холл Дж., Уатт Дж. Современные численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1979.
21. Шокин Ю.И., Яненко Н.Н. Метод дифференциального приближения. Применение к газовой динамике. Новосибирск, Наука, 1985.

Программа утверждена на заседании Ученого совета Института (протокол № 4 от 11.05.2007)